ARF DEĞİŞMEZİ O.D.T.Ü.

Note Title 24.10.2016

Literatur

1) C. Arf, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Char. 2, J. Reine Angew. Math. 183 (1941) 148-167

2) R.H. Dye, On the Arf Invariant, Journal of Algebra 53, 36-39 (1978)

3) Kunio Murasugi, The Arf Invariant for Knot Types, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 21, No: 1, 1969 pp. 69-72

4) Falko Lorenz and Peter Roquette, Cahit Arf and his Invariant

5) Wikipedia: Arf Invariant

Note Title 15.05.2015

R değişmeli bir halka olmak üzere $R[x_1, \ldots, x_n]$ n-değişkenli polinom halkasının derecesi iki olan homojen her elemanına R üzerinde bir kuadratik form denir: $q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \in R[x_1, \ldots, x_n]$.

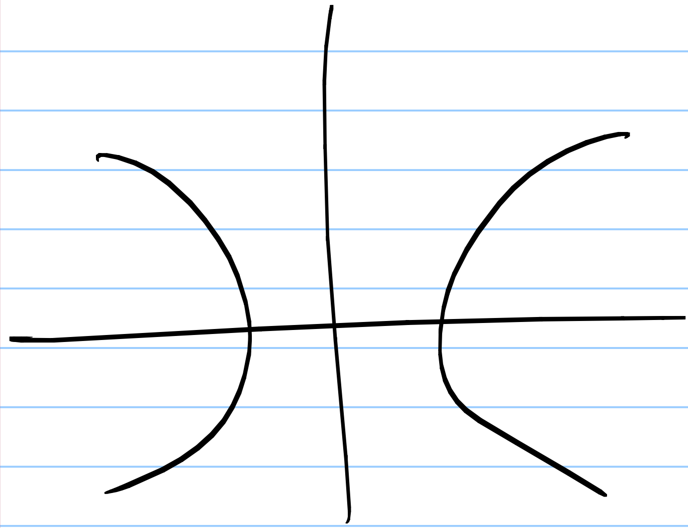
Örnek: $q_1 = x^2 - y^2$, $q_2 = xy$

$$(x,y) \xmapsto{L} \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)$$

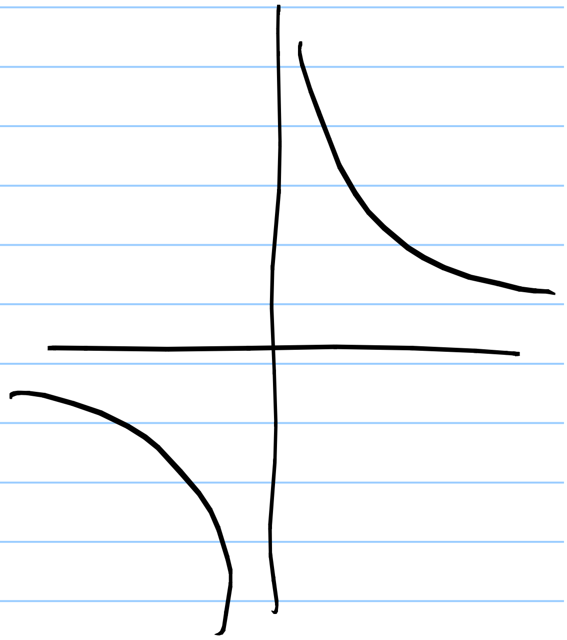
dönüşüm altında q_1, q_2'ye dönüşür.

$$q_1(L(x,y)) = q_1\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)$$
$$= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$
$$= xy$$
$$= q_2(x,y)$$

Bu iki form bir koordinat değişimi altında aynı olur. dolayısıyla bunlara denk formlar denir.



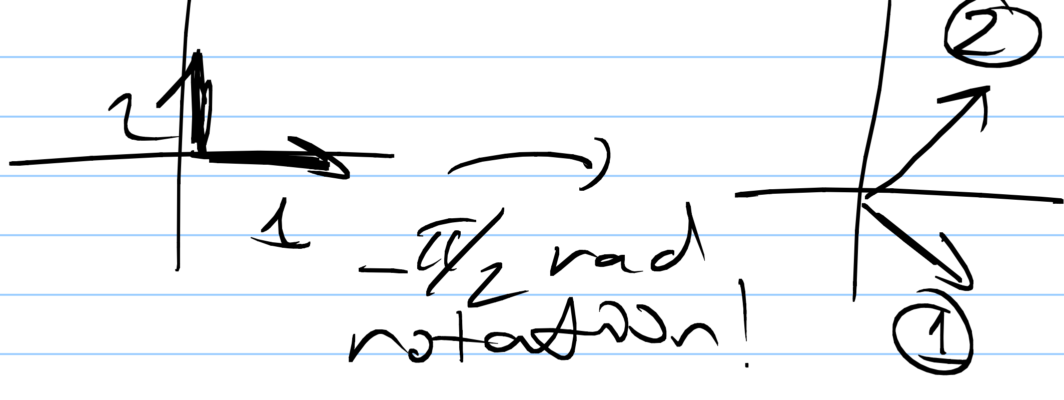
$q_1 = x^2 - y^2 = 1$



$q_2 = 2xy = 1$

$L(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$L(0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



Tanım q_1 ve q_2 R^n üzerinde iki quadratik form olsun. Eğer $q_2(v) = q_1(L(v))$, $v \in R^n$ olacak şekilde bir $L \in GL(R,n)$ dönüşümü varsa bu iki forma denk formlar denir.

Dolayısıyla, yukarıdaki iki form $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde denk olsalarda $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{Q}$ üzerinde denk değildirler!

Örnek: $R = \mathbb{Z}_2$ $q_1 = x^2 + y^2$

$$q_2 = (x+y)^2 + y^2 = x^2 + 2xy + 2y^2$$
$$= x^2$$

$$L : GL(\mathbb{Z}_2, 2) \to GL(\mathbb{Z}_2, 2)$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, y)$$

dönüşüm altında q_1 formu

$$q_1(L(x,y)) = q_1(x+y, y)$$
$$= (x+y)^2 + y^2$$
$$= x^2$$

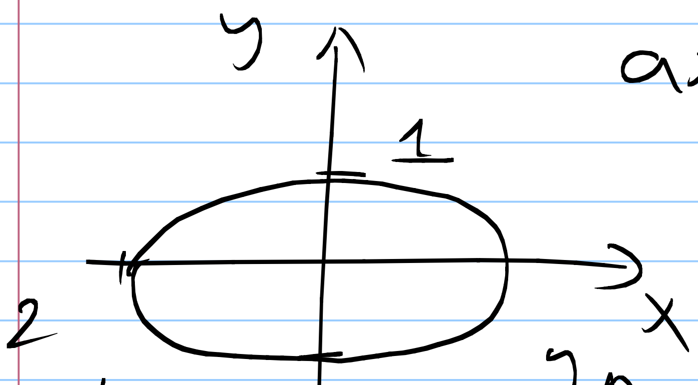
formuna dönüşür!

$\underline{R = \mathbb{R}}$ gerçel sayılar cismi

$\underline{n=2} \Rightarrow q = ax^2 + bxy + cy^2$

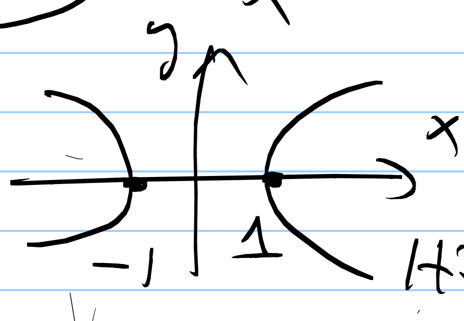
Formu anlamak için geometrisine bakabiliriz: $\lambda \in \mathbb{R}$, $q(x,y) = \lambda$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \lambda$$



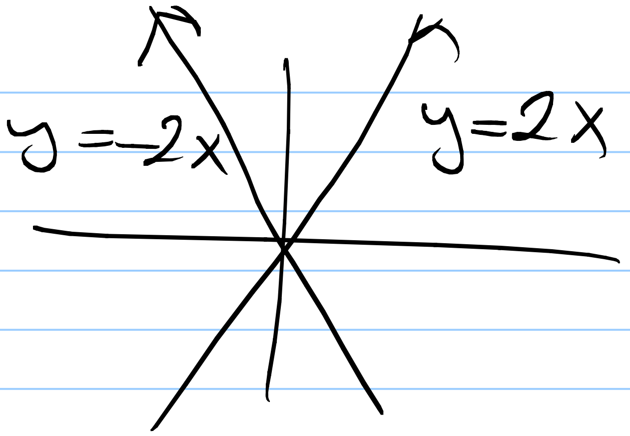
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Elips



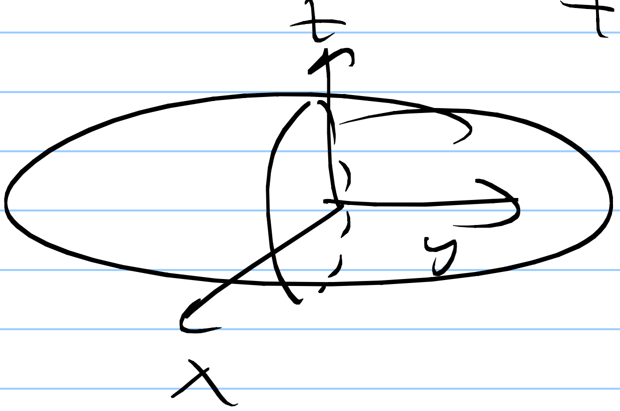
$$x^2 - y^2 = 1$$

Hiperbol

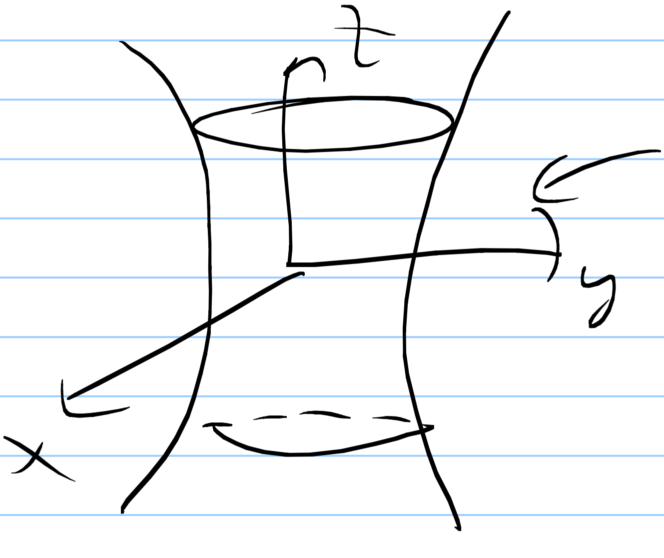


$$4x^2-y^2=0$$
$$\Rightarrow y=\pm 2x$$

<u>n=3</u> $q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$
$+dxy+exz+fyz$

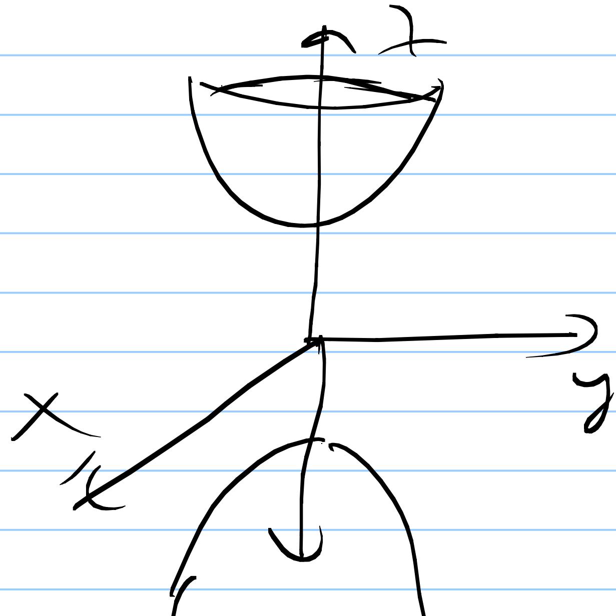


$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}+z^2=1$$



$$x^2+y^2-z^2=1$$

$$x^2+y^2-z^2=-1$$



Sınıflandırma:

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$
$$= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$q(v) = v^T Q v$$

Q simetrik olduğu için orthogonal bir koordinat değişimi altında Q matrisi köşegen olur.

$$Q \longleftrightarrow D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

$$q = \sum a_{ij} x_i x_j \Longleftrightarrow q = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$$

$d_i \in \mathbb{R}$,

$(+ + + \ldots, - - - , 0, \ldots, 0)$

signature

$R = \mathbb{C}$ $\quad -1 = i^2$ olduğu için

$$q \sim D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix}$$

Nedon; $vQv = -1$ ise

$$(iv)\,Q\,(iv) = i^2 (vQv)$$
$$= -1(-1) = 1 \text{ olur.}$$

$R = \mathbb{Z}$ tam sayılar

$q = \sum a_{ij} x_i x_j \quad , a_{ij} \in \mathbb{Z}.$

q-formunun değerlerini hesaplama işi önem kazanmıştır.

Örnekler 1) Euler (1760)

$4n+1$ tipindeki her asal sayı $q = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$ olarak tek bir şekilde yazılabilir.

(2) Fermat / Lagrange (1775)
$8n+1$ ve $8n+3$ tipindeki her asal sayı x^2+2y^2 $(x,y \in \mathbb{Z})$ olarak tek bir şekilde yazılabilir.

(3) Lagrange (1770) Her pozitif tam sayı $x^2+y^2+z^2+w^2$ şeklinde yazılabilir $(x,y,z,w \in \mathbb{Z})$.

(4) Ramanujan 54 tane Evrensel Kuadratik form inşa etmiştir (Her tam sayı bu form ile ifade edilebilir.)

Sınıflandırma: Q $n \times n$ tamsayı matrix olsun. $\det Q = 1$, $Q = Q^t$
$\Rightarrow q(v) = v^T Q v$ Kuadratik form olur. Q pozitif olsun.
$Q = (+,+,\ldots,+)$.

Rank = 3 2 olan 80 malzondan
fazla farklı rotatif form
vardır.
Sınıflandırma problemi
çözümünü çok uzaltır!

Eğer tanımlı ise q kuadrati
tik form olmak üzere
$$B(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$
bilineer form olur.

Örnek $q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$

$$B((u_1,u_2),(v_1,v_2)) =$$
$$\frac{1}{2} q(u_1+v_1, u_2+v_2) - \frac{q}{2}(u_1,u_2) - \frac{q}{2}(v_1,v_2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 6u_1v_2 + 6u_2v_1\right]$$
$$= u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_1v_2 + 3u_2v_1$$
$$= [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan eğer B simetrik bilineer form ise $q(u) = u^t B u$ kuadratik form olur.

Örnek Yukarıda $q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$ için $B(u,v) = u^t B v$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ile verilmiştir.

O halde,

$q(u) = u^t B u$, $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3y \\ 3x+y \end{bmatrix}$$

$$= x(x+3y) + y(3x+y)$$

$$= x^2 + 6xy + y^2$$ elde edilir.

Arf Değişmezi:

$R = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^{2n}$

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

$$B(u,v) = q(u+v) + q(u) + q(v)$$

olsun.

Örnek $q(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$$B((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = q(u_1+v_1, u_2+v_2) + q(u_1,u_2) + q(v_1,v_2)$$

$$= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2$$

$$+ \cancel{u_1u_2} + u_1v_2 + v_1u_2 + \cancel{u_1u_2} + \cancel{v_1v_2} + \cancel{v_1v_2}$$

$$= u_1v_1 + v_1u_2$$

$$= [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Her $u = (u_1,u_2) \neq 0$ için

$B(u,v) \neq 0$ olacak şekilde

bir $v=(v_1, v_2)$ varsa B formun

sayısızlaşmamış form denir.

Her sayısızlaşmamış (tero) simetrik B formu için

$\mathbb{Z}_2^{2n}$ uzayının öyle bir

$\beta = \{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ tabanı

vardır ki

$B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ $i=1, \ldots, n$, ve

$B(e_i, e_j) = 0 = B(f_i, f_j)$ olur.

Böyle bir tabana simplektik taban denir!

$q \rightsquigarrow B \rightsquigarrow \beta = \{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$

$$Arf(q) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) q(f_i).$$

Bu tanımın β tabanının

seçiminden bağımsız

olduğunu göstermeliyiz.
$\mathcal{B}' = \{u_1, v_1, \_\_\_\_, u_n, v_n\}$
bir başka taban olsun.

Transveksiyon $v \in V$ sabit bir vektör olsun. Bu durumda

$$T_v : V \longrightarrow V$$
$$u \longmapsto u + B(u,v)$$

ile tanımlanan lineer fonksiyona bir transveksiyon denir. $B(T_v(u_1), T_v(u_2)) = B(u_1, u_2)$ olur.

Lemma: $\mathcal{B}$ tabanına sonlu tane transveksiyon uygulayarak $\mathcal{B}'$ tabanını buluruz.

Kanıt: $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, \_\_, e_n, f_n\}$

$$\mathcal{B}' = \{u_1, v_1, \_\_, u_n, v_n\}$$

olsun. Kanıtı 5 taş adımda yapacağız.

1) $B(u_i, f_1) = 1$ veya $B(v_i, f_1) = 1$ olacak şekilde bir u_i veya v_i elemanı vardır. Diyelim ki $B(u_1, f_1) = 1$ olsun. O halde, $u_1 = \sum a_i e_i + b_i f_i$ ise $a_1 = 1$ olmalıdır. Şimdi β' tabanına T_{f_1} transveksiyonunu ele alalım.

$T_{f_1}(e_1 + f_1) = e_1$ olduğu için β' da $e_1 + f_1$ toplamı yer alan bir elemanın T_{f_1} altındaki görüntüsü sadece e_1'i içerir. O halde β' veya $T_{f_1}(\beta')$ simplektik tabanı öyle bir u elemanı içerir ki bu eleman e_1'i içerir ama f_1'i içermez. Şimdi bu taban içinden bir

v elemanı seçelim öyle ki $B(u,v)=1$ olsun. Eğer v e_1'i içeriyorsa bu tabana $T_{e_1} \circ T_{f_1}$ bileşkesini uygulayalım:

$$(T_{e_1} \circ T_{f_1})(e_1) = T_{e_1}(e_1+f_1) = f_1$$

$$(T_{e_1} \circ T_{f_1})(e_1+f_1) = T_{e_1}(e_1) = e_1$$

olduğu için $\{u,v\}$ kümesinin bu bileşke altındaki görüntüsü $\{e_1+u', f_1+v'\}$ olur öyle ki u' ve v' ne e_1 ne de f_1 terimlerini içerir. Ayrıca $B(u,v)=1$ olduğundan $B(u',v')=0$ olur.

Son olarak bu tabana $T_{e_1} \circ T_{e_1+v'} \circ T_{f_1} \circ T_{f_1+u'}$ bileşkelerini uygularsak elde edilen taban

$\{e_1, f_1, u_2', v_2', \ldots, u_{n-1}', v_{n-1}'\}$
şeklinde olur öyle ki hiç bir
u_i', v_i' ne e_1 ne de f_1
terimini içermez.
Şimdi aynı işlemi
$\{u_2', v_2', \ldots, u_{n-1}', v_{n-1}'\}$
tabanına uygulayarak
tümevarımla kanıtı bitiririz,
çünkü $\{u_2', v_2', \ldots, u_{n-1}', v_{n-1}'\}$
tabanı da simplektiktir.

Teorem: Art değişmeli β
simplektik tabanının seçi-
minden bağımsızdır.

<u>Kanıt:</u> $\beta' = \{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$
tabanı $\beta = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$
tabanından bir T_v transveksiyonu
elde edilsin. O halde,
$u_i = T_v(e_i) = e_i + B(e_i, v)v$ ve
$v_i = T_v(f_i) = f_i + B(f_i, v)v$ olur.
Buradan

$$q(u_i) = q(e_i + B(e_i, v)v)$$
$$= q(e_i) + q(B(e_i, v)v) + B(e_i, B(e_i, v)v)$$
$$= q(e_i) + (B(e_i, v))^2 q(v) + (B(e_i, v))^2$$
$$= q(e_i) + (1 + q(v))(B(e_i, v))^2$$

Aynı şekilde,

$$q(v_i) = q(f_i) + (1 + q(v))(B(f_i, v))^2$$

olur.

Dolayısıyla, eğer $q(v)=1$ ise kanıt biter. O halde $q(v)=0$ olduğunu ~~kabul~~ kabul edelim. Eğer $v=\sum a_i e_i + b_i f_i$ ise $q(u_i)=q(e_i)+b_i^2$ ve $q(v_i)=q(f_i)+a_i^2$ olur.

Buradan,

$$\sum_{i=1}^{n} q(u_i)q(v_i)=\sum_{i=1}^{n}(q(e_i)+b_i^2)(q(f_i)+a_i^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i)+a_i^2 q(e_i)+b^2 q(f_i)+a_i^2 b_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i)+a_i^2 q(e_i)+b^2 q(f_i)+a_i b_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i)+q(a_i e_i+b_i f_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i)+\sum_{i=1}^{n} q(a_i e_i+b_i f_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i)+\underbrace{Q(v)}_{0}$$

Böylece kanıt tamamlanır.

Teorem: Arf değişmezi izomorfizmalar altında değişmez.

Kanıt: $L: V \to V$ doğrusal bir izomorfizma olsun. q_1 bir kuadratik form olmak üzere

$q_2(v) = q_1(L(v))$ ile tanımlansın.

O halde,

$B_2(u,v) = B_1(L(u), L(v))$ olur.

Dolayısıyla, eğer

$B = \{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ B_1 için simplektik bir taban ise

$B' = \{L^{-1}(e_1), L^{-1}(f_1), \ldots, L^{-1}(e_n), L^{-1}(f_n)\}$

B_2 için simplektik taban olur.

O halde,

$$Arf(q_2) = \sum q_2(L^{-1}(e_i))\, q_2(L^{-1}(f_i))$$
$$= \sum q_1(L L^{-1}(e_i))\, q_1(L L^{-1}(f_i))$$

$$= \sum q_1(e_i)\, q(f_i)$$
$$= \mathrm{Arf}(q_1) \quad \text{olur.}$$

<u>Alıştırma:</u> $V=\mathbb{Z}_2^n$ üzerinde tanımlı iki soysuzlaşmamış kuadratik q_1, q_2 formu olsun. $\mathrm{Arf}(q_1)=\mathrm{Arf}(q_2)$ ise q_1 ve q_2 birbirine denktir.

<u>Alıştırmanın Çözümü</u>

$\mathrm{Arf}(q_1)=\mathrm{Arf}(q_2)$ olduğunu kabul edelim. V üzerindeki her simplektik form standard

$$B(u,v)=u^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

formuna denk olduğu için q_2 formunu $q_2 \circ L$ ile değiştirerek $B_{q_1} = B_{q_2}$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde, her $u,v \in V$ $i \in n$,

$$q_1(u+v)+q_1(u)+q_1(v)=B(u,v)$$
$$=q_2(u+v)+q_2(u)+q_2(v)$$

olur.

Eğer $q=q_2-q_1$ ise, buradan $B_q \equiv 0$ olur. Başka bir değişle $q=\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i^2$ olur.

Buradan

$$q_2(u)=q_1(u)+q(u)$$
$$=q_1(u)+\sum_{i=1}^{2n} a_i u_i^2$$
$$=q_1(u)+\sum_{i=1}^{2n} a_i u_i$$
$$=q_1(u)+B(u,v)$$ elde edilir,

$v=a_{n+1}e_1+\cdots+a_{2n}e_n+a_1e_{n+1}+\cdots+a_ne_{2n}$.

$$q_1(T_v(u))=q_1(u+B(u,v)v)$$
$$=q_1(u)+q_1(B(u,v)v)$$
$$+B(u,B(u,v)v)$$

$$= q_1(u) + B^2(u,v)\, q_1(v) + B^2(u,v)$$

$$= q_1(u) + (1 + q_1(v))\, B(u,v)$$

$(B(u,v) = B^2(u,v))$

Diğer taraftan

$q_2(u) = q_1(u) + B(u,v)$ olduğundan

$$Arf(q_2) = \sum_{i=1}^{n} q_2(e_i)\, q_2(e_{i+n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (q_1(e_i) + B(e_i,v))(q_1(e_{i+n}) + B(e_{i+n},v))$$

$$= \cdots = Arf(q_1) + q_1(v)$$

elde edilir.

Kabul gereği $q_1(v) = 0$ olur.

O halde, $q_2(u) = q_1(u) + B(u,v)$

$$= q_1(T_v(u))$$

olur. Bu kanıtı tamamlar.

Gözlem: ① $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun.

$q_1 = xy$, $q_2 = x^2 + y^2 + xy$

0	0
0	1
0	1
1	1
H_0	H_1

② $V = \mathbb{Z}_2^4$ olsun.

$$q_1 = \underbrace{x_1^2 + y_1^2 + x_1 y_1}_{H_1} \oplus \underbrace{x_2^2 + y_2^2 + x_2 y_2}_{H_1}$$

$$L : \begin{aligned} x_1 &\longmapsto x_1 + x_2 \\ y_1 &\longmapsto y_1 + y_2 \end{aligned}$$

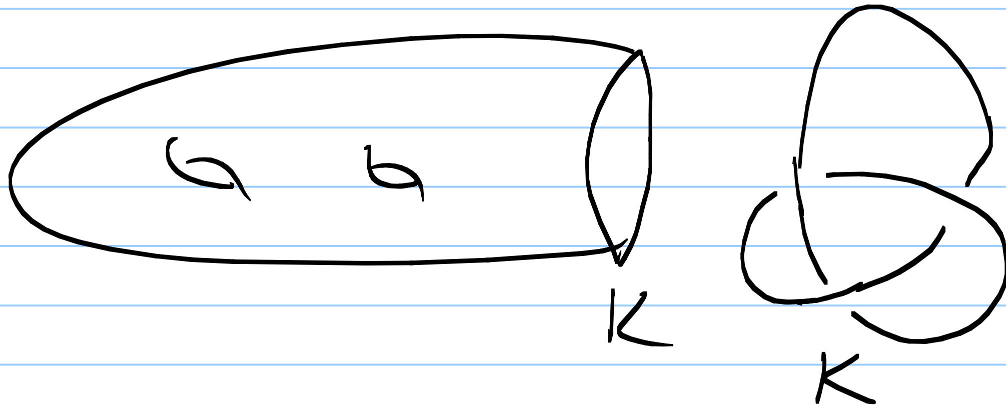
$$q_1 \circ L = x_1^2 + y_1^2 + x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$= \underbrace{x_1 (x_1 + y_1 + y_2)}_{H_0} + \underbrace{y_1 (y_1 + x_2)}_{H_0}$$

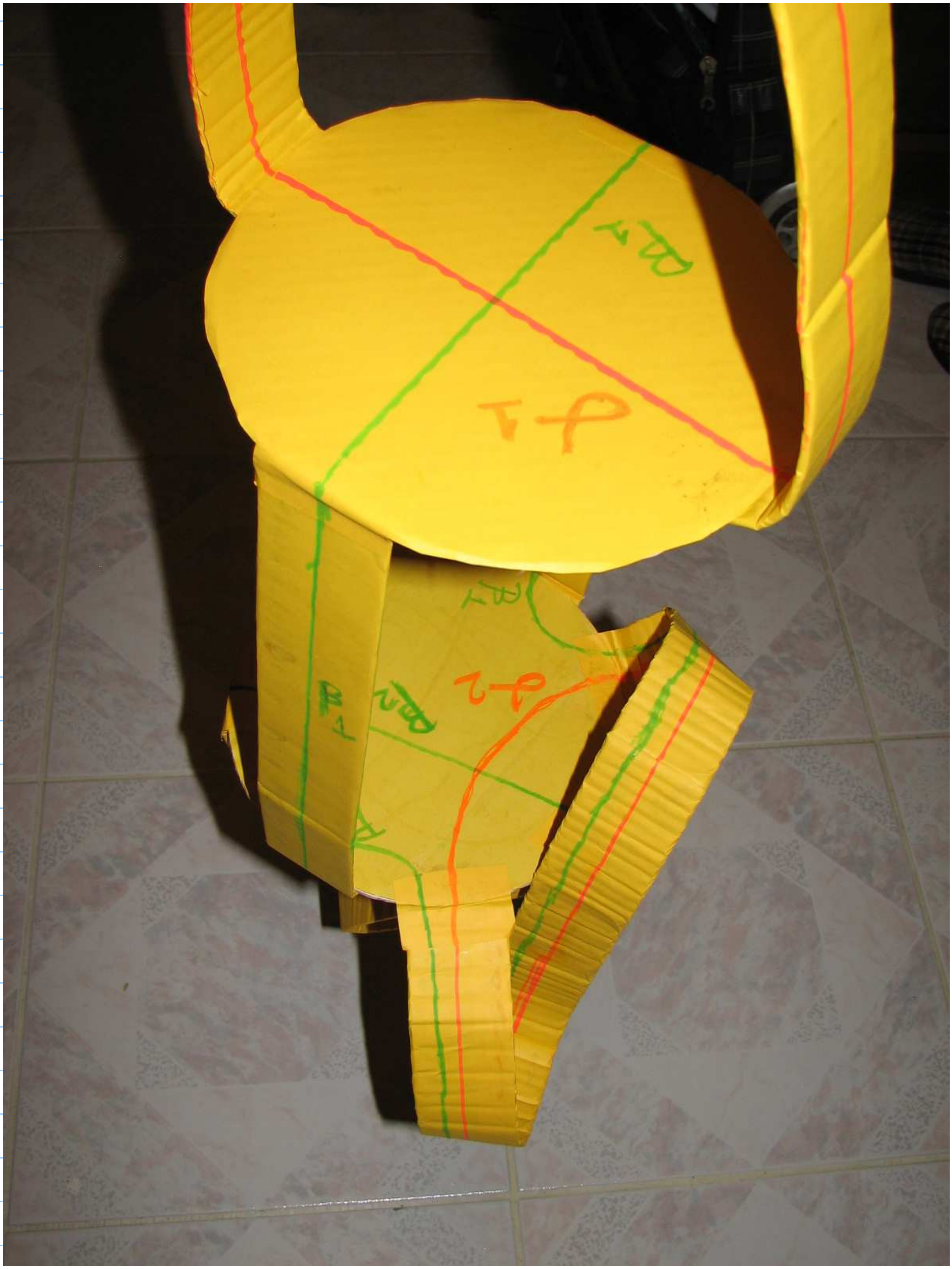
$\therefore$ $H_1 \oplus H_1 = H_0 \oplus H_0$.

Düğümler İçin Arf Değişmezi:

$K \subseteq \mathbb{R}^3$ içinde bir düğüm olsun, $\Sigma_g \subseteq \mathbb{R}^3$ sınırı K olan yönlendirilmiş bir yüzey olsun.



$f \subseteq \Sigma_g$ içinde bir çember olmak üzere $\tilde{f}$ ile bu çemberin yüzeyin normali ile yüzey dışına itilmiş halini gösterelim. $g \subseteq \Sigma_g$ bir başka çember ve $l(\tilde{f}, g)$ bu iki çemberin geçişme sayısının (mod 2) değerini göstersin.



Bu durumda

$$\ell(\tilde{f}, g) = \ell(\tilde{g}, f) + \mathrm{Int}(f, g) \pmod 2$$

olur.

$q(f) \doteq \ell(\tilde{f}, f)$ ile tanımlanır.

Bu durumda, her $x, y \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2)$ olmak üzere

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \mathrm{Int}(x, y)$$

olur. Buradan q'nun $V = H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2)$ vektör uzayı üzerinde bir kuadratik form olduğunu görürüz.

O halde, K düğümünün Arf değişmezi

$$\mathrm{Arf}(K) \doteq \mathrm{Arf}(q)$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki düğümün Dçlu

$\mathrm{Arf}(K) = q(\alpha_1)\, q(\beta_1) + q(\alpha_2)\, q(\beta_2)$

$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$ olur.