TD5 d'Analyse (DUMI2E)

Dérivabilité

Le symboles ✍ signale les exercices que les étudiants doivent impérativement savoir traiter. Le symbole ✌ signale les exercices qu'il faut faire chez soi, ils sont relativement faciles .

Exercices type Cours

Exercice 1. [Cours]

✍ 1. Montrer que toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

✌ 2. Montrer que toute fonction dérivable à droite en x_0 est continue à droite en x_0.

✌ 3. Montrer que toute fonction dérivable à gauche en x_0 est continue à gauche en x_0.

✌ 4. Montrer que toute fonction dérivable à gauche et à droite en x_0 telle que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ est dérivable en x_0.

✌ 5. Donner un exemple de fonction dérivable à gauche et à droite en x_0 mais qui n'est pas dérivable en x_0.

Exercice 2. [Cours] Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Montrer que leur somme et produit sont dérivables en x_0. Montrer que si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0. Enfin, en supposant que la composée $g \circ f$ est bien définie et que de plus g est dérivable en $f(x_0)$, montrer que $g \circ f$ est bien dérivable en x_0.

Exercice 3. ✌ [Cours] Montrer que la somme et le produit de fonctions C^∞ sont encore C^∞.

Exercice 4. [Cours] Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Posons $J = f(I)$ et notons $g : J \to I$ la bijection réciproque de l'application bijection $I \to J$ définie par f. Montrer que si l'on a $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors g est dérivable sur J et donner son expression en fonction de la composée $f' \circ g$ pour tout $x \in J$.

Exercice 5. [Cours] Enoncer et démontrer les Théorèmes de Rolle et de Darboux.

Application du Cours

Exercice 6. ✍

1. la fonction $x \mapsto |x|$ est elle dérivable sur $\mathbb{R}$? La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$?

2. la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ est elle dérivable en 0?

Exercice 7. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction
$$x \mapsto \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} - \ln(x)^{\frac{1}{3}}.$$

Exercice 8. ✍ Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \;\text{ si } x \neq 0,\; f_1(0) = 0, \quad f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \;\text{ si } x \neq 0,\; f_2(0) = 0$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \;\text{ si } x \neq 1,\; f_3(1) = 1.$$

Exercice 9. ✍ Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \;\text{ et }\; f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$
soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10.

1.✍ Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?

2.✍ Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?

3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 11.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \neq 0$. Montrer que $|f|$ est dérivable.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\ x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.

2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

Exercice 13. ✍ Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 14. Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1,1]$.

Exercice 15. ✍ Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue alors il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0)=0$.

Exercice 16. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x)=\ln x$ sur $[n,n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 17. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0)=l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ tq } \forall\ h,k \in\ ]0,\delta[, \quad \left|\frac{f(h)-f(-k)}{h+k}-\ell\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 18. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a)=f(b)=0$, et $f'(a)>0$, $f'(b)>0$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$, et $f'(c)\leq 0$.

Exercice 19. ✍ Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a,+\infty[$ telle que $f(a)=0$ et $\lim_{+\infty} f=0$. Montrer qu'il existe un réel $c>a$ vérifiant $f'(c)=0$.

Exercice 20. Déterminer en fonction du réel a le nombre de solutions de l'équation $e^x=ax$.

Exercice 21. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $a<b$. On suppose que $f(a)=0$ et que $f(b)f'(b)<0$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 22. Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$, bornée et telle que $f''\geq 0$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a)=f(b)=0$. Montrer que pour tout $d\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$, il existe une tangente au graphe de f passant par le point $(d,0)$.

Exercice 24. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que : $\forall\ x\in[a,b],\ f'(x)\neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.

Exercice 25. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x)\to f(a)$ quand $x\to+\infty$. Montrer qu'il existe $x\in\ ]a,+\infty[$ tel que $f'(x)=0$.

Exercice 26. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x)$ tende vers l quand $x\to+\infty$. Montrer que $l=0$.

Exercice 27.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x)$ tende vers l quand $x \to +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \to l$ quand $x \to +\infty$.

2. Chercher un contrexemple pour la réciproque.

Exercice 28. ✍ [Règle de l'Hospital] Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec $\forall\ x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
(Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi).
2. En déduire que si
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l, \quad \text{quand } x \to a^+,$$
alors (règle de l'Hospital)
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \to l, \quad \text{quand } x \to a^+.$$
3. Application : déterminer
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x + 1)e^x - 1}.$$

Exercice 29. A l'aide du TAF, déterminer
$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}.$$

Exercice 30. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Démontrer que :
$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \forall\ x, y \in [a, b],\ \text{si } 0 < |x - y| < \delta,\ \text{alors } \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 31. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in\ ]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in\ ]a, b[$ tel que :
$$f(c) = -\frac{(c - a)(b - c)}{2} f''(d).$$
(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t - a)(b - t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)

2. Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 32. [Dérivées n-ièmes]

1. Etablir une formule de récurrence pour les dérivées successives de la fonction $x \mapsto e^{x^3}$.
2. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$.
3. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \sin x$, $\quad x \mapsto \sin^2 x$ et $x \mapsto h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Exercice 33. Etant donné f et g deux fonctiosn dérivables à l'ordre n sur un intervalle I, montrer par récurrence que la dérivé d'ordre n du produit fg sur cet intervalle est

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)} \, g^{(n-k)}.$$

En déduire les dérives successives des fonctions $x \mapsto x^2 e^x$, $x \mapsto x^2(1+x)^n$, $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ et $x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$.

Exercice 34. Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 35. Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 36. Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + x^n)(1 + x)^{-n}$$

1.a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

1.b. En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.

2.a. En déduire que

$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

2.b. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(y + x)^n \leq 2^{n-1}(y^n + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 37. Pour tout $n \geq 2$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : x \mapsto x - cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ vérifiant

$$x_n = cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$$

2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \geq 2$, on a l'inégalité

$$f_n(x) > f_{n+1}(x).$$

En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

3. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 38. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ si $t < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0.

2. Etudier l'existence de $f''(0)$.

3. On cherche à montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = e^{\frac{1}{t}}\, t^{-2n}\, P_n(t)$$

où P_n est une fonction polynomiale.

3.a. Trouver P_1 et P_2.

3.b. Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 39. Soit $\alpha \geq 0$. On considère la suite

$$s_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

1. Montrer que l'on a $s_{2n}(1) - s_n(1) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite $(s_n(1))_n$ est divergente.

2. En déduire que la suite $(s_n(1))_n$ diverge pour tout $\alpha \in [0,1]$.

3. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\alpha\,(x+1)^{-(\alpha+1)} \leq x^{-\alpha} - (x+1)^{-\alpha} \leq \alpha\, x^{-(\alpha+1)}.$$

Exercice 40. Soient a un nombre réel strictement positif et $g :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $g(0) = 0$. Soit $f :]-a, a[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-a, a[\setminus \{0\}$ et exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de g.
3. Montrer que pour tout $x \in]-a, a[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'an ait
$$-g(x) + \frac{x}{1!}g'(x) - \frac{x^2}{2!}g''(x) + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta x)$$
4. En déduire que pour tout $n \in N$, la limite $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$ existe.
5. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-a, a[$.

Exercice 41. Soit $f : I = [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction impair de classe C^4. On suppose que la dérivée $f^{(5)}$ existe sur I. On pose $\alpha = \frac{1}{3}f'(1) + \frac{2}{3}f'(0) - f(1)$ et on considère la fonction g définie sur I comme suit
$$g(x) = f(x) - \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) + \alpha x^5.$$

1. Montrer que g est de classe C^3. Exprimer g, g'' et $g^{(3)}$ en fonction des dérivées de f.
2. Calculer $g(0), g'(0)$ et $g''(0)$.
3. Montrer qu'il existe $\beta \in I$ tel que l'on ait $g^{(3)}(\beta) = 0$.
4. Montrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que l'on ait
$$f(1) = \frac{1}{3}f'(1) + \frac{2}{3}f'(0) - \frac{1}{180}f^{(5)}(\gamma).$$

Exercice 42. Soit $g :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^x - x$ et soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = e^x - x$.

1. Montrer que g et h sont des bijections de $]-\infty, 0]$ sur $[1, +\infty[$ et de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ respectivement. Tracer leurs graphes sur un même dessin.
2. Pour tout x, y appartenant à $\mathbb{R}$, on pose $\Phi(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$ si l'on a $x \neq y$ et $\Phi(x, x) = e^x$. Montrer qu'il existe une unique application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\Phi(x, \phi(x)) = 1$.
3. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et exprimer $\phi'(x)$ en fonction de x et $\phi(x)$.

4. Montrer que ϕ est dérivable en 0 et que l'on a $\phi'(0) = -1$.

Exercice 43. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{-1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda\, f(x).$$