Milnor'un Egzotik Küreleri – (1-5 Temmuz, 2024)
Fakılarası Matematik Köyü

Note Title 30.03.2024

Plan

1. Gün:
- Topolojinin temel kavramları
- Türevlenebilir manifoldlar ve alt manifoldlar
- Teğet ve koteğet demetleri

2. Gün:
- Daldırma, batırma ve gömme fonksiyonları
- Vektör demetleri
- Diferansiyel formlar
- Stokes' Teoremi

3. Gün:
- De Rham Kohomolojisi
- Poincaré Yardımcı Teoremi
- Mayer-Vietoris Dizisi
- Tıkız destekli (De Rham) kohomoloji
- Poincaré Dualite Teoremi
- Hesaplamalar
- Düzgün Fonksiyonların Derecesi
- Euler Karakteristiği
- Yaprak Kesişim

4. Gün:
- Alt manifoldun Poincaré Duali
- Hesaplamalar
- Euler Sınıfı
- Poincaré-Hopf ve Lefschetz Sabit Nokta Teoremi
- Vektör alanlarının sıfırları
- Chern Sınıfları
- Chern Sınıflarının Özellikleri
- Yanyana Gelme Eşitliği

5. Gün:
- Pontryagin Sınıfları ve klasik uygulamaları
- Milnor'un Egzotik Küreleri: λ-değişmezi
- S^4 üzerindeki $\mathbb{R}^4=\mathbb{H}$-demetlerinin karakteristik sınıfları
- Egzotik kürelerin Kuruluşu

1) Topolojik Uzaylar:

X bir küme olmak üzere bu kümenin kuvvet kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ alt kümesine X üzerinde bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de topolojik uzay denir:

i) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$'dır;

ii) Her $\alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha \in \tau$ olacak şekilde bir

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi varsa $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$'dır, ve

iii) $U_i \in \tau$, $i=1,\dots,n$, $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ise $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$ sağlanır.

Ayrıca, τ kümesinin elemanlarını topolojik uzayın açık kümeleri, açık kümelerin tümleyenlerine de topolojik uzayın kapalı kümeleri denir.

τ_1 ve τ_2 X kümesi üzerinde iki topoloji olmak üzere $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_2 topolojisine (τ_1'e göre) daha kuvvetli veya daha ince topoloji; τ_1'ye ise daha zayıf ya da daha kaba topoloji denir.

(X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzayları arasındaki bir

$f: X \to Y$ fonksiyonu için $\forall U \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna süreklidir denir. Bu fonksiyonun tersi varsa ve $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonu da sürekli ise f'ye bir homeomorfizma denir.

Bu durumda (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) uzaylarına ise homeomorfik uzaylar denir.

(X, τ) topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. $p \in U \in \tau$ ise U kümesine p noktasının bir (açık) komşuluğu denir.

(X, τ) topolojik bir uzay ve $A \subseteq X$ bir alt küme ise

$\tau_A = \{ U \cap A \mid U \in \tau \}$ ailesi A kümesi üzerinde bir

topoloji belirler. Bu topolojiye (X, τ) uzayından miras kalan topoloji denir.

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ topolojisinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir açık kümeler ailesi olsun.

i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ii) Her $V \in \tau$ ve $x \in V$ için $x \in U \subseteq V$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır.

Bu durumda, $V \in \tau$ açık kümesinin $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının bir birleşimi olacağı kolayca görülür. Bu koşulu sağlayan $\mathcal{B}$ ailesine ise τ topolojisinin bir tabanıdır denir.

<u>Örnekler.</u> 1) Analitik derslerinden $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid topolojisinin bir tabanının, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r \}$$

açık yuvarlar olduğunu biliyoruz.

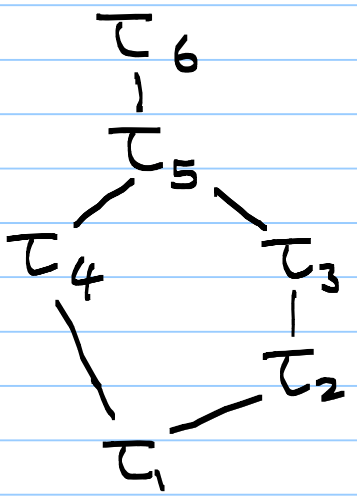
2) Sonlu bir küme üzerindeki bir topolojiyi açık kümeleri listeleyerek sunabiliriz:

$X = \{a, b, c\}$ a) $\tau_1 = \{ \emptyset, \{a, b, c\} \} = \{ \emptyset, X \}$ en kaba topoloji

b) $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, c) $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$,

d) $\tau_4 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, e) $\tau_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

f) $\tau_6 = \mathcal{P}(X)$ bu topolojilerden bazılarıdır.



$\uparrow$ daha kuvvetli / ince

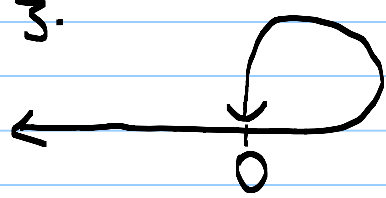
$\downarrow$ daha zayıf / kaba

3) X kümesi sonsuz ise genelde topolojiyi kolay şekilde tarif edilebilen bir tabanı yardımıyla tanımları (Örnek 1'de olduğu gibi).

$X = \mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisinden daha zayıf bir topoloji örneği için aşağıdaki tabanı düşünelim:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b<0 \text{ veya } 0<a<b\}$$
$$\cup \{(a,b) \cup (c,\infty) \mid a<0<b<c\}.$$

Bu topoloji gerçel ekseni büker:

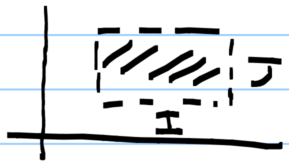


Hatırlatma. Alt taban: Verilen bir $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin elemanlarının sonlu arakesitlerinin rastgele birleşimleri bir topoloji oluşturur ve bu topolojinin bir alt tabanı ismini alır.

Örnek: (Çarpım Topolojisi) (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) iki uzay ise $X\times Y$ çarpım kümesi üzerinde alt tabanı

$\{U\times V \mid U\in\tau_X,\ V\in\tau_Y\}$ olan topolojiye çarpım topolojisi denir.

Dolayısıyla, $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üzerindeki standard topolojinin bir tabanı aralıkların çarpımı olan, $I\times J$ açık dikdörtgen bölgelerdir:



Örnek (Bölüm Topolojisi)

X bir küme ve $\sim$ bu küme üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $P: X\to X/\sim$, $x\mapsto [x]$, $x\in X$ elemanını bu elemanın denklik sınıfına götüren fonksiyon olsun. Eğer τ, X üzerinde bir topoloji ise $X/\sim$ üzerine bir topoloji koyabiliriz: $U\subseteq X/\sim$ açıktır ancak ve ancak $P^{-1}(U)\subseteq X$ açıksa.

Bu topolojiye $X/\sim$ üzerindeki bölüm topolojisi denir.

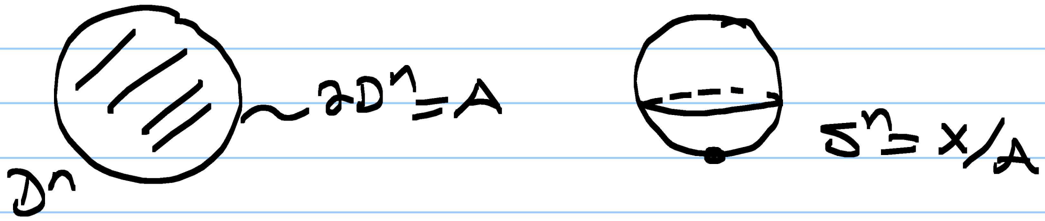
Önerme: $P: X\to X/\sim$ bölüm topolojisi olsun ve şu şekil verilsin:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P"'] & Z \\ Y=X/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad f=g\circ P.$$

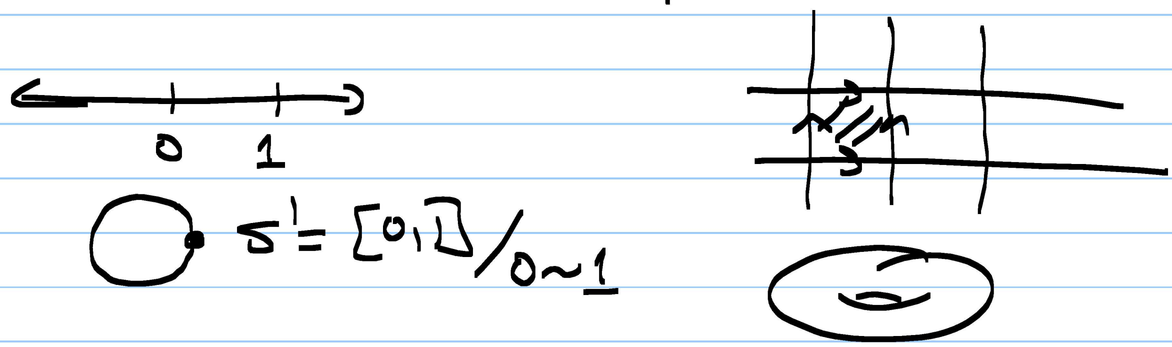
Bu durumda f süreklidir ancak ve ancak g süreklidir.

2) İki bölüm topolojisi örneği:

a) $X = D^n$, $A = \partial D^n = S^{n-1}$; $X/A \simeq S^n$



b) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ ve $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq S^1 \times S^1$.



Örnek: $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \Big/ \underset{\lambda \in \mathbb{R}^*}{(x,y,z) \sim \lambda(x,y,z)} = S^2 \Big/ (x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$

bölüm uzayının (gerçel projektif düzlem) $\mathbb{R}^5$ (ve $\mathbb{R}^4$) için bir gömülmesini veriniz.

Tanım: Bir topolojik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa bu uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

Örnek: $\mathcal{B} = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$ n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı için sayılabilir bir tabandır ve dolayısıyla bu uzay ikinci sayılabilirdir.

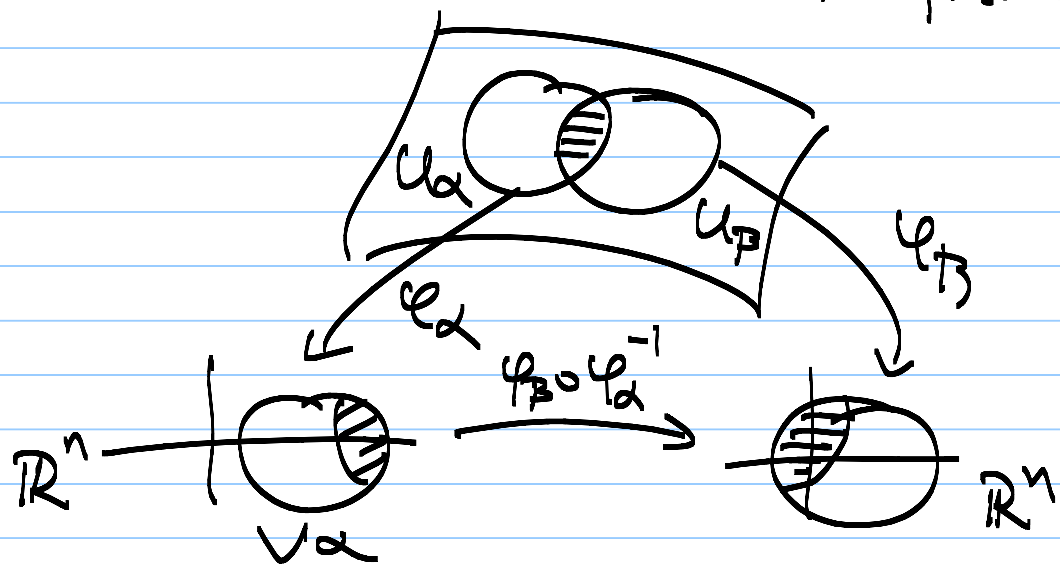
Tanım: X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa X uzayına Hausdorff uzay denir.

Türevlenebilir Manifoldlar ve Altmanifoldlar

X Hausdorff ve ikinci sayılabilir bir uzay olsun. Eğer X uzayının her noktası için bu noktayı içine alan ve $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bir açık altkümesine homeomorfik olan $x \in U \subseteq X$ komşuluğu varsa, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ ailesine bir topolojik atlas ve $(X, \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\})$ ikilisine de n-boyutlu topolojik manifold denir.

Bu durumda, eğer herhangi iki U_α ve U_β kesişiyorsa ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$)

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\Big|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$ bir homeomorfizmadır.



Eğer $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ geçişme fonksiyonlarının hepsi aynı zaman sonsuz kere türevlenebilir fonksiyonlar ise bu topolojik manifolda türevlenebilir n-boyutlu manifold denir.

<u>Hatırlatma:</u> $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ise $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}$

olur. O halde, her bir $\varphi_{\alpha\beta}$ fonksiyonu birer difeomorfizmadır. Dolayısıyla, $D\varphi_{\alpha\beta}(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü bir izomorfizmadır.

<u>Örnekler:</u> 1) $\mathbb{R}^n$'nin her açık alt kümesi bir n-boyutlu türevlenebilir manifolddur.

2) 0-boyutlu bir manifold sonlu veya sayılabilir sonsuz nokta içeren ayrık topolojik uzaydır.

3) $$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

birim küresi n-boyutlu bir türevlenebilir manifolddur. $N = (0, \dots, 0, 1)$ ve $S = (0, \dots, 0, -1)$ olmak üzere

$U_N = S^n \setminus \{N\}$ ve $U_S = S^n \setminus \{S\}$ kümeleri

S^n'i örter: $S^n = U_N \cup U_S$. Ayrıca

$$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

$$\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

fonksiyonları, tersleri

$$\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_N, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right)$$

ve

$$\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_S, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}\right)$$

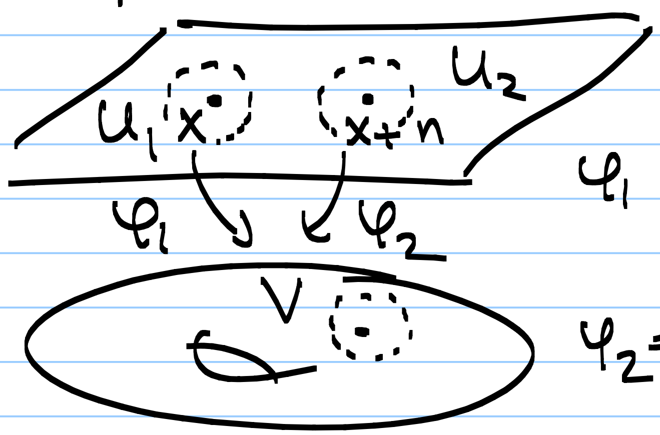
verilen homeomorfizmalardır. Ayrıca,

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_1}{\|y\|^2}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|^2}\right)$$

difeomorfizmasıdır.

4) $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ bölüm uzayını düşünelim.

P fonksiyonun yerel bir homeomorfizma olduğu için $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ bölüm uzayı n-boyutlu topolojik bir manifolddur.



$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
$k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$

$\varphi_1 = P|_{U_1}: U_1 \to V$

$\varphi_2 = P|_{U_2}: U_2 \to V$

$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: U_1 \to U_2,\quad x\mapsto x+k,$ olur.

Bu fonksiyonlar C^∞- olduğu için $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ n-boyutlu türevlenebilir manifolddur.

$$T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n=\left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)^n=(S^1)^n=\underbrace{S^1\times\dots\times S^1}_{n\text{-tane}}$$

$\underset{-1\quad 0\quad 1\quad 2}{\longleftrightarrow}\ \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq[0,1]/0\sim1\simeq S^1.$

$f:[0,1]\to S^1,\quad f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
fonksiyonu için $f(0)=f(1)$ olduğu için

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^1 \\
{[0,1]/0\sim1} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

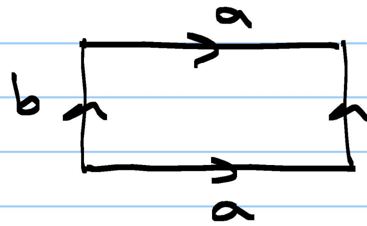
$\tilde{f}:[0,1]/\sim \;\to S^1$ sürekli fonksiyonunu elde ederiz. $\tilde{f}$ fonksiyonunun 1-1 ve örten olduğu kolayca görülür. $[0,1]/\sim$ tıkız olduğu

3-) İçin $\tilde{f}: [0,1]/\sim \; \to S^1$ bir homeomorfizma olur.

Özel olarak, $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ torustur.

Ayrıca, $\tilde{f} \times \tilde{f} : [0,1]/_{\sim} \times [0,1]/_{\sim} \longrightarrow S^1 \times S^1$

bir homeomorfizmadır. $\shortparallel$ $[0,1] \times [0,1] / \sim \times \sim$



Manifoldlar yerel olarak $\mathbb{R}^n$'nin bir açık kümesi gibi oldukları için $\mathbb{R}^n$ içinde yapabildiğimiz tüm analiz yöntemlerini manifoldlara taşıyabiliriz: Türev alma, integral alma, uzunluk, alan, hacim hesaplama gibi.

Tanım: Türevlenebilir manifoldların bir $f: M \to N$ fonksiyonu verilen her $\varphi: U_1 \to V_1$, $U_1 \subseteq M$ ve $\phi: U_2 \to V_2$, $U_2 \subseteq N$ koordinat sistemleri için

$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \phi(f^{-1}(U_2) \cap U_1) \longrightarrow V_2$ türevlenebilir

ise bu fonksiyona türevlenebilir fonksiyon denir.

Hatırlatma: Türevlenebilir fonksiyonlar, eğer anlamlı ise, toplamları, çarpımları ve bileşkeleri de türevlenebilirdir.

Teğet Vektörler, Teğet Demeti ve Kotejet Demeti

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $p \in U$ ve $x_1, \ldots, x_n$ U üzerinde tanımlı bir koordinat sistemi olsun.

$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ yönlü türev operatörünü düşünelim:

Verilen her $f: U \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonu için

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Benzer şekilde her $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$$v_p(f) = \nabla_{v_p}(f) = v \cdot \nabla f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}$$

yönlü türevi ile tanımlanan v_p nesnesine $p \in U$ noktasında bir türev vektörü denir. p noktasındaki tüm türev vektörlerinin kümesi doğal olarak bir vektör uzayı oluştururlar. Bu uzaya U açık kümesinin p noktasındaki teğet uzayı denir ve T_pU ile gösterilir. Bu uzay n-boyutludur ve

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \;\Big|\; i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$ tabanlıdır.

$f: U \to V$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $p \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $q \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, $q = f(p)$, ise

$$Df_*(p): T_pU \to T_qV, \quad Df_*(v)(g) = \nabla_{v_q}(g \circ f), \quad g: V \to \mathbb{R},$$

ifadesi ile tanımlanan doğrusal dönüşüme f fonksiyonun p noktasındaki türevi denir.

Eğer $x_1, \ldots, x_m$ U ve $y_1, \ldots, y_n$ V üzerinde koordinat sistemleri ve $f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ ise

$Df_*(p)$ lineer dönüşümün $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial y_1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_q\}$ tabanlarındaki matris gösterimi $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p)\right)_{m\times n}$ Jakobian matrisi ile verilir.

M türevlenebilir bir manifold olmak üzere teğet düzlemlerinin birleşimi de boyutu $2\dim M$ olan bir manifolddur ve T_*M ile gösterilir: $T_*M = \bigcup_{p\in M} T_pM$. $P: T_*M \to M$, $(p,v) \mapsto p$ izdüşüm fonksiyonu.

Örnekler: 1) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $T_*U \cong U\times\mathbb{R}^n$ dir:

$$\begin{aligned} T_*U &\longleftrightarrow U\times\mathbb{R}^n \\ v_p &\longleftrightarrow (p,v) \end{aligned}$$

2) Yukarıda S^n örneğini $n=1$ için tekrar yazalım.

$S^1 = U_N \cup U_S \simeq \mathbb{R} \dot\cup \mathbb{R} / x \sim \frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

O halde, $T_*S^1 = T_*U_N \cup T_*U_S$

$$\simeq T_*\mathbb{R} \,\dot\cup\, T_*\mathbb{R} / (x, v_x) \sim \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}v_x\right), x\neq 0$$

Birinci örnekte olduğu gibi S^1 manifoldu için de

$$\begin{tikzcd} T_*S^1 \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & S^1\times\mathbb{R} \arrow[dl, "Pr_1"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

dur.

$\varphi: S^1\times\mathbb{R} \to T_*S^1$ hiç sıfırı olmayan bir kesit yardımıyla tanımlanır:

$s_1 : U_N \to T_* U_N \subseteq T_* S^1$, $s_1(x) = \frac{1+x^2}{2}$ ve

$s_2 : U_S \to T_* U_S \subseteq T_* S^1$, $s_2(x) = -\frac{1+x^2}{2}$, öyle ki

$$s_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1+(1/x)^2}{2} = -\frac{1}{x^2}\,\frac{1+x^2}{2} = -\frac{1}{x^2}s_1(x).$$

Başka bir deyişle bu iki kısmi tanımlı kesit tam bir $s : S^1 \to T_* S^1$ kesitini tanımlar:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in U_N \\ s_2(x), & x \in U_S. \end{cases}$$

Bu durumda $\varphi : S^1 \times \mathbb{R} \to T_* S^1$ ise şöyle tanımlanır

$$\varphi(x,t) = (x, t\,s(x)).$$

$s(x) \neq 0$ $\forall x \in S^1$ olduğu için φ bir izomorfizmadır.

Uyarı: Yukarıdaki örneği $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ alarak tekrarlarsak şunu elde ederiz:

$$S^2 = U_N \cup U_S \simeq \mathbb{C} \,\dot\cup\, \mathbb{C} / z \sim \tfrac{1}{z}$$

(Riemann Küresi), ve

$$T_* S^2 \cong T_*\mathbb{C} \,\dot\cup\, T_*\mathbb{C} / (z,v) \sim \left(\tfrac{1}{z}, -\tfrac{1}{z^2}v\right),\ z \neq 0.$$

Fakat bu sefer $s_1(z) = \frac{1+z^2}{2}$ ve $s_2(z) = -\frac{1+z^2}{2}$ yerel kesitlerinin oluşturduğu $s : S^2 \to T_* S^2$ kesitinin $\pm i$ olmak üzere iki sıfırı

4) vardır ve dolayısıyla $\varphi : S^2 \times \mathbb{C} \to T_* S^2$ teğet demet fonksiyonu bir izomorfizma vermez!

İleride bu farklılığın nedeninin S^1 çemberinin Euler sayısı sıfırken, S^2 küresinin Euler sayısının 2 olduğunu göreceğiz.

<u>Koteğet Demeti</u>:

V bir $\mathbb{R}$-vektör uzayı olsun, $\dim V = n$.

Bu durumda $V^* \doteq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ yine n-boyutlu bir $\mathbb{R}$-vektör uzayıdır.

V ile V^* izomorfik olsalar da aralarında doğal bir izomorfizma yoktur. Ancak, V'nin bir $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tabanı verilirse,

$\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, $e_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, olarak tanımlanan taban yardımıyla

$$V \longrightarrow V^*, \quad v = \sum c_i e_i \longmapsto v^* = \sum c_i e_i^*, \text{ ile}$$

tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır.

<u>Örnek</u>: $V = T_p M = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\rangle$ ise

$V^* = T_p^* M = \langle dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p \rangle$ olur, öyle ki

$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q \right) = \delta_{ij}$ dir.

Teğet ve Koteğet demetin İfadeleri:

Diyelim ki $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_\alpha$ M manifoldunun bir atlası olsun. Bu durumda,

$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha \simeq \dot{\bigcup_\alpha} V_\alpha \Big/ \underset{x \in U_\alpha \cap U_\beta}{x \sim \varphi_{\alpha\beta}(x)} \quad , \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

olduğu için teğet demet

$$T_* M = \bigcup_\alpha T_* U_\alpha \simeq \dot{\bigcup_\alpha} T_* V_\alpha \Big/ (x, v) \sim (\varphi_{\alpha\beta}(x), D\varphi_{\alpha\beta}(x)(v))$$

ve koteğet demet ise

$$T^* = \bigcup_\alpha T^* U_\alpha \simeq \dot{\bigcup_\alpha} T^* V_\alpha \Big/ (x, \omega) \sim \left(\varphi_{\alpha\beta}(x), (D\varphi_{\alpha\beta}(x))^*(\omega)\right)$$

Örnekler: 1) $M = S^1$ için $T^* S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ olduğu için $T^* S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ olur!

2) $M = S^2$: Riemann Küresi olsun.

$$S^2 \cong \mathbb{C} \dot\cup \mathbb{C} \big/ z \sim 1/z ,\ z \neq 0$$

$$T_* S^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \dot\cup \mathbb{C} \times \mathbb{C} \Big/ \underset{z \neq 0}{(z, v) \sim (1/z, -1/z^2 \, v)}$$

$$T^* S^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \dot\cup \mathbb{C} \times \mathbb{C} \Big/ (z, \omega) \sim \left(1/z, \left(-\frac{1}{z^2}\right)^* \omega\right)$$

$$\text{IS}$$

$$\left(1/z, \frac{-1}{|z|^2} z^2 \omega\right)$$

Sonra açıklanacak! $\longrightarrow$ SS

$$\left(1/z, z^2 \omega\right)$$

Ödev: $T_x S^1 \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\dot\cup\, \mathbb{R}\times\mathbb{R} / (x,v)\sim(1/x, -\frac{v}{x^2}),\ x\neq 0$

ve $T_x S^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C} \,\dot\cup\, \mathbb{C}\times\mathbb{C} / (z,w)\sim(1/z, -\frac{w}{z^2}),\ z\neq 0$

olduğu gibi $\mathbb{C}$ yerine kuaterniyonları, $\mathbb{H}$, kullanırsak

$$S^4 \cong \mathbb{H} \,\dot\cup\, \mathbb{H} / p \sim 1/p,\ p\neq 0$$

$p = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2}$, $\|p\|^2 = a_0^2 + \dots + a_3^2$.

Teğet demetinin ifadesini bulmak için

$\varphi : \mathbb{H}\setminus\{0\} \to \mathbb{H}\setminus\{0\}$, $\varphi(p) = 1/p$ fonksiyonun

türevini hesaplamalıyız: $\varphi'(p)(v) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(p+hv)-\varphi(p)}{h}$?

Alt Manifoldlar

Tanım: $m \geq n \geq 0$ tamsayılar olmak üzere

$i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$ ve

$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_n)$, fonksiyonlarına

sırasıyla, doğal daldırma ve doğal batırma fonksiyonları adı verilir.

Tanım: $f : M \to N$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir bir fonksiyonu olsun (başka bir deyişle her $\varphi : U_1 \subseteq M \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ ve $\phi : U_2 \subseteq N \to V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ koordinat sistemi için $\phi\circ\varphi^{-1} : \varphi(\phi^{-1}(V_2)\cap U_1) \to V_2$ sonsuz türevlenebilirdir).

Herhangi bir $p\in M$ noktası için $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$

türev dönüşümü birebir ise bu fonksiyona p noktasında bir daldırma fonksiyonu, eğer örten ise bir batırma fonksiyonu denir.

<u>Hatırlatma:</u> Doğal daldırma ve batırma fonksiyonları birer daldırma ve batırma fonksiyonudur.

Aşağıdaki sonuç bir daldırma (veya batırma) fonksiyonunun uygun koordinat sistemlerinde bir doğal daldırma (veya batırma) fonksiyonu olduğunu gösteriyor.

<u>Yardımcı Teorem:</u> Türevlenebilir manifoldların türevlenebilir bir $f: M \to N$ fonksiyonu bir $p \in M$ noktasında daldırma (batırma) fonksiyonu olsun. O halde, uygun koordinat değişimi altında f fonksiyonu p noktası civarında doğal daldırma (batırma) fonksiyonu olur.

<u>Kanıt:</u> Sadece "daldırma" ile ilgili ifadeyi kanıtlayacağız. Ayrıca, gösterimi basit tutmak adına $M = \mathbb{R}^2$ ve $N = \mathbb{R}^3$ alacağız.

O halde, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2))$ şeklindedir. Bu fonksiyonun, her iki taraftan da öteleme fonksiyonları ile bileşkesini alarak $p = 0$ ve $f(0) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Fonksiyon $p = 0$ noktasında daldırma fonksiyonu olduğu için $df(0) = \left(\partial f_i / \partial x_j (0)\right)_{3\times 2}$ türev matrisinin rankı 2 dir.

$$df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}(0).$$

Bu durumda

$$A \cdot df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ olacak

şekilde bir 3×3 A matrisi vardır.

5-) Bu matrisin tanımladığı doğrusal dönüşümü

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(y) = Ay$, $y \in \mathbb{R}^3$, ile gösterelim.

Kullanmış olduğumuz ötelemeleri de hesaba katarsak şunu yazabiliriz:

Öyle $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ve $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ difeomorfizmaları vardır ki

$g = \psi \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, fonksiyonu için $g(0) = 0$

ve $dg(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur.

$g(x_1, x_2) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), g_3(x_1, x_2))$ olsun.

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x_1, x_2, x_3) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), g_3(x_1, x_2) + x_3)$

fonksiyonunu düşünelim. $dh(0) = I_3$ olduğu için h fonksiyonu yerel bir difeomorfizmadır.

O halde, $0 \in \mathbb{R}^3$ noktasının civarında

$(h^{-1} \circ h)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ olur.

$h^{-1}((\psi \circ f \circ \varphi)(x_1, x_2) + (0, 0, x_3)) = (x_1, x_2, x_3)$.

$x_3 = 0$ alırsak, $(h^{-1} \psi \circ f \circ \varphi)(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$ elde ederiz. Yeni koordinatları φ^{-1} ve $h^{-1}\psi$ alırsak kanıt tamamlanır.

Tanım: $f: L \to M$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer, f 1-1 bir daldırma fonksiyonu ise $f: L \to M$ fonksiyonuna (daldırılmış) alt manifold denir.

Eğer, $f: L \to f(L) \subseteq M$ bir homeomorfizma ise f'ye gömülmüş manifold denir.

Tanım: $f: L \to M$ türevlenebilir fonksiyon ve $q \in M$ olsun. Eğer, her $x \in f^{-1}(q)$ için $df_{(x)}: T_x L \to T_{f(x)} M$ türev dönüşümü örtense $q \in M$ değerine düzgün değer denir. Aksi halde, $q \in M$ noktasına f fonksiyonun bir kritik değeri denir.

Sonuç: Eğer $q \in M$, $f: L \to M$ için bir düzgün değer ise $K = f^{-1}(q) \subseteq L$ boyutu $\dim L - \dim M$ olan bir gömülmüş alt manifolddur. Ayrıca, her $x \in L$ için $T_x K \simeq \ker(df_x : T_x L \to T_{f(x)} M)$ olur.

Kanıt: Bir önceki sonuçtan dolayı uygun koordinatlar altında f fonksiyonu genel olarak

$$f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_e) = (x_1, \ldots, x_m) \text{ ifadesiyle}$$

verilir. O halde, $K = f^{-1}(q) = \{(q, x_{m+1}, \ldots, x_e) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ ile verilir.

Dolayısıyla, $x_{m+1}, \ldots, x_e$ K için koordinat sistemi verirler. Bu gözlem kanıtı tamamlar. ■

Örnek: $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\} \subseteq M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ içinde bir alt kümedir.

$S(n)$ ile $n \times n$ simetrik matrislerin kümesini gösterelim. $S(n)$'nin $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ Öklid uzayına difeomorfik olduğu kolayca görülür.

Şimdi $\phi: \mathbb{R}^{n^2} = M(n) \to S(n) = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$,

$\phi(A) = A^T A$ fonksiyonunu düşünelim.

İddia: $d\phi_I(A) = A + A^T$

Kanıt: $$d\Phi_I(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(I+tA) - \Phi(I)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(I+tA)^T(I+tA) - I}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{I + t^2 A^T A + tA + tA^T - I}{t}$$
$$= A^T + A. \quad \blacksquare$$

Benzer şekilde $d\Phi_Q(A) = Q^T A + A^T Q$ olur. Bu türev fonksiyonu örtendir ve dolayısıyla $I \in S(n)$ Φ fonksiyonun düzgün değeridir. Dolayısıyla,

$O(n) = \Phi^{-1}(I)$ boyutu $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ olan bir manifolddur.

$$T_I O(n) = \ker d\Phi_I = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$$
$= n\times n$-ters simetrik matrisler uzayı.

Örnek: $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$.

$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum x_i^2$ olarak tanımlansın.

$1 \in \mathbb{R}$ bu fonksiyonun düzgün değeridir. Dolayısıyla, S^n n-boyutlu manifolddur ve

$$T_p S^n = \ker(d\varphi_p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}), \quad d\varphi_p(v) = \langle p, v\rangle.$$
$$= \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\}.$$

Vektör Demetleri: $P: E^{n+k} \to M^n$ türevlenebilir fonksiyon olsun, öyle ki her $x \in M^n$ için $P^{-1}(x)$ k-boyutlu $\mathbb{R}$-vektör uzayı olsun. Ayrıca M^n'nin bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü olsun öyle ki, her α için

$$\varphi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi_\alpha(v) = (P(v), \phi_\alpha(v))$$

$$\varphi_\alpha \big|_{P^{-1}(x)} : P^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n, \ \forall x \in M,$$ lineer izomorfizma olsun.

Bu durumda $P: E \to M^n$, M üzerinde türevlenebilir $\mathbb{R}^k$ vektör demetidir.

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow[\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha]{} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, v) \longmapsto (x, \underbrace{(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}_{\phi_{\beta\alpha}}(x)(v))$$

$\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonlarına vektör demetinin yapı fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar açık şekilde

i) $\phi_{\alpha\alpha} = id$ ii) $\phi_{\gamma\beta} \circ \phi_{\beta\alpha} = \phi_{\gamma\alpha}$, $\forall \alpha, \beta, \gamma$,

koşullarını sağlar.

Benzer şekilde bu şartları sağlayan her yapı fonksiyonlar ailesi bir vektör demeti belirler.

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$$

Uyarı: Yapı fonksiyonlarının yardımıyla demetler üzerinde işlemler tanımlanabilir: Toplam, tensör çarpım, dış çarpım, dual alma, karmaşık yapı, determinant doğru demeti. (Bölüm 3.3 (O.))

6) Diferansiyel Formlar, Dış Türev, Stokes Teoremi.

V sonlu boyutlu vektör uzayı $/\mathbb{R}$.

V^* dual uzay. $V=\langle \mathcal{B}\rangle$, $\mathcal{B}=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$

$V^* = \langle \mathcal{B}^*\rangle = \langle e_1^*,\dots,e_n^*\rangle$, $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$, $\forall i,j$.

$V\otimes V$ = Tensör çarpım uzayı

$$= \mathbb{R}^{V\times V} \Big/ \begin{array}{l} (v_1+v_2,v_3)-(v_1,v_3)-(v_2,v_3), \\ (v_1,v_2+v_3)-(v_1,v_2)-(v_1,v_3), \\ \lambda(v_1,v_2)-(\lambda v_1,v_2) \\ \lambda(v_1,v_2)-(v_1,\lambda v_2) \quad \forall\lambda,\ \forall v_1,v_2,v_3\in V. \end{array}$$

(v_1,v_2) elemanının denklik sınıfı $v_1\otimes v_2$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

i) $v_1\otimes v_2 + v_1\otimes v_3 = v_1\otimes(v_2+v_3)$

$v_1\otimes v_3 + v_2\otimes v_3 = (v_1+v_2)\otimes v_3$

ii) $\lambda v_1\otimes v_2 = \lambda(v_1\otimes v_2) = v_1\otimes\lambda v_2$.

Benzer şekilde $\underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{n\text{-tane}} = V^{\otimes n}$ tanımlanır.

Vedge Çarpımı:

Değişmeli Tensörler: $v_1\wedge v_2 \doteq v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$

$$v_1\wedge v_2\wedge v_3 = v_1\otimes v_2\otimes v_3 - v_2\otimes v_1\otimes v_3 + v_2\otimes v_3\otimes v_1 - v_3\otimes v_2\otimes v_1 + v_3\otimes v_1\otimes v_2 - v_1\otimes v_3\otimes v_2$$

$f_1, \dots, f_k \in V^*$, $v_1, \dots, v_k \in V$ ise

$(f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) \doteq f_1(v_1) \dots f_k(v_k)$ ile

tanımlanır.

O halde, $(f_1 \wedge f_2)(v_1, v_2) = f_1(v_1) f_2(v_2) - f_1(v_2) f_1(v_1)$

$= \det(f_i(v_j))$ olur.

Genel olarak, $(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j))$ olur.

__Diferansiyel Formlar:__ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme olsun.

$x_1, \dots, x_n$, U üzerinde koordinat sistemi ve

$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $dx_i|_p$ teğet ve koteğet vektörler ise

$\omega = dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p$ veya kısaca $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

ifadesine U üzerinde türevlenebilir bir k-form denir.

Genel olarak bir k-form $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

şeklindedir.

Tüm k-formların oluşturduğu vektör uzayı

$\Omega^k(U)$ ile gösterilir.

__Dış Türev:__ $\omega = \sum_{|I| = k} f_I(x)\, dx_I$

$I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ multiindex, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

olmak üzere, ω formunun dış türevi

$$d\omega = \sum_{|I|=k} df_I(x) \wedge dx_I \ , \ df_I(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$.

Gözlem: $(d \circ d)(\omega) = 0$.

Diferansiyel Formların İntegrali:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\omega = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

U üzerinde tıkız destekli bir form olsun.

Bu durumda, ω'nın U üzerindeki integrali

$$\int_U \omega \doteq \int_U f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$ Riemann integrali olarak tanımlanır.

Uyarı: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde seçilen (veya verilen) $x_1, \ldots, x_n$ koordinat fonksiyonları tarafından yönlendirilmiş olarak kabul edilir.

Başka bir deyişle, her T_pU teğet uzayının

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$$ tabanı ile yönlendirildiğini

kabul ediyoruz.

Örnek: 1) $U = \{x_1^+, x_2^-, x_3^+, x_4^+\}$ 0-boyutlu manifold üzerinde bir $f : U \to \mathbb{R}$ 0-formunun integrali

$$\int_U f = f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \text{ olur}$$

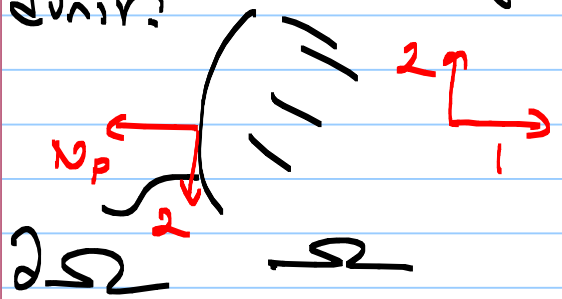
2) $U = [a,b]$, $\omega = f(x)\,dx$ ise

$$\int_U \omega = \int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \text{ olur}$$

Stokes' Theorem: M tıkız yönlendirilmiş n-boyutlu bir manifold ve $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ ise

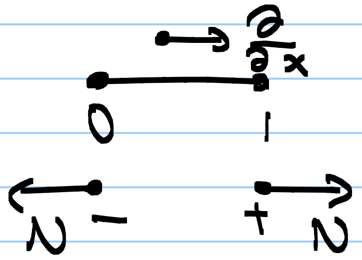
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \text{ olur}$$

Burada, M'nin yönlendirmesi sınırını da, ∂M, yönlendirir.



$\langle 1,2 \rangle$ ile $\langle N_p, 2 \rangle$ aynı yönlüdür.

Örnek: 1) $I = [0,1]$ $x : I \to \mathbb{R}$ koordinat

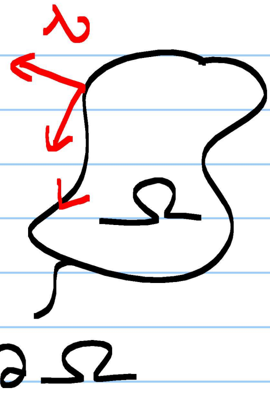


O halde, $\partial I = \{0^-, 1^+\}$ ile yönlendirilmiştir. Eğer $f(x)dx \in \Omega^1(I)$ ise

$$\int_I f(x)\,dx = F(0^-) + F(1^+) = F(1) - F(0),$$

$$dF = f(x)\,dx.$$

7-)

2) 

$\omega \in \Omega^1(U)$,

$$\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

$$d\omega = f_y\, dy\wedge dx + g_x\, dx\wedge dy$$
$$= (g_x - f_y)\, dx\wedge dy.$$

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega \Rightarrow \int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \iint_{\Omega} (g_x - f_y)\,dx\,dy$$

3) $\mathbb{C}^2$ karmaşık düzleminde karmaşık doğrusal bir koordinat değişimi ele alalım:

$$\begin{cases} w_1 = a z_1 + c z_2 \\ w_2 = b z_1 + d z_2 \end{cases}$$

O halde, $\overline{w_1} = \bar{a}\,\bar{z}_1 + \bar{c}\,\bar{z}_2$, $\overline{w_2} = \bar{b}\,\bar{z}_2 + \bar{d}\,\bar{z}_2$

ve buradan,

$dw_1 = a\,dz_1 + c\,dz_2$, $d\bar{w}_1 = \bar{a}\,d\bar{z}_1 + \bar{c}\,d\bar{z}_2$,
$dw_2 = b\,z_1 + d\,dz_2$, $d\bar{w}_2 = \bar{b}\,d\bar{z}_2 + \bar{d}\,d\bar{z}_2$ olur.

Böylece,

$$dw_1\wedge d\bar{w}_1\wedge dw_2\wedge d\bar{w}_2 = -(dw_1\wedge dw_2)\wedge(d\bar{w}_1\wedge d\bar{w}_2)$$
$$= -(ad-bc)\,dw_1\wedge dw_2 \,\wedge$$
$$(\overline{ad} - \bar{b}\,\bar{c})\,d\bar{w}_1\wedge d\bar{w}_2$$
$$= (ad-bc)^2\, dw_1\wedge d\bar{w}_1\wedge dw_2\wedge d\bar{w}_2$$

Diğer yandan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ve $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ yazarsak

$$du_1 \wedge dv_1 \wedge du_2 \wedge dv_2 = (ad-bc)^2\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$$

elde ederiz.

Dolayısıyla, karmaşık koordinat sistemleri doğal bir yönlendirme taşırlar. Bu nedenle karmaşık manifoldlarında doğal bir yönlendirmeleri vardır.

Kapalı fonksiyon Teoremi'nin karmaşık değişkenler için olan versiyonu ise $\mathbb{C}^n$ içindeki her karmaşık alt manifoldunda doğal bir yönlendirmesi olduğunu söyler:

<u>Örnek</u>: $C \subseteq \mathbb{C}^2$ içinde karmaşık alt manifold olsun. O halde, yerel olarak C alt manifoldu, z_1, z_2 $\mathbb{C}^2$ üzerinde koordinat sistemi olmak üzere $z_1 = 0$ olarak verilir.

$$\omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2) \quad (\text{yada } z_j = x_j + i y_j$$
$$= dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 \text{ olsun} \quad \text{olmak üzere})$$

Dolayısıyla T_pC teğet uzayının yönlendirmesini ($z_1 = 0$) olduğu için $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right\}$ alırsak ω formu T_pC üzerinde pozitiftir.

Dolayısıyla, eğer $\underbrace{C \subseteq \mathbb{C}^2 \text{ tıkız}}$ ise $\int_C \omega > 0$ olur.

Fakat, $\omega = d(x_1 dy_1 + x_2 dy_2)$ formu tamdır ve dolayısıyla,

$$0 < \int_C \omega = \int_C d\nu = \int_{\partial C} \nu = \int_{\emptyset} \nu = 0 \text{ çelişkisini}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle $\mathbb{C}^2$ içinde tıkız karmaşık bir alt manifold yoktur.

Teorem: $\mathbb{C}^n$ için tıkız karmaşık bir alt manifold yoktur.

(Kanıt: Yukarıdaki fikirler kolayca genellenebilir.)

De Rham Kohomoloji: M n-boyutlu türevlenebilir manifold olmak üzere M'nin k.ıncı de Rham Kohomoloji vektör uzayı

$$H^k_{DR}(M) = \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\operatorname{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}$$ bölüm

vektör uzayı olarak tanımlanır.

Örnek: 1) $M = \coprod_\alpha M_\alpha$, M_α yol bağlantılı bileşenler olmak üzere $H^k_{DR}(M) = \prod_\alpha H^k_{DR}(M_\alpha)$ ve yol bağlantılı her M için $H^0_{DR}(M) \simeq \mathbb{R}$ olur.

İkinci ifade için, eğer $\omega = f$, $d\omega = df = f'(x)dx = 0$ $\forall x \in M$ ise, M bağlantılı olduğu için f sabit fonksiyondur. Dolayısıyla, $H^0_{DR}(M) \simeq \mathbb{R}$ olur.

2) $\dim M = n$ ise, $H^k_{DR}(M) = 0$, $k > n$ olur.

3) M n-boyutlu tıkız ve yönlendirilmiş bir manifold olsun. Bu durumda

$$\varphi : H^n_{DR}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \longmapsto \int_M \omega$$ iyi tanımlı

bir homomorfizmadır.

Ayrıca, herhangi bir $p \in M$ noktası etrafında pozitif değerler alan bir $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yardımıyla oluşturulan

$\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ($x_1, \dots, x_n$ M üzerinde yönlendirme ile uyumlu bir koordinat sistemi) n-formu doğal olarak kapalıdır (çünkü M üzerinde sıfırdan farklı $n+1$-form yoktur) ve

8) $\int_M \omega = \int_M f\, dx_1 \ldots dx_n > 0$ olur. O halde,

$$H^n_{DR}(M) \neq 0 \text{ dır.}$$

Aslında bu durum $H^n_{DR}(M) \simeq \mathbb{R}$ bir izomorfizma olur.

4) $M = S^1$ durumunda $H^1_{DR}(S^1) \simeq \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayalım.

$H^0_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}$, $H^k_{DR}(S^1) \simeq 0$, $k \geq 2$, olduğunu biliyoruz.

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d(\tan^{-1}(y/x)) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

formunu düşünelim.

Bu form kapalıdır: $d\omega = 0$. Ayrıca, $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğu için $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrizasyonunu kullanarak

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t\, d(\sin t) - \sin t\, (d\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

elde edilir. $\varphi([\omega]) \neq 0$ ve dolayısıyla, $H^1_{DR}(S^1) \neq 0$ dır. Şimdi $\ker \varphi$'yi hesaplayalım.

$[v] \in H^1_{DR}(S^1)$ olsun, öyle ki $\varphi[v] = 0$ olsun.

$P : \mathbb{R} \to S^1$, $P(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, fonksiyonunu düşünelim. $P(t+1) = P(t)$, $P(t)$ periyodik ve genel olarak bir difeomorfizma fonksiyondur. $p^*\nu = f(\theta)\,d\theta$ olsun. O halde,

$F(\theta) = \int_0^\theta f(t)\,dt$ fonksiyonu $p^*\nu$ için bir ters türevdir:

$$dF = F'(\theta)\,d\theta = f(\theta)\,d\theta = p^*\nu.$$

Ayrıca, $0 = \int_{S^1} \nu = \int_0^{2\pi} p^*\nu = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ olduğu için

$$F(\theta+2\pi) = \int_0^{\theta+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{\theta} f(t)\,dt + \underbrace{\int_\theta^{\theta+2\pi} f(t)\,dt}_{=\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0}$$

$= F(\theta)$ elde edilir.

Başka bir deyişle $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da periyodiktir ve dolayısıyla, çemberden $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon verir: $\tilde{F}: S^1 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \\ S^1 \arrow[ur, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad F = \tilde{F}\circ p$$

Son olarak, $p^*(d\tilde{F}) = d(p^*(\tilde{F})) = d(\tilde{F}\circ p) = dF = p^*(\nu)$ ve p yerel bir difeomorfizma olduğu için $d\tilde{F} = \nu$ olur. O halde, $[\nu] = [d\tilde{F}] = 0$ dır.

Başka bir deyişle $\varphi: H^1_{DR}(S^1) \to \mathbb{R}$ örten homomorfizmasının çekirdeği sıfırdır.

$$\Rightarrow H^1_{DR}(S^1) \simeq \mathbb{R}.$$

∎

Poincaré Yardımcı Teoremi: M bir manifold ve ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Herhangi bir $a \in I$ için $i_a : M \to M \times I$, $p \mapsto (p,a)$ içerme fonksiyonu olmak üzere $i^* : H^k_{DR}(M \times I) \to H^k_{DR}(M)$, $[\omega] \mapsto [i_a^* \omega]$, bir izomorfizmadır ve bu izomorfizma $a \in I$ noktasından bağımsızdır.

Sonuç: $H^k_{DR}(M \times \mathbb{R}^n) \simeq H^k_{DR}(M)$

Örnek: $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ olsun. O zaman $M \to S^1 \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \left(\frac{1}{r}(x,y), r\right)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, bir difeomorfizmadır ve dolayısıyla $H^k_{DR}(M) \simeq H^k_{DR}(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq H^k_{DR}(S^1)$ olur.

Ayrıca, $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \simeq \langle [\omega] \rangle$, $\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ olur. Başka bir deyişle $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ uzayının tek anomalisi olan ortasındaki delik kohomoloji tarafından tespit edilmiştir.

Benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar da doğrudur:

$H^1_{DR}(M) \simeq \langle [\omega] \rangle$, öyle ki

i) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$, $\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

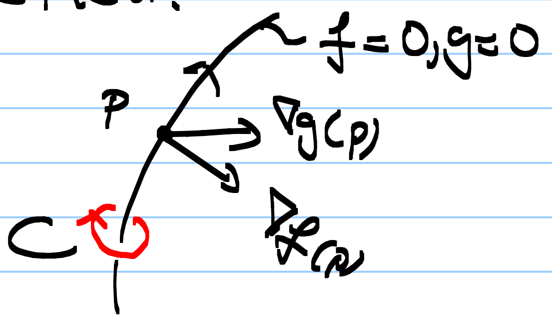
ii) $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axis}\}$, $\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$

iii) $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid z=0,\ x^2+y^2-1=0\}$

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{(x^2+y^2-1)\,dz - z(2x\,dx + 2y\,dy)}{(x^2+y^2-1)^2 + z^2}$$

N) $M = \mathbb{R}^3 \setminus C$, $C = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=0, g(x,y,z)=0\}$,
öyle ki $\{\nabla f(p), \nabla g(p)\}$ ikilisi her $p \in C$ noktasında doğrusal bağımsızdır.

$$\omega_C = \frac{1}{2\pi} \frac{f\,dg - g\,df}{f^2+g^2}$$



Ayrıca, herhangi bir $D \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus C$ kapalı eğrisi için
$\int_D \omega_C$ bir tam sayıdır ve D ve C eğrilerinin geçişme sayısı olarak tanımlanır:

$$\mathrm{ln}\,(C,D) \doteq \int_D \omega_C.$$

<u>Homotopi Değişmezliği:</u> $F : M \times [a,b] \to N$
türevlenebilir bir fonksiyon ise ve $f_t(p) = F(p,t)$, olarak tanımlanırsa

$$f_t : M \to N,\ p \mapsto f_t(p), \quad f_t^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$$

homomorfizması t'den bağımsızdır.

(Bu sonuç Poincaré Yardımcı Teoremi'nin bir sonucudur)

9-) Mayer-Vietoris Tam Dizisi:

M bir manifold ve U, V, $M = U \cup V$ olacak şekilde açık kümeler olsun.

$i_U : U \cap V \to U$, $i_V : U \cap V \to V$, $j_U : U \to M$, $j_V : V \to M$

içerme fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki dizi tamdır:

$$\cdots \to H^k_{DR}(M) \xrightarrow[j_U^* \oplus j_V^*]{} H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \xrightarrow[i_U^* - i_V^*]{} H^k_{DR}(U \cap V) \xrightarrow[\delta]{} H^{k+1}_{DR}(M) \to \cdots$$

Örnekler:

1) $H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,\ k=n \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$

Kanıt: n üzerine tümevarım yapalım.

$n=1$ durumu zaten yapılmıştı. Dolayısıyla, $n \geq 2$ olduğunu kabul edebiliriz.

$U = S^n \setminus \{(0,\ldots,0,-1)\}$ ve $V = S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$ olsun.

O halde, $S^n = U \cup V$ ve $U \cap V = S^n \setminus \{(0,\ldots,0,\pm 1)\}$ olur.

$U \cap V \to S^{n-1} \times (-1,1)$, $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{1}{r}(x_1,\ldots,x_n), x_{n+1}\right)$,

$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}$ bir difeomorfizmadır. Dolayısıyla

$H^k_{DR}(U \cap V) \simeq H^k_{DR}(S^{n-1} \times (-1,1)) \cong H^k_{DR}(S^{n-1})$ elde edilir.

Şimdi, $S^n = U \cup V$ için Mayer-Vietoris tam dizisini yazarsak

$\to H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V) \to H^{k-1}(S^{n-1}) \to H^k(S^n) \to H^k(U)\oplus H^k(V) \to \cdots$

$k=0$ durumunda, S^n bağlantılı olduğu için $H^0_{DR}(S^n)\simeq\mathbb{R}$ olur. O halde, $k\geq 1$ durumuna bakalım.

$k=1$ ise, $U\simeq\mathbb{R}^n\simeq V$ olduğunu da kullanarak

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 \to & H^0(S^n) & \to & H^0(\mathbb{R}^n) & \oplus & H^0(\mathbb{R}^n) & \to & H^0(S^{n-1}) & \to & H^1(S^n) & \to & H^1(\mathbb{R}) & \oplus & H^1(\mathbb{R}^n) \\ & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & & & \wr\wr & & \wr\wr \\ & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow H^1(S^n)\simeq 0$ elde edilir.

Şimdi $k\geq 2$ durumuna bakalım:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H^{k-1}(\mathbb{R}^n) & \oplus & H^{k-1}(\mathbb{R}^n) & \to & H^{k-1}(S^{n-1}) & \to & H^k(S^n) & \to & H^k(\mathbb{R}^n) & \oplus & H^k(\mathbb{R}^n) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & & & & & \wr\wr & & \wr\wr \\ 0 & & 0 & & & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow H^k(S^n)\simeq H^{k-1}(S^{n-1})$ elde ederiz. Dolayısıyla, tümevarım hipotezi kanıtı tamamlar.

<u>Örnek</u>: $H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , k=0,2,\dots,2n \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases}$

Burada $\mathbb{CP}^n$ (veya $\mathbb{RP}^n$) $\mathbb{C}^{n+1}$ içinde orijinden geçen doğruların kümesi olarak tanımlanır:

$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \,/\, (x_0,\dots,x_n)\sim\lambda(x_0,\dots,x_n)\quad \lambda\in\mathbb{R}^*$,

ve

$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \,/\, (x_0,\dots,x_n)\sim\lambda(x_0,\dots,x_n),\ \lambda\in\mathbb{C}^*$.

$(x_0,\dots,x_n)$ noktasının denklik sınıfı $[x_0:\dots:x_n]$ ile gösterilir.

$U_i = \{[x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ alt kümesi olsun.

Bu durumda, $\mathbb{RP}^n = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ olur ve

her bir $U_i \simeq \mathbb{R}^n$, $[x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ bir homeomorfizmadır.

Bu uzayların ikinci sayılabilir ve Hausdorff olduklarının gösterilmesini size bırakıyoruz.

$n=1$ özel durumunda, $\mathbb{RP}^1 = U_0 \cup U_1 \simeq \mathbb{R} \dot{\cup} \mathbb{R} \big/ t \sim \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}^*$

olur, burada $t = \frac{x_1}{x_0}$, $\frac{1}{t} = \frac{x_0}{x_1}$ 'dir.

$U_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $[x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$ ve

$U_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $[x_0 : x_1] \mapsto x_0/x_1$.

O halde, $\mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{R} \dot{\cup} \mathbb{R} / t \sim 1/t$, $t \neq 0$

$\simeq S^1$ ve

$\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \dot{\cup} \mathbb{C} / z \sim 1/z$, $z \neq 0$

$\simeq S^2$, Riemann küresi olur.

$H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) = ?$

$n=1$, $H^k_{DR}(\mathbb{CP}^1) \simeq H^k_{DR}(S^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 2 \\ 0, & k \neq 0, 2. \end{cases}$

Genel durumda $p = [0 : \dots : 0 : 1] \in \mathbb{CP}^n$ olsun.

$U = U_n = \{[z_0 : \; : z_n] \mid z_n \neq 0\}$ ve $V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p\}$ olsun.

p noktasından projection fonksiyonu:

$$V = \mathbb{CP}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H = \mathbb{CP}^{n-1} = \{[z_0 : \; : z_n] \mid z_n = 0\}$$
$$q \longmapsto \ell_{pq} \cap H$$

ℓ_{pq} : pq- doğrusu, H ise $z_n = 0$ hiperdüzlemidir.
Bu ikisi tek bir noktada kesişirler.

$q = [z_0 : \; : z_n]$ ise ℓ_{pq} doğrusu $t \mapsto t[z_0 : \; : z_n] + (1-t)[0 : \; : 1]$
ile parametrize edilir. $\ell_{pq} \cap H$ kesişim noktası
ise

$$t z_n + (1-t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1-z_n} \text{ olmak üzere}$$

$t[z_0 : \; : z_{n-1} : 0] \in H$ noktasıdır.

Bu izdüşüm fonksiyonu sayesinde V'nin $H \cong \mathbb{CP}^{n-1}$'e homotopi denk olduğunu görürüz. Ayrıca, $U \simeq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ve $U \cap V \simeq \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R} \times S^{2n-1}$ olur.

O halde, Meyer-Vietoris tam dizisinden

$$\dots \to H^{k-1}_{DR}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) \to H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \to H^k_{DR}(S^{2n-1}) \to \dots$$

yazarız. $H^0_{DR}(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathbb{R}$ olduğu için $k > 0$ alabiliriz.

$0 < k \leq 2n-2$ durumunda

$$0 \xrightarrow{\delta} H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) \to 0 \oplus H^k_{DR}(H) \to 0$$ ve buradan,

$H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) \simeq H^k_{DR}(H) \simeq H^k_{DR}(\mathbb{CP}^{n-1})$ bulunur.

10) $k=2n-1$ durumunda ise

$$\cdots \to H^{2n-2}_{DR}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H^{2n-1}_{DR}(\mathbb{CP}^n) \to 0 \oplus H^{2n-1}_{DR}(\mathbb{CP}^{n-1})$$

$$H^{2n-2}_{DR}(S^{2n-1}) \cong 0 \quad \Rightarrow H^{2n-1}_{DR}(\mathbb{CP}^n) = 0 \quad H^{2n-1}_{DR}(\mathbb{CP}^{n-1}) \cong 0 \; (2n-1 > 2n-2)$$

elde edilir.

$k=2n$ durumunda da

$$0 \to H^{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H^{2n}(\mathbb{CP}^n) \to 0 \oplus 0$$ ve böylece

$H^{2n}(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathbb{R}$ elde edilir.

$\dim \mathbb{CP}^n = 2n$ olduğu için

$$H^k_{DR}(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0,2,\ldots,2n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$ elde etmiş oluruz.

$H^2_{DR}(\mathbb{CP}^n) = \langle [\omega_{FS}] \rangle$ ile üretilir. Burada ω_{FS} Fubini–Study formudur:

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial} \log(1 + \|(z_1, \ldots, z_n)\|^2).$$

$$n=1, \quad \omega_{FS} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+\|z\|^2)^2} = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

$$\mathbb{CP}^1 \simeq S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}.$$

$n=2$, durumunda ise $\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial} \log(1+\|(z_1,z_2)\|^2)$,

ve buradan da

$$\omega_{FS} \wedge \omega_{FS} = 2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \frac{1}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3}\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2$$

veya $= \dfrac{2}{(1+x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)^3}\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$ olur.

<u>Örnek 3:</u> $M = S^n \times S^m$

$$n \neq m \Rightarrow H^k_{DR}(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n, m, m+n \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$n = m, \quad H^k_{DR}(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = n \\ 0, & \text{diğer hallerde.} \end{cases}$$

Özel olarak, $M = S^1 \times S^3$ ise $H^2_{DR}(S^1 \times S^3) \simeq 0$ olur.

Dolayısıyla, $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} / (z_1, z_2) \sim 2(z_1, z_2) \simeq S^1 \times S^3$ kompleks manifoldu ne $\mathbb{C}^n$ ne de $\mathbb{CP}^n$ içine gömülemez.

<u>Tıkız Destekli (De Rham) Kohomoloji:</u>

M bir manifold olmak üzere

$$\Omega^k_c(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \overline{\text{supp}(\omega)} \subseteq M \text{ tıkız küme}\},$$

$\text{supp}(\omega) = \{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}$, tıkız destekli k-formlar vektör uzayı olsun. $\Omega^k_c(M) \subseteq \Omega^k(M)$ alt uzayı dış türev altında $\Omega^{k+1}_c(M)$ içine gönderilecektir. Dolayısıyla $(\Omega^*_c(M), d)$ bir alt zincir kompleksidir. Bu zincir kompleksinin kohomolojisi tıkız destekli kohomoloji olarak adlandırılır ve $H^k_c(M)$ ile gösterilir.

$f: M \to N$ manifoldların düzgün (proper) bir fonksiyonu ise (başka bir deyişle her tıkız alt kümenin ters görüntüsü tıkız ise) $f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k_c(M)$ ve $f^*: H^k_c(N) \to H^k_c(M)$ homomorfizmaları iyi tanımlıdır.

Ayrıca, $F: M \times I \to N$ düzgün bir homotopi ise $f_0^* = f_1^*$ olur, $f_t: M \to N$, $f_t(p) = F(p,t)$.

<u>Örnekler:</u> 1) M tıkız ise $H^k_c(M) = H^k_{DR}(M)$ olur.

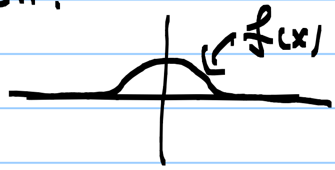
2) $M = \coprod_\alpha M_\alpha$ ise $H^k_c(M) \simeq \bigoplus H^k_c(M_\alpha)$ olur (de Rham'da direkt toplam yerine direkt çarpım vardı).

3) $M = \{pt\}$ tek nokta ise $H^k_c(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ dır.

4) $M = \mathbb{R}$ ise $H^0_c(\mathbb{R}) = \ker(d: \Omega^0_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R})$ olur.

Fakat $df = 0$ ise $f = c$ sabittir. Tıkız destekli tek sabit fonksiyon ise $f = 0$ fonksiyonudur. O halde, $H^0_c(\mathbb{R}) = 0$'dır.

$H^1_c(\mathbb{R})$'yi hesaplamak için $\int_{\mathbb{R}}: H^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega$, iyi tanımlıdır.

$\omega = f(x)dx$, 

1-formu için $\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx > 0$ olacağı için bu homomorfizma örtendir.

Şimdi $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$ olsun. $\overline{\text{supp}(\omega)} \subseteq [-m, m]$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}^+$ seçelim.

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\omega=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ $\quad(\omega=f(x)dx)$ olarak tanımlansın. Açıkça, $dF=\omega$ ve $\overline{\text{supp}(F)}\subseteq[-m,m]$ olur. Dolayısıyla, $[\omega]=0\in H^1_c(\mathbb{R})$ olur. Başka bir değişle,

$$\int_{\mathbb{R}}: H^1_c(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R} \quad \text{homomorfizması 1-1' dir.}$$

Bu kanıtı tamamlar.

Teorem (Tıkız Destekli Kohomoloji için Poincaré Lemma.)

M türevlenebilir manifold olmak üzere $H^{k+1}_c(M\times\mathbb{R})\simeq H^k_c(M)$. olur.

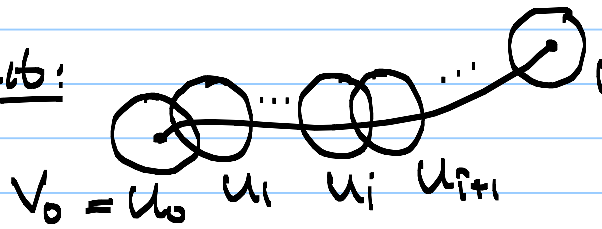
Sonuç: i) $H^n_c(\mathbb{R}^n)\simeq H^{n-1}_c(\mathbb{R}^{n-1})\simeq\dots\simeq H^0_c(\{pt\})\simeq\mathbb{R}$.

Ayrıca, her $m\neq n$ için $H^n_c(\mathbb{R}^m)=0$ olur.

Sonuç: Yönlendirilebilir ve bağlantılı her n-boyutlu M manifoldu için integral homomorfizması

$$\int_M: H^n_c(M)\longrightarrow\mathbb{R},\quad [\omega]\longmapsto\int_M\omega,$$ bir izomorfizmadır.

Kanıt:



$U_i\simeq\mathbb{R}^n$

$H^n_c(U_i)\simeq\mathbb{R}$

Her n-formu parçalara bölelim ve sonra da her parçanın sınıfının aynı olduğunu gözlemleyelim. ∎

Tıkız Destekli Bağıl Kohomoloji Dizisi:

$U\subseteq M$ açık küme olmak üzere $\Omega^k_c(U)\subseteq\Omega^k_c(M)$ (formun tanımını $M\setminus U$'ya sıfır olarak genişleterek) olduğunu kabul edebiliriz. O halde, her $k\geq 0$ tam sayısı için

11-) $0 \to \Omega_c^k(U) \to \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^k(M)/\Omega_c^k(U) \to 0$ kısa tam dizisi aşağıdaki tam diziyi verir:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_c^k(U) \to H_c^k(M) \to H_c^k(M,U) \to H_c^{k+1}(U) \to \cdots$$

$L \subseteq M$ kapalı bir alt manifold ise $U = M \setminus L$ olarak elde edilen dizinin

$H_c^k(M,U) = H_c^k(M, M\setminus L)$ terimi için şu sonuç vardır:

<u>Teorem</u>: $H_c^k(M, M\setminus L) \underset{i^*}{\overset{\cong}{\leftarrow}} H_c^k(L)$, $i: L \to M$, $p \mapsto i(p) = p$, $p \in L$.

<u>Sonuç</u>: $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ içinde n-boyutlu kapalı, yönlendirilebilir ve tıkız alt manifold olsun. Bu durumda, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ iki bağlantılı açık manifoldun ayrık birleşimidir. Bunlardan tam olarak bir tanesi sınırsızdır.

Eğer $M = C \subseteq \mathbb{R}^2$ $(n=1)$ ise bu sonuç Jordan Kapalı Eğri Teoremi olarak adlandırılır.

<u>Tıkız Destekli Kohomoloji için Meyer-Vietoris Dizisi</u>

$M = U \cup V$ açık kümelerin birleşimi ise, yine formların tanım kümesini sıfır ile genişleterek şu tam diziyi elde ederiz:

$$0 \to \Omega_c^k(U\cap V) \xrightarrow{i_U \oplus i_V} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow{j_U - j_V} \Omega_c^k(M) \to 0.$$

Buradan (okları ters yönde giden) tam diziyi elde ederiz:

$$\cdots \to H_c^k(U\cap V) \xrightarrow{i_U \oplus i_V} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{j_U - j_V} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U\cap V) \to \cdots$$

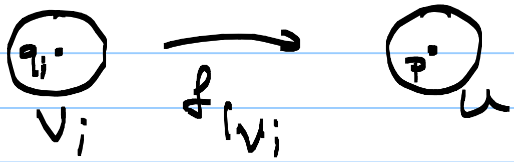
Düzgün Fonksiyonların Derecesi: $f: M \to N$ boyutları n-olan yönlendirilmiş bağlantılı manifoldların düzgün fonksiyonu olsun. Bu durumda $f^*(\Omega_c^k(N)) \subseteq \Omega_c^k(M)$ olacağı için

$f^*: \mathbb{R} \simeq H_c^n(N) \longrightarrow H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$ homomorfizması bir

$\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpma olarak verilecektir: $1 \mapsto \lambda$.

Bu λ sayısı bir tam sayıdır ve $\deg(f)$ ile gösterilir.

Kanıt: Fonksiyon düzgün olduğu için eğer $p \in N$ bir düzgün değer ise $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_k\}$ sonlu noktadan oluşur ve f her q_i etrafında bir difeomorfizmadır.



Bir $[\omega] \neq 0 \in H_c^n(N)$ seçelim öyle ki $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$ olsun. Uygun bir sayı ile çarparak

$\int_N \omega = \int_U \omega = 1$ olduğunu kabul edelim.

O halde, $\int_M f^*(\omega) = \int_{V_1 \cup \dots \cup V_k} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \deg(f)_{q_i}$,

$\deg(f)_{q_i} = \pm 1$, çünkü $f: V_i \to U$ bir difeomorfizma

olduğu için $\deg(f)_{q_i} = \int_{V_i} f^*(\omega) = \pm \int_{f(V_i)=U} \omega = \pm 1$ olur, burada işaret $f: V_i \to U$ fonksiyonun yön koruyan olup olmadığına göre belirlenir.

Teorem: 1) $f = 1_M: M \to M$ birim fonksiyon ise $\deg f = 1$ dir.

2) $f: M \to N$ örten değilse $\deg f = 0$.

3) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

Örnekler: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir polinom ise $\deg(f)=\deg f \pmod 2$.

2) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, karmaşık polinom ise $\deg(f)=\deg f$ olur.

3) $f:S^n\to S^n$, $f(x_1,\dots,x_{n+1})=(-x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ ise $\deg f=-1$ olur.

4) $f:S^n\to S^n$, $f(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=(-x_1,-x_2,\dots,-x_{n+1})$ ise $\deg f=(-1)^{n+1}$.

5) $A\in GL(n,\mathbb{Z})$, $f:T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n=T^n$ ise

$\deg(f)=\det A$ olur.

Poincaré İzomorfizması: M yönlendirilmiş bağlantılı n-boyutlu bir manifold olsun. $\omega\in\Omega_c^k(M)$ ve $\nu\in\Omega^{n-k}(M)$ ise

$\int_M \omega\wedge\nu$ integrali iyi tanımlıdır ve kohomoloji seviyesinde yozlaşmamış bir bilineer form verir:

$$H_c^k(M)\times H_{DR}^{n-k}(M)\to\mathbb{R},\ ([\omega],[\nu])\mapsto\int_M\omega\wedge\nu.$$

Dolayısıyla, $D_M:H_{DR}^k(M)\to\left(H_c^{n-k}(M)\right)^*$, $D_M([\nu])([\omega])=\int_M\omega\wedge\nu$ bir izomorfizmadır.

Özel olarak, eğer M tıkız ise $D_M:H_{DR}^k(M)\to\left(H_{DR}^{n-k}(M)\right)^*$ bir izomorfizmadır.

Uyarı: M tıkız ise $H_{DR}^k(M)\simeq\left(H_{DR}^{n-k}(M)\right)^*$

$$\simeq\left(H_{DR}^k(M)^*\right)^*$$

$$\simeq H_{DR}^k(M)^{**}$$ elde edilir.

Fakat bir V vektör uzayı için $V \cong V^{**}$ ise V sonlu boyutludur. Dolayısıyla, tıkız manifoldların kohomolojileri sonlu boyutludur.

Bu teoremin kanıtı tümevarım ve Mayer–Vietoris argümanlarından oluşur.

<u>Örnek:</u> $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alalım. $H^1_{DR}(M) = \langle [\omega] \rangle$, $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ olduğunu görmüştük.

Bu durumda, $\nu = D_M(\omega) \in H^1_c(M)$ formu, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ve $\rho : (0,\infty) \to [0,1]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(r)\,dr = 1$ olmak üzere

$$\nu = \rho(r)\,dr = \rho(r) \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ ile verilir.

<u>Euler Karakteristiği:</u> M n-boyutlu bir manifold ve $H^k_{DR}(M)$ sonlu boyutlu ise $b_k = \dim H^k_{DR}(M)$ M'nin k.ıncı Betti sayısı olarak adlandırılır. Eğer b_k sayısı sonlu ise

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$$ sayısına manifoldun Euler sayısı denir. Dolayısıyla, eğer M tıkız ise $\chi(M)$ her zaman tanımlıdır.

<u>Örnekler:</u> $\chi(\mathbb{R}^n) = 1$, $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ tek ise} \\ 2 & n \text{ çift ise} \end{cases}$,

$\chi(\mathbb{CP}^n) = n+1$ ve $\chi(M \times N) = \chi(M)\,\chi(N)$ olur.

Dolayısıyla, $\chi(S^1) = 0$ olduğu için $\chi(T^n) = 0$'dır.

<u>Teorem:</u> M tek boyutlu bir tıkız manifold ise $\chi(M) = 0$ olur. (Poincaré İzomorfizması)

12) Benzer şekilde De Rham kohomolojisi yerine tıkız destekli kohomoloji kullanarak tıkız destekli Euler karakteristiğini tanımlayabiliriz:

$$\chi_c(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H_c^k(M), \quad n = \dim M.$$

Elbette, eğer M tıkız ise $\chi_c(M) = \chi(M)$ olur.

Genelde $\chi_c(M)$ daha avantajlıdır. χ toplamsal olmasa da χ_c toplamsaldır:

$M = U \cup V$, $U, V \subseteq M$ açık kümeler olmak üzere

$$\chi_c(M) = \chi_c(U) + \chi_c(V) - \chi_c(U \cap V)$$ ve

$$\chi_c(M) = \chi_c(U) + \chi_c(M \setminus U)$$ olur.

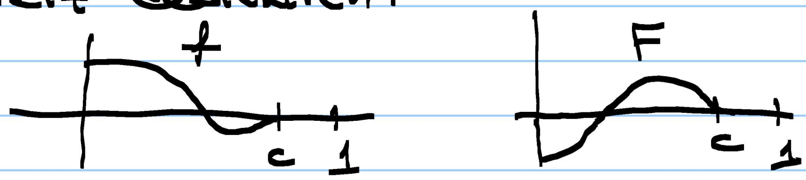
<u>Örnek:</u> $M = [0,1]$, $U = [0,1)$ olsun.

$$\chi_c(M) = \chi([0,1]) = 1, \quad \chi_c(M \setminus U) = \chi_c(\{1\}) = 1$$

ve $\chi_c([0,1)) = b_0^c - b_1^c = 0 - 0 = 0$'dır çünkü $[0,1)$ üzerinde tıkız destekli tek sabit fonksiyon sıfır fonksiyonudur; diğer yandan $[0,1)$ üzerinde tıkız destekli her 1-formun integrali de tıkız destekli seçilebilir:

$\omega = f(x)\,dx$, $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, ise $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$

olsun. $F'(x) = f(x) \Rightarrow dF = F'(x)\,dx = \omega$ olur. Ayrıca, F de tıkız desteklidir:



$$\overline{\operatorname{supp} f} = [0,c] = \overline{\operatorname{supp} F}.$$

Çapraz Kesişim:

$f: K \to M$ ve $g: L \to M$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir fonksiyonları olsun. Eğer her $f(p)=g(q)$ koşulunu sağlayan $(p,q) \in K \times L$ ikilisi için

$$Df_p(T_pK) + Dg_q(T_qL) = T_{f(p)}M$$ eşitliği sağlanıyorsa

f ve g fonksiyonlarına çapraz kesişiyorlar denir ve $f \pitchfork g$ ile gösterilir.

<u>Örnekler:</u> 1) $\dim K + \dim L < \dim M$ ise $f \pitchfork g$ olması için gerek ve yeter koşul $f(K) \cap g(L) = \emptyset$ olmasıdır.

2) $L = \{p\} \subseteq M$ tek noktadan oluşan bir 0-manifold ve $g: \{p\} \to M$ içerme fonksiyonu ise

$f \pitchfork g$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in M$ noktasının $f: K \to M$ fonksiyonu için düzgün değer olmasına denktir.
Bu durumda, $f^{-1}(p) \subseteq K$ alt kümesinin $\dim K - \dim M$ boyutlu bir alt manifold olduğunu biliyoruz.

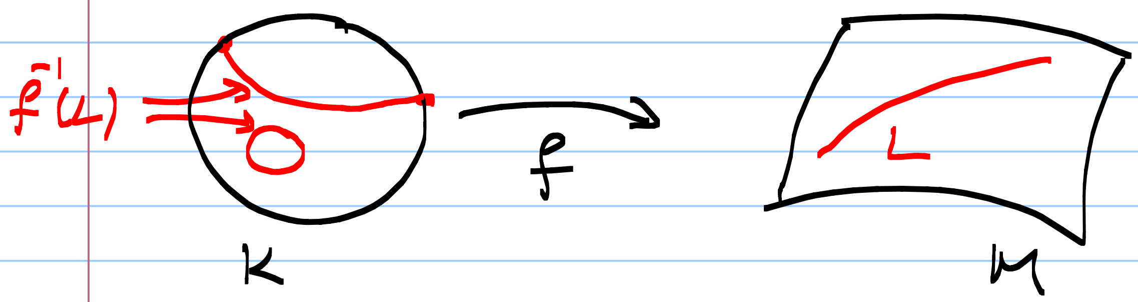
Bu gerçeğin kanıtının bir uyarlaması aşağıdaki sonucu verir:

<u>Teorem:</u> $f: K \to M$ türevlenebilir fonksiyon $g: L \hookrightarrow M$ gömülmüş bir alt manifold (g'yi içerme fonksiyonu olarak görelim) ve $f \pitchfork g$ olsun.

Bu durumda, $f^{-1}(L) \subseteq K$ içinde $\dim L + \dim K - \dim M$ boyutlu bir gömülmüş alt manifolddur.

Ayrıca K sınırı olan bir manifold ise $f^{-1}(L) \subseteq K$ da sınırı olan bir alt manifolddur ve

$$\partial f^{-1}(L) = (\partial K) \cap f^{-1}(L) \text{ olur.}$$



Bir sonraki sonuç Sard Teoremi'nin bir uygulamasıdır:

<u>Sard Teorem:</u> $f: K \to M$ türevlenebilir bir fonksiyon ise f'nin M içindeki kritik değerlerinin kümesinin ölçümü sıfırdır.

<u>Örnek:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise kritik değerler kümesi

$\{f(p) \mid f'(p) = 0\}$ olur. Bu kümenin ölçümü sıfır

demek yolda ilerleyen bir aracın hızının sıfır olduğu anlarda katettiği mesafenin sıfır olduğu anlamına gelir!

<u>Sonuç:</u> $f: K \to M$, $g: L \to M$ türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $g: L \to M$ düzgün bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna istediğimiz kadar yakın ve aynı zamanda homotopik öyle bir $\tilde{f}: K \to M$ fonksiyon vardır ki $\tilde{f} \pitchfork g$ olur. Ayrıca, $f \pitchfork g$ ise f'e yakın her $\tilde{f}$ için $\tilde{f} \pitchfork g$ olur.

<u>Uyarı</u> Eğer $M = \mathbb{R}^n$ ise ölçümü sıfır olan bir $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi vardır ki, her $w \in \mathbb{R}^n \setminus C$ için

$$f_w(x) \doteq f(x) + w, \; x \in K, \text{ olmak üzere } f_w \pitchfork g \text{ olur.}$$

Ayrıca, K tıkız ve $g: L \to \mathbb{R}^n$ düzgün fonksiyon ise C kümesi ölçümü sıfır olan kapalı bir küme olur.

Son olarak, eğer başlangıçta $f \pitchfork g$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| < \delta$ için yine $f_w \pitchfork g$ olur.

<u>Önerme:</u> $f: L \to M$ ve $g: K \to M$ iki kapalı alt manifold olsun. f_0 ve f_1 ile homotopik ve g'ye çapraz iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$(k+l-m)$-boyutlu $f_0(L) \cap g(K)$ ve $f_1(L) \cap g(K)$ alt manifoldları $k+l-m+1$ boyutlu bir W manifoldunun sınırı olurlar. Eğer K, L ve M yönlendirilmiş ise W manifoldu da yönlendirilmiş manifold olur öyle ki

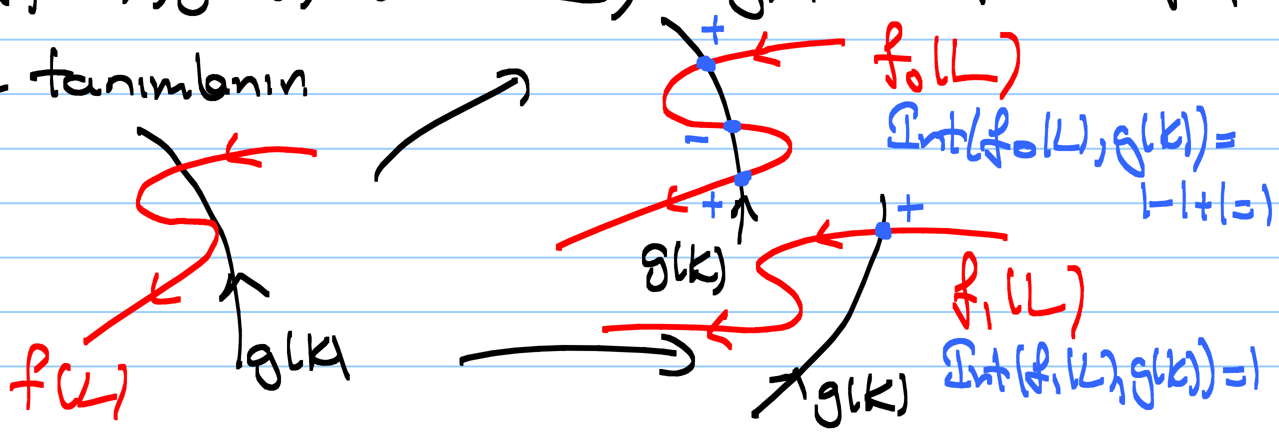
$$\partial W = (f_1(L) \cap g(K)) \cup -(f_0(L) \cap g(K)).$$

Eğer $k+l=m$ ise bu kesişimler sonlu sayıda yönlendirilmiş noktadan oluşurlar ve bu noktaların işaretlerinin toplamı K ve L alt manifoldlarının kesişim sayısı olarak adlandırılır ve

$\mathrm{Int}(f(L), g(K))$ ile gösterilir.

Eğer yönlendirmeler yoksa veya gözardı edilirse $\mathrm{Int}(f(L), g(K)) \pmod 2$ sayısı kesişim sayısı olarak tanımlanır.

<u>Örnek</u>



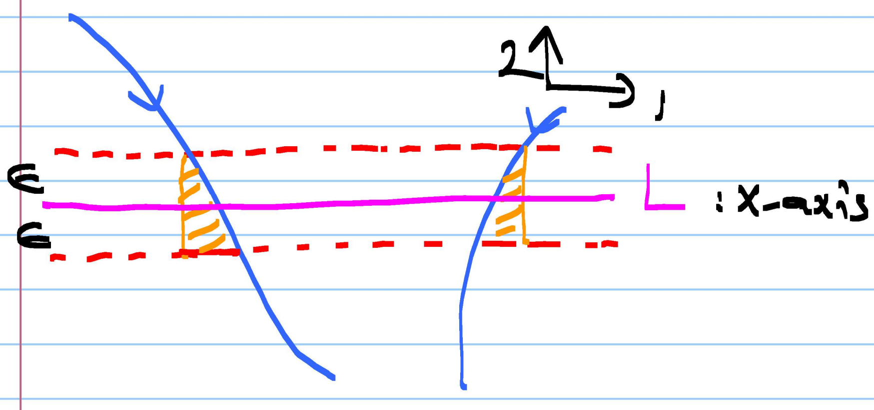
13-) Örnek: M, K ve L complex manifoldlar ise her kesişim noktasının işareti + olacaktır ve bu nedenle cebirsel kesişim geometrik kesişim ile aynı olur.

Tanım: (Alt manifoldun Poincaré Duali)

$L^l \subseteq M^m$ yönlendirilmiş manifold ve alt manifold olsun. Bu durumda, $\phi : H^l_c(M) \to \mathbb{R}$, $[w] \mapsto \int_L w$, iyi tanımlı bir homomorfizmadır.

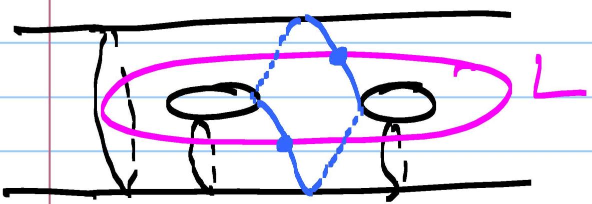
$\phi \in \left(H^l_c(M)\right)^* \simeq H^{m-l}_{DR}(M)$ olduğu için öyle bir $\nu_L \in H^{m-l}_{DR}(M)$ vardır ki, her $[w] \in H^l_c(M)$ için $\int_L w = \phi([w]) = \int_M w \wedge \nu_L$ olur. Bu ν_L formuna $L \subseteq M$ alt manifoldunun Poincaré Duali denir.

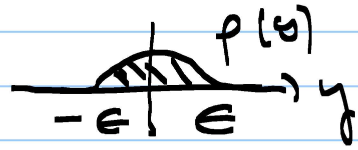
Örnek: $L = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = M$ olsun.



$\nu_L = \rho(y)\,dy$ öyle ki $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(y)\,dy = 1.$

$(d\nu_L = 0\,!)$





Teorem: $K, L \subseteq M$ yönlendirilmiş manifoldun kapalı alt manifoldları olsun öyle ki;

i) $\dim K + \dim L = M$

ii) $K \pitchfork L$

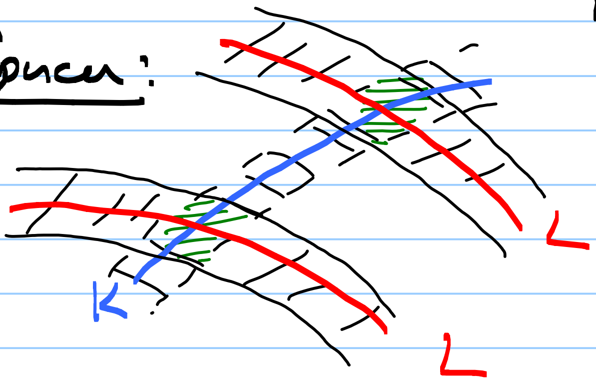
iii) K tıkız ve $L \subseteq M$ düzgün alt manifold olsun.

Bu durumda, $Int(K,L) = \int_K \nu_L$ olur.

Önerme: M^{k+l} tıkız yönlendirilmiş manifold, K^k, L^l yönlendirilmiş tıkız alt manifoldlar olsun.

Bu durumda $Int(K,L) = \int_K \nu_L = \int_M \nu_K \wedge \nu_L$ olur.

Kanıtın İpucu:



ν_K ve ν_L alt manifoldların tüp komşuluğunda desteklendikleri için $\nu_K \wedge \nu_L$ formu kesişim noktaları etrafında sıfırdan farklı olur.

Bu durumda $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ K ve L üzerinde yerel koordinatlar ise ν_K ve ν_L formları,

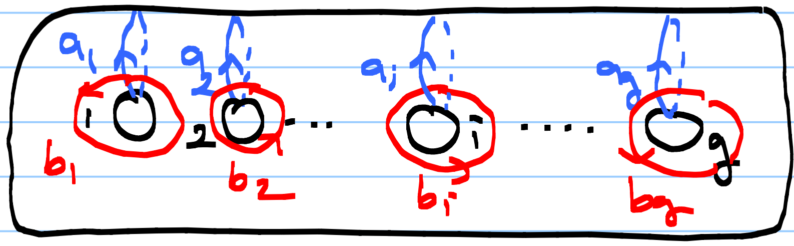
$\nu_L = \rho_L \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ ve $\nu_K = \rho_K \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_l$ ile

verilsin, öyle ki $\rho_K = \rho_K(y_1, \dots, y_l)$ ve $\rho_L = \rho_L(x_1, \dots, x_k)$ fonksiyonları için

$$\int_{\{0\} \times \mathbb{R}^l} \rho_K(y_1, \dots, y_l) \, dy_1 \dots dy_l = 1 = \int_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} \rho_L(x_1, \dots, x_k) \, dx_1 \dots dx_k$$

sağlanır. ■

Örnekler: 1) $M = \Sigma_g$



$x_i, y_i \in H^1_{DR}(\Sigma_g)$ sınıfları, sırasıyla a_i ve b_i alt manifoldlarının Poincaré dualleri olsun.

$Int(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ ve $I(a_i, a_j) = I(b_i, b_j) = 0$ olduğu için $x_i \wedge y_j = \delta_{ij}\alpha$, $\alpha \in H^2_{DR}(\Sigma_g)$ üreteç olmak üzere $\left(\int_{\Sigma_g} \alpha = 1\right)$ ve $x_i \wedge x_j = 0 = y_i \wedge y_j$ olur.

2) $M = \mathbb{CP}^n$ ve $H = \{z_n = 0\} \subseteq \mathbb{CP}^n$ hiper düzlem olsun. $H = \mathbb{CP}^{n-1} \subseteq \mathbb{CP}^n$ olduğu için H alt manifoldunun Poincaré duali $\alpha \in H^2(\mathbb{CP}^n)$ olur.

$\underbrace{H \pitchfork H \pitchfork \cdots \pitchfork H}_{n\text{-tane}} \overset{}{=} 1$ olduğu için $\int_{\mathbb{CP}^n} \alpha^n = 1$ olur.

+ işareti için sayfa 57'e bkz.

Dolayısıyla, $\mathbb{R} \simeq H^{2i}_{DR}(\mathbb{CP}^n) = \langle \alpha^i \rangle$ olur.

Sonuç: $n \geq 2$ olmak üzere her $f: S^{2n} \to \mathbb{CP}^n$ fonksiyonun derecesi sıfırdır.

Kanıt: $H^{2n}_{DR}(\mathbb{CP}^n) = \langle \alpha^n \rangle$ olduğu ve $H^2_{DR}(S^{2n}) = 0$ olduğu için $f^*(\alpha^n) = (f^*(\alpha))^n = 0$ olur. Dolayısıyla, $\deg f = 0$'dır.

Karakteristik Sınıflar.

Euler Sınıfı: $E^{m+k} \to M^m$ yönlendirilmiş $\mathbb{R}^k$-vektör demeti olsun. $L \cong M \subseteq E^{m+k}$ için 0-kesiti olsun. $K = L \pitchfork L \subseteq L = M \subseteq E$ çapraz kesişimini düşünelim. $K \subseteq M$ içinde boyutu $2m-(m+k) = m-k$ olan yönlendirilmiş bir alt manifolddur. Bu manifoldun Poincaré duali, $[\eta_K] \in H^k_{DR}(M)$, vektör demetinin Euler sınıfı olarak adlandırılır ve $e(E)$ olarak gösterilir.

Eğer $k=m$ ise $L \pitchfork L$ çapraz kesişimi sonlu tane işaretli noktadan oluşur. $L \subseteq E$ için demetin sıfır kesiti olarak görürsek $L \pitchfork L$ kesişimi sıfır kesitin kendisi ile çapraz kesişimi olur.

$N \subseteq M$ içinde k-boyutlu yönlendirilmiş tıkız alt manifold ise

$$\int_N e(E) = \operatorname{Int}(K, N) \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $k=m$ ise $e(E) \in H^m_{DR}(M)$ sınıfı için $\int_M e(E)$ sayısına demetin Euler sayısı denir.

$E = T_* E$ teğet uzayı ise bu sayıya manifoldun Euler sayısı denir.

Teorem (Poincaré-Hopf)

M yönlendirilebilir tıkız manifold ise manifoldun Euler sayısı Euler karakteristiğine eşittir.

$$\chi(M) = \int_M e(T_* M).$$

14) Bu teoremin bir genellemesi Lefschetz Sabit Nokta Teoremi'dir.

Teorem: $f: M \to M$ tıkız bir manifoldun türevlenebilir fonksiyonu ve

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M, \quad \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times M$$

alt manifoldlar olsun. Bu durumda, f'nin sabit noktalarının işaretli toplamı $\Delta \pitchfork \Gamma_f$ aşağıdaki Λ_f sayısına eşittir:

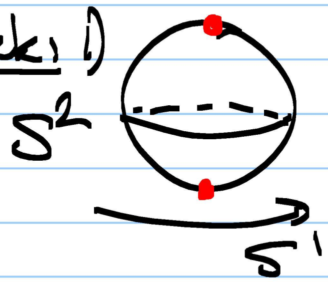
$$\Lambda_f = \sum_k (-1)^k \, Tr\left(f^*: H^k_{DR}(M) \to H^k_{DR}(M)\right).$$

Uygulama $f = id_M$ birim fonksiyonu ve $f^* = id$ ve dolayısıyla $Tr\left(f^*: H^k_{DR}(M) \to H^k_{DR}(M)\right) = \dim H^k_{DR}(M)$ olur. O halde,

$\Lambda_f = \chi(M)$ elde edilir.

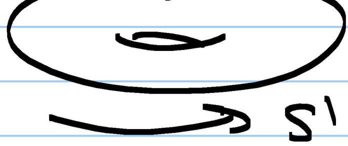
Sonuç: Tıkız bir manifold üzerindeki her çember, S^1 etkisinin $\chi(M)$ tane sabit noktası vardır.

Örnek: 1)



S^1 etkisi kutupsal eksen etrafında dönme ise Kuzey ve Güney kutup noktaları sabit noktalarıdır. $\chi(S^2)$ sayısı da 2'dir.

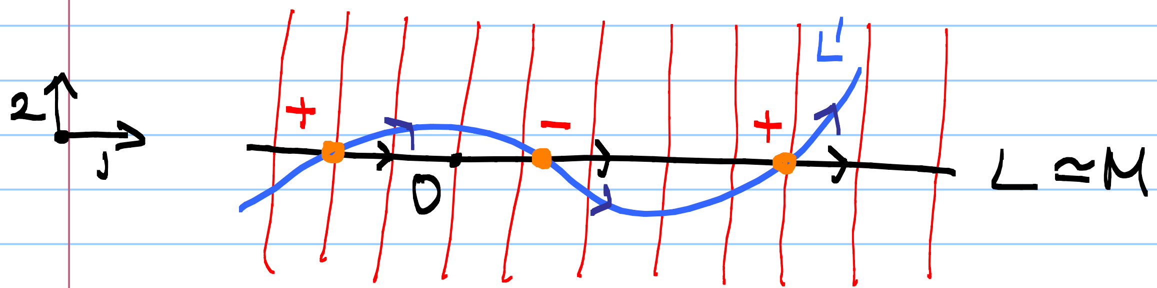
2)

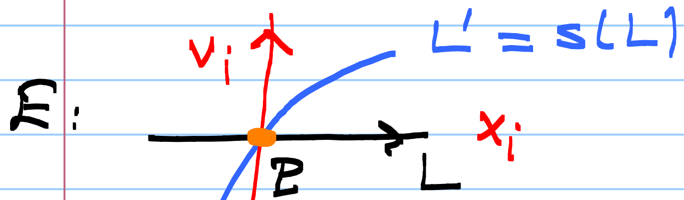


T^2 üzerindeki dönme etkisinin sabit noktası yoktur! Diğer yandan torusun Euler sayısı da sıfırdır: $\chi(T^2) = 0$.

Kesitler, Vektör Alanları ve Euler Sınıfı

$E^{2n} \to M^n$ bir $\mathbb{R}^{2n}$-vektör demeti olsun. $L \subseteq E^{2n}$ sıfır kesitinin kendisi ile çapraz kesişimi L'nin bir başka kesit ile kesişimi olarak ele alınabilir:





$s: L \to E$ kesit
$s(0)=0$

$P=(0,0)$ $E_p=\langle v_1, \dots, v_n\rangle$ $s(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} s_i(x_1,\dots,x_n)v_i$

s kesiti yerel olarak $s:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (s_1(x),\dots,s_n(x))$ fonksiyonu olarak görülebilir. $x=(x_1,\dots,x_n)$

L and $L'=s(L)$ manifoldlarının $p=(0,0)$ noktasında çapraz kesişmesi $T_pL \oplus T_pL' = T_pE$ olmasına denktir. Bu ise

$Ds_0:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ türev fonksiyonunun izomorfizma olmasına denktir. Bu durumda s kesitinin sıfırına soysuzlaşmamış sıfır denir.

Eğer $E=T_xM$ ise $v_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $E_p=T_pM=\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p\rangle$ olur. Bu durumda kesiti vektör alanı denir.

Uyarı: Teğet demetinin kanonik yönlendirmesi şu şekilde tanımlanır: Eğer $x_1 \dots x_n$ M üzerinde yerel bir koordinat sistemi ise her teğet vektör $\sum \xi_i \partial/\partial x_i$ şeklindedir. Bu durumda, $x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n$ teğet demeti üzerinde koordinat sistemi olur. Bu koordinat sistemine karşılık gelen teğet vektörlerin oluşturduğu sıralı taban yönlendirmeyi verir:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial \xi_1},\dots,\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right\}.$$

Verilen bir $s: U \to T_*U$, $s(x,y) = (\xi_1, \xi_2)$

$\xi_i = \xi_i(x,y)$, $i=1,2$, $s(x,y) = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$,

kesiti için $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)_p$ Jacobyeninin işareti kesitin p sıfırının işareti olur.

<u>Örnek</u>: a) $s: M = \mathbb{R}^2 \to T_*\mathbb{R}^2 = T_*M$, $s(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

olsun. $p=(0,0)$ kesitin tek sıfırıdır ve

$\xi_1 = \xi_1(x,y) = x$, $\xi_2 = \xi_2(x,y) = y$ olduğu için

$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elde ederiz ve dolayısıyla

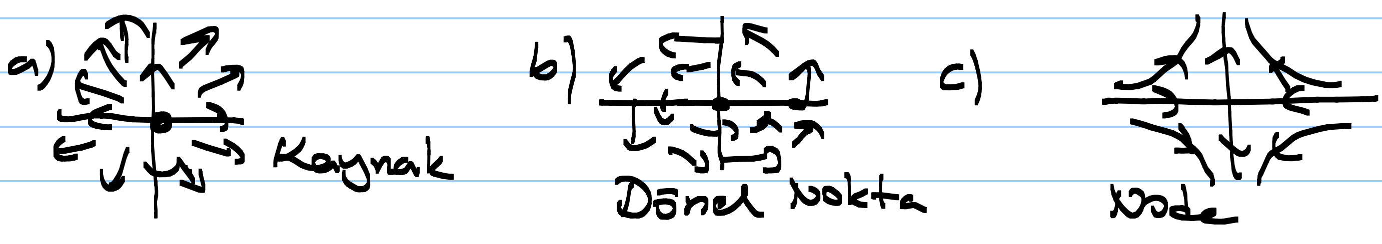
işaret $+1$'dir.

b) $s: M \to \mathbb{R}^2$, $s(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. $\xi_1 = -y$, $\xi_2 = x$

$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, işaret $+1$'dir.

c) $s(x,y) = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $\xi_1 = -x$, $\xi_2 = y$.

$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$, işaret -1.

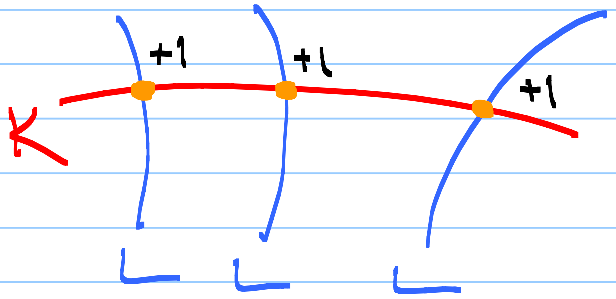


Karmaşık Manifoldların Karmaşık Altmanifoldları:

Karmaşık bir vektör uzayının doğal bir yönlendirmesi olduğunu görmüştük: Eğer $\{v_1,\dots,v_n\}$ bir $\mathbb{C}$-vektör uzayının tabanı ise $\{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$ bu uzayın bir $\mathbb{R}$-tabanıdır ve bu gerçel tabanın verdiği yönlendirme $\{v_1,\dots,v_n\}$ $\mathbb{C}$-tabanın seçiminden bağımsızdır.

Dolayısıyla, K^k, L^ℓ, M^m, $m=k+\ell$, karmaşık manifoldlar $K, L \subseteq M$, $K \pitchfork L$ ise her $p \in K\cap L$ kesişim noktası için $T_pK \oplus T_pL$ ve T_pM uzaylarının karmaşık yapılardan gelen yönlendirmeleri uyumludur. Başka bir deyişle, her $p \in K\cap L$ kesişim noktasının işareti $+1$'dir. Sonuç olarak,

$\mathrm{Int}(K\cap L) = \#(K\cap L)$ olur (cebirsel kesişim = geometrik kesişim)



Örnek: $L=\mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{CP}^2$ içinde bir doğru olsun.

Herhangi iki doğru tek noktada kesiştiği için L_1, L_2 iki doğru ise $L_1 \pitchfork L_2 = 1$ olur.

Örnek: Daha önce (sayfa 13) $T_*\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}\times\mathbb{C} \,\dot\cup\, \mathbb{C}\times\mathbb{C} \Big/ \begin{smallmatrix}(z,w)\sim(1/z,\, -w/z^2)\\ z\neq 0\end{smallmatrix}$ olduğunu görmüştük.

$s_1(z) = \dfrac{1+z^2}{2}$, $s_2 = -\dfrac{1+z^2}{2}$ kesitleri iki ortak sıfıra sahiptir $+i, -i$. Her ikisi de pozitif olacağı için

15-) bu demetin Euler sayısı, $\int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1) = 2$ olur.

Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için

$Q(n) = \mathbb{C}\times\mathbb{C} \,\dot{\cup}\, \mathbb{C}\times\mathbb{C} / (z,w) \sim (1/z, \frac{w}{z^n})$, $z \neq 0$

$Q(n) \to \mathbb{C}P^1$ karmaşık doğru demetinin Euler sayısı n'dir çünkü bu demetin kesitleri n. dereceden polinomlardır. (Neden?)

Chern Sınıfları:

$E^{m+2k} \to M^m$ bir $\mathbb{C}^k$- karmaşık vektör demeti olsun. $\mathbb{C}^k \simeq \mathbb{R}^{2k}$ olduğu için bunu yönlendirilmiş bir $\mathbb{R}^{2k}$-demeti olarak da görebiliriz. $\mathbb{C}^k$-demeti için yapı grubu $GL(\mathbb{C},k)$ iken $\mathbb{R}^{2k}$-demeti için bu grup $GL^+(\mathbb{R},2k)$ olur. Eğer iç çarpım koyarsak gruplar $U(k)$ ve $SO(2k)$ olur.

Demetin yapı fonksiyonları, sırasıyla,

$\rho_{ij}^{\mathbb{C}} : U_i \cap U_j \to GL(\mathbb{C},k)$

ve $\rho_{ij}^{\mathbb{R}} : U_i \cap U_j \to GL^+(\mathbb{R},2k)$'dır.

$(a_{ij}) = \rho_{ij}^{\mathbb{C}}(p)$ ise $\rho_{ij}^{\mathbb{R}}(p) = \begin{pmatrix} Re(a_{ij}) & -Im(a_{ij}) \\ Im(a_{ij}) & Re(a_{ij}) \end{pmatrix}_{ij}$

olur. Burada her bir karmaşık a_{ij} sayısı 2×2'lik gerçel matris ile değiştirilir.

$k=1$ ise $U(1) = SO(2)$ olduğu için karmaşık doğru demeti yönlendirilmiş $\mathbb{R}^2$-demetidir ve $E \to M$ karmaşık doğru demetinin 1. Chern sınıfı, $c_1(E)$,

$c_1(E) \doteq e(E_{\mathbb{R}})$ olarak tanımlanır.

Örnek: $Q(k) \to \mathbb{C}P^1$ karmaşık doğru demeti ise

$c_1(Q(k)) = e(Q(k)_{\mathbb{R}}) = k$ olur.

Uyarı: $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{CP}^n$, $(z_0,\dots,z_n)\mapsto [z_0:\dots:z_n]$ bir $\mathbb{C}$-doğru demeti belirler. Bu demet kanonik karmaşık doğru demeti ismini alır ve $\xi^n \to \mathbb{CP}^n$ ile gösterilir.

$L \to M$ bir karmaşık doğru demeti ve $s_0,\dots,s_n$ bu demetin kesitleri olsun, öyle ki her $p\in M$ noktasında en az bir $s_i(p)$ sıfırdan farklı olsun. Bu durumda,

$$\varphi: M\to \mathbb{CP}^n,\quad p\mapsto [s_0(p):\dots:s_n(p)],$$

iyi tanımlıdır ve L ile $\varphi^*(\xi^n)$ demetleri izomorftur. Başka bir deyişle, M üzerindeki her $\mathbb{C}$-doğru demeti bir $\varphi: M\to\mathbb{CP}^n$ fonksiyonu için $\varphi^*(\xi^n)$ şeklindedir.

Aslında, M üzerindeki $\mathbb{C}$-doğru demetleri ile M'den $\mathbb{CP}^n$ $(n>>0)$ projektif uzayına giden fonksiyonların "homotopi" sınıfları arasında birebir ilişki vardır:

$$\begin{tikzcd}
\{L\to M \mid \text{karmaşık } \mathbb{C}\text{-demeti}\} \arrow[rr, "c_1"] \arrow[dr] & & H^2_{DR}(M) \\
& {[M:\mathbb{CP}^n]} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Her üçü de gruptur!

$L\to M$ için $\Downarrow$ $f: M\to\mathbb{CP}^n$ fonksiyonuna demetin sınıflandırma fonksiyonu denir.

$\uparrow$ Her sınıf bir L $\mathbb{C}$-doğru demeti için $c_1(L)$ şeklindedir.

$\mathbb{CP}^n$ uzayının $[a_0:a_1:\;:a_n]$ noktasının sıfırdan farklı $a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ polinomu ile eşlersek ($\lambda\neq 0$ ile çarptığımızda elde edilen polinomu bununla aynı göreceğiz; başka bir deyişle kökleri aynı olan polinomları denk (aynı) görüyoruz), polinom çarpması bize doğru demetleri üzerinde çarpma işlemi tanımlar!

$L_i \to M$ $\mathbb{C}$-doğru demeti, $L_1 \otimes L_2 \to M$ yeni bir $\mathbb{C}$-doğru demeti. $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$ olur. Sınıflandırma fonksiyonları cinsinden ise

$f: M \to \mathbb{CP}^{n_1}$ ve $g: M \to \mathbb{CP}^{n_2}$ sırasıyla $L_1 \to M$ ve $L_2 \to M$ için sınıflandırma fonksiyonları ise $L_1 \otimes L_2 \to M$'nin sınıflandırma fonksiyonu $f \cdot g: M \to \mathbb{CP}^{n_1+n_2-1}$ fonksiyonu olur.

Son olarak, M manifoldu üzerindeki tüm karmaşık doğru demetleri kümesi $\mathcal{L}$ bir değişmeli gruptur ve $c_1 : \mathcal{L} \to H^2(M;\mathbb{Z})$, $L \mapsto c_1(L)$, (tam sayı katsayılı tekil kohomoloji), bir izomorfizmadır.

Daha yüksek boyutlu Chern sınıflarını tanımlamak için Ayrışım İlkesi denen yapıya ihtiyaç duyuyoruz.

<u>Teorem</u> (Ayrışım İlkesi)

Her $\pi: E \to M$ karmaşık $\mathbb{C}^r$-demeti için öyle bir türevlenebilir $F(E)$ manifoldu ve $\phi: F(E) \to M$ fonksiyonu vardır ki

1) $\phi^*(E) \to F(E)$ karmaşık $\mathbb{C}^r$-demeti bazı karmaşık $L_i \to F(E)$ doğru demetleri için $(i=1,\dots,r)$

$$\phi^*(E) \simeq L_1 \oplus \dots \oplus L_r \text{ şeklinde yazılabilir ve}$$

2) $\phi^*: H^*_{DR}(E) \to H^*_{DR}(F(E))$ homomorfizması 1-1'dir.

<u>Uyarı</u>: $E \to M$ bir $\mathbb{C}^r$-vektör demeti ise ($\mathbb{R}^r$ olsa da olur) bu demetin projektivizasyonu şöyle tanımlanır: Her noktanın üzerindeki $\mathbb{C}^r$ lifini $\mathbb{C}^r \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^{r-1}$ ile değiştiriyoruz:

$E = U_\alpha \times \mathbb{C}^r / \sim$, $P(E) \simeq U_\alpha \times \left(\left(\mathbb{C}^r \setminus \{0\}\right) / \mathbb{C}^* \right) / \sim$

$$\mathbb{CP}^{r-1} \longrightarrow P(E) \xrightarrow{\pi} M.$$

Bu durumda, $\pi^*(E) \longrightarrow P(E)$ demeti

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(E) & \longrightarrow & M \end{array}$$

$\pi^*(E) \simeq E_1 \oplus L_1$ şeklinde ayrışır, öyleki E_1 rankı $r-1$ olan kompleks vektör demetidir.

Bu işlemi r-defa yaparak $F(E)$ manifoldu elde edilir.

$L_1, \dots, L_r$ doğru demetlerine $E \to M$'nin kökleri denir.

$$\phi^*(E) = L_1 \oplus \dots \oplus L_r \quad (\phi : F(E) \to M)$$

demetinin i'inci Chern sınıfı $c_i(E_i)$, şöyle tanımlanır:

$c(L_i) = 1 + c_1(L_i)$ olmak üzere

$$c(\phi^*(E)) = c(L_1)\, c(L_2) \cdots c(L_r)$$
$$= (1 + c_1(L_1))\,(1 + c_1(L_2)) \cdots (1 + c_1(L_r))$$

ve $c_i(\phi^*(E)) = \sigma_i(c_1(L_1), \dots, c_1(L_r))$, $c(\phi^*(E))$ polinomunun derecesi $2i$ olan kısmı. Burada σ_i ile r değişkenli i'inci elementer simetrik polinom gösteriliyor.

Son olarak $c(E)$ ve $c_i(E)$ ise $\phi^* c(E) = c(F(E))$ eşitliği ile tanımlanır. ($\phi^* : H^*(M) \to H^*(F(E))$ birebirdir).

16) Chern Sınıflarının Özellikleri:

1) $L \to M$ karmaşık $\mathbb{C}$-doğru demeti ise $L \otimes L^* \simeq M \times \mathbb{C}$ aşikar doğru demetidir ve dolayısıyla, $c_1(L) + c_1(L^*) = 0 \Rightarrow c_1(L^*) = -c_1(L)$ olur.

2) $c(E \oplus F) = c(E)\,c(F)$

Özell olarak, $c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F)$,

$c_2(E \oplus F) = c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F)$

$\vdots$

$c_{r_1+r_2}(E \oplus F) = c_{r_1}(E)\,c_{r_2}(F)$, $r_1 = \operatorname{rank} E_1$, $r_2 = \operatorname{rank} E_2$

3-) $\overline{E}$ - eşlenik demet ise $c_i(\overline{E}) = (-1)^i c_i(E)$

($\operatorname{rank} E = 1$ ise $\overline{E} = E^*$ olur).

4) $E \to M$ $\mathbb{C}^r$-karmaşık vektör demeti ve $E_{\mathbb{R}}$ bu demetin $\mathbb{R}^{2r}$-gerçel vektör demeti hali olmak üzere
$$c_r(E) = e(E_{\mathbb{R}}) \in H^{2r}_{DR}(M) \text{ olur.}$$

Örnek: $M = \mathbb{CP}^n$, $H^2_{DR}(M) \simeq \mathbb{C} = \langle a \rangle$ ise

$c(T_* \mathbb{CP}^n) = (1+a)^{n+1}$ olur. Dolayısıyla,

$c_k(T_* \mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{k} a^k$ eşitliği doğrudur.

Özel olarak, $c_1(T_* \mathbb{CP}^2) = 3a$, $c_2(T_* \mathbb{CP}^2) = 3a^2$ olur.

Yarıyana Gelme Eşitliği (Adjunction Equality)

$f = f(x,y,z)$ derecesi d olan homogen polinom ve

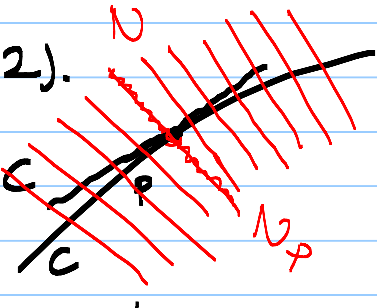
$C = \{[x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \mid f(x,y,z) = 0\}$ cebirsel eğrisi olsun.

Eğer $f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0$ sisteminin çözüm kümesi boş ise Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden dolayı C karmaşık boyutu bir, gerçel boyutu iki olan bir yüzey olur. Yüzey karmaşık yapıya sahip olduğu için doğal bir yönlendirmeye sahiptir.

$H^2_{DR}(\mathbb{CP}^2) \cong \mathbb{R} = \langle \alpha \rangle, \quad \alpha = PD(H), \quad H = \mathbb{CP}^1 : z = 0$

olduğunu biliyoruz (sayfa 52).

$$T_*\mathbb{CP}^2\big|_C = N \oplus T_*C$$



Hem $T_*C \to C$ hemde $N \to C$ karmaşık doğru demetleridir.

$$\int_C c_1(N) = \int_C e(N_{\mathbb{R}}) = C \pitchfork C = d^2$$ olur (Bezout Teoremi: $C_1 : f = 0$, $C_2 : g = 0$, $\deg f = d_1$, $\deg g = d_2$, $f \pitchfork g = d_1 d_2$).

Poincaré-Hopf Teoremi

Benzer şekilde, $\int_C c_1(T_*C) = \int_C e(T_*C) \overset{\Downarrow}{=} \chi(C) = 2 - 2g$, ve

$$\int_C c_1(T_*\mathbb{CP}^2) = \int_C 3\alpha = 3\int_C \alpha = 3(C \pitchfork H) = 3d$$ (Bezout Thm.)

Diğer yandan, $T_*\mathbb{CP}^2 = N \oplus T_*C$ ve buradan dolayı

$c_1(T_x\mathbb{CP}^2) = c_1(N) + c_1(T_x C) \Rightarrow 3d = d^2 + 2 - 2g$ elde ederiz. Buradan,

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \quad \text{(Derece-Genus Formülü)}$$

Pontryagin Sınıfları:

$E \to M$ bir $\mathbb{R}^k$-demet ise $F \doteq E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to M$, $E = \bigcup_{p\in M} E_p$, $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{p \in M} E_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, bir $\mathbb{C}^k$-vektör demetidir.

$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R}) \subseteq GL(k,\mathbb{C})$ hem F, hem de $\bar{F}$ ve $\bar{F}$ demetlerinin yapı fonksiyonu olacağı için F ve $\bar{F}$ karmaşık vektör demetleri izomorfiktir. Buradan $c_i(F) = c_i(\bar{F}) = (-1)^i c_i(F)$ elde edilir. Dolayısıyla, eğer i sayısı tek ise $c_i(F) = 0$ (aslında torsion elemandır) olur.

$E \to M$ vektör demetinin i'inci Pontryagin sınıfı

$$p_i(E) \doteq (-1)^i c_{2i}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in H^{4i}_{DR}(M).$$

<u>Önerme</u>: Eğer $E \to M$ $\mathbb{C}^r$-vektör demeti ise bu demeti $\mathbb{R}^{2r}$-demet olarak görerek tekrar $\mathbb{C}$ ile tensör edersek, $E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \to M$, bu demet karmaşık vektör demeti olarak

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong E \oplus \bar{E} \text{ toplamına izomorfiktir.}$$

<u>Kanıt</u>: Herhangi bir $w = (u_1 + iv_1, \dots, u_r + iv_r) \in \mathbb{C}^r$ vektörünü

$w_{\mathbb{R}} = (u_1, v_1, \dots, u_r, v_r) \in \mathbb{R}^{2r}$ olarak görelim. Bu durumda karmaşık $w \in \mathbb{C}^r$ vektörünü $z = re^{i\theta}$ sayısı ile çarpmak, her bir (u_k, v_k) ikilisini

$A_z = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ matrisi ile çarpmaya denk olacaktır.

Bu matrisin özdeğerleri z and $\bar{z}$ karmaşık sayılarıdır. Dolayısıyla, A_z matrisini ancak $\mathbb{R}^{2r} \otimes \mathbb{C}$ vektör uzayında köşegenleştirebiliriz. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise

$\mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \{e_1 - i f_1, \dots, e_r - i f_r\}$, $\overline{\mathcal{B}} = \{e_i + i f_1, \dots, e_r + i f_r\}$

(burada $\{e_1, f_1, \dots, e_r, f_r\}$ $\mathbb{C}^r_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2r}$ uzayının standard tabanıdır) şeklindedir.

$$\det(A_z - \lambda I) = \begin{vmatrix} r\cos\theta - \lambda & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = r^2\cos^2\theta + \lambda^2 + r^2\sin^2\theta - 2r\lambda\cos\theta$$
$$= \lambda^2 - 2r\cos\theta\,\lambda + r^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2r\cos\theta \pm \sqrt{4r^2\cos^2\theta - 4r^2}}{2}$$

$\Rightarrow \lambda = r\cos\theta \pm i r\sin\theta = z$ veya $\bar{z}$.

Özvektörler: $\lambda = z$, $(A_z - zI)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} r\cos\theta - z & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta - z \end{pmatrix} v = 0$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ise $(r\cos\theta - z)a - b r\sin\theta = 0 \Rightarrow r\sin\theta(-b - ia) = 0$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\lambda = \bar{z}$ için ise $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ olacaktır.

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_k - i f_k \leftarrow$ z ile çarpmanın özvektörü

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_k + i f_k \leftarrow$ $\bar{z}$ ile çarpmanın özvektörü

$z \in \mathbb{C}$ sayısı değiştikçe özdeğerler z ve $\bar{z}$ değişecektir fakat özvektörler aynı kalır ($z_1 z_2 = z_2 z_1$ olduğu için).

Dolayısıyla, $\underset{z}{\mathbb{C}^r_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \simeq \underset{z}{\mathbb{C}^r} \oplus \underset{\bar{z}}{\overline{\mathbb{C}}^r}$ yazabiliriz.

∎

Şimdi bir $E \to M$ $\mathbb{R}^k$-demeti için

$P(E) = \sum_{i \geq 0} p_i(E)$ ve $\tilde{P}(E) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i p_i(E)$ sınıflarını

17-) tanımlayalım.

Bu durumda, eğer E karmaşık bir vektör demeti ise

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = E \oplus \overline{E}$$ olduğu için

$$\tilde{P}(E) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i P_i(E)$$
$$= \sum_{i \geq 0} (-1)^i (-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$
$$= \sum_{i \geq 0} c_{2i}(E \oplus \overline{E})$$
$$= c(E \oplus \overline{E})$$
$$= c(E)\, c(\overline{E}).$$

Örnek: M karmaşık boyutu 2 olan karmaşık manifold olsun. Bu durumda, $E = T_*M$ karmaşık tanjant demeti ise $\tilde{P}(E) = c(E)\, c(\overline{E})$ olacağından

$$1 - P_1(E) = (1 + c_1(E) + c_2(E))\,(1 + c_1(\overline{E}) + c_2(\overline{E}))$$
$$= (1 + c_1(E) + c_2(E))\,(1 - c_1(E) + c_2(\overline{E})).$$
$$= 1 - c_1^2(E) + 2c_2(E)$$

(Manifold 4-boyutlu olduğu için çarpımın diğer terimleri sıfırdır.

O halde, $P_1(E) = c_1^2(E) - 2c_2(E) = c_1^2(E) - 2e(M)$ olur.

Özel olarak, $M = \mathbb{CP}^2$ ise $c_1(T_*M) = 3a$, $c_2(TM) = 3a^2$ olduğu için

$$P_1(T_*M) = c_1^2(T_*M) - 2e(T_*M) \qquad M = \mathbb{CP}^2.$$
$$= (3a)^2 - 2(3a^2)$$
$$= 9a^2 - 6a^2$$
$$= 3a^2.$$

Önerme: $E \to M$ bir $\mathbb{R}^k$-vektör demeti ve $f: N \to M$ türevlenebilir fonksiyon ise $P(f^*(E)) = f^*(P(E))$

ve $E_i \to M$, $i=1,2$ iki vektör demeti ise

$P(E_1 \oplus E_2) = P(E_1)\, P(E_2)$ olur.

Kanıt: $P(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i \geq 0} p_i(E_1 \oplus E_2)$

$$= \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_{2i}((E_1 + E_2) \otimes \mathbb{C})$$

$$= \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_{2i}(E_1 \otimes \mathbb{C} \oplus E_2 \otimes \mathbb{C})$$

$$= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{j+k=2i} c_j(E_1 \otimes \mathbb{C})\, c_k(E_2 \otimes \mathbb{C})$$

(tek Chern sınıfları sıfır olduğu için) $= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \sum_{2j+2k=2i} c_{2j}(E_1 \otimes \mathbb{C})\, c_{2k}(E_2 \otimes \mathbb{C})$

$$= \sum_{i \geq 0} \sum_{2j+2k=2i} (-1)^j c_{2j}(E_1 \otimes \mathbb{C})\, (-1)^k c_{2k}(E_2 \otimes \mathbb{C})$$

$$= \sum_{i \geq 0} \sum_{j+k=i} p_j(E_1)\, p_k(E_2)$$

$$= P(E_1)\, P(E_2). \quad \blacksquare$$

Son olarak bir önerme daha vereceğiz:

Önerme: $E \to M$ yönlendirilmiş bir $\mathbb{R}^{2k}$ demeti ise

$P_k(E) = (e(E))^2$ olur.

Uygulama: $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ yönlendirilmiş bir alt manifold olsun.

Bu durumda $T_* \mathbb{R}^n|_{M^m} = T_* M \oplus N$, N-normal demet.

(M ve $\mathbb{R}^n$ yönlendirilmiş olduğu için N de yönlendirilmiş olur.)

Fakat $T_*\mathbb{R}^n|_{M^n} = M^n \times \mathbb{R}^n$ aşikar demettir. O halde,

$$1 = P\left(T_*\mathbb{R}^n|_{M^n}\right) = P(T_*M \oplus N) = P(T_*M)\, P(N)$$ elde ederiz.

Başka bir değişle $H^*_{DR}(M)$ cebiri içinde $P(T_*M)$ elemanının tersi vardır.

__Örnek:__ $\mathbb{C}P^2 \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. O halde, $1 = P(T_*\mathbb{C}P^2)\, P(N)$ olur. $P(T_*\mathbb{C}P^2) = 1+3a^2$ olduğu için $P(N) = 1-3a^2$ olmalıdır. Dolayısıyla, $n=5$ olamaz çünkü bu durumda N aşikar $\mathbb{R}$-demeti ve dolayısıyla $P(N)=1$ olurdu.
Eğer $n=6$ olsaydı, yine N demeti yönlendirilebilir olduğu için karmaşık doğru demeti olurdu. O halde

$$\begin{aligned} \bar{P}(N) &= c(N)\, c(\bar{N}) \\ &= (1+\lambda a)(1-\lambda a) \\ &= 1-\lambda^2 a^2 \end{aligned}$$ ve bunadan $P(N) = 1+\lambda^2 a^2$ olur.

Fakat $\lambda^2 = -3$ olamaz. O halde, $n \geq 7$ olmalıdır.

__Pontryagin Sayıları__ M^{4n} tıkız yönlendirilmiş manifold olsun. Eğer $k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = n$ $(k_i \geq 0)$ olacak şekilde k_i tam sayıları varsa

$$\int_M P_{k_1}(M)\cdots P_{k_r}(M)$$ sayısına M manifoldunun bir Pontryagin sayısı denir.

__Önerme:__ Eğer $M = \partial W$ (W yönlendirilmiş manifold ise) M'nin tüm Pontryagin sayıları sıfırdır.

Bu önermenin tersi de doğrudur:

__Teorem__ (René Thom)
Eğer M^{4n} manifoldunun tüm Pontryagin sayıları sıfır ise M'nin sonlu sayıdaki kopyasının ayrık birleşimi bir W manifoldunun sınırını oluşturur.

Milnor'un Egzotik Küreleri:

Bu bölümde Milnor'un 1956 yılında yayınladığı makaleyi ele alacağız. Milnor, daha sonra kendisine Fields Madalyesi de kazandıracak bu çalışmasında 7-boyutlu S^7 küresine homeomorfik olup, difeomorfik olmayan manifoldlar inşa etmiştir. Bu çalışma Diferansiyel Topoloji'nin kuruluşu olarak anılır.

M 7-boyutlu türevlenebilir tıkız yönlendirilmiş bir manifold olsun öyle ki $H^3_{DR}(M) = H^4_{DR}(M) = 0$.

Ayrıca $\partial B = M$ olacak şekilde tıkız yönlendirilebilir bir 8-boyutlu B manifoldu varsa B'nin M'ye uygun şekilde yönlendirilmiş olduğunu kabul edeceğiz.

Şimdi Milnor'un tanımladığı $\lambda(M)$ değişmezinin tanımı yapacağız.

<u>Yardımcı Teorem.</u> $M = \partial B$ yukarıdaki gibi olsun.

$H^4_{DR}(B) \longrightarrow \mathbb{R}$, $[\alpha] \longmapsto \int_B \alpha^2$, $[\alpha] \in H^4_{DR}(M)$, ile tanımlanan fonksiyon iyi tanımlıdır.

<u>Kanıt:</u> Üç adımdan oluşmaktadır.

<u>Adım 1):</u> $[\alpha] = [\alpha'] \in H^4_{DR}(B)$ alalım. $\int_B \alpha^2 = \int_B \alpha'^2$ olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha - \alpha' = d\beta$, $\beta \in \Omega^3(B)$ şeklinde yazalım. O halde,

$\alpha = \alpha' + d\beta \Rightarrow \alpha^2 = \alpha'^2 + 2\alpha' \wedge d\beta + d\beta \wedge d\beta$

$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha'^2 = d(2\alpha' \wedge \beta + d\beta \wedge \beta)$ ve buradan da

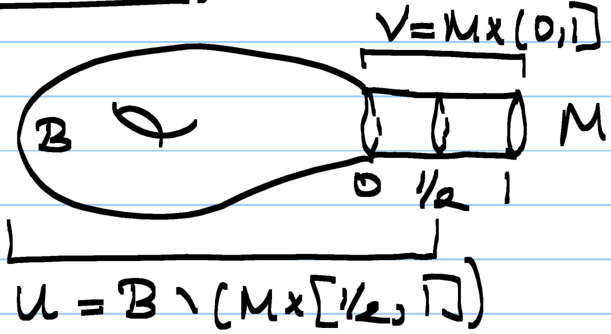
18-) $$\int_B \alpha^2 - \int_B \alpha'^2 = \int_B d(2\alpha' \wedge \beta + d\beta \wedge \beta)$$

$$= \int_{\partial B = M} 2\alpha' \wedge \beta + d\beta \wedge \beta$$

$$= \int_M (2\alpha' + d\beta) \wedge \beta \text{ , elde edilir.}$$

Dolayısıyla, $2\alpha' + d\beta$ formunun M üzerinde sıfır olacak şekilde seçilebileceğini göstermek yeterli olacaktır.

Adım 2)



U ve V açık alt kümeleri yandaki şekilde ki gibi olsunlar.

$U \cap V = M \times (0, 1/2)$ 'dir.

$H_c^k(U \cap V) = H_c^k(M \times (0, 1/2)) \simeq H_c^{k-1}(M) = H_{DR}^{k-1}(M)$ elde ederiz.

Ayrıca, $H_c^k(U \cup V) = H_c^k(B) = H_{DR}^k(B)$ ve

$H_c^k(U) \simeq H_c^k(B \setminus M)$ olduğu açıktır.

Şimdi Sayfa 42 deki bir sonucu kullanarak

$H_c^k(V, V \setminus M) \simeq H_c^k(M) = H_{DR}^k(M)$ eşitliğini elde ederiz.

Ayrıca yine aynı sayfadaki Tıkız Destekli Bağıl Kohomoloji DİZİSİNİ kullanarak $(V, V \setminus M)$ ikilisi için

$$\cdots \to H_c^n(V \setminus M) \to H_c^n(V) \to H_c^n(V, V \setminus M) \to H_c^{n+1}(V \setminus M) \to \cdots$$

tam dizisini yazabiliriz.

İddia: $H^k_c(V)=0$.

Kanıt: $H^k_c(V \setminus M) = H^k_c(M \times [0,1)) \simeq H^{k-1}_c(M) = H^{k-1}_{DR}(M)$
eşitliğini yukarıdaki dizide kullanırsak

$$\cdots \xrightarrow{\simeq} H^{n-1}_{DR}(M) \to \underset{\underset{=0}{\Downarrow}}{H^n_c(V)} \to H^n_{DR}(M) \xrightarrow{\simeq} H^n_{DR}(M) \to \cdots$$

elde edilir.

Adım 3) $B = U \cup V$ için Tıkız Destekli Meyer-Vietoris Tam Dizisini kullanalım:

$$\cdots \to H^k_c(U\cap V) \to H^k_c(U) \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{Adım 2}}{H^k_c(V)} \to H^k_c(B) \to H^{k+1}_c(U \cap V) \to \cdots$$

$$\Rightarrow \to H^{k-1}_{DR}(M) \to H^k_c(B \setminus M) \to H^k_{DR}(B) \to H^k_{DR}(M) \to \cdots$$

$k=4$ alalım.

$$\to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^3_{DR}(M)} \to H^4_c(B \setminus M) \xrightarrow{\simeq} H^4_{DR}(B) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^4_{DR}(M)} \to \cdots$$

elde edilir. Dolayısıyla, başlangıçta seçtiğimiz α, α' ($[\alpha]=[\alpha'] \in H^4_{DR}(B)$) formları $B \setminus M$ içinde desteklenecek şekilde seçilebilir. O halde, α, α' ve $d\beta = \alpha - \alpha'$ formlarını M üzerinde sıfır olacak şekilde seçebiliriz. Bu kanıtı tamamlar. ■

$H^4_{DR}(B) \to \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int_B \alpha^2$ kuadratik formunun endeksini $\tau(B)$ ile gösterelim. Açık bir şekilde $\tau(-B) = -\tau(B)$ olduğunu görürüz.

Ayrıca $q(B) = Q(p_1(B)) = \int_B p_1^2(B)$ tam sayısını tanımlayalım.

Son olarak M^7 manifoldunun λ–değişmezi

$\lambda(M) = 2q_1(B) - \tau(B) \pmod 7$ olarak tanımlanır.

<u>Teorem</u> $2q_1(B) - \tau(B) \pmod 7$ sayısı B manifoldunun seçiminden bağımsızdır ve dolayısıyla $\lambda(M)$ M–manifoldunun iyi tanımlı bir değişmezidir.

Kanıta geçmeden önce teoremin iki sonucunu verelim:

$\lambda(M)$ değişmezinin tanımından dolayı eğer $H^4_{DR}(B)=0$ ise hem $[\alpha]=0$ hemde $p_1(B)=0$ olur. Dolayısıyla, $\lambda(M)=0$'dır.

<u>Sonuç</u>: Eğer $\lambda(M)$ sayısı sıfırdan farklı ise M manifoldu 4. Betti sayısı sıfır olan bir B manifoldunun sınırı olamaz.

<u>Uyarı</u>: $S^7 = \partial D^8$ ve $H^4_{DR}(D^8)=0$ olduğu için

$\lambda(S^7)=0$'dır.

M manifoldunun yönlendirmesini değiştirirsek B'nin yönlendirmesi de değişecektir. Dolayısıyla,

$$\lambda(-M) = -\lambda(M) \text{ olur.}$$

[$M=\partial B$ ise $-M=\partial(-B) \Rightarrow \tau(-B) = -\tau(B)$ ve $q(-B) = -q(B)$.]

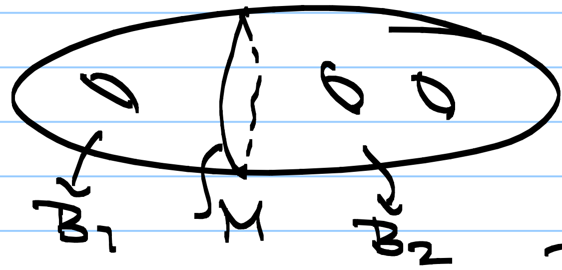
<u>Sonuç</u>: Eğer $\lambda(M)$ değişmezi sıfırdan farklı ise M manifoldunun yönünü ters çeviren bir diffeomorfizması yoktur.

<u>Uyarı</u>: S^7 manifoldunun $(x_1, x_2, \dots, x_8) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_8)$ difeomorfizması yönü ters çevirir.

Şimdi teoremin kanıtına dönelim:

Kanıt iki adımdan oluşmaktadır:

Adım 1) B_1^8 ve B_2^8 sınırları M^7 olan iki tıkız yönlü düzülmüş manifold olsunlar. $C = B_1 \cup_{\partial} -B_2$ manifoldunu düşünelim:



C manifoldunun kesişim formunun endeksi "Endeks Teori"den dolayı şöyle hesaplanır:

$$\tau(C) = \frac{1}{45}\int_C 7p_2(C) - p_1^2(C).$$

Buradan,
$$45\tau(C) + q(C) = 45\tau(C) + \int_C p_1^2(C)$$
$$= 7\int_C p_2(C) \equiv 0 \pmod 7.$$

En sondaki eşitlik Pontryagin sayılarının tamsayı olmasının sonucudur:

$p_2(C) = c_4(T_*C \otimes \mathbb{C}) = e[(T_*C \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}]$ dir ve teğet demetin Euler sayısı bir kesişime eşit olduğu için her zaman bir tamsayıdır. $p_1^2(C)$ için ise daha sonra kanıtlayacağımız
$$p_1^2(C) = p_1^2(B_1) - p_1^2(B_2)$$ eşitliğini kullanabiliriz.

Son olarak $45\tau(C) + q(C) \equiv 0 \pmod 7$ eşitliğini 2 ile çarparak $2q(C) - \tau(C) \equiv 0 \pmod 7$ eşitliğini elde ederiz.

Adım 2) Şimdi yukarıda ele aldığımız manifoldlar için

$\tau(C) = \tau(B_1) - \tau(B_2)$ ve $q(C) = q(B_1) + q(B_2)$ olduğunu

19-) kanıtlayacağız. Bunun için $C = B_1 \cup_\varphi -B_2$ manifoldunun B_i bileşenlerinin ortak sınırı olan $M = \partial B_1 = -\partial B_2$ manifoldunun bir tüp komşuluğunu, $N \simeq M \times (-1,1)$, ele alalım. $U = B_1 \cup N$, $V_2 = -(B_2 \cup N)$ açık kümeleri-ni için tıkız destekli Meyer-Vietoris dizisini yazalım:

$$\cdots \to H_c^k(U\cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(U\cup V) \to H_c^{k+1}(U\cap V) \to \cdots$$

Şimdi, yukarıda yaptığımız gibi, $H_c^k(B_i \cup N) \simeq H_c^k(B_i - M)$ (iki manifold arasında düzgün bir difeomorfizma var olduğu için) yazabiliriz. Ayrıca $H^3_{DR}(M) = H^4_{DR}(M) = 0$ olduğu için

$H_c^k(U\cap V) = H_c^k(M\times(-1,1)) = H_c^{k-1}(M) = 0$, $k = 4, 5$ elde ederiz. Buradan,

$$0 = H_c^4(U\cap V) \to H_c^4(U)\oplus H_c^4(V) \xrightarrow{\simeq} H_c^4(C) \to H_c^5(U\cap V) = 0$$

olur.

O halde, aşağıdaki değişmeli şekli yazabiliriz:

$$\begin{tikzcd}
H^4_c(C) \arrow[d, "="'] & H^4_c(B_1 \setminus M) \oplus H^4_c(B_2 \setminus M) \arrow[l, "\simeq"', "MV_c"] \arrow[d, "\simeq"] \\
H^4_{DR}(C) \arrow[r, "\simeq", "MV_{DR}"'] & H^4_{DR}(B_1) \oplus H^4_{DR}(B_2)
\end{tikzcd}$$

Alt satırdaki izomorfizma De Rham Kohomoloji Meyer-Vietoris dizisinden elde edilmiştir (Alıştırma!).
Sol taraftaki düşey fonksiyon birim fonksiyondur. Sağ taraftaki izomorfizmalar ise yukarıda kanıtladığımız yardımcı teoremin kanıtının 3. Adımının sonucudur.
Bu şekil bize $H^4_{DR}(C) = H^4_c(C)$ içinden alacağımız her α sınıfının $\beta_i \in H^4_c(B_i - M)$, $i = 1, 2$, olmak üzere $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ olarak tek şekilde yazılabileceğini ($[\beta_i]$ sınıfları tektir) ve dolayısıyla β_1 ve β_2 kapalı formlarının desteklerinin ayrık kümeler olarak seçilebileceğini gösterir. Dolayısıyla, $\alpha^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ olur! O halde, $\tau(C) = \tau(B_1) - \tau(B_2)$ eşitliğini kanıtlamış oluruz. $q(C) = q_1(B_1) - q_2(B_2)$ eşitliği için ise

ayrıca Pontryagin sınıflarının doğal olduklarını kullanmalıyız. Başka bir deyişle eğer $i_1 : B_1 \to C$ ve $i_2 : B_2 \to C$ içerme fonksiyonları ise $i_1^*(P_1(C)) = P_1(B_1)$ ve $i_2^*(P_1(C)) = P_1(B_2)$ olur. Böylece,

$$2q(B_1) - \tau(B_1) \equiv 2q(B_2) - \tau(B_2) \pmod 7$$ elde edilmiş olur.

S^4-küresi Üzerindeki $\mathbb{R}^4$-demetleri:

S^4 küresinin teğet demetinden başlayalım:

$S^4 = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}/_{p \sim \phi(p) = 1/p}$, $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ kuaterniyon cebiri.

$\phi'(p) : T_p\mathbb{H} \to T_p\mathbb{H}$, öyle ki

$$\phi'(p)(v) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(p+hv) - \phi(p)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\bar{p}+h\bar{v})/\|p+hv\|^2 - \bar{p}/\|p\|^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|p+hv\|^2} (\bar{p}+h\bar{v}) \left[\|p\|^2 - (p+hv)\bar{p}\right] \frac{1}{h\|p\|^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{p+hv} \left[\|p\|^2 - \|p\|^2 - hv\bar{p}\right] \frac{1}{h\|p\|^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{p+hv} (-v\bar{p}) \frac{1}{\|p\|^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{p+hv} v \frac{1}{p} = -\frac{1}{p} v \frac{1}{p}$$ olur.

Dolayısıyla, $T_* S^4 \cong T_*\mathbb{H} \,\dot\cup\, T_*\mathbb{H}/(p,v)\sim(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} v \frac{1}{p})$

(-1 işaretini göz ardı edebiliriz çünkü $\mathbb{H}^*$ içinde -1 noktasını 1'e bağlayan bir eğri vardır!)

$\mathcal{O}(k)\to S^2 = \mathbb{C}P^1$ demetlerine benzer şekilde, her $(h,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tam sayı çifti için

$\xi_{h,j}\to S^4$ demeti şu şekilde tanımlanır:

$$\xi_{h,j} = \mathbb{H}\times\mathbb{H} \,\dot\cup\, \mathbb{H}\times\mathbb{H}/(p,v)\sim(\tfrac{1}{p}, p^h v p^j),\ p\in\mathbb{H}^*.$$

Bu durumda, $T_* S^4 \cong \xi_{-1,-1}$ olur.

Şimdi $\xi_{h,j}\to S^4$ $(p,v)\mapsto p$, demetinin Euler ve Pontryagin sınıflarını hesaplayalım. Bunu adımlar halinde yapacağız:

A-) Eğer $h+j\leq 0$ ise, her iki yerel koordinat sisteminde de, $s_i:\mathbb{H}\to T_*\mathbb{H}$, $p\mapsto(p, 1+p^{-h-j})$, $i=1,2$, ifadesiyle verilen yerel kesitler

$$p^h s_1(p) p^j = p^h(1+p^{-h-j})p^j = p^{h+j}+1 = s_2(1/p)$$

koşulunu sağladığı için global bir kesitini verirler.

1944 yılında Eilenberg ve Niven tarafından yazılan bir makalede derecesi n olan kuaterniyon bir $g:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ polinomunun topolojik derecesinin de n olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla, bu kesitin sıfırlarının işaretli toplamı n tam sayısıdır. Başka bir deyişle $h+j\leq 0$ ise $\xi_{h,j}\to S^4$ demetinin Euler sayısı $-(h+j)$'dir.

Özel durumda, $e(T_* S^4) = e(\xi_{-1,-1}) = -(-1-1) = 2$

elde edilir.

$h+j>0$ olduğu durumu ise küçük bir hileye başvuracağız. $\xi_{h,j}\to S^4$ demetini belirleyen $(p,v)\mapsto(1/p,\, p^h v p^j)$ yapıştırma fonksiyonu

$$(t,(p,v))\mapsto\left(1/p,\ \frac{p^h}{t+(1-t)\|p\|^{2h}}\cdot v\cdot\frac{p^j}{t+(1-t)\|p\|^{2j}}\right),\quad t\in[0,1],$$

homotopisi yardımıyla $(p,v)\mapsto\left(1/p,\ \frac{p^h}{\|p\|^{2h}}\cdot v\cdot\frac{p^j}{\|p\|^{2j}}\right)$ yapıştırma fonksiyonuna homotopiktir.

$\|p\|^{2k}=p^k\bar{p}^k$ olduğu için son ifade $\left(1/p,\ (\bar{p})^{-h}\cdot v\cdot(\bar{p})^{-j}\right)$

ifadesine eşittir. $w=(\bar{p})^{-h}v(\bar{p})^{-j}$ ise

$\bar{w}=p^{-j}\cdot\bar{v}\cdot p^{-h}$ olduğu için, eğer $u=\bar{v}$ ise bu yapıştırma fonksiyonu

$(p,u)\mapsto(1/p,\ \bar{p}^{j}u\bar{p}^{h})$ fonksiyonuna eşit olur.

$u=\bar{v}$ dönüşümü liflerin yönünü ters çevirdiğinden

$-\xi_{h,j}=\xi_{-j,-h}$ eşitliğini elde etmiş oluruz.

O halde, $h+j>0$ durumunda da

$$e(\xi_{h,j})=-e(-\xi_{h,j})=-e(\xi_{-j,-h})=-(h+j)$$

elde edilir. O halde, $\xi_{h,j}\to S^4$ demetinin Euler sayısını (sınıfını) hesaplamış olduk.

B-) Yukarıda kullandığımız tekniği bu sefer hem taban manifoldu S^4'ün hem de lifin yönünü değiştirerek tekrar uygulayalım. Bunun için $(p,v)\in\mathbb{H}^*\times\mathbb{H}$ değişkenlerini $(q,u)\doteq(\bar{p},\bar{v})$

20-) değişkenleriyle değiştirelim. Bu durumda, $\xi_{h,j}$ demetini belirleyen $(p,v)\mapsto(1/p,\, p^h v p^j)$ yapıştırma fonksiyonu $\xi_{j,h}$ demetini belirleyen yapıştırma fonksiyonuna dönüşecektir.

$$(p,v) \xrightarrow{\ \xi_{h,j}\ } \left(1/p,\ p^h v p^j\right)$$

$$\downarrow J \qquad\qquad\qquad \downarrow J$$

$$(\bar p,\bar v) \longmapsto \left(\frac{1}{\bar p},\ \overline{p^h v p^j}\right)$$

$$(\bar p,\bar v) = (q,u)$$

$$\left(\frac{1}{\bar p},\ \overline{p^h v p^j}\right) = \left(\frac{1}{\bar p},\ \overline{p^j}\,\bar v\,\overline{p^h}\right) = \left(\frac{1}{\bar p},\ \bar p^{\,j}\,\bar v\,\bar p^{\,h}\right) = \left(\frac{1}{q},\ q^j u q^h\right)$$

$$(q,u) \xrightarrow{\ \xi_{j,h}\ } \left(\frac{1}{q},\ q^j u q^h\right)$$

Şimdi de $\xi_{h,j}$ demetini $\xi_{j,h}$ demetine dönüştürmenin bu işlemin Pontryagin sınıfını nasıl etkilediğini görelim.

Demetin lifleri yönlendirilmiş gerçel vektör uzaylarıdır. Tabanı $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ olan yönlendirilmiş bir gerçel V vektör uzayının ters yönlendirmesi, $-V$, $-\mathcal{B}=\{-v_1,v_2,\dots,v_n\}$ ile verilir.

Diğer yandan hem $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ hem de $-V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ karmaşık vektör uzaylarının doğal yönlendirmeleri

$\{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$ ve $\{-v_1, -iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$

ile verilir ki bu iki yönlendirme aynıdır.

Dolayısıyla bir gerçel demetin liflerinin yönünü değiştirmek demetin Pontryagin sınıflarını etkilemez.

Diğer yandan tabanın yönünü değiştirmek, $f: S^4 \to S^4$, $f(p) = \bar{p}$ fonksiyonu ile demeti

geri çekmeye denk olacaktır. Yerel koordinatlarda $(S^4 = \mathbb{H} \cup \mathbb{H} / p \sim -p)$ yazdığımızda

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, x_2, x_3, x_4)$ olacaktır. Dolayısıyla

$a = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ formu için $f^*(a) = -a$ olur. Başka bir deyişle, $f^*: H^4_{DR}(S^4) \to H^4_{DR}(S^4)$ homomorfizması -1 ile çarpmaya denk gelir.

O halde, $P_1(\xi_{j,h}) = P_1(f^*(\xi_{h,j})) = f^*(P_1(\xi_{h,j})) = -P_1(\xi_{h,j})$

elde edilir.

<u>Sonuç:</u> Her $k \in \mathbb{Z}$ için $P_1(\xi_{k,k}) = 0$ olur.

Dolayısıyla, $P_1(T_* S^4) = P_1(\xi_{-1,-1}) = 0$'dır.

c-) Yukarıda yaptığımızı bir adım daha ilerletebiliriz.

Her $p, q \in \mathbb{H}$ için $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ olduğundan sabit bir $p \neq 0$ elemanı için, aşağıdaki gibi tanımlanan

$\varphi_1 : \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $v \mapsto vp$, ve

$\varphi_2 : \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $v \mapsto \overline{vp} = \bar{p}\bar{v}$ fonksiyonları

$GL(4, \mathbb{R})$ doğrusal izomorfizmalar uzayı içinde homotopik olmasalar da (determinantları farklı işaretlere sahiptir) bu doğrusal fonksiyonların kompleksifikasyonları,

$\varphi_1 \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^4 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^4, \ v \mapsto vp,$

ve $\varphi_2 \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^4 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^4, \ v \mapsto \overline{vp} = \bar{p}\bar{v},$

karmaşık doğrusal homomorfizmalar uzayı için de, $GL(4,\mathbb{C})$, homotopiktirler, çünkü $GL(4,\mathbb{C})$ yol bağlantılıdır.

O halde, $\mathbb{C}$ ile tensör edildikten sonra,

$(p,v) \mapsto (1/p, \ p^h v \, p^j)$ yapıştırma fonksiyonu

$(p,v) \mapsto (1/p, \|p\|^2 p^{h-1} \, \bar{v} \, p^{j-1})$ ve dolayısıyla

$(p,v) \mapsto (1/p, \ p^{h-1} \, \bar{v} \, p^{j-1})$ yapıştırma fonksiyonuna

homotopik olacaktır, çünkü $p^h v p^j$ yerine buna homotopik olan

$$p^h v p^j = p^h (vp) p^{j-1} \simeq p^h \bar{p} \bar{v} p^{j-1} = \|p\|^2 p^{h-1} \bar{v} p^{j-1}$$

fonksiyonunu yazabiliriz ($\simeq$ ile homotopik olma kastedilmektedir).

Dolayısıyla, $p_1(\xi_{h,j}) = p_1(\xi_{h-1,j-1})$ olur.

Bu eşitliği defalarca kullanarak

$$p_1(\xi_{h,j}) = p_1(\xi_{h-j,0}) \text{ elde edilir.}$$

Şimdi de işimizi bir parça daha kolaylaştırmak derecesi h olan $(h \in \mathbb{Z})$

$$g_h : S^4 = \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H}/\sim \ \to \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H}/\sim \ = S^4, \ p \mapsto p^h,$$

fonksiyonu için $g_h^*(\xi_{1,0}) = \xi_{h,0}$ olduğunu gözlemleyelim. Fonksiyonun derecesi h olduğu için

$$P_1(\xi_{h,0}) = P_1(g_h^*(\xi_{1,0})) = g_h^*(P_1(\xi_{1,0})) = h\,P_1(\xi_{1,0})$$

elde ederiz.

D-) Son olarak $P_1(\xi_{1,0})$ sınıfını hesaplamak için küçük bir hileye başvuracağız. Genelde $\xi_{h,j} \to S^4$ demetleri karmaşık yapı kabul etmeselerde $\xi_{1,0} \to S^4$ demeti kabul eder. Bunu görmek için $p, v \in \mathbb{H}$ kuaterniyonlarını

$p = a + bi + cj + dk = A + jB$, $A = a + bi$, $B = c - di$ ve
$v = e + fi + gj + hk = C + jD$, $C = e + fi$, $D = g - hi$ şeklinde

$\mathbb{C}^2$ içinde vektörler olarak yazalım. Bu durumda $p \cdot v$ çarpımı aşağıdaki matris çarpımına dönüşür:

$$p \cdot v \longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

Sağ taraftaki çarpım karmaşık matrislerin çarpımıdır ve dolayısıyla, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(v, z) \longmapsto \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} Cz \\ Dz \end{bmatrix}$$ çarpımı kuaterniyon

çarpımı ile uyumludur: $(q \cdot v) \cdot z = q \cdot (v \cdot z)$.

Bu sayede $\xi_{1,0}$ demeti karmaşık yapı kabul etmiş olur.

O halde, $P_1(\xi_{1,0}) = c_1^2(\xi_{1,0}) - 2c_2(\xi_{1,0}) = 0 - 2e(\xi_{1,0})$

$\Rightarrow P_1(\xi_{1,0}) = -2(-1-0)\nu = 2\nu$, $\nu \in H^4_{DR}(S^4)$, $\int_{S^4} \nu = 1$, olur.

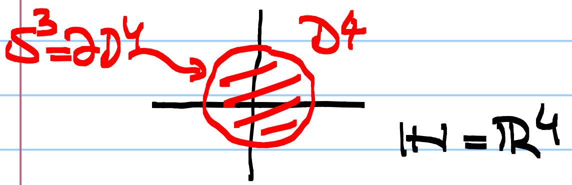
Son olarak, $P_1(\xi_{h,j}) = P_1(\xi_{h-j,0}) = (h-j)P_1(\xi_{1,0}) = 2(h-j)\nu$'dir.

Sonuç: $P_1(\xi_{h,j}) = 2(h-j)\nu$ ve $e(\xi_{h,j}) = -(h+j)\nu$'dir.

Egzotik Kürelerin İnşaası

Verilen her tek k tam sayısı için $h+j=-1$, $h-j=k$ olacak şekilde h,j tam sayıları seçelim. $\xi_{h,j} \to S^4$ vektör demetinin birim disk demetinin toplam uzayını $B_k = B_k^8$ ve bu manifoldun sınırını oluşturan S^3-demetinin toplam uzayını da $M_k = M_k^7 = \partial B_k^8$ ile gösterelim:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{H} \to \xi_{h,j} & & \supseteq & & D^4 \to B_k & & \supseteq & & S^3 = \partial D^4 \to M_k \\
\| \quad \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathbb{R}^4 \quad S^4 & & & & S^4 & & & & S^4
\end{array}
$$

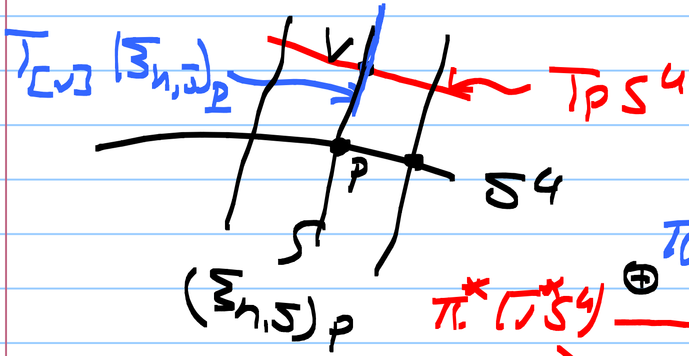


Yardımcı Teorem: $\lambda(M_k) = k^2 - 1 \pmod 7$.

Kanıt: $\pi : B_k \to S^4$ demeti için herhangi $(p,[v]) \in B_k$ noktası için

$$T_{(p,[v])} B_k = T_p S^4 \oplus T_{[v]} (\xi_{h,j})_p \quad \text{olur.}$$

Burada, $(\xi_{h,j})_p = \pi^{-1}(p)$ lifidir.



Dolayısıyla,

$$T_* B_k = \pi^*(T_* S^4) \oplus \pi^*(\xi_{h,j}) \text{'dir.}$$

$$
\begin{tikzcd}
\pi^*(\xi_{h,j}) \arrow[rr] \arrow[d] & & \xi_{h,j} \arrow[d] \\
\pi^*(T_* S^4) \arrow[rr] \arrow[d] & & T_* S^4 \arrow[d] \\
B_k \arrow[rr, "\pi"] & & S^4
\end{tikzcd}
$$

$\oplus \qquad \oplus$

$[\nu] \in H^4_{DR}(S^4)$, $\int_{S^4} \nu = 1$ olmak üzere $\alpha = \pi^*(\nu)$ olsun.

O halde, Whitney Çarpım Kuralından

$$p_1(B_k) \doteq p_1(T_* B_k) = p_1(\pi^*(T_* S^4) \oplus \pi^*(\xi_{h,\jmath}))$$
$$= p_1(\pi^*(T_* S^4)) + p_1(\pi^*(\xi_{h,\jmath}))$$
$$= \pi^*(p_1(T_* S^4)) + \pi^*(p_1(\xi_{h,\jmath}))$$
$$= 0 + 2(h-\jmath)\alpha = 2k\alpha \text{ olur.}$$

Diğer taraftan $h+\jmath=-1$ olduğundan $\xi_{h,\jmath}$ demetinin Euler sınıfı $-(h+\jmath)\nu = \nu$'dir.

<u>iddia:</u> $\int_{B_k} \alpha^2 = 1.$

<u>Kanıt:</u> B_k toplam uzayı S^4-taban manifolduna homotopi denk olduğu için (her bir D^4 lifi $0 \in D^4$ noktasına büzülebilir) $\pi^*: H^4_{DR}(S^4) \to H^4_{DR}(B_k)$ bir izomorfizmadır.

Bu disk demetinin sıfır kesitini S^4 ile gösterelim, $S^4 \subseteq B_k$. Bu alt manifoldun Poincaré duali $\beta \in H^4_{DR}(B_k)$ olsun. O halde, $\beta = a\alpha$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $\pi: B_k \to S^4$ demetinin Euler sayısı 1 olduğu için bu kesit kendisini bir noktada keser. Başka bir deyişle,

$$1 = S^4 \pitchfork S^4 = \int_{S^4} \beta = \int_{B_k} \beta^2 \text{ olur.}$$

Diğer yandan tanımı gereği $\int_{S^4} \alpha = 1$ olduğundan $\beta = \alpha$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\int_{B_k} \alpha^2 = 1$ elde edilir. ∎

Şimdi, $\tau(B_k) = 1$ ve $q(B_k) = \int_{B_k} p_1^2(B_k) = \int_{B_k} 4k^2\alpha^2 = 4k^2$ olur.

O halde, $\lambda(M_k) = 2q(B_k) - \tau(B_k) = 8k^2 - 1 = k^2 - 1 \pmod 7$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. ∎

<u>Teorem:</u> Her tek $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için M_k manifoldu standard S^7 küresine homeomorfiktir. Diğer taraftan $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için $k^2 - 1 \neq 0 \pmod 7$ ise M_k manifoldu standard S^7 küresine difeomorfik değildir.

<u>Kanıt:</u> Bir önceki sonuçtan dolayı eğer $\lambda(M_k) = k^2 - 1 \neq 0 \pmod 7$ ise M_k standard S^7 küresine difeomorfik olamaz çünkü $S^7 = \partial D^8$ ve $\tau(D^8) = 0 = q(D^8)$ olduğu için $\lambda(S^7) = 0$'dır.

İlk kısım için
$$M_k = \mathbb{H} \times S^3 \cup \mathbb{H} \times S^3 / (p,v) \sim \left(1/p, \frac{1}{\|p\|^{h+j}} p^h v p^j\right), \ p \in \mathbb{H}_*$$
$$= \mathbb{H} \times S^3 \cup \mathbb{H} \times S^3 / (p,v) \sim (1/p, \|p\| p^h v p^j) \doteq (q,u)$$

($h + j = -1$ olarak seçilmişti).

Şimdi (p,v) koordinat sisteminde $F(p,v) = \dfrac{Re(v)}{\sqrt{1+\|p\|^2}}$ ve diğer koordinat sisteminde ise, $w = q\frac{1}{u}$ olmak üzere
$$F(q,u) \doteq \frac{Re(w)}{\sqrt{1+\|q\|^2}} = \frac{Re\left(\frac{\|p\|}{p} \bar{p}^j \bar{v} \bar{p}^h\right)}{\sqrt{1+1/\|p\|^2}}$$
$$= \frac{\|p\| \, Re\left(\frac{\|p\|}{p} \bar{p}^j \bar{v} \bar{p}^h\right)}{\sqrt{1+\|q\|^2}}$$
$$= \frac{Re(\bar{p}^{j+1} \bar{v} \bar{p}^h)}{\sqrt{1+\|p\|^2}} = \frac{Re(\bar{p}^{h+j+1} \bar{v})}{\sqrt{1+\|p\|^2}} = \frac{Re(\bar{p}^0 v)}{\sqrt{1+\|p\|^2}}$$
$$= \frac{Re(v)}{\sqrt{1+\|p\|^2}}$$

şeklinde tanımlansın (iyi tanımlı olduğu açıktır).

Bu fonksiyonun sadece iki tane yozlaşmamış kritik noktası (ve değeri) gösterilebilir (f fonksiyon). Bu iki nokta mutlak maksimum/minimum noktalarıdır.

Dolayısıyla, bu iki kritik noktanın endeksleri 0 veya 7 olur. O halde, kritik noktaların civarında manifold D^7 olur. Aradaki tüm arakesitler S^6'ya difeomorfiktir. Buradan M'nin S^7'ye homeomorfik olduğu kolayca görülebilir. ∎