TD6 d'Analyse
Fonctions trigonométrique et hyperboliqué.

Le symbole ✓ signale les exercices que les étudiants doivent absolument savoir traiter. Le symbole ♠ signale les exercices qu'il faut faire chez soi.

Exercice 1 : ♠ [Cours]

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ simplifier

$$\cos(a+b),\ \cos(a-b),\ \sin(a+b),\ \sin(a-b),\ \tan(a+b),\ \tan(a-b)$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement croissante dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que pour tout x appartenant à $[-1, 1]$ on a

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi.$$

4. Montrer que pour tout x appartenant à $[-1, 1]$ on a

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

5. Montrer que pour tout x réel différent de 0, on a

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \epsilon \frac{\pi}{2},$$

avec $\epsilon = 1$ si $x > 0$, et $\epsilon = -1$ si $x < 0$.

6. Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut être considérée d'une manière unique comme la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire q.

Exercice 2 : Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

Exercice 3 : ✓ Simplifier les expressions suivantes :

$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$

Exercice 4 : ✓ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.

Exercice 5 : ✓ Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$; **2**. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$;
3. $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$; **4**. $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$;
5. $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 6 : Calculer :

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8.$$

Exercice 7 : ✓

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan x + 2 \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

.

2. Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 1/x$,

$$\arctan \left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan x - \arctan y.$$

Exercice 8 : **Fonction implicite**

Soit f la fonction définie par $2 \arcsin x + \arcsin f(x) = \frac{\pi}{6}$. Donner l'ensemble de définition de f. Prouver qu'elle admet une fonction réciproque dont on donnera l'ensemble de définition.

Exercice 9 : **Polynômes de Chebychev**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynômiales.

Exercice 10 : Démontrer les inégalités suivantes :

$$\arcsin a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \text{ si } 0 < 1; \qquad \arctan a > \frac{a}{1+a^2} \text{ si } a > 0.$$

Exercice 11 : Résoudre les équation suivantes :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}, \quad \arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}, \quad \arctan x = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

Exercice 12 : ♠ [Cours]

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$
2. Montrer que $\sinh, \coth, \tanh$ sont impaires et $\cosh$ est paire.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cosh x \geq 1.$$
4. Soient a et b deux réels quelconques. Simplifier les expressions suivants
$$\cosh(a+b), \quad \sinh(a+b), \quad \cosh(a-b), \quad \sinh(a-b),$$
$$\tanh(a+b), \quad \tanh(a-b), \quad \cosh 2a, \quad \sinh 2a, \quad \tanh 2a$$
5. Calculer les dérives de $argsh, argch, argth$.
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$
7. Montrer que $\forall x \in]1, \infty[$,
$$argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$
8. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$,
$$argth(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$
9. Écrire sous la forme de produit :
$$\cosh x + \sinh y, \qquad \sinh x + \sinh y$$
10. Exprimer $\cosh nx$ et $\sinh nx$ à l'aide de $\cosh x$ et $\sinh x$.

Exercice 13 : ✓ Simplifier les expressions suivants :

$$\ln \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} - x, \qquad argth \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}, \qquad argch \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} - \frac{x}{2},$$
$$\sinh^2 x \, cos^2 y + \cosh^2 x \, \sin^2 y, \quad \cosh^2 x \cos x + \sinh^2 x \sin^2 x.$$

Exercice 14 : ✓

1. Établir les formules suivantes :
$$argshx = argch(\sqrt{x^2+1}), \qquad argchx = argsh(\sqrt{x^2-1})$$
2. Exprimer sous la forme de logaritme $argch\,\frac{1}{x}$ et $argsh\,\frac{1}{x}$.
3. Simplifier
$$argth\,\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

4. Montrer que pour tout couple $(a,b) \in (]0,1[)^2$:

$$argth\, a + argth\, b = argth\, \frac{a+b}{1+ab}.$$

5. Écrire l'expression $argth\, \frac{2x}{1+x^2}$ en utilisant la fonction $\ln$.

Exercice 15 :

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\cosh x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \cosh x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \cosh x.$$

Préciser le nombre de solutions.

Exercice 16 : ✓ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(kx) = \frac{\cosh(nx)\sinh\big((n+1)x/2\big)}{\sinh(x/2)}.$$

Exercice 17 : ✓ Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \text{ et } \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\cosh x)).$$

Exercice 18 : ✓ Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\cosh x, \sinh x$ et $\tanh x$ en fonction de y.

Exercice 19 : Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Exercice 20 : Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 21 : Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathbf{1}.\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}, \qquad \mathbf{2}.\ \log_x\left(\log_x x^{x^y}.\right)$$

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes :

$\mathbf{1}.\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$; $\quad\mathbf{2}.\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ avec $1 < a < b$;

$\mathbf{3}.\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$ avec $a > 1$.