

# Sayılar ve Matematikte Sonsuz

Mahmut Kuzucuođlu

Orta Dođu Teknik Üniversitesi

*Matematik Bölümü*  
*matmah@metu.edu.tr*  
*İlkyar-2017*

17Temmuz 2017

Ben kimim ?

Denizli'nin al ilçesinin Ortaköy kasabasında 1958 yılında  
bu evde dođdum.



1981 yılında ODTÜ Matematik Bölümünden mezun oldum.

1984 yılında ODTÜ Matematik Bölümünde Yüksek lisansımı tamamladım.

Amerikanın Ohio Eyaletindeki Toledo Üniversitesinde 1985 yılında ikinci bir Yüksek Lisans yaptım.



İngilterenin Manchester Üniversitesinde 1988 yılında  
doktoramı bitirdim.



Ailecek 1988 yılında 3 aylığına Rusyanın Sibirya Bölgesinde Krasnoyarsk Üniversitesine gittik.





2012 yılında İtalyanın İschia adasındaki bir konferansa katıldım.





## 4th BIENNIAL INTERNATIONAL GROUP THEORY CONFERENCE 2017

23-26 JANUARY 2017 | UTM KUALA LUMPUR, MALAYSIA

Organized by **Applied Algebra and Analysis Research Group (AAAG)**  
in collaboration with **Faculty of Science & UTM International**







**UTM**  
4th BIENNIAL  
INTERNATIONAL  
GROUP THEORY  
CONFERENCE 2017

23-26 JANUARY 2017  
UTM KUALA LUMPUR,  
MALAYSIA

Organized by  
Applied Algebra and Analysis  
Research Group (AAAR)  
in collaboration with  
Faculty of Science & UTM International



**SAYILAR**

# Sayılar

Mahmut KUZUCUOĐLU  
Orta DoĐu Teknik Üniversitesi  
Matematik Bölümü  
Ankara  
**matmah@metu.edu.tr**

İlkyar-2017

# Neler Öğreneceğiz:

- Sayılar ihtiyaçtan doğmuştur, şimdi bildiğimiz bazı sayı sistemlerini inceleyelim.

# Sayılar

Varlıkları ve çoklukları saymada kullandığımız ve  $0, 1, 2, 3, \dots$  diye devam eden sayılara doğal sayılar diyoruz ve  $\mathbb{N}$  ile gösteriyoruz. Yani

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$$



# Sayılar

Bu dünyada herşeyin bir temeli olduğu gibi doğal sayıların da temeli diyebileceğimiz sayılar vardır.

# Sayılar

Bu dünyada herşeyin bir temeli olduğu gibi doğal sayıların da temeli diyebileceğimiz sayılar vardır.

Buradan kastımız, birden büyük her doğal sayıyı bu temel sayıları kullanarak üretebiliriz.

# Sayılar

Bu dünyada herşeyin bir temeli olduğu gibi doğal sayıların da temeli diyebileceğimiz sayılar vardır.

Buradan kastımız, birden büyük her doğal sayıyı bu temel sayıları kullanarak üretebiliriz.

Bu temel doğal sayılara **asal sayı** diyoruz. Nasıl ki binalar için yapı taşları varsa, doğal sayılar için de yapı taşları asal sayılardır.

# Sayılar

Şimdi asal sayıların tanımını verelim.

1 den büyük bir doğal sayı, sadece kendisine ve 1 e bölünüyorsa bu sayılara **asal sayı** denir.

**Örnek.** 3, 5, 7, 11 gibi .

Şimdi 1 den 100 e kadar olan asal sayıların kümesini verelim.

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97} dir.

Toplam olarak 100 e kadar 25 tane asal sayı vardır.

# Sayılar

Tanım olarak bir doğal sayının çift sayı olması 2 ile bölünebilmesi anlamına gelir.

# Sayılar

Tanım olarak bir doğal sayının çift sayı olması 2 ile bölünebilmesi anlamına gelir.

Bu durumda hem asal, hem de çift sayı olan kaç tane doğal sayı vardır sorusunu düşünelim.

# Sayılar

Tanım olarak bir doğal sayının çift sayı olması 2 ile bölünebilmesi anlamına gelir.

Bu durumda hem asal, hem de çift sayı olan kaç tane doğal sayı vardır sorusunu düşünelim.

Tanım gereği 2'nin asal olduğunu biliyoruz. Ancak 2'den

büyük her doğal çift sayının bölenlerinden biri 2 olduğundan çift sayılardan asal olan sadece 2'dir diyebiliriz.

# Asal Sayılar

Şimdi daha büyük bazı asal sayılara örnekler verelim. 101

883

2011

2017

2027 (2037 asal değildir)

4231, 4463, 8563, 9629, 9907



# Asal Sayılar

32416187567 32416188223 32416188809 32416189391  
32416187627 32416188227 32416188839 32416189459  
32416187651 32416188241 32416188859 32416189469  
32416187659 32416188257 32416188877 32416189493  
32416187701 32416188269 32416188887 32416189499  
32416187719 32416188271 32416188899 32416189511  
32416187737 32416188331 32416188949 32416189573  
32416187747 32416188349 32416189019 32416189633  
32416187761 32416188367 32416189031 32416189657  
32416187773 32416188397 32416189049 32416189669  
32416187827 32416188449 32416189061 32416189681  
32416187863 32416188451 32416189063 32416189717  
32416187893 32416188491 32416189079 32416189721  
32416187899 32416188499 32416189081 32416189733  
32416187927 32416188517 32416189163 32416189753  
32416187929 32416188527 32416189181 32416189777  
32416187933 32416188583 32416189193 32416189853

# Asal Sayılar

Şimdi size 1-10 000 sayıları arasındaki asal sayıların tablosunu verelim.

# Asal Sayılar

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73  
79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151  
157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229  
233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311  
313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397  
401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479  
487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577  
587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659  
661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757  
761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857  
859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953  
967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033  
1039 1049 1051 1061 1063 1069 1087 1091 1093 1097 1103  
1109 1117 1123 1129 1151 1153 1163 1171 1181 1187 1193  
1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279

# Asal Sayılar

1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373 1381  
1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453 1459  
1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543  
1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609  
1613 1619 1621 1627 1637 1657 1663 1667 1669 1693 1697  
1699 1709 1721 1723 1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783  
1787 1789 1801 1811 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873  
1877 1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973  
1979 1987 1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039  
2053 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129

# Asal Sayılar

2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207 2213 2221  
2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297  
2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381  
2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423 2437 2441 2447 2459  
2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557  
2579 2591 2593 2609 2617 2621 2633 2647 2657 2659 2663  
2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719  
2729 2731 2741 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797 2801  
2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897  
2903 2909 2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999  
3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079 3083  
3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181 3187 3191  
3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257 3259 3271 3299  
3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361  
3371 3373 3389 3391 3407 3413

# Asal Sayılar

3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511 3517  
3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571 3581 3583  
3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659 3671 3673  
3677 3691 3697 3701 3709 3719 3727 3733 3739 3761 3767  
3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823 3833 3847 3851 3853  
3863 3877 3881 3889 3907 3911 3917 3919 3923 3929 3931  
3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027  
4049 4051 4057 4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 4129  
4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229  
4231 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297  
4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409 4421  
4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513  
4517 4519 4523 4547 4549 4561 4567 4583 4591 4597 4603  
4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679 4691  
4703 4721 4723 4729 4733 4751 4759 4783 4787 4789 4793  
4799 4801 4813 4817 4831 4861 4871 4877 4889 4903 4909  
4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987

# Asal Sayılar

5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099  
5101 5107 5113 5119 5147 5153 5167 5171 5179 5189 5197  
5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279 5281 5297 5303  
5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413  
5417 5419 5431 5437 5441 5443 5449 5471 5477 5479 5483  
5501 5503 5507 5519 5521 5527 5531 5557 5563 5569 5573  
5581 5591 5623 5639 5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669  
5683 5689 5693 5701 5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779  
5783 5791 5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851  
5857 5861 5867 5869 5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939  
5953 5981 5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053 6067  
6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131 6133 6143 6151  
6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257  
6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301 6311 6317 6323 6329  
6337 6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421  
6427 6449 6451 6469 6473 6481 6491 6521 6529 6547 6551  
6553 6563 6569 6571 6577 6581 6599 6607 6619 6637 6653

# Asal Sayılar

6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763  
6779 6781 6791 6793 6803 6823 6827 6829 6833 6841 6857  
6863 6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917 6947 6949 6959  
6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997 7001 7013 7019 7027  
7039 7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151  
7159 7177 7187 7193 7207 7211 7213 7219 7229 7237 7243  
7247 7253 7283 7297 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351  
7369 7393 7411 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487  
7489 7499 7507 7517 7523 7529 7537 7541 7547 7549 7559  
7561 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643  
7649 7669 7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723 7727  
7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829 7841 7853  
7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919



# Asal Sayılar

7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993 8009 8011 8017 8039  
8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101 8111 8117 8123  
8147 8161 8167 8171 8179 8191 8209 8219 8221 8231 8233  
8237 8243 8263 8269 8273 8287 8291 8293 8297 8311 8317  
8329 8353 8363 8369 8377 8387 8389 8419 8423 8429 8431  
8443 8447 8461 8467 8501 8513 8521 8527 8537 8539 8543  
8563 8573 8581 8597 8599 8609 8623 8627 8629 8641 8647  
8663 8669 8677 8681 8689 8693 8699 8707 8713 8719 8731  
8737 8741 8747 8753 8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821  
8831 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929  
8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011 9013  
9029 9041 9043 9049 9059 9067 9091 9103 9109 9127 9133  
9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199 9203 9209 9221  
9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283

# Asal Sayılar

9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377 9391  
9397 9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439 9461 9463  
9467 9473 9479 9491 9497 9511 9521 9533 9539 9547 9551  
9587 9601 9613 9619 9623 9629 9631 9643 9649 9661 9677  
9679 9689 9697 9719 9721 9733 9739 9743 9749 9767 9769  
9781 9787 9791 9803 9811 9817 9829 9833 9839 9851 9857  
9859 9871 9883 9887 9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949  
9967 9973

# Asal Sayılar

Bu tabloya bakarak Őu sorular sorulabilir.

# Asal Sayılar

Bu tabloya bakarak Őu sorular sorulabilir.

Asal sayılar sonlu mudur?

# Asal Sayılar

Bu tabloya bakarak Őu sorular sorulabilir.

Asal sayılar sonlu mudur?

Asal sayıların en bűyűğű var mıdır?

# Asal Sayılar

Bu tabloya bakarak Őu sorular sorulabilir.

Asal sayılar sonlu mudur?

Asal sayıların en bűyűğű var mıdır?

Bilinen en bűyűk asal sayı kaçtır ve kaç basamaklıdır?

# Asal Sayılar

Bu tabloya bakarak Őu sorular sorulabilir.

Asal sayılar sonlu mudur?

Asal sayıların en bűyűğű var mıdır?

Bilinen en bűyűk asal sayı kaçtır ve kaç basamaklıdır?

Bu soruları tartıŐalım.

# Asal Sayılar

Bilinen en büyük asal sayılardan birisi:

Mersenne asal sayılarından

$$2^{257,885,161} - 1$$

eşit olan 17,425,170 basamaklı olan bir asal sayıdır.



# Asal Sayılar

Bilinen en büyük asal sayılardan birisi:

Mersenne asal sayılarından

$$2^{257,885,161} - 1$$

eşit olan 17, 425, 170 basamaklı olan bir asal sayıdır.

Bu sayı baştan şöyle başlar:

581887266232246442175100212113232368636370852325  
4215893257817044 . . . . . (17, 425, 042 basamak yazılmamıştır)...  
6822494937745410942833323095203705645658725  
746141988071724285951

Yukarıda ilk ve son 64 rakamlar verilmiştir aradaki 17.425.042 rakam yazılmamıştır.

# Asal Sayılar

Bilinen en büyük asal sayılardan birisi:

Mersenne asal sayılarından

$$2^{257,885,161} - 1$$

eşit olan 17, 425, 170 basamaklı olan bir asal sayıdır.

Bu sayı baştan şöyle başlar:

581887266232246442175100212113232368636370852325  
4215893257817044 . . . . . (17, 425, 042 basamak yazılmamıştır)...  
6822494937745410942833323095203705645658725  
746141988071724285951

Yukarıda ilk ve son 64 rakamlar verilmiştir aradaki 17.425.042 rakam yazılmamıştır.

# Asal Sayılar

Bilinen en büyük asal sayılardan birisi:

Mersenne asal sayılarından

$$2^{257,885,161} - 1$$

eşit olan 17, 425, 170 basamaklı olan bir asal sayıdır.

Bu sayı baştan şöyle başlar:

581887266232246442175100212113232368636370852325  
4215893257817044 . . . . . (17, 425, 042 basamak yazılmamıştır)...  
6822494937745410942833323095203705645658725  
746141988071724285951

Yukarıda ilk ve son 64 rakamlar verilmiştir aradaki 17.425.042 rakam yazılmamıştır.

# Asal Sayılar

Bilinen en büyük asal sayılardan birisi:

Mersenne asal sayılarından

$$2^{257,885,161} - 1$$

eşit olan 17, 425, 170 basamaklı olan bir asal sayıdır.

Bu sayı baştan şöyle başlar:

581887266232246442175100212113232368636370852325  
4215893257817044 . . . . . (17, 425, 042 basamak yazılmamıştır)...  
6822494937745410942833323095203705645658725  
746141988071724285951

Yukarıda ilk ve son 64 rakamlar verilmiştir aradaki 17.425.042 rakam yazılmamıştır.

# Asal Sayılar

Şimdi Doğal sayılara başka bir açıdan bakalım.

Kendisi asal olmayan ama asal sayıların çarpımları şeklinde yazılabilen doğal sayılara **bileşke sayılar** denir.

Örneğin 3 asal sayıdır ama 6 asal değildir çünkü, 2 ve 3 asal sayılarının çarpımıdır. Öyleyse 6 bileşke bir sayıdır.

# Asal Sayılar

Bazen asal sayılar tekrar edebilir yani:  $12 = 4.3 = 2.2.3$  de olduğu gibi. Demek ki 12 bileşke bir sayıdır.

# Asal Sayılar

20'ye kadar olan sayılardan hangileri asaldır hangileri bileşke sayıdır gözlemleyelim.

# Asal Sayılar

## Aritmetiğin Temel Teoremi:

1 den büyük her doğal sayı asal sayıların çarpımı şeklindedir.

Bu yazılım değişik sıralama gözetilmezse tek türdür.

Yani  $6 = 2.3 = 3.2$  bu ikisine de aynı bakıyoruz.



# Asal Sayılar

Dolayısıyla 1'den büyük bütün doğal sayıları, asal sayıları ve çarpma işlemini kullanarak üretebiliriz.

Yukarıda üretme işleminden kastımız, çarpma işlemi kullanarak tüm doğal sayıları inşa etmektir.

# Asal Sayılar

Asal sayılarla bu kadar ilgilenilmesinin sebeplerinden birisi, asal sayıların doğal sayılar için yapı taşları olması özelliğidir.

Ancak son yüzyılda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte asal sayılar hayatımız için daha önemli olmaya başlamıştır.

Kullandığımız cep telefonları, bankamatik kartları ve son teknolojik aletlerde şifreli olan her sistemde asal sayıların çok önemli bir yeri vardır.

# Asal Sayılar

Uzay teknolojisi ve savaşlarda ülkelerin kendi pilotlarıyla haberleşmesinde yani, yine şifreleme yöntemleri için asal sayıların önemi vazgeçilmezdir.

# İletişim ve Şifreleme

Tarih boyunca çeşitli şifreler kullanılmış, zira insan var olduğu müddetçe şifreye (gizliliğe) ihtiyaç olmuştur.

İkinci dünya savaşında Manchester Üniversitesi Profesörlerinden Alan Turing ve ekibinin şifreleri çözmesi ile savaşın sonucunu ciddi şekilde etkilemişlerdir.

# Sayılar

Doğal sayılar üzerinde değişik ikili işlemler tanımlayabiliriz.

# Sayılar

Doğal sayılar üzerinde değişik ikili işlemler tanımlayabiliriz.

Toplama işlemi:

$$\begin{aligned} + \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\rightarrow m + n \end{aligned}$$

yani  $3 + 2 = 5$  gibi.

# Sayılar

Doğal sayılar üzerinde değişik ikili işlemler tanımlayabiliriz.

Toplama işlemi:

$$\begin{aligned} + \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\rightarrow m + n \end{aligned}$$

yani  $3 + 2 = 5$  gibi.

Çarpma işlemi:

$$\begin{aligned} . \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\rightarrow m.n \end{aligned}$$

$3.2 = 6$  gibi.

# Sayılar

Ancak doğal sayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalı değildir.

Yani herhangi iki doğal sayıyı birbirinden çıkardığımız zaman daima bir doğal sayı bulamayabiliriz.

**Örnek.**  $2 - 5 = -3$  ve  $-3$  bir doğal sayı değildir.

Yani çıkarma işlemi  $\mathbb{N}$  üzerinde kapalı değildir.



# Sayılar

Peki  $\mathbb{N}$  yi içeren ve  $\mathbb{N}$  üzerinde tanımladığımız toplama ve çarpma işlemleri, bu yeni sayı sisteminde de kapalı olsa, ama aynı zamanda çıkarma işlemi de kapalı olan bir sayı sistemi var mıdır?

# Sayılar

Peki  $\mathbb{N}$  yi içeren ve  $\mathbb{N}$  üzerinde tanımladığımız toplama ve çarpma işlemleri, bu yeni sayı sisteminde de kapalı olsa, ama aynı zamanda çıkarma işlemi de kapalı olan bir sayı sistemi var mıdır?

Şayet çıkarma ikili işleminin kapalı olmasını istiyorsak o zaman sayı sistemimizi genişletmemiz gerekir.

# Sayılar

Bu soru için aklımıza ilk gelen sayı sistemi tamsayılardır ve tamsayıları  $\mathbb{Z}$  ile gösterebiliriz. Yani

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

# Sayılar

Bu soru için aklımıza ilk gelen sayı sistemi tamsayılardır ve tamsayıları  $\mathbb{Z}$  ile gösterebiliriz. Yani

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Tamsayılar kümesi doğal sayılar kümesini kapsadığı için sonsuz tane tamsayı olduğunu söylebilir miyiz?

# Sayılar

Bu soru için aklımıza ilk gelen sayı sistemi tamsayılardır ve tamsayıları  $\mathbb{Z}$  ile gösterebiliriz. Yani

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Tamsayılar kümesi doğal sayılar kümesini kapsadığı için sonsuz tane tamsayı olduğunu söylebilir miyiz?

Kümeler kuramında kapsamayı  $\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$  olarak gösterebiliriz.

Burada  $\mathbb{Z}$  de olan ancak  $\mathbb{N}$  olmayan sayılar olduğu için;  $-5$  gibi, yukarıdaki  $\supsetneq$  sembolü kullanılmıştır.

# Sayılar

$$\begin{aligned} - \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\rightarrow m - n \end{aligned}$$

$2 - 5 = -3 \in \mathbb{Z}$  olduğundan tamsayılar üzerinde, toplama, çarpma, ve çıkarma işlemleri kapalıdır.

# Sayılar

$$\begin{aligned} - \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\rightarrow m - n \end{aligned}$$

$2 - 5 = -3 \in \mathbb{Z}$  olduğundan tamsayılar üzerinde, toplama, çarpma, ve çıkarma işlemleri kapalıdır.

Gözlemleyebileceğimiz gibi tamsayılar bölme işlemine göre kapalı değildir. Yani herhangi iki tamsayı aldığımızda bunların bölümü bir tamsayı olmayabilir.

Örneğin 1'i 2 sayısına bölersek  $\frac{1}{2}$  sayısını buluruz ama  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$  dir

# Sayılar

Peki bölme işlemine göre de kapalı olmasını istersek tamsayıları içeren ve bölme işlemine göre kapalı olan sayı sistemi var mıdır?.

Varsa bunların en küçüğünden bahsedebilir miyiz?



# Sayılar

Peki bölme işlemine göre de kapalı olmasını istersek tamsayıları içeren ve bölme işlemine göre kapalı olan sayı sistemi var mıdır?.

Varsa bunların en küçüğünden bahsedebilir miyiz?

Bölme işlemi için herhangi bir sayının 0'a bölümünden bahsedemeyeceğimiz için sıfırdan farklı olan sayılara bölümden bahsetmemiz gerekir.

# Sayılar

Bölme işleminin yapılabildiği ve her elemanı  $\frac{m}{n}$  şeklinde yazılabilen sayılara **Rasyonel sayılar** diyoruz ve  $\mathbb{Q}$  ile gösteriyoruz. Yani

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

# Sayılar

Rasyonel sayı olmayan sayılar var mıdır?

Bu soru için her kenarının uzunluğu 1 cm olan bir kare düşünelim.

Bu karenin köşegeninin uzunluğu kaç cm dir?

# Sayılar

Bu uzunluk  $\sqrt{2}$  olduğuna göre  $\sqrt{2}$ 'i rasyonel bir sayı mıdır?

$\sqrt{2}$  rasyonel değilse bunu nasıl kanıtlayabiliriz?

# Sayılar

Başka rasyonel olmayan sayılar var mıdır?

# Sayılar

Asal sayılara geri dönecek olursak, herhangi bir asal sayı  $p$  için  $\sqrt{p}$  bir rasyonel sayı mıdır?

Nasıl kanıtlayabiliriz?

# Sayılar

$\sqrt[3]{p}$  sayısı hakkında ne düşünüyoruz? Rasyonel midir yoksa irrasyonel midir?

$\frac{m}{n}\sqrt{p}$  rasyonel bir sayı mıdır?

# Sayılar

Şimdiye kadar olan bütün sayılar sistemini kapsayan sayılar sistemine **gerçel sayılar** denir ve  $\mathbb{R}$  ile gösterilir.

Gerçel sayıları bir doğru çizerek üzerinde 0 işaretleyerek sol taraf eksi gerçel sayıları, sıfırın sağ tarafı pozitif gerçel sayıları göstermek üzere bir şekilde gösterebiliriz.

İrrasyonel sayıları rasyonel olmayan gerçel sayılar olarak tanımlayabiliriz.



# Sayılar

Sorular: Gerçel sayılar mı çoktur yoksa irrasyonel sayılar mı?

# Sayılar

Sorular: Gerçel sayılar mı çoktur yoksa irrasyonel sayılar mı?

Sonsuz tane elemanı olan kümeleri karşılaştırabilir miyiz?

# Sayılar

Sorular: Gerçel sayılar mı çoktur yoksa irrasyonel sayılar mı?

Sonsuz tane elemanı olan kümeleri karşılaştırabilir miyiz?

Matematikde kaç tane sonsuz vardır?

# Sayılar

Sorular: Gerçel sayılar mı çoktur yoksa irrasyonel sayılar mı?

Sonsuz tane elemanı olan kümeleri karşılaştırabilir miyiz?

Matematikde kaç tane sonsuz vardır?

Gerçel sayıları da içeren sayılar var mıdır?

# Sayılar

Sorular: Gerçel sayılar mı çoktur yoksa irrasyonel sayılar mı?

Sonsuz tane elemanı olan kümeleri karşılaştırabilir miyiz?

Matematikde kaç tane sonsuz vardır?

Gerçel sayıları da içeren sayılar var mıdır?

Dairenin çevresini ölçmede kullandığımız  $\pi$  sayısı nasıl bir sayıdır?

# TEŞEKKÜRLER