Note Title 9.03.2025

TKMD - 2025 YAZ OKULU
KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu derste Annegret Burtscher'in "Introduction to Partial Differential Equations" başlıklı ders notlarını takip edeceğiz.

Giriş bölümünün ardından sırasıyla Taşıma, Laplace, Isı ve Dalga denklemlerini ele alacağız. En son bölümde ise doğrusal olmayan birinci derece denklemleri göreceğiz.

Bölüm 1. Giriş.

§1.1. Temel Tanımlar:

Tanım 1.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ içinde açık bir küme ve $u: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun bir $x \in \Omega$ noktasındaki i'inci kısmi türevi (eğer varsa) aşağıdaki limit olarak tanımlanır:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \doteq \lim_{h \to 0} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

$i = 1, \ldots, n.$

Bu ifade $\partial_{x_i} u$, $\partial_i u$, $D_i u$, u_{x_i} veya u_i ile de gösterilebilir.

Benzer şekilde yüksek dereceli türevleri

$\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$, $\partial^2_{x_i x_j} u$, $\partial^2_{ij} u$, $u_{x_i x_j}$ veya u_{ij} ile

göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$'deki standart iç çarpım $\cdot$ ve norm da $|\cdot|$ ile gösterilecek.

Tanım 1.2. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bir çoklu endeks ve $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, çoklu endeksin mertebesiyle

u'nun x noktasındaki α'ıncı türevi (eğer varsa) şöyle tanımlanır:

$$D^\alpha u(x) = \partial^\alpha u(x) \doteq \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x).$$

Benzer şekilde $\alpha! = \prod \alpha_i!$ ve $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

ifadelerini gösterecek. Bu gösterimin önemli özel hali toplam türev ve gradyant vektörleridir:

$$Du = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) \quad \text{ve} \quad \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}.$$

Bir diğer önemli özel hal Hessian matrisidir:

$$D^2 u \doteq \left(\partial^2_{x_i x_j} u \right).$$

Schwarz'ın sonucuna göre eğer u'nun ikinci türevleri sürekli ise $D^2 u$ matrisi simetriktir.

<u>Tanım 1.3.</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (açık) bir küme, $\overline{\Omega}$ kapanışı ve $\partial\Omega$ sınırı olsun. Aşağıdaki fonksiyon uzayları şöyle tanımlanır.

$$C(\Omega) \doteq \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ sürekli} \},$$

$$C(\overline{\Omega}) \doteq \{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid u \text{ sürekli} \},$$

Ω açık ise, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$C^k(\Omega) \doteq \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ k-defa sürekli türevlenebilir fonksiyon} \}$$

$$C^k(\overline{\Omega}) \doteq \{ u \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha u \text{ tüm } \partial\Omega \text{ sınırına sürekli fonksiyon olarak genişletilebilir, } |\alpha| \leq k \}$$

$C^\infty(\Omega)$ ve $C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayları da benzer şekilde tanımlanır.

Kısmi Diferansiyel Denklemler.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $k \in \mathbb{N}$, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, bilinmeyen fonksiyon ve

$$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$ bir

fonksiyon olmak üzere

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

ifadesine k'inci dereceden kısmi diferansiyel denklem denir.

Bu denklemi sağlayan tüm $u: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulabilirsek denklemi çözdük diyeceğiz.

Daha genel olarak $u = (u_1, \ldots, u_m): \Omega \to \mathbb{R}^m$ bilinmeyeni için denklem sistemlerini de ele alabiliriz:

$$F: \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m.$$

§1.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması:

Bu derste çoğunlukla ikinci dereceden doğrusal denklemlerle ilgileneceğiz:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i}(x) + a_0(x) u(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Eğer $u(x) \in C^2(\Omega)$ ise $D^2 u$ simetrik bir matris olur ve dolayısıyla $A=(a_{ij}(x))$ matrisi simetrik alınabilir.

Tanım: Eğer $A=(a_{ij}(x))$ matrisi bir $x\in\Omega$ için

a) kesin pozitif ise denkleme o noktada eliptik,
b) $\det A(x)=0$ ise parabolik, ve
c) aksi halde (en az bir negatif öz değeri varsa) hiperbolik denir.

Örnekler: i) Laplace denklemi, $\Delta u = u_{x_1x_1}+\dots+u_{x_nx_n}=0$, için $A(x)=I_n$ olduğundan eliptiktir.

ii) $u_t-\Delta u=0$, Isı denklemi, için $\det A(x)=0$ olduğundan paraboliktir.

iii) $u_{tt}-\Delta u=0$ dalga denklemi için $A(x)=\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$ olduğundan hiperboliktir.

§1.3. Önemli Kısmi Diferansiyel Denklemler.

Cauchy-Riemann Denklemi: $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, $u:\Omega\to\mathbb{C}$,

$u(z)=u(z)+iv(z)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

En küçük Alan Denklemi:

$u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, $u|_{\partial\Omega}=f$ olmak üzere

$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx$ minimum olacak şekilde $u=u(x,y)$ fonksiyonun bulunması. Bu problemin denk olduğu Euler-Lagrange denklemi

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$$

kısmi diferansiyel denklemi uzayda $z=f(x)$, $x \in \partial\overline{\Omega}$ ile verilen eğriyi sınırlayan en küçük yüzey alanına sahip olan $z=u(x)$, $x\in\overline{\Omega}$, yüzeyini tarif eder.

Hamilton-Jacobi Denklemi:

$$\partial_t u + H(Du, q) = 0.$$

Navier-Stokes Denklemleri: $x \in \mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$

$u=u(x,t)$ sıvının hız vektörü olmak üzere

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \quad \operatorname{div} u = \nabla\cdot u = 0.$$

Maxwell Denklemleri:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}. \end{cases}$$

$\vec{E}$: Elektrik Alanı

$\vec{B}$: Manyetik Alan

$\vec{J}$: Elektrik akım yoğunluğu

Eğer $\rho=0$, $\vec{J}=0$ ise yukarıdaki denklemler dalga denklemine dönüşür. Şöyle ki

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\frac{1}{c}\nabla\times\vec{B} = -\frac{1}{c}\partial_{tt}\vec{E}$$, ve diğer

yandan $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 E = 0 - \Delta \vec{E}$ ve böylece

$$-\partial_{tt}\vec{E} + c^2 \Delta \vec{E} = 0$$ elde edilir.

Schrödinger Denklemi:

$$i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + V(x)\Psi, \quad \hbar = h/2\pi$$

Kimya – Reaksiyon–Difüzyon Denklemi:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega = I \times U$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\partial_t u = d\Delta u + f(u).$$

Ekonomi: Black–Scholes–Merton Denklemi

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

§1.4. Çözüm Yöntemleri

İyi Sunulmuş Denklemler ve Çözümler.

Eğer denklemin derecesi $k \in \mathbb{N}$ ise klasik çözümlerin de k defa türevlenebilir olmasını bekleyeceğiz. Fakat bazı durumlarda zayıf çözümlerle yetinmek durumunda kalacağız. İlk başta zayıf çözümü elde edip sonrasında "regularity" argümanlarıyla klasik çözüme ulaşmaya çalışacağız.

Bir denklemin iyi sunulmuş olması aşağıdaki şartların sağlanması anlamına gelecektir:

i) Klasik veya zayıf bir çözüm vardır
ii) Çözüm tekdir.
iii) Çözüm başlangıç-sınır değer koşullarına sürekli şekilde değişir.

Başlangıç ve Sınır Değerleri:

Çözümün belli bir t anında veya Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırında verilen fonksiyonlara eşit olmasına sırasıyla başlangıç veya sınır değerleri denir.

$u(x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$ koşuluna Dirichlet problemi

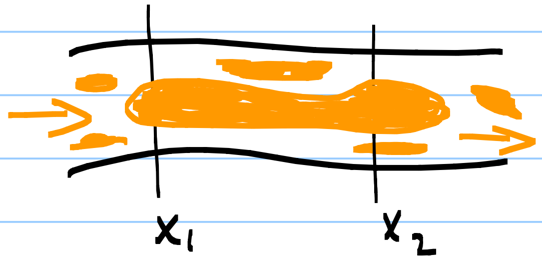
$D u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$ koşuluna Neumann problemi

ve $u(x, t=0) = f(x)$ Cauchy denklemi denir.

Bu ders kapsamında ikinci dereceden doğrusal denklemler ve birinci dereceden doğrusal olmayan denklemler için aşağıdaki soruları ele alacağız:

a) Çözümlerin varlığı ve tekliği,
b) Çözümlerin yapısal özellikleri,
c) Çözümlerin açık ifadelerinin elde edilmesi,
d) Klasik çözümlerin sınırlamaları.

Bölüm 2. Taşıma Denklemi



Şekilde nehir boyunca bir miktar kirliliğin hareket ettiği görülüyor.

$u=u(x,t)$ x noktasında ve t anında nehirdeki kirliliğin konsantrasyonunu göstersin. O halde, t anında x_1 ve x_2 noktaları arasındaki kirliliğin miktarı

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx$$ integrali ile verilir.

Bu miktarın zamana göre anlık değişimi ise

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)\,dt$$ ile verilir.

$q=q(x,t)$ kirliliğin akısını gösterirse (birim zamanda x noktasından geçen kirlilik miktarı)

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(t,x)\,dx = q(t,x_1)-q(t,x_2) = -\int_{x_1}^{x_2} q_x(t,x)\,dx$$ olur.

Burada ilk eşitlik şöyle görülebilir: x_1 ile x_2 noktaları arasındaki kirliliğin anlık değişimi x_1 noktasından giren kirliliğin akısı ile x_2 noktasından çıkan kirliliğin akısının farkına eşittir.

İkinci eşitlik ise Analizin Temel Teoremi'nin sonucudur.

Şimdi x_1'i sabit x_2'yi değişken olarak görür ve

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(t,x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} q_x(t,x)\,dx$$ eşitliğinin her iki

tarafının x_i'ye göre türevini alırsak
$u_t(t,x) = -q_x(t,x)$ eşitliğine ulaşırız.

$u(t,x)$ ve $q(t,x)$ arasındaki ilişki ise en basit haliyle $q(t,x) = cu(t,x)$ ile verilir. Burada nehirdeki toplam kirlilik miktarının sabit olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla, konsantrasyonun yüksek olduğu yerden düşük olduğu yere doğru akış vardır ve akış hızının konsatrasyon ile doğru orantılı olduğu kabul edilir: Öyle bir $c>0$ vardır ki $q(t,x) = cu(t,x)$ olur.

O halde $u_t + q_x = 0$ denklemi $u_t + cu_x = 0$ halini alır.

Eğer birden fazla yön varsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi her yön için farklı bir c sabiti söz konusu olabilir. Başka bir deyişle, denklem bir $b \in \mathbb{R}^n$ sabit için

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0$$ halini alır.

Bu denklem sıvıların dinamiği konusunda

$$\rho_t + \nabla(\rho v) = 0$$ halini alır. Burada ρ sıvının yoğunluğunu, v ise sıvının hızıdır:

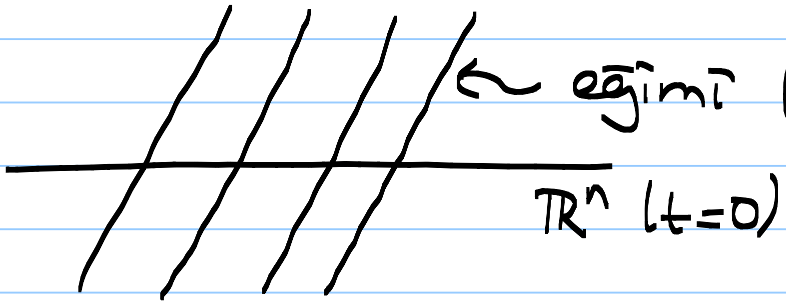
$$\rho : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

§ 2.2. Homojen Durum:

$u = u(t,x) : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}^3$ sabit bir vektör olmak üzere, $u_t + b \cdot \nabla u = 0$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Burada, $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$, vektörüdür.

$u(t,x)$ denklemin bir C^1- çözümü ise bu fonksiyonun $(1, b)$ vektörü boyunca yönlü türevi $z(s) = u(t+s, x+sb)$ fonksiyonunun türevi olacaktır.

$z'(s) = u_t + b \cdot \nabla u = 0$ olacaktır. Dolayısıyla, $z(s)$ fonksiyonu $s \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ doğrusu boyunca sabittir.



$\leftarrow$ eğimi $(1\ b)$ olan doğrular boyunca u sabittir.

Eğer $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x), & \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

probleminin $u(x,t)$ çözümü şu eşitliği sağlar:

$$u(t,x) = u(0, x - tb) = g(x - tb), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

O halde çözüm $u(t,x) = g(x - tb)$ ile verilir.

<u>Uyarı</u>: Eğer g fonksiyonu C^1 değilse

çözüm de C^1 değildir. O yüzden şimdilik g'yi C^1 alacağız. Bu durumda şu sonucu kanıtlamış olduk!

Teorem 2.1. Sabit katsayılı taşıma denklemini ele alalım:

$$u_t + b\cdot\nabla u = 0, \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

i) Eğer $u\in C^1$ bir çözüm ise $u(t+s, x+sb)$ s'nin sabit bir fonksiyonudur.

ii) Eğer $g\in C^1(\mathbb{R}^n)$ ise $u_t + b\cdot\nabla u = 0$, $u(0,x)=g(x)$ probleminin tek çözümü $u(t,x)=g(x-tb)$ ile verilir.

§2.3. Homojen olmayan Durum:

$$\begin{cases} u_t + b\cdot\nabla u = f(t,x), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x)=g(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Çözüme ulaşmak için yine $z(s)=u(t+s, x+sb)$ fonksiyonunu ele alalım. Türevini alırsak

$$\dot z(s) = u_t(t+s, x+sb) + b\cdot\nabla u(t+s, x+sb) = f(t+s, x+sb)$$

elde ederiz. Şimdi $[-t,0]$ aralığında integralini alırsak

$$u(0, x-tb) - u(t,x) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \dot z(s)\,ds$$
$$= \int_{-t}^{0} f(t+s, x+sb)\,ds = \int_0^t f(r, x+(r-t)b)\,dr$$

elde edilir. Başka bir deyişle, çözüm

$$u(t,x) = g(x-tb) + \int_0^t f(r, x+(r-t)b)\,dr$$ olur.

<u>Teorem 2.2.</u> $b \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ ve $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman yukarıdaki başlangıç değer probleminin tek bir $u \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ çözümü vardır ve

$$u(t,x) = g(x-tb) + \int_0^t f(s, x+(s-t)b)\,ds\,, \quad \forall (t,x) \in$$

$[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, ile verilir.

<u>Uyarı 2.3.</u> Taşıma problemini denklemi ODE'ye dönüştürerek çözdük. Kullandığımız özel eğrilere (burada $(1,b)$ yönündeki doğrulardı) karakteristik doğrular denir.

<u>Uyarı 2.4.</u> Çözüme baktığımızda f ve g fonksiyonlarının sadece integrallenebilir olması yeterlidir. Böylece klasik çözüm kavramından zayıf çözümlere geçmiş oluruz.

Bölüm 3. Laplace Denklemi.

§3.1. Motivasyon. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ifadesi denge durumundaki fiziksel bir madde/alan miktarının yoğunluğunu gösteren fonksiyon olsun. $V \subseteq U$ sınırı ∂V, C^1-olan bir açık küme ise $\int u$ integrali V bölgesi içinde kalan madde V miktarını gösterecektir. Madde denge durumunda olduğu için zamandan bağımsızdır. Bu durumda ∂V sınırındaki toplam madde akısı sıfır olmalıdır. $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ maddenin akışı hız vektörü ve $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ sınırdaki dış normal vektör alanı ise sınırdaki toplam akı

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS \text{ integrali ile verilir.}$$

O halde, $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS = 0$. Stokes' (Divergence) Theoremi'nden dolayı

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS = 0.$$

Birçok fiziksel olayda $F(x) = -a\nabla u(x)$ ile verilir. Burada $a > 0$ bir sabittir. (Bu kabule Fick's Law of diffusion denir.)

O halde, $\operatorname{div} F = -a \operatorname{div} \nabla u = -a(u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n})$
$= -a\Delta u$ olur.

Dolayısıyla $-\int_V a\Delta u = 0$ elde edilir.

Bu eşitlik her $V \subseteq \Omega$ için geçerli olduğundan ve ayrıca $a\Delta u$ fonksiyonu sürekli olduğu için $a\Delta u = 0$ olmalıdır. $\Delta u = 0$ denklemine Laplace denklemi denir.

Birçok değişik fiziksel sistemde bir Q kaynak fonksiyonu verilir. Bu durumda integral denklemi

$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS = \int_V Q$ olur. Benzer adımlar sonra

$-a\Delta u = Q$ ve son olarak $f = \frac{Q}{a}$ olarak $-\Delta u = f$ Poisson denklemini elde ederiz.

Söz konusu fiziksel sistemlere örnek olarak şunları sıralayabiliriz:

1) u: sıcaklık, f: ısı kaynağının gücü

2) İki boyutlu bir zardaki gerilme, f: basınç

3) u: elektrostatik potansiyeli, f: yük yoğunluğu

4) u: Yerçekimi potansiyeli, f: kütle yoğunluğu.

§3.2. Harmonik Fonksiyonlar:

Tanım 3.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon ve $f: \Omega \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\Delta u = 0$ denklemine Laplace, $-\Delta u = f$ denklemine de Poisson denklemi denir.

Tanım 3.2 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $u \in C^2(\Omega)$ olsun. Eğer u Laplace denklemini çözüyorsa, $\Delta u = 0$, bu fonksiyona Harmonik fonksiyon denir. Eğer $-\Delta u \leq 0$ ise altharmonik, $-\Delta u \geq 0$ ise superharmonik adını alır.

Örnek 3.3. Analitik fonksiyonlarının gerçel ve sanal kısımları Harmoniktir.

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y), \quad u_x = v_y, \ u_y = -v_x.$$

Dolayısıyla, $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$

§3.3. Temel Çözüm.

Laplace denkleminin tüm rotasyonlar altında simetrik kalan çözümlerini bulmaya çalışalım. Dolayısıyla, $u = v(r)$, $r = (\sum x_i^2)^{1/2}$ şeklindeki çözümleri bulmak istiyoruz.

$\frac{\partial r}{\partial x_i} = x_i/r$ olduğu için $u_{x_i} = v'(r)\, x_i/r$ ve

$u_{x_i x_i} = v''(r)\, x_i^2/r^2 + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$ buluruz. O halde, denklem

$$\Delta u = v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} = 0. \Rightarrow \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$$

$$\Rightarrow (\ln v')' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \ln v' = (1-n)\ln r + a$$

$$\Rightarrow \ln v' = \ln r^{(1-n)} + a \Rightarrow v' = e^a r^{1-n} = \frac{e^a}{r^{n-1}}.$$

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & n = 2, \\ \dfrac{b}{(2-n) r^{n-2}} + c, & n \geq 3. \end{cases}$$

Ayrıca, b sabitini $b = \frac{-1}{|\partial B_1(0)|} = -1/\omega_n$, birim küresinin yüzey alanı seçersek, Laplace denkleminin temel çözümünü elde etmiş oluruz.

<u>Tanım 3.4.</u> $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

, fonksiyonuna Laplace denkleminin temel çözümü denir.

Bu ifade $|x|$'in bir fonksiyonu olduğu için genelde $\Phi(x)$ yerine $\Phi(|x|)$ yazılır.

<u>Hatırlatma 3.5.</u> $x \neq 0$ için $|D\Phi| \leq \frac{c}{|x|^{n-1}}$ ve $|D^2\Phi| \leq \frac{c}{|x|^n}$ eşitsizlikleri sağlanır.

$n \geq 3$ alalım:

O halde, doğrudan hesap yaparak $D\Phi_{x_i} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{x_i}{r^n}$,

$D\Phi = \frac{-1}{\omega_n} \frac{x}{|x|^n}$ ve $\Phi_{x_i x_j} = \frac{-1}{\omega_n} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - n \frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}} \right)$

ve dolayısıyla $|\Phi_{x_i x_j}| \leq \frac{c}{r^n}$ elde edilir.

$n=2$ durumu da benzerdir.

$x \mapsto \Phi(x)$, $x \neq 0$, fonksiyonu harmonik olduğu için, her $y \in \mathbb{R}^n$ için, $x \mapsto f(y)\Phi(x-y)$, $x \neq y$, fonksiyonu da harmoniktir. O halde, bu tür fonksiyonların sonlu toplamaları da harmonik olduğu gibi

$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$, konvolüsyon integral fonksiyonu da Laplace denkleminin bir çözümü mü olabilir mi sorusunu gündeme getirir. Maalesef, bu doğru değildir ama $u(x)$ fonksiyonu Poisson denklemini çözer!

Teorem 3.6. (Poisson Denkleminin Çözümü)

$f \in C^2_c(\mathbb{R}^2)$ tıkız destekli bir fonksiyon olsun.

O zaman, $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ fonksiyonu için

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, ve
ii) $-\Delta u = f$, $x \in \mathbb{R}^n$, koşulları sağlanır.

Kanıt hakkında daha sonra konuşacağız.
(Evans'ın kitabı s. 23, Teorem 1)

Hatırlatma 3.7. Formal olarak $-\Delta \Phi = \delta_0$, Dirac-Delta fonksiyonu. Böylece

$$-\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y) f(y)\, dy = f(x)$$

olur. Bunun daha detaylı kanıtı için dağılım fonksiyonlarının teorisine ihtiyacımız var.

§3.4- Harmonik Fonksiyonların Teorisi.

Ortalama Değer Formülleri: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$ alalım. u bir fonksiyon olmak üzere, u'nun yuvarlar ve küreler üzerindeki ortalama değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \doteq \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{B(n)} u(y)\,dy,$$

ve
$$\fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,ds(y) \doteq \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,ds(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,ds(y),$$

Öyle ki Ω_n ve $\omega_n = n\Omega_n$ sırasıyla n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayındaki $B_1(0)$ birim küresinin ve $\partial B_1(0)$ yüzeyinin hacimlerini göstermektedir.

Eğer u sürekli ise şunu gösterebiliriz:

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy = \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,ds(y) = u(x). \qquad (*)$$

Harmonik fonksiyonlarda ise $r \to 0$ limitini almaya gerek yok.

Teorem 3.8 (Ortalama Değer Özelliği) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $u \in C^2(\Omega)$ olsun. Eğer u harmonic ve $\overline{B_r(x)} \subseteq \Omega(x)$ ise

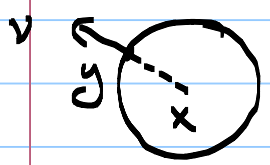
$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,ds(y),$$ olur.

<u>Kanıt:</u> Bir $x \in \Omega$ noktası seçelim ve

$$\varphi(r) \doteq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y)$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\, dS(z) = \fint_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\, dS(z)$$

fonksiyonunu düşünelim. İkinci satırda $y = x + rz$ değişken değişimi işlemini yaptık.



$B_r(x)$

$\nu = \frac{y-x}{r}$ ν birim normal vektör olduğu için türev alırsak

$$\varphi'(r) = \fint_{\partial B_1(0)} Du(x+rz)\cdot z\, dS(z) = \fint_{\partial B_r(x)} Du(y)\cdot \frac{y-x}{r}\, dS(y)$$

$$= \fint_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dS(y) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dS(y)$$

ve buradan da Green Teoremi'ni ve $|\partial B_r(x)| = \frac{n}{r} |B_r(x)|$ eşitliğini kullanarak

$$(*) \quad \varphi'(r) = \frac{r}{n} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = 0 \quad (u \text{ Harmonik!})$$

elde edilir. O halde, $\varphi(r)$ fonksiyonu sabit olmalıdır. Bu durumda,

$$\varphi(r) = \lim_{s\to 0} \varphi(s) = \lim_{s \to 0} \fint_{\partial B_s(x)} u(y)\, dS(y) = u(x)$$ elde

edilir. Son eşitlik (*) (sayfa 19) eşitliğinden gelir.

O halde, $u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y)$ eşitliğini elde etmiş olduk.

Son olarak, $\int_{B_r(x)} u(y)\, dy = \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u(y)\, dS(y)\, ds$

$$= \int_0^r \omega_n u(x) s^{n-1}\, ds$$

$(\omega_n = n\Omega_n!)$ $$= u(x)\, \omega_n \int_0^r s^{n-1} ds = \Omega_n r^n u(x)$$

elde edilir.

<u>Hatırlatma 3.9.</u> Ortalama değer formülü alt ve süper harmonik fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliklere dönüşür: $u : \Omega \to \mathbb{R}$ alt (veya süper) harmonik fonksiyonsa her $x \in \Omega$ ve $B(x,r) \subseteq \Omega$ için

$$u(x) \underset{(\geq)}{\leq} \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \quad \text{ve} \quad u(x) \underset{(\geq)}{\leq} \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y),$$ olur.

Teorem 3.7.'in tersi de doğrudur.

<u>Teorem 3.10.</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $u \in C^2(\Omega)$ olsun. Eğer her $B_x(r) \subseteq \Omega$ için

$$u(x) = \fint_{\partial B_x(r)} u(y)\, dS(y)$$

oluyorsa, u fonksiyonu harmoniktir.

<u>Kanıt:</u> Alıştırma olarak öğrencilere bırakılmıştır.

Maksimum Prensipi ve Sınır Değer Problemlerinin Tekliği:

Teorem 3.11. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge (açık ve bağlantılı) ve $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ altharmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Maksimum Prensipi: $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

(ii) Kuvvetli Maksimum Prensipi: Eğer $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ olacak şekilde bir $x_0 \in \Omega$ varsa, u fonksiyonu $\overline{\Omega}$ sabittir.

Kanıt: (i), (ii)'nin doğrudan sonucudur ve dolayısıyla sadece (ii)'yi kanıtlayacağız. Bölge sınırlı olduğu için her $\overline{\Omega}$, hem de $\partial\Omega$ tıkızdır. Dolayısıyla, u fonksiyonun bu kümeler üzerinde maksimumu vardır. Bir $x_0 \in \Omega$ noktası alalım öyle ki

$$M = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \quad \text{olsun.}$$

$A = u^{-1}(M) \subseteq \Omega$ kümesi Ω içinde kapalıdır. Diğer yandan Ω açık olduğu için her $x \in A$ için bir $r > 0$ değeri vardır öyle ki $B(x,r) \subseteq \Omega$ olur. Şimdi

$$M = u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \leq \fint_{B_r(x)} M\,dy = M \quad \text{olduğu için}$$

$u(y) = M$, $\forall y \in B_r(x)$ olur. O halde, A kümesi aynı zamanda Ω içinde açık bir kümedir. Son olarak Ω kümesi bağlantılı olduğundan $A = \Omega$ olur ve dolayısıyla kanıt tamamlanır. ∎

Yukarıdaki kanıtta maksimum ile minimumun u ile $-u$'yu değiştirirseniz şu sonucu elde ederiz:

Sonuç 3.12. (Harmonik Fonksiyonlar İçin Maksimum Prensibi) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ içinde sınırlı bir bölge ve $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonik fonksiyon olsun. O zaman,

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad x \in \Omega$$

Ayrıca, Ω bağlantılı olduğu için eşitsizlikler kesinlikle ($<$) ya da fonksiyon sabittir.

Uyarı 3.13: (Liouville Teoremi) Bu teoremlerin bir başka sonucu ise şudur: Eğer $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sınırlı ve Harmonik bir fonksiyon ise fonksiyon sabittir ve böylece $Du \equiv 0$ olur.

Uyarı 3.14 (Harnack Eşitsizliği)
$u: \Omega \to \mathbb{R}^{>0}$ harmonik bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $V \subseteq \Omega$ bölgesi için, öyle ki $\bar{V} \subseteq \Omega$ tıkız olsun, öyle bir $C_V > 0$ sayısı vardır ki

$$\sup_V u \leq C_V \inf_V u \quad \text{olur.}$$

(Bunun da kanıtını alıştırma olarak bırakıyoruz.)

Harnack eşitsizliğinin bir sonucu olarak her $x, y \in V$ için $\frac{1}{C_V} u(y) \leq u(x) \leq C_V u(y)$ olur.

Maksimum prensibinin önemli bir sonucu Dirichlet probleminin çözümünün tekliğidir:

Sonuç 3.15: (Poisson denkleminin çözümünün tekliği) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $g \in C(\partial\Omega)$ ve $f \in C(\Omega)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki problemin $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ olacak şekilde en fazla bir çözümü vardır:

$$-\Delta u(x) = f(x), \ \forall x \in \Omega \text{ ve } u(x) = g(x), \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Kanıt: Bu problem u ve v gibi iki çözümü varsa $u-v$ harmonik fonksiyonu $\partial\Omega$ sınır bölgesinde tamamen sıfırdır. Maksimum prensibinden dolayı $u(x)-v(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ olur. Benzer şekilde $v(x)-u(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ olmalıdır. O halde, $u \equiv v$ olur. ∎

Uyarı 3.16. Yukarıdaki sonuç sadece klasik çözümler için geçerli olduğu için farklı zayıf çözümlerin varlığı/yokluğu konusunda henüz bir şey söyleyemeyiz.

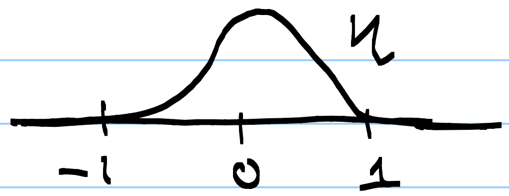
Çözümlerin Düzgünlüğü (Regularity).

Eliptik ve parabolik denklemlerin çözümleri düzgünleştirici (türevlenebilirlik derecesini arttırma) etkisi varken, hiperbolik denklemlerde tam tersi bir etki görülür.

Bu bölümde yatıştırıcı fonksiyonlarla ("mollifier") konvolüsyon alarak Laplace denkleminin klasik çözümlerini düzgünleştireceğiz.

Uyarı 3.17. (Konvolüsyon ile düzgünleştirme) Standart bir yatıştırıcı fonksiyon $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ desteği $\bar{B}_1(0)$ kapalı yuvarı içinde kalan düzgün ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$) ve

İntegrali $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ olan bir fonksiyondur.



Bir örnek olarak

$$\eta(x) = \begin{cases} C e^{-1/1-|x|^2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

öyle ki $C = \int_{B_1(0)} e^{-1/1-|x|^2}$ dir ve dolayısıyla $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ olur.

Benzer şekilde, $\eta_\epsilon(x) \doteq \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ yatıştırıcı fonksiyonun desteği $\overline{B_\epsilon(0)}$ yuvarının içinde kalır.

Verilen bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi ve $f \in C(\Omega)$ fonksiyonu için $f^\epsilon \in C^\infty(U)$ konvolüsyon integrali şöyle tanımlanır:

$$f^\epsilon(x) \doteq (\eta_\epsilon * f)(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(y) f(x-y)\, dy$$

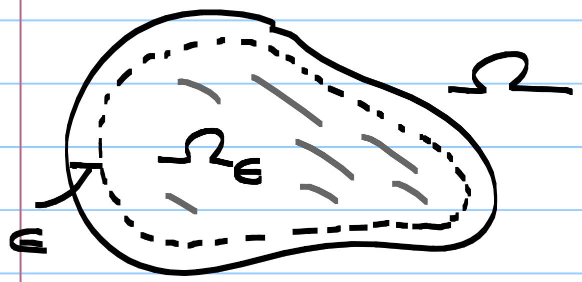
Ayrıca, $f^\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ fonksiyondur ve $\epsilon \to 0$ giderken Ω bölgesinin tıkız kümeleri üzerinde $f^\epsilon \to f$ düzgün yakınsar.

<u>Teorem 3.18.</u> Bir $u \in C(\Omega)$ fonksiyonu her $B_r(x)$ yuvarı üzerinde ortalama değer özelliğine sahipse u fonksiyonu $C^\infty(\Omega)$'dur ve harmoniktir.

Kanıtı vermeden önce biraz hatırlık yapalım:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi ve $\epsilon > 0$ için

$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ kümesini tanımlayalım



Kanıt: $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$, $\eta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ ile tanımlanım.

O halde, $x \in \Omega$ için

$$u^\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)u(y)\,dy = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)u(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y)\,dr$$

u fonksiyonun ortalama değer özelliğinden dolayı

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}u(x)\int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right)\omega_n r^{n-1}\,dr = u(x)\int_{B_\epsilon(0)}\eta_\epsilon(y)\,dy = u(x)$$

elde edilir.

Uyarı 3.17'den dolayı u^ϵ C^∞-fonksiyon olduğu için u'da C^∞ olur. Son olarak Teorem 3.10'dan dolayı u harmonik olur. Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Uyarı 3.19 (Analitik olma) Eğer $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonikse $\|D^\alpha u\|_{L^\infty}$ normunun hesabından u'nun Taylor açılımının yakınsak olacağını görünür. Başka bir deyişle u

fonksiyonu analitiktir. (Evans s.31, Teorem 10)

§3.5. Green Fonksiyonu ve Temsil Teoremi.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı açık bir küme ve $\partial\Omega$ sınırının da C^1-sınıfından olduğunu kabul edelim.
Temel çözümü kullanarak Dirichlet probleminin çözümünün bir ifadesini elde edeceğiz:

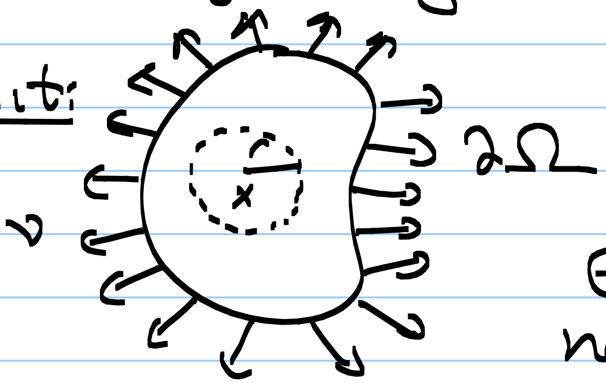
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega, \\ u = g, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Önerme 3.20. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ yukarıdaki gibi olsun. Ayrıca, Φ Laplace denkleminin temel çözümü olsun. Eğer $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ve $x \in \Omega$ ise

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right] dS(y) - \int_{\Omega} \Phi(y-x)\, \Delta u(y)\, dy, \text{ olur.}$$

Burada $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ ve $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \nabla \Phi \cdot \nu$ normal vektör boyunca yönlü türevleri göstermektedir.

Kanıt:



$B(x,r) \subset \Omega$ olacak şekilde $r>0$ seçelim.

Green Formülü'nü kullanarak ve $V_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ alarak

$$\int_{V_\epsilon}\left[u(y)\,\Delta\Phi(y-x)-\Phi(y-x)\,\Delta u(y)\right]dy$$
$$=\int_{\partial V_\epsilon}\left[u(y)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_\epsilon}(y-x)-\Phi(y-x)\,\frac{\partial y}{\partial\nu_\epsilon}(y)\right]dS(y)$$

elde ederiz.

[Green Formülü:

$*:\Omega^k(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$, $\nu\wedge *\omega=(\omega\cdot\nu)\,dvol$,

ile tanımlanan operatördür. Kabaca söylemek gerekirse

$$*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})=dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}} \text{ olur}$$

öyle ki $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}}=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ eşitliği sağlanır.

Örnek: $n=4$ alalım

i) $f\in\Omega^0(\mathbb{R}^4)$ ise $*f=f\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$,

ii) $f\,dx_1\in\Omega^1(\mathbb{R}^4)$ ise $*(f\,dx_1)=f\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$,

iii) $f\,dx_1\wedge dx_2\in\Omega^2(\mathbb{R}^4)$ ise $*(f\,dx_1\wedge dx_2)=f\,dx_3\wedge dx_4$

iv) $f\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\in\Omega^3(\mathbb{R}^4)$ ise $*(f\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)=f\,dx_4$

ve

v) $f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_4 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$ ise $*(f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_4)=f$ olur.

<u>Önerme</u>: $(*d*d)f=\Delta f$, $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

<u>Kanıt</u>:
$$
\begin{aligned}
(*d*d)f &= (*d*)\,df \\
&= *d*\Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\Big) \\
&= *d\Big(\sum_i (-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i,j}(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i}(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n\Big) \\
&= *\Big(\sum_{i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\Big) \\
&= *\big(\Delta f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\big) \\
&= \Delta f \quad \text{olur.}
\end{aligned}
$$

Bu hesabın bir sonucu olarak $(d*d)f=\Delta f\,dvol$ olduğunu da gördük.

O halde, $\displaystyle\int_\Omega \Delta f\,dvol = \int_\Omega d(*df) = \int_{\partial\Omega} *df$ olur.

Son olarak Green Eşitliği'ni vereceğiz:
$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,dV = \int_{\partial\Omega}(f\nabla g - g\nabla f)\,dS$$

$$(f\nabla g - g\nabla f)dS = *(f\,dg - g\,df)$$

$(*d = \nabla\ dS)$ $$= *\left(f\sum_i g_{x_i}dx_i - g\sum_i f_{x_i}dx_i\right)$$

$(*dx_i = \widehat{dx_i})$ $$= f\sum_i g_{x_i}\widehat{dx_i} - g\sum f_{x_i}\widehat{dx_i}$$

So, $$d(f\nabla g - g\nabla f)dS = d*(f\,dg - g\,df)$$
$$= d(f*dg - g*df)$$
$$= df\wedge *dg + f\,d*dg - dg\wedge *df - g\,d*df$$

$\Rightarrow d(f\nabla g - g\nabla f)dS = (f\Delta g - g\Delta f)\,dVol$, çünkü

$$df\wedge *dg = \left(\sum f_{x_i}dx_i\right)\wedge *\left(\sum g_{x_j}dx_j\right)$$
$$= \left(\sum f_{x_i}dx_i\right)\wedge\left(\sum g_{x_j}\widehat{dx_j}\right)$$
$$= \sum f_{x_i}g_{x_j}\underbrace{dx_i\wedge\widehat{dx_j}}_{\delta_{ij}\cdot dvol}$$
$= \sum f_{x_i}g_{x_i}\,dvol$, ve ifade simetrik olduğu için,
$= dg\wedge *df$, elde edilir.

Son olarak, $(f\Delta g - g\Delta f)\,dvol = d(f\nabla g - g\nabla f)dS$ olduğu kullanarak Stokes' Teoreminden

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,dvol = \int_\Omega d\left((f\nabla g - g\nabla f)\,dS\right) = \int_{\partial\Omega}(f\nabla g - g\nabla f)dS$$ olur.

Şimdi kanıta geri dönelim: $x \neq y$ olmak üzere $\Delta_y \Phi(x-y) = 0$ ve $\partial V_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x)$ olduğu için sınır integralini iki parçaya bölünebilir:

$$\int_{\partial V_\epsilon} = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\epsilon(x)}.$$ Ayrıca $\partial B_\epsilon(x)$ integrali

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu_\epsilon}(y)\, dS(y) \right| \leq C \epsilon^{n-1} \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\Phi| \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

koşulunu sağlar. Diğer yandan Uyarı 3.5'den dolayı

$$\frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu_\epsilon} = \nabla \Phi(y-x) \cdot \frac{x-y}{\epsilon}$$

$$= \frac{-1}{\omega_n} \frac{(y-x)}{|y-x|^n} \cdot \frac{x-y}{\epsilon} = \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} = \frac{1}{|\partial B_\epsilon(x)|}$$

eşitliği vardır ve dolayısıyla $\partial B_\epsilon(x)$ üzerindeki ikinci integral, $\epsilon \to 0$ giderken şu eşitliği sağlar

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_\epsilon}(y-x)\, dS(y) = ⨍_{\partial B_\epsilon(x)} u(y)\, dS(y) \to u(x)$$ ve

$u(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Şimdi integralin sol tarafına dönelim: $y \neq x$ olmak üzere $\Delta \Phi(y-x) = 0$ olduğu için (ilk integral $= 0$ olur, ve)

$$-\int_{V_\epsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\, dS(y) + \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_\epsilon}(y-x)\, dS(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dS(y) - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu_\epsilon}(y)\, dS(y).$$

Ω bölgesi sınırlı ve $\Phi \in L^1_{loc}$ (tıkız destekli ve integrallenebilir) olduğu için eşitliğin sol tarafının asimtotik davranışı aşağıdaki gibidir:

$$\int_{V_\epsilon} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy.$$

Başka bir deyişle $B_\epsilon(x)$ üzerindeki integralin katkısı sıfıra gider. Bunun nedeni $|\Delta u|$ fonksiyonu Ω üzerinde sınırlıdır ($n \geq 3$ ve $n=2$ için) ve dolayısıyla, $\epsilon \to 0$ giderken

$$\left|\int_{B_\epsilon(x)} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy\right| \leq \sup_{B_\epsilon(x)} |\Delta u| \int_0^\epsilon \int_{\partial B_r(\epsilon)} |\Phi(r)|\,dS(y)\,dr$$

$$\leq C\int_0^\epsilon r\,dr \leq C\,\epsilon^2 \to 0 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla,
$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\right] dS(y) - \int_{\Omega}\Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy$$
elde edilir

ve kanıt tamamlanır. ∎

Uyarı 3.21. Önermede $u(x)$ için verilen ifade $u(x)$ fonksiyonun sonsuz kere türevlenebilir olduğunun bir başka kanıtını önermektedir.

Bu ifade aynıca $u(x)$'in Ω üzerinde Δu ve $\partial\Omega$ üzerinde de u ve $\partial u/\partial\nu$ ile verildiğini göstermektedir. Δu ve u terimleri Dirichlet probleminin koşulları ile belirlenirken (Ω üzerinde $\Delta u = f$ ve

$\partial\Omega$ üzerinde $u=g$) üçüncü ifade, $\partial u/\partial \nu$, bu kısıta uymaz. Bu terimi gösterimden çıkartmak için şöyle bir üçkağıt kullanınız.

Aşağıdaki problemin çözümünü (eğer varsa) ϕ^x ile gösterelim:
$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x), & \partial\Omega. \end{cases}$$
ϕ^x fonksiyonu düzeltici fonksiyon diyeceğiz.

Green Formülünü ve $\Delta\phi^x=0$ eşitliğini kullanarak
$$-\int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial\Omega}\Big(u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\Big)dS(y)$$
$$= \int_{\partial\Omega}\Big(u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\Big)dS(y)$$
elde edilir. Dolayısıyla, $\int_{\partial\Omega}\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS(y)$ terimi Önerme 3.20'deki $u(x)$ ifadesinden çıkartılabilir. Başka bir deyişle, $u(x)$ sadece f ve g cinsinden ifade edilebilir:
$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) + \int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)\,dy - \int_\Omega \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\,dS(y)$$
ve dolayısıyla
$$u(x) = -\int_\Omega\big(\phi^x(y)-\Phi(y-x)\big)f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\Big)g(y)\,dS(y).$$

Tanım 3.22. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme olsun. Ayrıca $\partial\Omega$ eğrisinin de C^1-sınıfından olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$G(x,y) \doteq \Phi(y-x) - \phi^x(y), \quad x,y \in \Omega,\ x \neq y,$$

fonksiyonuna Ω bölgesinin Green fonksiyonu denir.

O halde, aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk.

Teorem 3.23 (Green fonksiyonu yardımıyla çözümün temsili)

Ω yukarıdaki gibi bir bölge ve $u \in C^2(\bar{\Omega})$ aşağıdaki Dirichlet probleminin çözümü olsun:

$$\begin{cases} \Omega: & -\Delta u = f, \quad f, g \in C(\Omega). \\ \partial\Omega & u = g \end{cases}$$

O halde, G, Ω bölgesinin Green fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, dS(y) + \int_{\Omega} f(y)\, G(x,y)\, dy,$$

$x \in \Omega$, elde edilir.

Uyarı 3.24. G, Green fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{cases} \Omega: & -\Delta G = \delta_x \\ \partial\Omega: & G = 0. \end{cases}$$

Ayrıca, $G(x,y) = G(y,x)$, simetrik olduğu kolayca görülü

Genel bir bölge için o bölgenin Green fonksiyonunu açıkça ifade etmek çok zor yada imkansız olabilir. Sonraki bölümlerde geometrisi basit olan bazı bölgelerinin Green fonksiyonlarını hesaplayacağız.

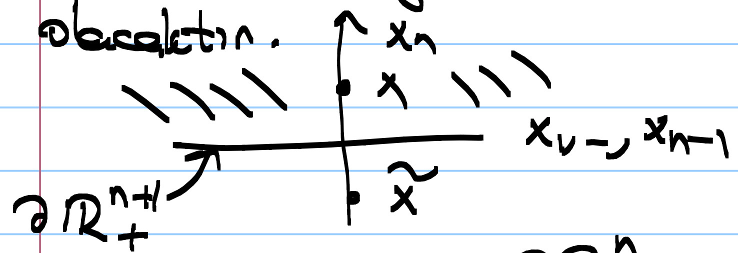
§3.5. Green Fonksiyon Örnekleri.

Yarı Düzlem: $\mathbb{R}^n_+ \doteq \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$ bölgesini göstersin.

Bu bölgenin Green fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_x, & \mathbb{R}^n_+ \\ G = 0, & \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Bu problemin fiziksel anlamı $x\in\mathbb{R}^n_+$ noktasındaki bir birimlik elektrik yükünün yarattığı elektrik alanını bulmaktır. Bunu doğrudan yapmak yerine $x\in\Omega$ noktasının yansıması olan $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)$ noktasına da -1 elektrik yüklü bir parçacık konulduğunu kabul edelim. Dolayısıyla, $\partial\mathbb{R}^n_+$ yarı düzlemi boyunca elektrik alanının ~~değeri~~ sıfır olacaktır.



$x\in\mathbb{R}^n$ noktasındaki birim yükün elektrik alanı $\Phi(y-x)$ olduğu için $\partial\mathbb{R}^n_+$ yarı düzleminde sıfır olacak elektrik alanı

$$G(x,y) \doteq \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) \text{ olur.}$$

$-\Delta G = \delta_x - \delta_{\tilde{x}}$ olduğu halde $\tilde{x}$ noktası alt yarı düzlemde kaldığı için $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde $-\Delta G = \delta_x$ olur çünkü $\delta_{\tilde{x}}$ fonksiyonunun desteği $\mathbb{R}^n_+$ ile hiç kesişmez.

Dolayısıyla, bunu $G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$ ile karşılaştırırsak ϕ^x düzeltici fonksiyon

$$\phi^x(y) = \Phi(y-\tilde{x}) = \Phi(y_1-x_1, \ldots, y_{n-1}-x_{n-1}, y_n+x_n)$$

ile verilir.

Şimdi bu Green fonksiyonunu kullanarak (Teorem 3.23)

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = 0, & \mathbb{R}^n_+ \\ u = g, & \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

probleminin çözümünü yazalım:

İlk önce $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x})$

$$\nu = -\frac{\partial}{\partial y_n} \qquad = \frac{1}{\omega_n}\left[\frac{y_n-x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n+x_n}{|y-\tilde{x}|^n}\right] = -\frac{2x_n}{\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n},$$

$y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ olur (Tanım 3.4 ve Uyarı 3.5)

O halde, (*) probleminin çözümü

$$u(x) \doteq \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \text{ olur}$$

$K(x,y) \doteq \frac{2x_n}{\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$, fonksiyonuna $\mathbb{R}^n_+$ bölgesinin Poisson çekirdeği denir. $u(x)$'in ifadesine de Poisson Formülü denir.

Aslında bu problemde Teorem 3.23 doğrudan kullanılamaz çünkü $\mathbb{R}^n_+$ sınırsız (unbounded) bir bölgedir. Bunun yerine aşağıdaki sonucu kullanabiliriz.

<u>Teorem 3.25</u> (Yarı uzay için Poisson Formülü).

$\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ sınır bölgesinde tanımlı olan $g\in C(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ fonksiyonu için $u(x)$ yukarıdaki gibi tanımlansın:

$$u(x) \doteq \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy,\ x\in\mathbb{R}^n_+.$$

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

ii) $\Delta u = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n_+$,

iii) $\lim\limits_{\substack{x\to x^0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x^0),\ \forall x\in\partial\mathbb{R}^n_+$.

<u>Kanıtın Özeti</u>: $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ olması olması g ve K'nın ($x\in\mathbb{R}^n_+, y\in\partial\mathbb{R}^n_+ \Rightarrow x\neq y$) K'nın C^∞ olması ve g ile K'nın sınırlı olmasının sonucudur.

$G(x,y)$ fonksiyonunun $\{x\neq y\}$ kümesi üzerinde Harmonik olmasının sonucu olarak $K(x,y)$ fonksiyonun Harmonik olduğu ve buradan da (ii) elde edilir. (iii) için $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = 1$ ve g'nin sürekliliği kullanılır:

Her $\epsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ vardır ki, her $|y-x^0|<\delta$ için $|g(y)-g(x^0)|<\epsilon$ olur. Sonrasında ise $\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_\delta(x^0)$ ve $\partial\mathbb{R}^n_+\setminus B_\delta(x^0)$ bölgeleri üzerinde $|u(x)-g(x^0)|$ ifadesini ayrı ayrı ele alarak kanıt bitirilir (Evans, Thm 14, s. 37). ∎

<u>Yuvar için Green Fonksiyonu</u>: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Harmonik,

$u+iv: \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $f_x = f_u u_x + f_v v_x$
analitik

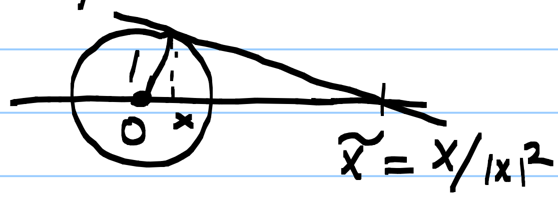
$$f_{xx} = (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)u_x + f_u u_{xx} + (f_{vu}u_x + f_{vv}v_x)v_x + f_v v_{xx}$$

$$f_{xx}=f_{uu}u_x^2+2f_{uv}u_xv_x+f_{vv}v_x^2+f_uu_{xx}+f_vv_{xx}$$
$$f_{yy}=f_{uu}u_y^2+2f_{uv}u_yv_y+f_{vv}v_y^2+f_uu_{yy}+f_vv_{yy}$$

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$,

$$f_{xx}+f_{yy}=(f_{uu}+f_{vv})(u_x^2+u_y^2)+2f_{uv}(-u_xu_y+u_yu_x)$$
$$+f_u(u_{xx}+u_{yy})+f_v(v_{xx}+v_{yy})=0.$$

Şimdi $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $(n\geq 3)$ üzerinde $x\mapsto x/|x|^2$ ifadesiyle verilen $\partial B_1(0)$ küresine göre tersinme fonksiyonunu düşünelim. $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ olmak üzere $\tilde{x}=x/|x|^2$ olsun.



$\phi^x:\partial B_1(0)\longrightarrow\mathbb{R}$, fonksiyonu

$$\phi^x(y)=|x|^{-(n-2)}\Phi(y-\tilde{x})=\Phi(|x|(y-\tilde{x}))$$

fonksiyonu harmoniktir.

$\Omega=B(0,1)$ yuvarını göstersin. $y\in\partial B_1(0)$ ve $x\neq 0$ olmak üzere

$$|x|^2|y-\tilde{x}|^2=|x|^2\left(|y|^2-\frac{2y\cdot x}{|x|^2}+\frac{1}{|x|^2}\right)=|x|^2-2y\cdot x+1=|x-y|^2.$$

Dolayısıyla, $(|x||y-\tilde{x}|)^{-(n-2)}=|x-y|^{-(n-2)}$, $\forall y\in\partial B_1(0)$ ve

$\phi^x(y)\doteq\Phi(y-x)$ fonksiyonu aradığımız düzeltici fonksiyonudur, $x\neq 0$ olmak üzere.

<u>Tanım 3.26.</u> $B_1(0)$ yuvarının Green fonksiyonu

$$G(x,y)\doteq\Phi(y-x)-\Phi(|x||y-\tilde{x}|),\quad x,y\in B_1(0),\ x\neq y,$$

olarak tanımlanır.

<u>Uyarı 3.27.</u> $x=0$ noktası için düzeltici fonksiyonu

tanımlanmış değildir. Aslında $\phi^0(y) \doteq \Phi(1)$ olarak tanımlanabilir çünkü $\Phi(|x|(y-\tilde{x})) = \Phi(|x||y-\tilde{x}|)$ eşitliği vardır ve

$$\lim_{x\to 0} |x||y-\tilde{x}| = \lim_{x\to 0} \left| |x|y - |x|\frac{x}{|x|^2} \right| = 1 \text{ olur.}$$

Çözümün integral temsili için Green fonksiyonunun tüm noktalar yerine dikkate "hemen her noktasında" bilinmek yeterli olacaktır. Dolayısıyla, yukarıda tanımladığımız $x=0$ ve $x \neq y$ durumlarının incelenmesine gerek bile yoktur. Ayrıca, ϕ^x fonksiyonu için bulduğumuz ifade $n=2$ durumunda da geçerlidir.

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{-1}{\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}, \quad x \in B_1(0),\ y \in \partial B_1(0) \text{ olarak hesaplanır.}$$

Teorem 3.23 $B_1(0)$ birim diski üzerindeki Dirichlet probleminin çözümünü verir. $B_r(0)$ diski için çözümü değişken değiştirerek kolayca elde ederiz.

Teorem 3.28. (Disk için Poisson Formülü)

Diyelim ki $g \in C(\partial B_r(0))$ için $u(x) = \dfrac{r^2-|x|^2}{n\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} g(y)/|x-y|^n \, dS(y)$ ile verilsin. Bu durumda,

i) $u \in C^\infty(B_r(0))$,

ii) $\Delta u = 0, \ \forall x \in B_r(0)$

iii) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in B_r(0)}} u(x) = g(x^0), \ \forall x^0 \in \partial B_r(0).$

Kanıtın Ana Hatları: $K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n}$ çekirdeği analitik bir fonksiyon olduğu için ($B_r(0)$ yuvarı içinde) $u \in C^\infty(B_r(0))$ olur.

Ayrıca, $x \mapsto G(x,y)$ fonksiyonu harmonik olduğundan $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}$ fonksiyonu da harmoniktir (başka bir deyişle Δ ve $\partial/\partial\nu$ operatörleri yer değiştirebilirler ($\Delta \circ \partial/\partial\nu = \partial/\partial\nu \circ \Delta$). Bu da $x \mapsto K(x,y)$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösterir.

Doğrudan hesap yaparak $\int_{\partial B_r(0)} K(x,y)\, dS(y) = 1$ olduğu görülür.

Dolayısıyla, $\Delta u = \int_{\partial B_r(0)} g(y)\, \Delta_x K(x,y)\, dS(y) = 0$ elde edilir.

(iii) için de yarı düzlem durumunda verdiğimiz $\varepsilon - \delta$ argümanına benzer bir akıl yürütme yapmak gerekir. $\blacksquare$

§ 3.6. Enerji Metodları.

Buraya kadar Varlık ve Teklik sonuçları için ya çözümlerin açık ifadelerini ya da harmonik fonksiyonların ortalama değer formülünü kullandık.

Bu bölümde çeşitli ifadelerin L^2-normlarını ve Değişimin Analizi (Calculus of Variations) tekniklerini kullanacağız. Bu teknikler eliptik denklemlerin teorisinde çokça kullanılan zayıf çözümlerin elde edilmesinde kullanılır.

Tanım 3.29. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir bölge ve $u \in C(\Omega)$ olsun. Verilen bir $1 \leq p < \infty$ gerçel sayısı için u fonksiyonun L^p-normu aşağıdaki şekilde tanımlanır (eğer integral tanımlıysa!)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}.$$

Eğer $\|u\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ ise fonksiyona integrallenebilir ve $\|u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$ ise karesi-integrallenebilir denir.

Çözümün Tekliği: Sonuç 3.15'te maksimum prensibi yardımıyla Dirichlet Problemi'nin çözümünün tekliğini kanıtlamıştık. Şimdi de Enerji metodu ile bir başka kanıt sunacağız.

Teorem 3.30. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırı C^1 olan sınırlı ve açık bir bölge olsun. $f \in C(\Omega)$ ve $g \in C(\partial\Omega)$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda aşağıdaki Dirichlet probleminin en fazla bir $u \in C^2(\bar{\Omega})$ çözümü vardır:

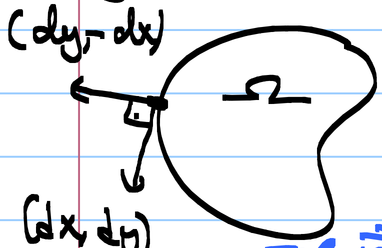
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \forall x \in \Omega, \\ u = g, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Kanıt: u ve v iki çözüm olsun ve $w = u - v$ alalım. O halde, $\Delta w = 0$ ve $w|_{\partial\Omega} = 0$'dır. Şimdi kısmi integral kullanarak

$$0 = -\int_\Omega w \Delta w \, dx = \int_\Omega |\nabla w|^2 dx$$ elde ederiz. ∇w sürekli olduğu için $\nabla w = 0$ elde edilir. O halde, w

sabit bir fonksiyondur. Diğer yandan $w|_{\partial\Omega}=0$ olduğu için $w=0$ (tüm Ω üzerinde) olduğunu görürüz.
Böylece kanıt tamamlanır. ■

Kısmi integralin bu şekilde ifade edilebilmeyi şöyle açıklayabiliriz ($n=2$ durumu):



$$\int_{\partial\Omega}\nabla f\cdot\vec{n}\,ds=\int_{\partial\Omega}(f_x,f_y)\cdot(dy,-dx)$$
$$=\int_{\partial\Omega}f_x\,dy-f_y\,dx$$
$$=\int_{\partial\Omega}(f_{xx}+f_{yy})\,dx\,dy$$
$$=\int_{\partial\Omega}\Delta f\;dA.$$

$$\int_{\partial\Omega}\underbrace{*df}_{=\nabla f\cdot\vec{n}\,ds}=\int_{\Omega}\underbrace{d*df}_{=\Delta f\,dA}$$
$$=\int_{\Omega}\Delta u \quad \text{s. 29}$$

Genel Durum.

Şimdi, $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $v:\Omega\to\mathbb{R}$ C^2-fonksiyonlar olsun.

$f=uv$ alalım. O halde, $\nabla f=u\nabla v+v\nabla u$ ve
$\Delta f=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$ olur ve böylece

$$(*)\quad \int_{\partial\Omega}(\nabla(uv))\cdot\vec{n}\,ds=\int_{\Omega}\Delta(uv)\,dA$$
$$=\int_{\Omega}(u\Delta v+v\Delta u)\,dA+2\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\,dA$$

elde edilir.

İki özel hale bakalım:

i) $v\equiv 1 \Rightarrow \int_{\partial\Omega}(\nabla u)\cdot\vec{n}\,dS=\int_{\Omega}\Delta u\,dA$, ve

ii) $u \equiv v \Rightarrow \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\Omega} u\, \Delta u\, dA + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dA.$

Dirichlet Prensibi:

İlk önce enerji fonksiyonelini tanımlayalım: $f \in C(\Omega)$ ve $g \in C(\partial\Omega)$ olmak üzere $\mathcal{A}$ kabul edilebilir fonksiyonlar kümesi şöyle tanımlanır:

$$\mathcal{A} = \{ w \in C^2(\overline{\Omega}) \mid w = g,\ \forall x \in \partial\Omega \}.$$

$I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ enerji fonksiyoneli ise şu şekilde verilir:

$$I(w) \doteq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - w f \right) dx, \quad w \in \mathcal{A}.$$

Teorem (Dirichlet Prensibi)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırı C^1 olan sınırlı ve açık bir bölge olsun. $u \in C^2(\overline{\Omega})$ fonksiyonu Dirichlet probleminin çözümü olsun: $\Delta u = f$, $u_{\partial\Omega} = g$. Bu durumda, $I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w)$ olur.

Ayrıca, $u \in \mathcal{A}$ I fonksiyonelinin minimum değerini versin, $I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w)$. Bu durumda u

$\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ Dirichlet probleminin (tek) çözümüdür.

Kanıt: İlk önce $u \in C^2(\Omega)$ Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. O halde, $u \in \mathcal{A}$ olur.

Bir $w \in \mathcal{A}$ alalım ve $-\Delta u = f$ Poisson denklemini $u-w$ fonksiyonu ile çarpıp kısmi integral kullanalım:

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u-w)\,dx$$

$$= -\int_\Omega u\Delta u\,dx + \int_\Omega w\,\Delta u\,dx - \int_\Omega fu\,dx + \int_\Omega fw\,dx$$

$$= -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS(y) + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS(y) - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx - \int_\Omega fu\,dx + \int_\Omega fw\,dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{(w-u)}_{g-g=0}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS(y) + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx - \int_\Omega fu\,dx + \int_\Omega fw\,dx$$

$$= \int_\Omega \left(\|\nabla u\|^2 - \nabla u\cdot\nabla w - fu + fw\right)dx, \text{ bulunur.}$$

Burada yine Green Eşitliğini kullandık:

$$\int_\Omega w\,\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS(y) - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx$$

$$d\left(w\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS(y)\right) = d\left(w\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\wedge dS(y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu}\left(w\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\underbrace{d\nu\wedge dS(y)}_{=dx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \nu}\left(w (\nabla u \cdot \nu)\right) dx$$

$$= \nabla\left(w(\nabla u\cdot \nu)\right)\cdot \nu \quad dx$$

$$= \left[(\nabla w \cdot \nabla u)\nu + w\nabla^2 u\, \nu + (w\nabla u)\,\nabla \nu\right]\cdot \nu \, dx$$

$$= (\nabla w\cdot \nabla u + w\nabla^2 u)\,dx, \text{ because}$$

$\nu\cdot\nu = \|\nu\|^2 = 1$ and hence $(\nabla \nu)\nu = 0$.

[$\nu\cdot\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, constant function 1.

So, $\nabla(\nu\cdot\nu) = (0,\ldots,0)$ ve $A\nu$.

$\Rightarrow \underline{(\nabla \nu)}\,\nu + \nu(\nabla\nu) = 0 \Rightarrow 2(\nabla\nu)\,\nu = 0$

Jakobiyen of ν $\quad\Rightarrow (\nabla \nu)\,\nu = 0.$]

Şimdi $0 = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \nabla u\cdot\nabla w - fu + fw\right)dx$ eşitliğinde

$$|\nabla u\cdot \nabla w| \le |\nabla u||\nabla w| \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak
$(a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \ge 0)$

$0 \ge \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)dx - \int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right)dx$ elde ederiz.

Başka bir deyişle $I(w) \ge I(u)$, $w \in A$ rasgele olduğu için $I(u)$'nun minimum değer olduğunu görürüz.

Şimdi de tersine her $w \in A$ için $I(w) \ge I(u)$

olduğunu kabul edelim. u fonksiyonunun Dirichlet problemini çözdüğünü göstermeliyiz: $-\Delta u = f$.
Rasgele bir (tıkız destekli) test fonksiyon $v \in C_c^\infty(\Omega)$ için $i(s) \doteq I(u+sv)$, $s \in \mathbb{R}$ fonksiyonun düşünelim. $u+sv \in \mathcal{A}$, $s=0$ değerin $i(s)$ için minimum değer ve $i(s)$ C^1-fonksiyon olduğu için

$$0 = i'(0) = \int_\Omega \left((\nabla u + s\nabla v)\cdot \nabla v - fv \right) dx \Big|_{s=0}$$

$$= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)\, dx \quad \text{(ve şimdi kısmi türev kullanarak)}$$

$$= \int_\Omega (-\Delta u - f)\, v \, dx \quad \text{elde edelim.}$$

$v \in C_c^\infty(\Omega)$ test fonksiyonu rasgele olduğu için $-\Delta u - f = 0$ olmalıdır. Bu kanıtı tamamlar. ■

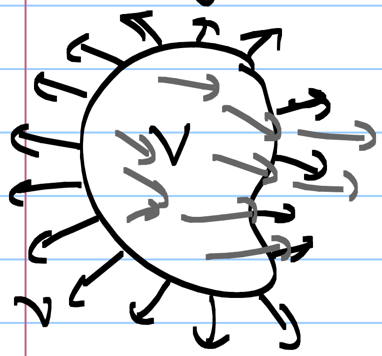
f, g ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ kümesi içindeki fonksiyonların daha az regüler olduğu durumlarda da bu metod kullanılabilir. Bu durumda fonksiyonelin minimumunu veren fonksiyon Dirichlet probleminin bir zayıf çözümü olacaktır.

Bölüm 4. Isı Denklemi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ yine sınırı C^1-olan sınırlı ve açık bir bölge olsun. $V \subseteq \Omega$ yine aynı şekilde bir bölge olsun. V bölgesi içindeki fiziksel bir büyüklüğün miktarını hesaplamaya çalışalım. ν ile V bölgesinin dış normal vektör alanını gösterelim. $u(x,t)$ bu fiziksel büyüklüğün x noktasında ve t anındaki yoğunluğunu gösterirse V bölgesi içindeki toplam yük

$\int_\Omega u(t,x)\,dx$ ile verilir. Dolayısıyla bu yük miktarının zamana göre değişimi için

$$\frac{d}{dt}\int_V u(t,x)\,dx = -\int_{\partial V} F(t,x)\cdot \nu(x)\,dS(x)$$ yazabiliriz.



Akı : $F(t,x)$ = t anında $x \in \partial V$ noktasındaki akı miktarı.
"$-$" işareti ν'nin dış normal seçilmesinin sonucudur.

$F : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Stokes' Teoremi'nden dolayı

$$\frac{d}{dt}\int_V u(t,x)\,dx = -\int_V \operatorname{div} F\,dx$$ ve dolayısıyla

$$\int_V \left(u_t(t,x) + \operatorname{div} F\right)dx = 0$$ yazabiliriz. $V \subseteq \Omega$ bölgesi rasgele olduğu için

$u_t(t,x) + \operatorname{div} F = 0$ elde edilir. Genellikle, flux

$F(t,x) = -a\nabla u(t,x)$ gradyan vektörünün tersi yönünde olduğu için son olarak

$u_t(t,x) = -\operatorname{div} F = -\operatorname{div}(-a\nabla u(t,x)) = a\Delta u(t,x)$ elde ederiz. Elde ettiğimiz $u_t = -a\Delta u$, $(a>0)$ denklemine ısı denklemi denir.

§ 4.2. Isı Denklemi.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir bölge olsun. Bu bölge üzerindeki ısı denklemi $u_t - a\Delta u = 0$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \Omega$ ile gösterilir.

Eğer $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise

$u_t - a\Delta u = f$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \Omega$, denklemine ise homogen olmayan ısı denklemi denir.

§ 4.3. Temel Çözüm.

Laplace denkleminin temel çözümünü ($-\Delta \Phi = \delta_0$ denkleminin çözümü) bulurken kullandığımız simetri kavramını burada da kullanabiliriz.

Dikkat edersek, eğer $u(t,x)$ fonksiyonu $0 = u_t(t,x) - \Delta u(t,x)$ Isı Denklemi'nin bir çözümü ise her $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ fonksiyonu da bir çözümdür. Ayrıca $\mathbb{R}^n$'deki dönmeler altında değişmez kalan (simetrik olan) bir çözüm $u(t,x) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$ şeklinde olmalıdır.

Çözümün tipini biraz daha genel tutarak

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

şeklindeki çözümlere yönelebiliriz. Bu çözümü denklemde yerine koyarak

$$0 = u_t(t,x) - \Delta u(t,x)$$
$$= -\alpha t^{\alpha-1} v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) - \beta t^{-(\alpha+\beta+1)} x \cdot \nabla v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) - t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$$

elde ederiz.

$\beta = 1/2$ ve $y = t^{-\beta} x$ alalım ve denklemi $t^{\alpha+1}$ ile çarpalım:

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} \nabla v(y) \cdot y + \Delta v(y) = 0.$$

Dönme simetrisinden dolayı $v(y) = w(r)$, $r = |y|$ olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla, aşağıdaki denklemi buluruz:

$$\alpha w(r) + \frac{r}{2} w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0.$$

$$v(y) = w(r) = w(\|y\|) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\|y\|} w'(r)$$

$\Rightarrow \nabla v(y) = \dfrac{w'(r)}{\|y\|} y$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{2} \nabla v(y) \cdot y = \frac{1}{2} \frac{w'(r)}{\|y\|} y \cdot y = \frac{1}{2} w'(r) \|y\| = \frac{1}{2} r w'(r)$$

elde edilir.

Ayrıca, $(r^n w)' = n r^{n-1} w + r^n w'$ ve
$$(r^{n-1} w')' = (n-1) r^{n-2} w' + r^{n-1} w''$$
olduğundan
$\alpha = n/2$ alıp denklemi r^{n-1} ile bölersek

$\frac{1}{2}(r^n w)' + (r^{n-1} w')' = 0$ ve buradan da integralini alarak
$1/2 (r^n w) + r^{n-1} w' = c$ denklemine ulaşırız,

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere. Burada, $r \to \infty$ giderken $w(r) \to 0$ ve $w'(r) \to 0$ koşullarını koyarak (sonsuza giderken madde/ısı yoğunluğunun sıfıra gittiğini kabul etmek - toplam madde/ısı miktarının sabit olduğunu kabul etmek) $c=0$ bulunur.

Şimdi elde edilen $w'(r) = -\frac{r}{2} w(r)$ denkleminin çözümü $w(r) = b e^{-r^2/4}$ olur, $b \in \mathbb{R}$.

$r = |y| = t^{-\beta}|x| = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$ ve $\alpha = n/2$ olduğu için

$$u(t,x) = \frac{b}{t^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad t>0 \text{ olur.}$$

<u>Tanım:</u> $\Phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} e^{-|x|^2/4t} / (4\pi t)^{n/2} & t>0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ 0, & t \leq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

fonksiyonuna Isı Denkleminin Temel Çözümü denir.

$(4\pi)^{-n/2}$ katsayısının nedeni aşağıdaki sonuçtur.

<u>Yardımcı Teorem.</u> $t>0$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\, dx = 1 \text{ olur.}$$

<u>Kanıt:</u>
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4t}\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\, dz_i}_{\text{"}\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}} = 1.$$

$x \mapsto \Phi(t,x)$ fonksiyonu n-boyutlu normal dağılım fonksiyonu $\mathcal{N}(0, 2tI)$ olarak bilinir.

<u>Uyarı 4.4.</u> Doğrudan hesap yaparak her $I \subseteq (0,\infty)$ tıkız aralık ve $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ için integrallenebilir bir F_α fonksiyonu vardır öyle ki, $|D^\alpha_{(t,x)} \Phi(t,x)| \leq F_\alpha(x)$, $\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$, sağlanır.

§4.4. Başlangıç Değer Problemi.

Homojen Durum.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = g, & \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad g \in C(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^\infty} < \infty,$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

<u>Tanım 4.5.</u> $u \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu yukarıdaki denklemi çözüyorsa bu fonksiyona klasik çözüm denir.

<u>Teorem 4.6.</u> $g \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) g(y)\, dy$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar ve dolayısıyla klasik bir çözümdür:

i) $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$,
ii) $u_t - \Delta u = 0$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, and

iii) $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x^0)} u(t,x) = g(x^0)$.

Kanıt: (i) $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve Φ integrallenebilir olduğu için $u(t,x)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

$(t,x,y) \longmapsto h(t,x,y) \doteq \Phi(t,x-y)g(y)$ fonksiyonu için

– Her $y \in \mathbb{R}^n$ sabit noktası için $(t,x) \mapsto h(t,x,y)$ fonksiyonu C^∞-dur,

– Her (t,x) sabit ikilisi için $y \mapsto h(t,x,y)$ fonksiyonu integrallenebilirdir, ve

– Her $I \times K \subseteq (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ tıkız kümesi ve $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ elemanı için integrallenebilir bir G_α fonksiyonu vardır, öyle ki

$$|D^\alpha_{(t,x)} h(t,x,y)| \leq \|g\|_{L^\infty} \sup_{x \in K} F_\alpha(x-y) \doteq G_\alpha(y),$$

$\forall (t,x,y) \in I \times K \times \mathbb{R}^n$; olur (Uyarı 4.4).

Buradan $u(x,t)$'nin C^∞ olduğunu ve türevlerin integral işareti altında alınabileceğini görürüz. Bu (i)'nin kanıtını bitirir. Ayrıca

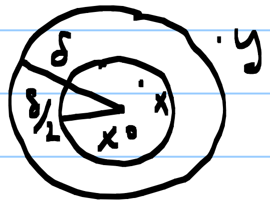
$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{(\Phi_t - \Delta\Phi)}^{=0}(t,x-y)\, g(y)\, dy = 0$$ elde edilir. (ii) kanıtlanmış oldu.

iii) $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ olsun. g sürekli olduğu için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|y - x^0| < \delta$ ise $|g(y) - g(x^0)| < \epsilon$ olur. $|x - x^0| < \delta/2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ alalım. Yardımcı Teorem 4.3'den dolayı integrali parçalara ayırarak şöyle yazabiliriz.

$$|u(t,x) - g(x^0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Phi(t, x-y)[g(y) - g(x^0)]\right) dy \right|$$
$$\leq \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y)\,|g(y) - g(x^0)|\,dy \doteq I$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(t, x-y)\,|g(y) - g(x^0)|\,dy \doteq J$$

İlk integral için, $I \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\,dy = \epsilon$ buluruz.

İkinci integral için ise, $|x-x^0| \leq \delta/2$ ve $|y-x^0| \geq \delta$ için



$$|y-x^0| \leq |y-x| + |x-x_0|$$
$$\leq |y-x| + \delta/2 \leq |y-x| + \frac{1}{2}|y-x^0|, \text{ ve}$$

buradan da $\frac{1}{2}|y-x^0| \leq |y-x|$ elde ederiz.

Şimdi, $J \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x^0)} \Phi(x-y, t)\,dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}}\,dy$

$$\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}}\,dy \text{, buluruz.}$$

Son olarak kutupsal koordinatlara geçip $s = r/\sqrt{t}$ alırsak

$$J \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}\,dr = C \int_{\delta/\sqrt{t}}^\infty e^{-s^2/4} s^{n-1}\,ds \longrightarrow 0 \quad (t \to 0^+)$$

(veya Dominated Convergence Theorem).

Dolayısıyla, $|u(t,x) - g(x^0)| < 2\epsilon$, $\forall x \in B_\delta(x^0)$, $t > 0$ olur. ■

Corollary 4.7. g ve u fonksiyonları yukarıdaki teoremde ki gibi olsunlar. Bu durumda, her $t \geq 0$ için

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}$$ olur.

Uyarı 4.8. Teorem 4.6'nın formal bir sonucu olarak $\Phi(t,x)$ temel çözümün aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu söyleyebiliriz:

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0, & (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ \Phi(0,x) = \delta_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Uyarı 4.9. (Yayılmanın Sonsuz Hızı) Teorem 4.6'daki g fonksiyonu için $g \geq 0$ ve $g \not\equiv 0$ ise, her $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ için

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy > 0$$ olur.

Dolayısıyla, eğer başlangıçta $(t=0)$ sıcaklık hiçbir noktada negatif değilse ve bir noktada pozitif ise her $t>0$ anında ve her $x\in\mathbb{R}^n$ noktasında sıcaklık pozitif olur. Dolayısıyla, pozitif sıcaklık sonsuz bir hızla yayılmış olur.

Homogen Olmayan Durum.

İlk önce şu problemi ele alalım:

$$(*)\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = 0, & \{0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Teorem 4.6'nın sonucu olarak şunu söyleyebiliriz: Her sabit $s\in(0,t)$ değeri için

$$u(t,x;) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y)\, f(s,y)\, dy$$ fonksiyonu

$$\begin{cases} u_t(t,x;s) = \Delta_{t,x} u(t,x;s), & \forall (t,x) \in (s,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(s,x;s) = f(s,x), & \forall x \in \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Ayrıca $t=s$ başlangıç değer fonksiyonu $g(x)=f(s,x)$'dir.

Duhamel Prensibi

$$u(t,x) \doteq \int_0^t u(x,t;s)\, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y)\, f(s,y)\, dy\, ds$$ ile

tanımlanan fonksiyonun $(*)$ başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Bunu formal yoldan şöyle görebiliriz:

$$\begin{aligned}(u_t - \Delta u)(t,x) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(t,x;s)\,ds\right) - \int_0^t \Delta_x u(t,x;s)\,ds \\ &= u(t,x;t) + \int_0^t u_t(t,x;s)\,ds - \int_0^t \Delta_x u(t,x;s)\,ds \\ &= f(t,x) + \int_0^t (u_t - \Delta_x u)(t,x;s)\,ds \\ &= f(t,x) + 0 = f(t,x).\end{aligned}$$

Şimdi de bu formal hesabı matematiksel olarak doğru şekilde yaparak bulduğumuz çözümün klasik bir çözüm olduğunu gösterelim.

Teorem 4.10. $f \in C_c^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ (tıkız destekli fonksiyon) olmak üzere

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dy\, ds,$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

i) $u \in C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$,
ii) $u_t - \Delta u = f$, $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$,
iii) $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x^0)} u(t,x) = 0$.

Kanıt: i) f tıkız destekli olduğu için türev ile integral yer değiştirebilir ve dolayısıyla f'in $C^{1,2}$ olması u çözümünde $C^{1,2}$ olmasını sağlar.
ii) Teorem 4.6'daki benzer şekilde integrali $(0,\epsilon)$ ve (ϵ,t) olarak ayırıp tek tek ele alarak ($\Phi(t,x)$ fonksiyonunun 0 noktasındaki singülerliğinden dolayı) türevleri integralin altında hesaplayabiliriz.
iii) f'nin sınırlı olduğunu ve Yardımcı Teorem 4.3'ü kullanarak limitin sıfır olduğu gösterilebilir. ∎

Isı denkleminin doğrusallığını kullanarak aşağıdaki sonuca varırız:

Sonuç 4.11. $g \in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in C_c^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlar olsun. O zaman,

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dy\, ds$$

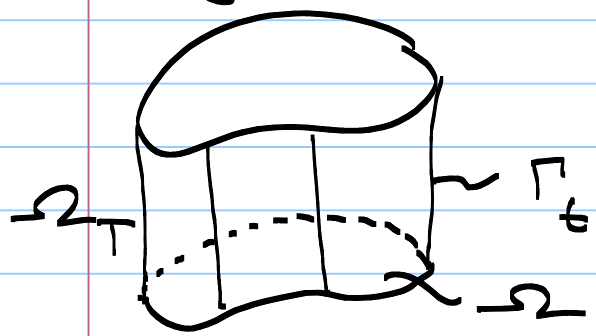
aşağıdaki problemin bir klasik çözümü verir:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u = g, & \{t=0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

§4.5. Çözümlerin Özellikleri.

Maksimum Prensibi.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ içinde açık sınırlı bir bölge ve $T>0$ olsun. Bu durumda $\Omega_T \doteq (0,T]\times\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ bölgesine parabolik silindir ve
$$\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T = [0,T]\times\partial\Omega \cup (\{0\}\times\Omega)$$
bölgesine de parabolik sınır denir.



Ω bölgesi üzerindeki parabolik silindir ve parabolik sınırı.

Teorem 4.12 (Isı Denklemi için Maksimum Prensibi).

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω_T, $\overline{\Omega}_T$ ve Γ_T yukarıdaki gibi olsun. Ayrıca $u \in C^{1,2}(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonu Ω_T bölgesinde $u_t - \Delta u \leq 0$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda:

i) Maksimum prensibi: $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$.

ii) Kuvvetli Maksimum prensibi:

Eğer Ω bölgesi ayrıca bağlantılı ise (dolayısıyla yol bağlantılı ise) ve bir $(t_0,x_0)\in\Omega_T$ noktası için

$u(t_0, u_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}_T} u(x,t)$ ise u fonksiyonu $\overline{\Omega}_{t_0}$ üzerinde sabittir.

Biz burada sadece (i)'i kanıtlayacağız. Ayrıca aynı sonuçlar maksimum yerine minimum için de geçerlidir.

Uyarı 4.13. Teoremin ikinci şıkkı $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonu eğer bir (t_0, x_0) noktasında maksimum değere ulaşıyorsa sıcaklığın her (t,x), $t \leq t_0$ ve $x \in \overline{\Omega}$, noktalarında sabit olduğunu söyler.

Kanıt (i). $Lu \doteq u_t - \Delta u$ operatörünü tanımlayalım ve ilk önce Ω_T bölgesi üzerinde Lu fonksiyonunun $Lu < 0$ koşulunu sağladığını kabul edelim.
Şimdi $u(t,x)$ fonksiyonunun bir $(t_0, x_0) \in (0,T) \times \Omega$ iç noktasında maksimum değere ulaştığını kabul edelim. Bu durumda $u_t(t_0, y_0) = 0$ ve $D^2 u(t_0, x_0)$ matrisi de negatif yarı-kararlı olur $(v D^2 u(t_0,x_0) v^T \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n)$. $v = e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ olarak

$$u_{x_i x_i}(t_0, u_0) = e_i D^2 u(t_0, x_0) e_i^T \leq 0$$ ve dolayısıyla

$(u_t - \Delta u)(t_0, x_0) \geq 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \max\limits_{\partial\Omega_T} u$ olur.

Şimdi aynı sonucu $Lu \leq 0$ koşulu altında kanıtlayalım. Bunun için $\varepsilon > 0$ olmak üzere $u_\varepsilon \doteq u + \varepsilon e^{x_1}$ değiştirilmiş fonksiyonunu ele

alalım. Bu durumda $Lu_\epsilon = u_{\epsilon_t} - \Delta u_\epsilon = Lu - \epsilon e^{x_1}$
$\Rightarrow Lu_\epsilon < Lu \leq 0$ elde ederiz.

O halde, yukarıdaki paragraftan dolayı u_ϵ fonksiyonu için $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u_\epsilon = \max\limits_{\partial\Omega_T} u_\epsilon$ olur.

$\epsilon \to 0$ giderken limit olarak $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \max\limits_{\partial\Omega_T} u$ elde ederiz.

[Kanıt: $\overline{\Omega}_T$ bölgesi sınırlı olduğu için öyle bir $M>0$ sayısı vardır ki her $(t, x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}_T$ için $|x_1| \leq M$ olur. Dolayısıyla, verilen her $\epsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyle ki her $0 < \delta_0 < \delta$ için $u \leq u_\delta \leq u + \epsilon$, $\forall (t,x) \in \overline{\Omega}_T$, olur.

O halde, her $0 < \delta_0 < \delta$ için

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}_T} u_\delta \leq \max_{\overline{\Omega}_T} u + \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \max_{\overline{\Omega}_T} u_\delta - \max_{\overline{\Omega}_T} u \right| < \epsilon \text{ olur.}$$

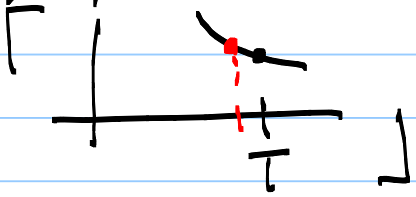
Dolayısıyla, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \max\limits_{\overline{\Omega}_T} u_\epsilon = \max u$ ve benzer şekilde $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \max\limits_{\partial\Omega_T} u_\epsilon = \max\limits_{\partial\Omega_T} u$ olur.]

O halde son olarak şunu kanıtlamalıyız: u fonksiyonu $\partial\Omega_T \setminus \Gamma_T = \{T\} \times \Omega$ kümesi üzerinde maksimum değerine ulaşamaz.

Yine ilk önce Ω_T üzerinde $Lu < 0$ olduğu durumu ele alalım. u fonksiyonu bir (T, x_0), $x_0 \in \Omega$, noktasında maksimum değerine ulaşsın. $D^2u(T,x_0)$ matrisi negatif yarı kararlı olduğu için $-\Delta u(T,x_0) \geq 0$ ve böylece

$$0 > Lu(T,x_0) = (u_t - \Delta u)(T,x_0) \geq u_t(T,x_0)$$

elde edilir. Fakat $u_t(T,x_0) < 0$ eşitsizliği u'nun (T,x_0) maksimuma ulaştığı kabulü ile çelişir.



Son olarak yine, $Lu \leq 0$, Ω_T olduğu genel durumu ele alalım.

Bu sefer $\tilde{u}_\epsilon \doteq u + \epsilon e^{-t}$, $\epsilon > 0$, fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi de

$$L\tilde{u}_\epsilon = Lu - \epsilon e^{-t} < 0, \quad \Omega_T, \text{ olur.}$$

O halde, $\tilde{u}_\epsilon$ fonksiyonu $\{T\}\times\Omega$ üzerinde maksimum değere ulaşamaz. Yine $\epsilon \to 0$ giderken limit alarak kanıtı tamamlarız. Aslında kanıt yine aynı şekilde olacaktır çünkü $\tilde{u}_\epsilon$ fonksiyonun maximum değeri $\{T\}\times\Omega$ üzerinde değilse $\partial\bar{\Omega}_T \setminus (\{T\}\times\Omega) = \{0\}\times\bar{\Omega} \cup ([0,T]\times\partial\bar{\Omega})$ tıkız bölgesinde olacaktır. Dolayısıyla, yukarıda olduğu gibi $u = \lim \tilde{u}_\epsilon$ limit fonksiyonu da $\bar{\Omega}_T$ üzerindeki maksimumunu yine $\partial\bar{\Omega}_T \setminus (\{T\}\times\Omega)$ üzerinde olacaktır. ∎

Maksimum prensibini $\mathbb{R}^n$ için kanıtlayabilmek için u fonksiyonunun büyüme hızına bir kısıtlama getirmek gerekiyor.

Teorem 4.14. (Cauchy Problemi İçin Maksimum Prensibi)

$u \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ aşağıdaki başlangıç değer probleminin bir klasik çözümü olsun.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = g, & \{t=0\} \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

öyle ki $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ ve $u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2}$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, olacak $a, A > 0$ sayıları vardır.

Bu durumda

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x).$$

Kanıt: $[0,T]$ aralığını gerekirse daha küçük parçalara bölerek $4aT < 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $4a(T+\epsilon) < 1$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Verilen bir $y \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ sayısı için

$$u_\delta(t,x) \doteq u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\epsilon-t)} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Şimdi ısı denklemini $\mathbb{C}^n$'de ele alalım. $\Phi(t,x)$ $\mathbb{R}^n$'deki ısı denkleminin temel çözümü ise $(t,x) \longmapsto \Phi(T+\epsilon-t, i(x-y))$, $\mathbb{C}^n$'deki çözüm, halen $\mathbb{R}^n$'e kısıtlandığında da ısı denklemini çözecektir (t yerine $-t$ almak x'in ix ile yer değiştirmesinin etkisini giderir).

Dolayısıyla, $u_\delta(t,x) = u(t,x) - (4\pi)^{\frac{n}{2}} \Phi(T+\epsilon-t, i(x-y))$ halen ısı denklemini çözecektir.

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ rasgele olmak üzere

$\Omega = B_r(y)$ açık yuvarı için Teorem 4.12 (i) 'den dolayı

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u_\delta = \max_{\Gamma_T} u_\delta \text{ olur.}$$

$\{0\} \times \Omega \subseteq \Gamma_T$ kümesi üzerinde açıkça

$$u_\delta(0,x) = u(0,x) - (4\pi)^{n/2}\,\Phi(T+\epsilon, i(x-y)) \leqslant u(0,x) = g(x),$$

ve $[0,T] \times \partial B_r(y)$ üzerinde ise

$$u_\delta(t,x) = u(t,x) - \frac{\delta}{(T+\epsilon-t)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon-t)}} \leqslant A e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\delta}{(T+\epsilon)^{n/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon)}}.$$

$\epsilon > 0$ sayısının seçimi dolayısıyla $4a(T+\epsilon) < 1$ olduğu için $1/4(T+\epsilon) = a+\gamma$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ vardır ve bundan dolayı, yeterince büyük r için,

$$u_\delta(t,x) \leqslant A e^{a(|y|+r)^2} - \delta\,(4(a+\delta))^{n/2}\, e^{(a+\gamma)r^2} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} g(x)$$

elde ederiz. O halde, her $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ için

$u_\delta(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} g$ olur. Son olarak $\delta \to 0$ giderse

$u(t,x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} g$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. ∎

Başlangıç Sınır Değer Problemi İçin Teklik Sorunu.

Teorem 4.14 $\Omega = \mathbb{R}^n$ durumunda çözüm üzerinde fazladan sınırlama koymadan çözümün tekliğinin garanti olmadığı ipucunu veriyor. Gerçekten de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u = 0, & \{t=0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

probleminin birisi $u \equiv 0$ olmak üzere, sonsuz sayıda çözümü vardır.

Diğer yandan, açık ve sınırlı her $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesi için aşağıdaki sonucu kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.15. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin en fazla bir $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ klasik çözümü vardır.

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), & \forall (t,x) \in \Omega_T, \\ u(t,x) = h(t,x), & \forall (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,x) = g(x), & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Benzer şekilde

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), & \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

denkleminin $|u(t,x)| \leq A e^{a|x|^2}$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ şeklinde bir büyüme koşulunu sağlayan ($a, A \in \mathbb{R}^+$ sabit olmak üzere) en fazla bir klasik çözümü vardır.

Kanıt: u ve v bu denklemlerin iki klasik çözümü olsunlar. $w = u - v$ alalım. Bu durumda,
$w_t - \Delta w = 0$, $\forall (t,x) \in \Omega_T$ ve $w = 0$, $\forall (t,x) \in \Gamma$
olur. Teorem 4.12 (T) (zayıf maksimum prensibi) w ve $-w$ fonksiyonlarına uygulanırsa sırasıyla $w \leq 0$ ve $w \geq 0$, $\forall (t,x) \in \Omega_T$ elde ederiz. Dolayısıyla, $w = 0$ olur ve kanıt tamamlanır. ◆

Uzun-Zaman Davranışı.

Şimdi de ısı denkleminin çözümünün uzun vadede dengeye ulaşarak $u_t = 0$ olacağını ve dolayısıyla çözümün Laplace denkleminin çözümüne yaklaşacağını göreceğiz.

Teorem 4.16. Ω sınırı C^1 olan sınırlı ve açık bir bölge ve $h \in C(\partial\Omega)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (0,\infty)\times\Omega, \\ u = h, & [0,\infty)\times\partial\Omega \end{cases}$$

denkleminin her $u \in C^{1,2}((0,\infty)\times\Omega)\cap C([0,\infty)\times\overline{\Omega})$

çözümü için $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v(x)$ düzgün şekilde (uniformly) yakınsar öyle ki $v \in C^2(\Omega)\times C(\overline{\Omega})$ dır ve aşağıdaki Laplace denkleminin bir çözümüdür:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \forall x \in \Omega, \\ v = h, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Kanıt: Şu yardımcı fonksiyonu kullanacağız: $\epsilon > 0$ olmak üzere $w_\epsilon : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $w_\epsilon(t,x) \doteq \cos(\epsilon x_1) e^{-\epsilon^2 t}$. Bu fonksiyon $(\partial_t - \Delta) w_\epsilon = 0$ ısı denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca, $w_\epsilon(0,x) > 0$ $\forall x \in [-1/\epsilon, 1/\epsilon]^n$ ve $t \to \infty$ giderken düzgün şekilde

$w_\epsilon(t,\cdot) \to 0$, sıfır fonksiyonuna yakınsar.

$\epsilon > 0$ sayısını $\overline{\Omega} \subseteq [-1/\epsilon, 1/\epsilon]^n$ olacak şekilde yeterince küçük seçelim ve

$$M \doteq \max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{|u(0,x) - v(x)|}{|w_\epsilon(0,x)|}$$ sayısını tanımlayalım.

u, v ve w_ϵ fonksiyonlarının seçiminden dolayı $(\partial_t - \Delta)(u - v - M w_\epsilon) = 0$ ve Γ_∞ üzerinde de $u - v - M w_\epsilon \leq 0$ olur.

Dolayısıyla, (zayıf) maksimum prensibi dolayısıyla $\Omega_\infty = (0,\infty)\times\Omega$ üzerinde $u \leq v + M w_\epsilon$ olur.

Benzer şekilde, Γ_∞ üzerinde $u-v+Mw_\epsilon > 0$ olduğu gösterilebilir ve dolayısıyla, yine $\Omega_\infty = [0,\infty) \times \Omega \cup$ üzerinde $u \geq v - Mw_\epsilon$ elde edilir. O halde,
$|u-v| \leq Mw_\epsilon$ ve dolayısıyla da

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\bar\Omega} |u(t,x)-v(x)| = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece kanıt tamamlanır.

§4.6. Enerji Metodları:

Laplace denkleminde olduğu gibi enerji metodu yardımıyla teklik sonuçlarının bir başka kanıtını sunacağız. İlk önce teknik bir sonuç vereceğiz:

Yardımcı Teorem 4.18 (Gronwall's Inequality)

$v : [0,T] \to [0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyon ve $C_1, C_2 > 0$ sabitler olsun, öyle ki her $t\in[0,T]$ için

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(s)\,ds + C_2 \text{ eşitsizliği sağlansın.}$$

Bu durumda $v(t) \leq C_2 e^{C_1 t} \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}), \forall t\in[0,T]$ olur.

Kanıt: $v = v(t)$ fonksiyonu integrallenebilir olduğu için

$$0 \leq v(t) \leq C_1 \int_0^t v(s)\,ds + C_2 \leq C_1 \int_0^T v(s)\,ds + C_2 \leq M, \forall t\in[0,T]$$

olacağından $v(t)$ fonksiyonu sınırlıdır.

Dolayısıyla, $t \longmapsto C_1 \int_0^t v(s)\,ds + C_2$ fonksiyonu süreklidir.

Şimdi şu fonksiyon dizisini düşünelim:

$v_0(t) = v(t)$, $n \geq 1$ için $v_n(t) = C_1 \int_0^t v_{n-1}(s)\,ds + C_2$.

$v_1(t)$ sürekli olduğu için her $v_n(t)$, $n \geq 1$, fonksiyonu da süreklidir. Ayrıca,

$v_0(t) = v(t) \leq C_1 \int_0^t v(s)\,ds + C_2 = v_1(t)$ olur.

$v_2(t) = C_1 \int_0^t v_1(s)\,ds + C_2$ türevlenebilir fonksiyondur

ve $v_1(t) \geq v_0(t)$ $\forall t$, olduğu için

$$v_2(t) = C_1 \int_0^t v_1(s)\,ds + C_2 \geq C_1 \int_0^t v_0(s)\,ds + C_2 = v_1(t)$$

olur. Tümevarım ile

$$v_{n+1}(t) = C_1 \int_0^t v_n(s)\,ds + C_2 \geq C_1 \int_0^t v_{n-1}(s)\,ds + C_2 = v_n(t)$$

elde edilir. O halde, $0 \leq v_0(t) \leq v_1(t) \leq \cdots \leq v_n(t)$ artan bir fonksiyon dizisidir.

$M = \int_0^T v(s)\,ds \geq 0$ olsun.

$$|v_{n+1}(t) - v_n(t)| = \left| C_1 \int_0^t (v_n(s) - v_{n-1}(s))\,ds \right|$$

$$\leq C_1 T \, \| v_n - v_{n-1} \|$$

$\Rightarrow \| v_{n+1} - v_n \| \leq C_1 T \, \| v_n - v_{n-1} \|$, $\forall n \geq 2$ elde edilir.

$T>0$ sayısı $c_1 T<1$ olacak şekilde seçilirse Banach Sıkıştırma Teoremi'nden dolayı bu fonksiyon dizisi sürekli bir fonksiyona yakınsar, diyelim ki $u(t)$ olsun. $\{v_n\}$ dizisi artan olduğu için

$0 \leq v(t) = v_0(t) \leq \cdots \leq v_n(t) \leq \quad \leq u(t)$ ve

$u(t) = c_1 \int_0^t u(s)\,ds + c_2$ olur. Buradan $u(t)$

fonksiyonunun C^∞ olduğunu ve $u' = c_1 u$, $u(0) = c_2$ başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu görürüz. Dolayısıyla,

$u(t) = c_2 e^{c_1 t}$ elde edilir. O halde,

$v(t) \leq u(t) = c_2 e^{c_1 t}$ olur.

$c_2 e^{c_1 t} \leq c_2 (1 + c_1 t + e^{c_1 t})$ basit bir "Calculus" problemidir.

Böylece kanıt $Tc_1 < 1$ durumunda kanıtlanmış oldu. Başka bir deyişle sonucu her $[0,a]$, $a < 1/c_1$ aralığı için kanıtlamış olduk.

Aslında bu sonucu $[0,T]$ yerine herhangi bir $[a,b]$ ($0 < b-a < 1/c_1$ olmak üzere) aralığı için de yazabiliriz. Bu durumda sonuç ise $v(t) \leq c_2 e^{c_1(t-a)}$ olur. Fakat, bu durumda da

$$v(t) \leq c_2 e^{c_1(t-a)} = c_2 e^{c_1 t} \underbrace{e^{-c_1 a}}_{\leq 1} \leq c_2 e^{c_1 t}$$

elde edilir. Dolayısıyla, verilen herhangi bir $T>0$ sayısı için $[0,T]$ aralığını uzunlukları $1/c_1$ sayısından küçük olan sonlu adet aralığın birleşimi olarak yazarsak $[0,T]=[a_1,b_1]\cup\dots\cup[a_n,b_n]$, her $[a_i,b_i]$ üzerinde

$$v(t)\leq C_2 e^{C_1 t}$$ olduğu için kanıt tamamlanır. $\lrcorner$

Teorem 4.19. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ sınırlı C^1 olan açık ve sınırlı bir bölge olsun. $u\in C^{1,2}(\overline{\Omega}_T)$ fonksiyonu aşağıdaki Dirichlet veya von Neumann sınır değer probleminin çözümü olsun.

$$u_t-\Delta u=f,\quad \Omega_T$$
$$u(0,\cdot)=g,\quad \{t=0\}\times\Omega$$

Dirichlet Sınır Değeri: $u=0$, $[0,T]\times\partial\Omega$,

von Neumann Sınır Değeri: $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$, $[0,T]\times\partial\Omega$, öyle ki

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x)=D_x u(t,x)\cdot\nu(x),$$ u'nun sınır boyunca dış normal yönünde türevidir.

Bu durumda u fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}+2\|Du\|^2_{L^2(\Omega_t)}\leq e^t\left(\|g\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right),$$

$\forall t\in[0,T]$.

__Kanıt:__ $u_t-\Delta u=f$ denklemini $2u$ ile çarpıp, $t\in[0,T]$ olmak üzere Ω_t üzerinde integralini alalım:

$$\int_0^t\int_\Omega(2uu_s-2u\Delta u)(s,x)\,dx\,ds=\int_0^t\int_\Omega(2uf)(s,x)\,dx\,ds.$$

$(2uu_s) = (u^2)_s$ olduğu için kısmi integral ve Green formüllerini kullanarak $\quad$ $=0$ (sınır koşulu!) (s. 43)

$$\int_\Omega u^2(t,x)\,dx - \int_\Omega g^2(x)\,dx - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Big(2u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0}\Big)(s,x)\,dS(x)\,ds$$
$(s=t)$ $\quad$ $(s=0)$
$$+ \int_0^t \int_\Omega (2\nabla u\cdot\nabla u)(s,x)\,dx\,ds = \int_0^t \int_\Omega (2uf)(s,x)\,dx\,ds$$

$$\Rightarrow \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} = \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (2uf)(s,x)\,dx\,ds$$

elde edilir. Şimdi $|2uf| \leq u^2 + f^2$ eşitliğini kullanarak

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \leq \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int_0^t \|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

buluruz.

Son olarak Gronwall's eşitsizliğini
$v = \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)}$, $C_1 = 1$ ve $C_2 = \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_t)}$

alarak uygularsak

$$\underbrace{\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)}}_{=v} \leq \underbrace{e^t}_{=e^{C_1 t}} \underbrace{\left(\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_t)}\right)}_{=C_2},$$

$\forall t \in [0,T]$, elde edilir. ∎

Bu yaklaşımın bir sonucu şudur:

<u>Sonuç 4.20</u> f ve g yukarıdaki teoremdeki gibi ve $h \in C([0,T]\times\partial\Omega)$ olsun. O zaman

aşağıdaki problemin en fazla bir $u \in C^{1,2}(\bar{\Omega}_T)$ çözümü vardır.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \Omega_T \\ u = h, & [0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,\cdot) = g, & \Omega. \end{cases}$$

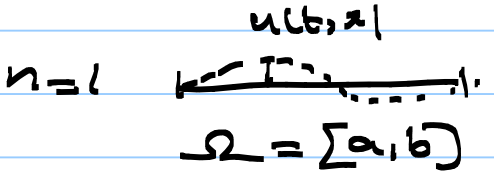
Kanıt: Yine u ve v gibi iki çözüm alalım ve $w \doteq u - v$ olarak tanımlansın. w ısı denklemini çözecektir ve $f \equiv 0 \equiv g$ olacaktır. Dolayısıyla Teorem 4.19'dan dolayı $\|w(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \forall s \in (0,T]$ olur. Buradan $w \equiv 0$ elde edilir. ■

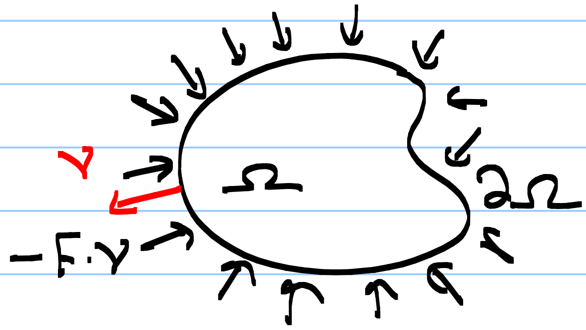
Uyarı 4.21. Enerji metodlarını kullanarak ısı denklemi için "geriye doğru teklik" sonucu (backward uniqueness) elde edilebilir: Eğer Ω yeterince iyi bir bölge ise $(0,T] \times \Omega$ bölgesi üzerindeki ısı denkleminin u ve v gibi iki çözümü bir t_* anında eşitlense, $u(t_*, x) = v(t_*, x), \forall x \in \Omega$, $u \equiv v$ olur.

Bölüm 5. Dalga Denklemi

§5.1. Motivasyon. Dalga denklemi klasik fiziğin konusudur. Titreşen bir tel ($n=1$), zar ($n=2$) veya elastik cisim ($n=3$) başka modellerdir.

Dalga denklemini şu şekilde çıkartabiliriz. $u(t,x)$ ile titreşen cismin t anında ve x-noktasında denge durumundan uzaklığını gösterelim. Titreşen cisim sınırı C^1-den sınırlı ve açık $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesi üzerinde yer alsın.





Titreşen cismin yoğunluğunun 1 birim olduğunu kabul edelim (1gr/cm, 1g/cm², v.s.). Bu durumda cismin t anındaki toplam ivmesi

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x)\,dx = \int_\Omega u_{tt}(t,x)\,dx$$

olur. $F(t,x)$, $x\in\Omega$, cisme $x\in\Omega$ noktasında ve t anında uygulanan kuvvet ise cisme uygulanan toplam kuvvet

$$-\int_{\partial\Omega} F(t,x)\cdot\nu(x)\,dS(x)$$

olur. Newton'un ikinci yasası uyarınca

$$\int_\Omega u_{tt}(t,x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} F(t,x)\cdot\nu(x)\,dS(x)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağ tarafa Stokes' Teoremini (Gauss Teoremi) uygularsak

$$\int_\Omega u_{tt}(t,x)\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div}_x F(t,x)\,dx.$$ Elastik cisimler için $F(t,x) \approx -a\nabla u(t,x)$ olarak alınabilir (dışarıdan uygulanan başka bir kuvvet olmadığını kabul edersek) ve dolayısıyla eşitlik

$$\int_\Omega u_{tt}(t,x)\,dx = \int_\Omega a \operatorname{div}_x \nabla u(t,x)\,dx = a\int_\Omega \Delta_x u\,dx$$

haline gelir. $\int_\Omega (u_{tt} - a\Delta_x u)\,dx = 0$ eşitliği aslında Ω içindeki her alt bölgede de geçerli olacağı için $u_{tt} - a\Delta_x u = 0$ denklemini elde ederiz.

Eğer gerilmenin ürettiği kuvvet dışında bir dış kuvvet varsa denklem $u_{tt} - a\Delta_x u = Q$ haline dönüşür.

§5.2. Dalga Denklemi.

<u>Tanım 5.1.</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ açık bir bölge olsun. $u_{tt} - \Delta u = 0$, $(t,x) \in (0,\infty)\times\Omega$, denklemine homojen dalga denklemi, $u_{tt} - \Delta u = f$ denklemine ise homojen olmayan dalga denklemi denir. $\Box = \partial_{tt} - \Delta_x$ operatörüne dalga (d'Alembert veya kutu) operatörü denir.

Basitlik açısından sadece $\Omega = \mathbb{R}^n$ durumunu inceleyeceğiz. Aşağıdaki probleme başlangıç değer problemi denir:

$u_{tt} - \Delta u = 0$, $\forall (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Burada $u_0(x)$ başlangıç (yer değiştirme) pozisyonu, $u_1(x)$ ise başlangıç hızıdır.

Tanım 5.2. Yukarıdaki problemi çözen bir $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna dalga denkleminin bir klasik çözümü denir.

§5.3. Çözümlerin Formülleri:

1-boyutlu D'Alembert Formülü: $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ koordinat değişimi uygularsak $0 = u_{tt} - u_{xx}$ denklemi $u_{\eta\xi} = 0$ denklemine dönüşür. Bunun genel çözümü ise $u = f(\xi) + g(\eta)$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ şeklindedir. O halde, $u_{tt} - u_{xx} = 0$, homojen dalga denkleminin çözümü

$u(t,x) = f(x+t) + g(x-t)$ olur. Bu çözüme karakteristik koordinatlar yardımıyla çözüm de denir.

Başlangıç değer probleminin çözümü ise şöyle verilir.

Teorem 5.4. (D'Alembert Formülü ([746])).
$u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ve $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ olmak üzere Tanım 5.2'deki başlangıç değer problemin tek çözümü D'Alembert formülü olarak bilinen aşağıdaki $u \in C^2([0,\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ fonksiyonudur.

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-t) + u_0(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy.$$

Kanıt: Çözümün genel formunun $u = f(x+t) + g(x-t)$ şeklinde olduğunu biliyoruz.

$u(0,x) = u_0(x)$ ve $u_t(0,x) = u_1(x)$ olması bize

$f(x)+g(x)=u_0(x)$ ve $f'(x)-g'(x)=u_1(x)$ bulunur.
$f'+g'=u_0' \Rightarrow f'=\frac{1}{2}(u_0'+u_1)$ ve $g'=\frac{1}{2}(u_0'-u_1)$.
olur.
Buradan $f(s)=\frac{1}{2}u_0(s)+\frac{1}{2}\int_0^s u_1(\xi)d\xi + A$ ve

$g(s)=\frac{1}{2}u_0(s)-\frac{1}{2}\int_0^s u_1(\xi)d\xi + B$ bulunur, $A,B\in\mathbb{R}$.

A ve B integral sabitlerini bulmak için tekrar başlangıç değerlerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= f(x+t)+g(x-t) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_0(x+t)+u_0(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_0^{x+t} u_1(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_0^{x-t} u_1(s)\,ds \\
&\quad + A+B
\end{aligned}
$$

$u(0,x)=u_0(x) \Rightarrow \frac{1}{2}(u_0(x)+u_0(x))+0+A+B=u_0(x)$ ve buradan $A+B=0$ olur. O halde, çözüm

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+t)+u_0(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki çözüm metodu bunun tek klasik çözüm olduğunu gösterir. $u_0(x)\in C^2$ ve $u_1\in C^1$ olduğu için $u\in C^2$ olur. ∎

Küresel Ortalamalar.

Yüksek boyutlardaki çözümler için aşağıda tanımlanan küresel ortalamalar için diferansiyel denklemler yazarak yola çıkacağız.

$$U(x;t,r) \doteq ⨍_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS(y)=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,dS(y).$$

Tek boyutlarda bu denklemler r cinsinden 1-boyutlu dalga denklemine dönüşecektir. Çift boyutlarda ise "method of descent" boyut küçültme yöntemi ile çözüme ulaşacağız.

İlk önce değişken değiştirerek

$$U(x;t,r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} u(t,x+y)\,dS(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(t,x+ry)\,dS(y),$$

öyle ki $\omega_n = |\partial B_1(0)|$ birim kürenin "hacmi" yüzey alanıdır. $r<0$ için $U(x;t,r) \doteq U(x;t,-r)$ yazarak U'yu tüm $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı hale getirebiliriz. Dolayısıyla, eğer $u\in C^k$ ise $U(x;\cdot)$ fonksiyonu da C^k-dır.

u_0 ve u_1 başlangıç değerleri için U_0 ve U_1 şöyle tanımlansın:

$$U_0(x;r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} u_0(x+ry)\,dS(y) \text{ ve}$$

$$U_1(x;r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} u_1(x+ry)\,dS(y).$$

$u(t,x) = \lim_{r\to 0} U(x;t,r) = U(x;t,0)$ olduğu için u fonksiyonu ortalaması olan U fonksiyonundan elde edilir.

Teorem 3.8'in kanıtında yer alan $(*)$ eşitliği ve üzerindeki satırdan dolayı (s.20) her $r>0$ için

$$U_r(x;t,r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\,dy = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(0)} \Delta_x u(t,x+y)\,dy$$

yazabiliriz.

Şimdi $|\partial B_r(0)| = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} |\partial B_\rho(0)|$ olduğu için

$$U_r(x;t,r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(0)} \Delta_x u(t, x+y)\, dy$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \Delta_x u(t, x+y)\, dy$$

$$= \int_{B_r(0)} \frac{1}{\partial B_r(0)} \Delta_x u(t, x+y)\, dy$$

$$= \int_0^r \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1-n}}{|\partial B_\rho(0)|} \Delta_x u(t, x+y)\, dS(y)\, d\rho$$

$$= r^{1-n} \int_0^r \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{\rho^{n-1}}{|\partial B_\rho(0)|} \Delta_x u(t, x+y)\, dS(y)\, d\rho$$

$$= r^{1-n} \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} U(x;t,\rho)\, d\rho$$

Her iki tarafı r^{n-1} ile çarpıp r'ye göre türev alarak
$\partial_r (r^{n-1} U_r) = r^{n-1} \Delta_x U$ elde ederiz.

Buradan da $(n-1) r^{n-2} U_r + r^{n-1} U_{rr} = r^{n-1} \Delta_x U$

$\Rightarrow U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r = \Delta_x U$ denklemini buluruz.

Bu denkleme ($r>0$ için) Darboux Denklemi denir.
Şimdi de $u_{tt} - \Delta u = 0$ denklemini kullanarak $U(x;t,r)$ fonksiyonunun r ve t için dalga denklemini sağladığını göreceğiz!

$$\Delta_x U(x;t,r) = \Delta_x \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} u(t, x+y)\, dS(y)$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \Delta_x u(t, x+y)\, dS(y)$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} u_{tt}(t, x+y)\, dS(y)$$

$$= U_{tt}(x;t,r).$$

Ayrıca, tanımı gereği $U(x;t,-r) = U(x;t,r)$ $\forall r>0$ (r'ye göre çift fonksiyon) olduğundan

$U_r(x;t,-r) = -U_r(x;t,r)$ ve $U_{rr}(x;t,-r) = -U_{rr}(x;t,r)$ $\forall r \neq 0$ için elde edilmiş olur.

Teorem 5.5. $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ $u_{tt} - \Delta u = 0$, $\forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, başlangıç değer probleminin bir klasik çözümü olsun. U, U_0 ve U_1 küresel ortalamalar olmak üzere (sayfa 75) aşağıdaki Euler-Poisson-Darboux denklemini sağlar:

$$U_{tt}(x;t,r) - U_{rr}(x;t,r) - \frac{n-1}{r} U_r(x;t,r) = 0, \quad \forall (t,r) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

$$U(x;0,r) = U_0(x;r), \quad U_t(x;0,r) = U_1(x;r), \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Kanıt: Aslında $r \neq 0$ için elde edilmiş olan sonucun $r=0$ için de doğru olduğunu göstermeliyiz. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t \geq 0$ için $h(r) \doteq U(x;t,r) \in C^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunu tanımlayalım. Yine $U(x;t,r)$'nin tanımı sırasında $U(x;t,-r) \doteq U(x;t,r)$ $(r>0)$ olarak tanımlandığı için $h(r)$ çift fonksiyondur. Dolayısıyla $h'(r) = U_r$

tek fonksiyondur. Dolayısıyla, $h'(0)=0$ olmalıdır. Son olarak L'Hospital kuralından

$\lim_{r\to 0} \frac{h'(r)}{r} = h''(0)$ vardır ve dolayısıyla denklem tüm $r\in\mathbb{R}$ için sağlanmış olur. ■

3-boyutta Kirchhoff Formülü.

$n=3$ için Euler-Poisson-Darboux denklemi şöyledir:

$$U_{tt}(x;t,r) - U_{rr}(x;t,r) - \frac{2}{r} U_r(x;t,r) = 0, \quad \forall (t,r)\in [0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Şimdi bu denklemi 1-boyutlu dalga denklemine dönüştürüp D'Alembert formülü ile çözeceğiz.

Teorem 5.6. u 3-boyutlu dalga denkleminin klasik bir çözümü olsun. $x\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere
$\tilde{U}(x;t,r) \doteq rU(x;t,r)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, her $x\in\mathbb{R}^3$ için,

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(x;t,r) - \tilde{U}_{rr}(x;t,r) = 0, & \forall (t,r)\in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ \tilde{U}(x,0,r) = r\,U_0(x;r), \\ \tilde{U}_t(x,0,r) = r\,U_1(x;r), & \forall r\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

sağlanır.

Ayrıca, $u_0\in C^3(\mathbb{R}^3)$ ve $u_1\in C^2(\mathbb{R}^3)$ ise, u Kirchhoff formülü ile verilir:

$$u(t,x) = \tilde{U}_r(x;t,0) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left[u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x) + t u_1(y)\right] dS(y).$$

Kanıt: $\tilde{u} = ru$'nun türevlerini alarak $\tilde{u}_{tt} = ru_{tt}$, $\tilde{u}_r = ru_r + u$ ve $\tilde{u}_{rr} = 2u_r + ru_{rr}$ elde ederiz. Dolayısıyla Euler-Poisson-Darboux denklemi yardımıyla, her $(t,r) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{rr} = r\left(u_{tt} - \frac{2}{r}u_r - u_{rr}\right) = 0$$ elde ederiz.

Diğer yandan $\tilde{u} \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ olduğu için bu denklem her $r \in \mathbb{R}$ için geçerlidir. $\tilde{u}$'nın başlangıç değeri sağladığı u'nun tanımlarından hemen görülür. Dolayısıyla $\tilde{u}$ teoremin ifadesindeki denklemin bir klasik çözümüdür. O halde, D'Alembert formülü dolayısıyla

$$\tilde{u}(x;t,r) = \frac{1}{2}\left((r-t)\,U_0(x;r-t) + (r+t)\,U_0(x;r+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} y\,U_1(x;y)\,dy$$ olmalıdır.

Türev alıp $r=0$ yazarsak,

$$\tilde{u}_r(x;t,0) = 0 \cdot u_r(x;t,0) + u(x;t,0) = u(t,x)$$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tilde{u}_r(x;t,0) \\ &= \frac{1}{2}\Big(U_0(x;-t) + U_0(x;t) - t\left(U_0'(x;-t) - U_0'(x;t)\right) \\ &\qquad + t\left(U_1(x;t) + U_1(x;-t)\right)\Big) \end{aligned}$$ bulunur.

Tanımları gereği hem $U_0(x;t)$ hem de $U_1(x;t)$ ikinci değişkene göre çift fonksiyonlardır. Dolayısıyla

$$u(t,x) = U_0(x;t) + tU_0'(x;t) + tU_1(x;t)$$ olmalıdır.

Burada $u_0'(x;t) = \frac{\partial}{\partial r} u_0(x;r)\Big|_{r=t} = \frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u_0(x+ty)\cdot y \, dS(y)$

$$= \frac{1}{|\partial B_t(x)|}\int_{\partial B_t(x)} \nabla u_0(z)\cdot \frac{z-x}{t}\, dS(z) \text{ 'dır.}$$

Şimdi, son olarak $|\partial B_t(x)| = 4\pi t^2$ olduğu için

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \big(u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x) + t\, u_1(y)\big)\, dS(y),$$

Kirchhoff formülü elde edilir. ■

Uyarı 5.7. $\tilde{u}(x;t,r) \doteq \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1} u(x;t,r)\right)$

fonksiyonu yardımıyla Kirchhoff formülü tüm tek boyutlara taşınabilir.

Uyarı 5.8. d'Alembert formülünün aksine Kirchhoff formülü başlangıç fonksiyonlarının (u_0 ve u_1) türevlerini içerir. Dolayısıyla $t>0$ ve $n>1$ için dalga denkleminin çözümü başlangıç datasına göre daha az türevli olabilir.

Boyut Küçültme Metodu ve 2-boyutta Poisson Formülü.

Çift boyutlarda boyutu küçülterek 1-boyuta inmek mümkün değildir. Bunun aksine 2-boyutu 3-boyut içinde düşünerek çözüme ulaşabiliriz. Daha açıkça yazmak gerekirse, $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ başlangıç değer dalga denkleminin bir çözümü olmak üzere (u_0 ve u_1 başlangıç fonksiyonları olarak) üç boyutta şu fonksiyonları tanımlayalım:

$\bar{u}(t, x, x_3) \doteq u(t,x), \quad (t, x, x_3) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, öyle ki

$\bar{u}_0(x, x_3) \doteq u_0(x), \ \bar{u}_1(x, x_3) \doteq u_1(x)$ fonksiyonları da

üç boyuttaki başlangıç değer fonksiyonları olsunlar. Bu geçişe boyut küçültme metodu denir.

Şimdi $\bar{u}$ üç boyutta başlangıç değer problemini sağlayacağı için Kirchhoff formülünü kullanarak çözümü yazabiliriz.

Integral x_3'e bağlı olmadığından daha basit şekilde yazılabilir. $\partial B_r^3(0)$ küresinin $(x_1, x_2, \pm\gamma(x_1,x_2))$, $\gamma(x_1,x_2) = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ parametrizasyonunu kullanalım. $v = v(x_1, x_2)$ ise

$$\int_{\partial B_r^3(0)} v(y)\, dS(y, y_3) = 2\int_{B_r^2(0)} v(y)\sqrt{1+|\nabla\gamma(y)|^2}\, dy$$

$$= 2\int_{B_r^2(0)} \left(r/\sqrt{r^2-|y|^2}\right) v(y)\, dy \quad \text{olur.}$$

Dolayısıyla, $\bar{u}_0$ ve $\bar{u}_1$ başlangıç değer fonksiyonları için Kirchhoff formülü bize aşağıdaki Poisson's formülünü verir ($n=2$):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t^3(x)} \left(\bar{u}_0(y) + \nabla\bar{u}_0(x)\cdot(y-x) + t\bar{u}_1(y)\right) dS(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t^2(x)} \frac{u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x) + t u_1(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\, dy$$

Uyarı 5.9. $n = 2k > 2$ genel durum için de $\bar{u}(t, x, x_{n+1}) = u(t, x)$ alarak $n+1$ boyuttaki dalga denkleminin çözümünü kullanırız.

Çözümün Varlığı ve Çeşitli Özellikleri.

İki ve üç boyutta çözümler Poisson ve Kirchhoff formülleriyle verildiği için çözümler tekdir. Dolayısıyla çözümlerin varlığı üzerinde duracaktır.

Teorem 5.10. $n \geq 2$, $m = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ ve $u_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^m(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda başlangıç değer probleminin bir $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ klasik çözümü vardır. Bu çözüm $n=2$ durumunda Kirchhoff ve $n=3$ durumunda ise Poisson formülü ile verilir. Ayrıca, $u(t,x)$, $n = 2n+1$ durumunda sadece başlangıç fonksiyonlarının $\partial B_t(x)$ üzerindeki değerleriyle ve $n = 2n$ durumunda ise $\overline{B_t(x)}$ üzerindeki değerleriyle belirlenir.

Kanıt. Kanıtı sadece $n=2$ ve 3 için vereceğiz. $n=3$ için Kirchhoff formülünün verdiği çözümün klasik çözüm olduğunu gösterelim. Çözümü

$$u(t,x) = \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} \left(u_0(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y-x) + t u_1(y) \right) dS(y)$$

$$= \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} \Big(\overbrace{u_0(x+ty) + t \nabla u_0(x+ty) \cdot y}^{= d/dt \, (t u_0(x+ty))} + t u_1(x+ty) \Big) dS(y)$$

şeklinde yazalım. u_0 ve u_1'in seçimlerinden dolayı integralin içi C^2-sınıfındandır. Dolayısıyla, sağ taraf $C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ sınıfındadır.

Şimdi de Kirchhoff formülü ile verilen ifadenin dalga denklemini çözdüğünü görelim:

İlk önce $u_0 \equiv 0$ olduğu durumu ele alalım. O halde

$$u(t,x) = \frac{t}{|\partial B_t(0)|}\int_{\partial B_t(0)} u_1(x+y)\,dS(y) \doteq t\,U_1(x;t).$$

O halde, $\Delta u(t,x) = \dfrac{1}{|\partial B_t(0)|}\displaystyle\int_{\partial B_t(0)} \Delta u_1(x+y)\,dS(y)$ ve benzer şekilde

$$u_t = (tU_1)_t = U_1 + t(U_1)_t \quad \text{ve} \quad u_{tt} = 2(U_1)_t + t(U_1)_{tt}$$

elde ederiz.

Daha önce de yaptığımız gibi Green formülünü kullanarak ve $|\partial B_t(0)| = 4\pi t^2 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\partial B_t(0)|} = \dfrac{-2}{t|\partial B_t(0)|}$ eşitliğini kullanarak

$$(U_1)_t(x;t) = \frac{1}{|\partial B_t(0)|}\int_{B_t(0)} \Delta_x u_1(x+y)\,dy \quad \text{ve son olarak}$$

$$(U_1)_{tt}(x;t) = \frac{-2}{t}(U_1)_t(x;t) + \frac{1}{|\partial B_t(0)|}\int_{\partial B_t(0)} \Delta_x u_1(x+y)\,dS(y)$$

elde ederiz. O halde,

$$u_{tt} = 2(U_1)_t + t(U_1)_{tt} = \frac{t}{|\partial B_t(0)|}\int_{\partial B_t(0)} \Delta_x u_1(x+y)\,dS(y) = \Delta u(t,x)$$

olur.

Şimdi de $u_0 \not\equiv 0$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki C^3 sınıfından

$$v(t,x) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{\partial B_1(0)} t\,u_0(x+ty)\,dS(y) \quad \text{fonksiyonunda}$$

dalga denklemini çözecektir. Bu iddianın kanıtı benzer olduğu için size bırakılmıştır. $v \in C^\infty$ olduğundan dolayı $\partial_t \Box v = \Box \partial_t v = 0$ olur ve dolayısıyla

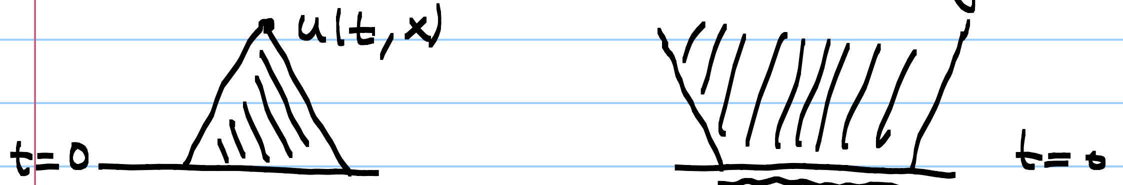
$$v_t(t,x) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} d/dt\,(t u_0(x+ty))\, dS(y)$$

fonksiyonu da dalga denklemini çözer. Bu durumda $u_t + v_t$ fonksiyonu Teorem 5.10'nun kanıtının içinde verilen Kirchhoff çözümünüdür.

Bu çözümün başlangıç değerlerini sağladığını ve $n=2$ durumunu da okuyucuya bırakıyoruz. ●

Teorem 5.10 ve çözümlerin formüllerinin sayesinde şunları gözlemleyebiliriz.

Uyarı 5.11. (Etki ve etkilenme bölgesi)



Etkilenme bölgesi $\qquad$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Etki bölgesi

$u(t,x)$ değerini belirleyen bölgeye "etkilenme bölgesi" denir. Bu bölgenin dışındaki sıcaklığın değiştirilmesi $u(t,x)$ değerini etkilemez. Benzer şekilde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesi üzerindeki değerler taralı bölgeyi belirler.

Uyarı 5.12 (Düzgünlük ve Yayılma Hızı)

Teorem 5.10 dalga denkleminin çözümlerinin şu iki özelliğini ortaya çıkartır:

i) $n \geq 2$ durumunda çözümler başlangıç fonksiyonlarından daha az (türevli) düzgün olabilirler. Gerçekten de çözümün içinde yer alan ∇u_0 terimi u'nun u_0'dan daha az türevli olduğunu gösterir. Bu özellik Laplace ve ısı denklemlerinin düzgünleştirici yapısıyla zıtlık oluşturur (ısı denkleminde u_0 sınırlı ve sürekli ise $t>0$ olmak üzere çözümler sonsuz türevlenebilirdir).

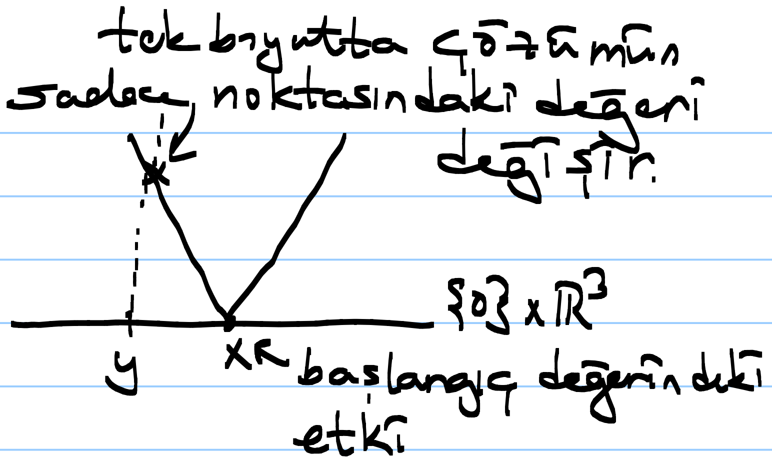
ii) Dalga denkleminde $u(t,x)$ değeri u_0 ve u_1 fonksiyonlarının $B_t(x)$, hatta sadece $\partial B_t(x)$ üzerindeki değerleriyle belirlenir. Buna sonlu hızlı yayılma (finite speed propagation) denir. Isı denkleminde ise $u(t,x)$ u_0 başlangıç fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}^n$ üzerindeki değerleriyle belirlenir.

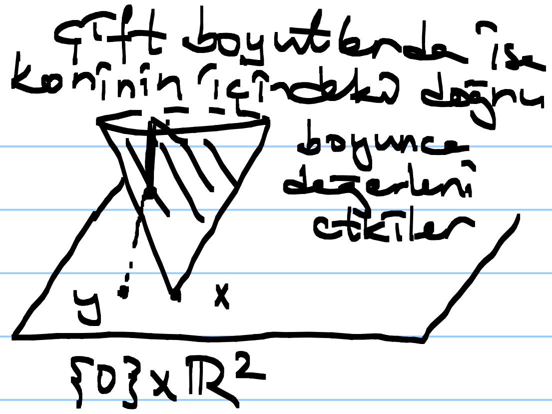
Uyarı 5.13 (Huygen's Prensibi)

Huygen's prensibi optikte dalga yayılması hakkında bir ifadedir. Tek ve çift boyutlarda ifadeler şu şekildedir.

i) $n=3$ boyutta Kirchhoff formülü gereğince verilen bir $x \in \mathbb{R}^3$ noktasındaki başlangıç değeri çözümün $C=\{(t,y) \mid t>0, |y-x|<t\}$ konisinin $\partial C=\{(t,y) \mid t>0, |y-x|=t\}$ sınırındaki (dalganın keskin kenarında) değerlerini etkiler.

ii) $n=2$ boyutta ise Poisson formülü gereğince $x \in \mathbb{R}^3$ noktasındaki başlangıç değeri $\overline{C}$ konisinin kapanışının her noktasındaki değerleri etkiler.





§5.5. Homojen Olmayan Durum

Isı denkleminde olduğu gibi yine Duhamel prensibini kullanacağız. Başka bir deyişle $u(t,x;s)$ aşağıdaki problemin çözümü olmak üzere
$u(t,x) \doteq \int_0^t u(t,x;s)\,ds$ olarak tanımlansın:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x;s) - \Delta_x u(t,x;s) = 0 & \forall (t,x) \in (s,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(s,t;s) = 0,\ u_t(s,x;s) = f(s,x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Theorem: $n \geq 1$, $m = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ ve $f \in C^m([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda yukarıda tanımlanan $u(t,x)$ aşağıdaki problemin bir çözümüdür.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \forall (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Kanıt: Teorem 5.10 gereğince $u(t,x;s) \in C^\infty([s,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ sınıfındandır. Dolayısıyla, $u(t,x)$ fonksiyonu da $C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ sınıfındadır. Ayrıca,

$$u_t(t,x) = \int_0^t u_t(t,x;s)\,ds + u(t,x;t) = \int_0^t u_t(t,x;s)\,ds,$$

$$u_{tt}(t,x) = \int_0^t u_{tt}(t,x;s)\,ds + u_t(t,x;t) = \int_0^t u_{tt}(t,x;s)\,ds + f(t,x)$$

ve son olarak $\Delta u(t,x) = \int_0^t \Delta u(t,x;s)\,ds$ olur.

Dolayısıyla, $u(t,x;s)$ dalga denkleminin çözümü olduğu için

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_0^t \overbrace{(u_{tt}-\Delta u)}^{=0}(t,x;s)\,ds + f(t,x) = f(t,x)$$

elde edilir.

Ayrıca, tanımdan dolayı $u(0,x)=0$ ve $u_t(0,x)=0$. Böylece kanıt tamamlanır. ■

Uyarı: Duhamel prensibi uyarınca $n=1,2,3$ için açık çözümler yazılabilir.

Dalga denklemi doğrusal olduğu için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.16. $u_0 \in C^{\lfloor n/2 \rfloor + 2}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in C^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdaki genel dalga denkleminin klasik bir çözümü vardır.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

§ 5.6. Enerji Metodları.

Yukarıdaki sonucun da gösterdiği üzere n-uzay boyut arttıkça $u(t,x)$ çözümünün C^2-sınıfından kalması için u_0 ve u_1 başlangıç değer (fonksi-yonlarının) daha fazla türevli olmaları gerekmektedir. Enerji metodları çözümün büyüklüğünü ve düzgünlüğünü (türevlenebilirliğini) ölçmek için bir alternatif sunar. Bu bölümde enerji metodlarını kullanarak çözümün tekliğini bölgeye bağımlılığını ele alacağız.

Aşağıdaki denklemin çözümünü ele alalım:

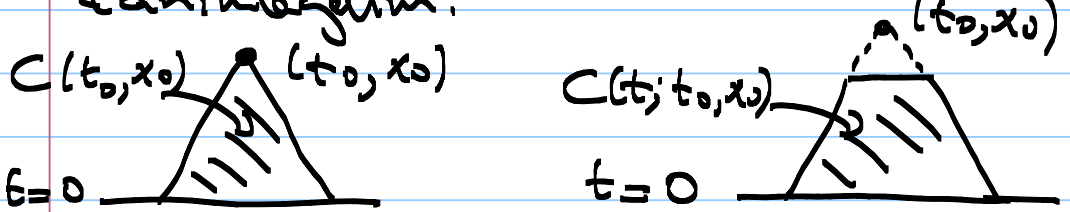
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \forall (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Verilen bir $(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ için ters ışık konisini

$$C(t_0,x_0) = \{(s,x) \mid 0 \leq s \leq t_0, \ |x-x_0| \leq t_0 - s\}$$ ve her $t\in(0,t_0)$ için kesik ters ışık konisini

$$C(t;t_0,x_0) = \{(s,x) \mid 0 \leq s \leq t, \ |x-x_0| \leq t_0 - s\}$$

tanımlayalım.



Teorem 5.17. $u_0\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1\in C^1(\mathbb{R}^n)$ ve $f\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ olsun. Yukarıdaki denklemin her klasik $u\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ çözümü, her $(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon>0$ için aşağıdaki enerji yaklaşımını sağlar: $\forall t\in(0,t_0)$ için

$$\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))}$$

$$\leq e^{\varepsilon t}\left(\|u_1\|^2_{L^2(B_{t_0}(x_0))} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(B_{t_0}(x_0))} + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(C(t;t_0,x_0))}\right).$$

Ayrıca $f \equiv 0$ ise $\epsilon = 0$ alınabilir.

<u>Kanıt:</u> Her $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ için

$$e(t) \doteq \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t^2(t,x) + \|\nabla u(t,x)\|^2\right) dx, \quad 0 < t \leq t_0$$

enerji fonksiyonunu tanımlayalım.

Şimdi türevini alarak,

$$e'(t) = \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (2u_t u_{tt} + 2\nabla u_t \cdot \nabla u) - \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dS(x),$$

elde ederiz (burada g sürekli olmak üzere $\int_{B_{t_0-t}(x_0)} g(y)dy = \int_0^{t_0-t} \int_{\partial B_\rho(0)} g(y)\, dS(y)\, d\rho$ eşitliğini kullandık)

Şimdi de kısmi integral kullanarak (ikinci terim için)

$$\int_{B_{t_0-t}(x_0)} (2u_t u_{tt} + 2\nabla u_t \cdot \nabla u) dx = \int_{B_{t_0-t}(x)} 2u_t(u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} 2u_t \nabla u \cdot \nu\, dS(x)$$

$$\left[\int_\Omega (\nabla u_t \cdot \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \nu\, dS(x) - \int_\Omega u_t \Delta u\, dx. \quad 5.44 \right]$$

$$= \int_{B_{t_0-t}(x)} 2u_t f\, dx + \int_{\partial B_{t_0-t}(x)} 2u_t \nabla u \cdot \nu\, dS(x)$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafı için $2ab \leq a^2 + b^2$ ve $2ab \leq \epsilon a^2 + b^2/\epsilon$ eşitsizliklerini kullanarak,
$(a, b \in \mathbb{R})$

$$\int_{B_{t_0-t}(x_0)} 2u_t f\,dx + \int_{\partial B_{t_0-t}(x)} 2u_t \nabla u\cdot \nu \, dS(x)$$

$$\leq \epsilon \|u_t\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (|u_t|^2 + \|\nabla u\|^2)\, dS(x),$$

elde ederiz.

Dolayısıyla bu hesap bize

$$e'(t) \leq \epsilon \|u_t\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))}$$

$$\leq \epsilon\, e(t) + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))}$$ ve 0'dan t'ye

kadar integralini alarak

$$e(t) \leq e(0) + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \epsilon \int_0^t e(s)\,ds$$ bulunur.

Son olarak $e(t)$ fonksiyonuna Gronwall's Lemma'yı uygularsak istenilen eşitliği elde ederiz:

$$e(t) \leq \left(e(0) + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))}\right) e^{\epsilon t}$$

$$\Rightarrow \|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))} + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(B_{t_0-t}(x_0))}\Big)$$

$$\leq e^{\epsilon t}\Big(\|u_1\|^2_{L^2(B_{t_0}(x_0))} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(B_{t_0}(x_0))} + \frac{1}{\epsilon}\|f\|^2_{L^2(C(t;t_0,x_0))}\Big)$$

ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Sonuç 5.18. (Sonlu hızlı Yayılma)

$u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ve $f \equiv 0$ olmak üzere u dalga denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $u \equiv u_t \equiv 0$ ($\{t=0\} \times B_{t_0}(x_0)$ üzerinde) ise $C(t_0, x_0)$ konisi üzerinde $u \equiv 0$ olur.

<u>Kanıt:</u> Teorem 5.17 uyarınca $f \equiv 0$ ise $0 \leq t \leq t_0$ boyunca $e(t) = 0$ olur. Başka bir deyişle $C(t_0, x_0)$ konisi boyunca $u_t = \nabla u = 0$ olur. Buradan, $u(0, \cdot) \equiv 0$ olduğu için $C(t_0, x_0)$ konisi boyunca $u \equiv 0$ elde edilir. ∎

<u>Sonuç 5.19</u> (Teklik) u_0, u ve f Teorem 5.17'deki gibi olsunlar. O zaman bu fonksiyonların belirlediği dalga denkleminin en fazla bir çözümü vardır.

<u>Kanıt:</u> u ve v iki klasik çözüm olmak üzere $w = u - v$ olsun. Bu durumda w başlangıç değerleri $w_0 \equiv 0 \equiv w_1$ olan homojen denklemin ($f \equiv 0$) çözümüdür. O halde, Sonuç 5.18 uyarınca her $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ noktası için w çözümü $C(t_0, x_0)$ konisi üzerinde sıfırdır. Bu kanıtı bitirir. ∎

<u>Uyarı 5.20.</u> $\mathbb{R}^n$ içindeki açık ve sınırlı $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgeleri üzerinde verilen başlangıç değer problemleri için de bir teklik sonucu elde edilebilir. $\partial\Omega$ sınırının C^1-sınıfından olduğunu kabul edelim. $T > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \Omega_T \doteq \Omega \times (0, T], \\ u = g, & \Gamma_T \doteq \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T, \\ u_t = h, & \{t=0\} \times \Omega, \end{cases}$$

denklemini ele alalım.

Teorem 5.17'nin kanıtında kullandığımız enerji fonksiyonunu kullanarak ve $w = u - v$ alarak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\forall t \in [0,T], \quad e \doteq \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2(t,x) + |\nabla w(t,x)|^2, \ k \partial$$

bu ifade kanıtı tamamlar.

Aslında tıkız destekli başlangıç değerleri alındığı sürece $\Omega = \mathbb{R}^n$ de alınabilir.

§5.7. Dalga Denklemi ve Göreceliğin Geometrisi

1915 yılında Einstein Lorentz metriğini kullanarak evrenin 4-boyutlu modeli üzerinde Genel Görelilik kuramını ortaya attı. Kuram Einstein denklemi diye bilinen

$$G[g] = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

denkleminin çözümlerinin çalışılmasını içeriyor. Burada G Einstein tensörünü, G Newton çekim sabitini, g Lorentz metriğini ve T ise enerji-momentum tensörünü göstermektedir. c'nin ışık hızını gösterdiği bu denklem vakumda $Ric[g] = 0$ halini alır. Burada $Ric[g]$ metriğin Ricci tensörünü göstermektedir.

Einstein denklem sistemi, difeomorfizmler altında değişmez kalan 10 tane lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemden oluşur.

İlk defa 1952 yılında Yvonne Choquet-Bruhat bu sistem için çözümlerin yerel varlığını göstermiştir.

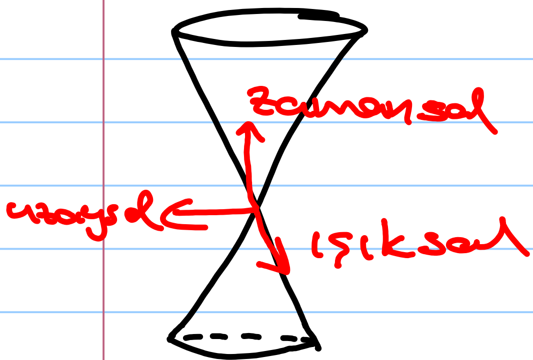
Uzay-zamanın geometrisi özel göreliliğin denklemlerinden de bir ölçüye kadar görülebilir

Tanım 5.21 (Sıradan Yapı)

$O=(0,0,0,0)$ noktasını göstersin. Bu noktanın geçmişi $\{ct<-|x|\}$, geleceği $\{ct>|x|\}$ ve şimdiki zamanı $\{-|x|<ct<|x|\}$ kümeleri ile tanımlanır.

Dört boyutlu uzay-zamanda bir $(v^0; v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4$ vektörüne

i) $|v^0|>c|v|$ ise zamansal,
ii) $|v^0|<c|v|$ ise uzaysal, ve
iii) $|v^0|=c|v|$ ise null (veya ışıksal yada karakteristik) vektör denir.



Zamansal vektörler geleceğe veya geçmişe dönük olabilir.

Eğer bir yüzeyin tüm normalleri zamansal ise bu yüzeye uzaysal yüzey denir. $\{t=0\}$ hiperyüzeyi uzaysaldır. Bu yüzeyler başlangıç değerlerini taşıyan yüzeylerdir.

Aşağıdaki teoremi kanıtsız olarak vereceğiz.

Teorem 5.22. Eğer S uzaysal bir hiperyüzey ise bu yüzey üzerinde verilen aşağıdaki problemin tek bir çözümü vardır:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0, & \text{uzay-zaman üzerinde} \\ u=\phi \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial \nu}=\psi, & S \text{ üzerinde.}\end{cases}$$

Ayrıca, eğer $S=\{t=\gamma\}$ yüzeyi ise başlangıç değerleri $u_t-\nabla\gamma\cdot\nabla u=\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\,\psi$, $t=\gamma(x)$ ile verilir.

Bölüm 6. Klasik Çözümlerin Yetersizlikleri

Şu ana kadar denklemlerin belli bir dereceye kadar türevlenebilir çözümlerini aradık. Bunu yapabilmek için ise üzerinde çalışılan

- Bölgenin sınırının,
- Başlangıç ve sınır değerlerinin,

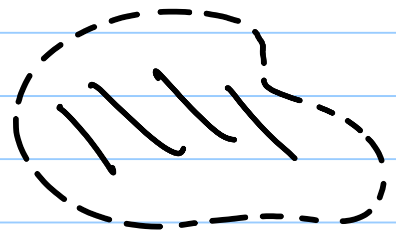
belli oranda (regüler) türevlenebilir olduğunu kabul etmek zorunda kaldık. Modern yaklaşım bunu problemli bulmaktadır ve bunun yerine aşağıdaki iki adımlı yaklaşımı benimsemektedir:

i) Zayıf Çözümler: Çözüm tanımı zayıflatılarak daha kolay elde edilebilmesini sağlamak,

ii) Daha sonra bölgenin sınırı ve başlangıç-sınır değerlerinin üzerine türevlenebilme (regülerlik) koşulları koyarak zayıf çözümlerden daha fazla türevlenebilir (daha regüler - klasik) çözümlere ulaşmak.

<u>Örnek 6.1.</u> Bu yaklaşımı Poisson Denklemi için yazılan Dirichlet problemi üzerinde açıklamaya çalışalım:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ açık ve sınırlı}$$

Ω 

Eğer u bu problemin klasik bir çözümü ise Ω bölgesi üzerindeki $-\Delta u = f$ eşitliği, her $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tıkız destekli fonksiyon için,

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)\,\phi(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,\phi(x)\,dx$$ eşitliğine denktir.

Bu ise kısmi integralden dolayı

$$(*) \quad \int_{\Omega} \left(\nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x)\right) dx = \int_{\Omega} f(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

denklemine denktir. Eğer $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ ve $\|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ ise her iki taraftan yakınsaktır.

Şimdi yukarıdaki Dirichlet problemi için $(*)$ denklemini sağlayan bir $u \in H_0^1(\Omega)$ (Sobolev uzayı) fonksiyonuna Dirichlet probleminin bir zayıf çözümü denir.

Burada $H_0^1(\Omega)$ Sobolev uzayı $C_c^2(\Omega)$ uzayının $\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ normuna göre kapanışı olarak tanımlanır.

Doğrusal Olmayan Birinci Derece Denklemler.

Bölüm 7. Karakteristikler Metodu.

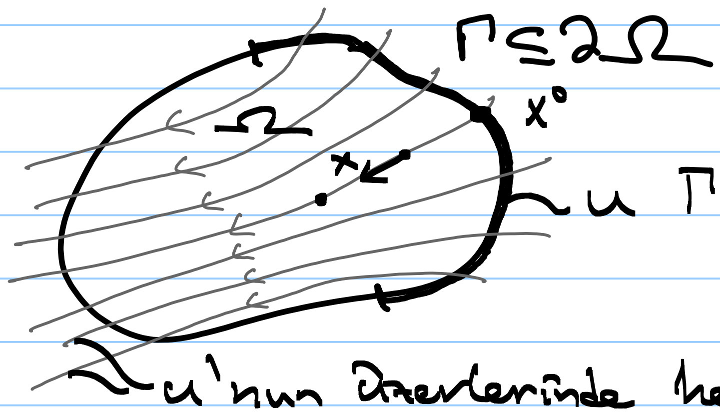
§ 7.1. Karakteristik Denklemler Sistemi.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir bölge ve $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ bir C^1- sınır parçası olsun. Aşağıdaki doğrusal olmayan birinci derece denklemi düşünelim:

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \Gamma \subseteq \partial\Omega. \end{cases}$$

Burada $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ve $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ denklemi belirleyen verilmiş fonksiyonlar, $u = u(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. F ve g'nin C^∞ olduğunu kabul edelim.

Şimdi karakteristik eğri denilen ve u çözümüne ulaşmak için kullanacağımız eğrileri bulmaya çalışacağız. Bunlar çözmeye çalıştığımız denklemden elde edilen bazı adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri olacaklar.



$x(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s))$ ifadesiyle verilen karakteristik eğriler $u \in C^2$ olma kabulü altında aşağıdaki denklem sisteminin çözümleri olsun:

$$z(s) \doteq u(x(s)) \quad \text{ve} \quad p(s) \doteq \nabla u(x(s)), \text{ öyle ki}$$

$p(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s))$, $p_i(s) = u_{x_i}(x(s))$, $\forall s$, olarak tanımlansın.

(*) İlk önce türev olarak $\dot{p}_i(s) = \frac{dp}{ds} = \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j} \dot{x}_j(s)$, $\forall i$ elde ederiz.

Şimdi de $F(Du, u, x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, denkleminin x_i'e türevini alırsak

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{n} F_{p_j}(\nabla u, u, x)\, u_{x_j x_i} + F_z(\nabla u, u, x)\, u_{x_i} + F_{x_i}(\nabla u, u, x) = 0$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi $x_i(s)$'ler için şu denklem sistemini yazalım:

$$(***) \quad \dot{x}_j(s) = F_{p_j}(p(s), z(s), x(s)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Bu durumda (**) denklemi

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j(s)\, u_{x_i x_j}(s) + F_z(p(s), z(s), x(s))\, p_i(s) + F_{x_i}(p(s), z(s), x(s)) = 0$$

halini alır. Bunu (*) ile karşılaştırırsak

$$\dot{p}_i(s) = -F_z(p(s), z(s), x(s))\, p_i(s) - F_{x_i}(p(s), z(s), x(s)),$$

$i = 1, \dots, n$, elde ederiz.

Yine (***) eşitliğini kullanarak $z(s) = u(x(s))$'in türevini alırsak

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(x(s))\, \dot{x}_j(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s)\, F_{p_j}(p(s), z(s), x(s)),$$

elde edilir. O halde, karakteristik eğrileri için şu sistemi elde etmiş olduk:

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\nabla_x F(p(s), z(s), x(s)) - F_z(p(s), z(s), x(s))\, p(s), & \text{(A)} \\ \dot{z}(s) = \nabla_p F(p(s), z(s), x(s)) \cdot p(s), & \text{(B)} \\ \dot{x}(s) = \nabla_p F(p(s), z(s), x(s)), \ \forall s. & \text{(C)} \end{cases}$$

Bu sistemde $2n+1$ tane birinci derece adi diferansiyel denklem vardır. p, z ve x denklemin karakteristikleri denir. (p, z, x) üçlüsünün son koordinatına iz-düşüm olan $x = x(s)$'e ise ??? karakteristiği denir.

Yukarıda yaptıklarımızı şöyle özetleyebiliriz.

Teorem 7.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, F, g ve u yukarıdaki gibi olsun. Eğer x (C)'nin bir çözümü ise ve $p = \nabla u \circ x$ ve $z = u \circ x$ ile tanımlanmışsa p ve z de sırasıyla (A) ve (B)'nin çözümleridir.

Uyarı 7.2 (i) (A), (B), (C) sistemi için $u(x) = g(x), \forall x \in \Gamma$, başlangıç değerinden gelen koşulu henüz açık şekilde yazmadık. Bunu §7.3'de yapacağız.

(ii) Eğer $u \in C^2$ sınıfından ise (A), (B), (C) kapalı bir adi diferansiyel denklem sistemidir. $\dot{x} = \nabla_p F$ alındığı için sistemde u ve ∇u varken daha yüksek dereceli terimler yer almaz.

§7.2. Özel Durumlar ve Örnekler.

1) F Doğrusal olsun. F fonksiyonuna karşılık gelen diferansiyel denklemin
$F(\nabla u, u, x) = b(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) = 0$ şeklinde
olduğunu kabul edelim.
Bu durumda
(C) $\dot{x}(s) = \nabla_p F$ denklemi $\dot{x}(s) = b(x(s))$,
(B) $\dot{z}(s) = \nabla_p F\cdot p(s)$ denklemi $\dot{z}(s) = b(x(s))\cdot p(s)$
elde ederiz.
Son olarak $p(s) = \nabla u(x(s))$ olarak tanımlandığı için

$$\dot{z}(s) = (u(x(s)))^{\cdot} = \nabla u(x(s))\cdot\dot{x}(s) = \nabla u(x(s))\cdot b(x(s))$$

ve dolayısıyla $b(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) = 0$ olduğu için

$\dot{z}(s) = -c(x(s))\,u(x(s)) = -c(x(s))\,z(s)$ bulunur.

O halde karakteristik denklem sistemi

$$\dot{x}(s) = b(x(s)) \quad \text{ve} \quad \dot{z}(s) = -c(x(s))\,z(s)$$

sistemidir.

Örnek 7.3. $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1>0,\ x_2>0\}$ ve $\Gamma = \{x_1>0, x_2=0\}$,
$\Gamma\subseteq\partial\Omega$ olmak üzere şu başlangıç değer problemini düşünelim:

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u, & \Omega \\ u = g, & \Gamma. \end{cases}$$

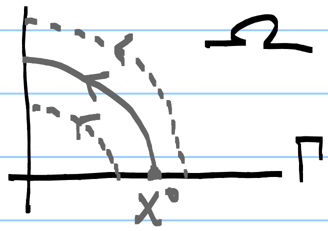
O halde, $b=(-x_2, x_1)$ ve $c=-1$ olur ve karakteristik sistem de

$\dot{x}_1(s) = -x_2(s)$, $\dot{x}_2(s) = x_1(s)$ ve $\dot{z}(s) = z(s)$'dir.

İlk iki denklem $dx_1/dx_2 = -x_2/x_1$ eşitliğini ve buradan da $x_1^2+x_2^2 = \text{sabit}$ çözümünü verir. Dolayısıyla, her $x^0 \geq 0$ ve $s \in [0, \pi/2)$ için şu çözümü yazabiliriz:

$x_1(s) = x^0 \cos s$, $x_2(s) = x^0 \sin s$ ve $z(s) = z^0 e^s = g(x^0) e^s$

elde ederiz. Verilen herhangi $(x_1, x_2) \in \Omega$ noktası ve $s > 0$, $x^0 > 0$ için



$(x_1(s), x_2(s)) = (x^0 \cos s, x^0 \sin s)$ olur.

Şimdi, $x^0 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ ve $s = \tan^{-1} x_2/x_1$ olmak üzere

O halde çözüm
$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) \\ &= z(s) \\ &= g(x^0) e^s \\ &= g\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) e^{\tan^{-1}(x_2/x_1)} \end{aligned}$$
olur.

2) F yarı-doğrusal olsun.

$F(\nabla u, u, x) = b(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) + c(x, u(x)) = 0$ denklemini düşünelim. Burada iki terim de doğrusal değildir.

Bu durumda, $F(p, z, x) = b(x, z) \cdot p + c(x, z)$ ve dolayısıyla $\nabla_p F = b(x, z)$ olur.

Şimdi (C) ve (B) denklemleri sırasıyla,

(C) : $\dot{x}(s) = b(x(s), z(s))$, ve

(B) : $\dot{z}(s) = b(x(s), z(s)) \cdot p(s) = -c(x(s), z(s))$ olur.

<u>Örnek 7.4.</u> $\Omega = \{x_2 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\Gamma = \{x_2 = 0\} \subseteq \partial\Omega$ olmak üzere

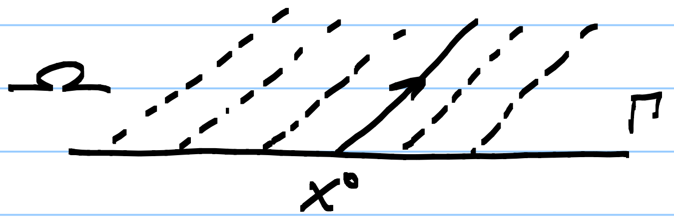
$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2, & \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u = g, & \forall (x_1, x_2) \in \Gamma \end{cases}$$

denklemini düşünelim.

Bu durumda $b = (1,1)$ ve $c = -z^2$ olur. Dolayısıyla karakteristik denklemler şöyledir:

$\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = 1$ ve $\dot{z} = z^2$.

Dolayısıyla, $x_1(s) = x^0 + s$, $x_2(s) = s$ ve $z(s) = \dfrac{z^0}{1 - s z^0}$ elde edilir. $x^0 \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$.



$z^0 = z(0) = u(x_1(0), x_2(0))$
$= u(x^0, 0)$
$= g(x^0)$ ve

dolayısıyla, $z(s) = \dfrac{g(x^0)}{1 - s g(x^0)}$ olur.

Yine $\begin{cases} x_1 - x_2 = x^0 \\ s = x_2 \end{cases}$ olduğu için $u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s))$
$= z(s)$

$$u(x_1,x_2) = z(s) = \frac{g(x_1-x_2)}{1-x_2\, g(x_1-x_2)}$$ olur.

3) Doğrusal Olmayan F.

Bu durumda (A), (B), (C) denklemleri denklem hakkında daha fazla bilgi olmadığı sürece daha basit bir hale dönüşmez.

Örnek 7.5. $\Omega = \{x_1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\Gamma = \{x_1 = 0\} = \partial\Omega$ bölgesi üzerinde

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} = u, & \Omega \\ u = x_2^2, & \Gamma \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözmeye çalışalım:

$F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$ olduğu için (A), (B), (C) sistemi

$\dot{p}_1 = p_1, \quad \dot{p}_2 = p_2$

$\dot{z} = 2p_1 p_2$

$\dot{x}_1 = p_2, \quad \dot{x}_2 = p_1$, olur.

$p_1(s) = p_1^0 e^s, \quad p_2(s) = p_2^0 e^s$

$\Rightarrow z(s) = z^0 + p_1^0 p_2^0 (e^{2s} - 1)$

$x_1(s) = p_2^0 (e^s - 1), \quad x_2(s) = x^0 + p_1^0 (e^s - 1)$ olur.

Burada $x^0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ ve $z^0 = (x^0)^2$ dır. Ayrıca, $p_2^0 = 2x^0$ ve $p_1^0 = x^0/2$ olur.

Şimdi verilen bir $(x_1, x_2) \in \Omega$ noktası için s ve x^0 noktalarını $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (2x^0(e^s - 1), \frac{x^0}{2}(e^s + 1))$ şeklinde seçersek

$$x^0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}, \quad e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}$$ ve dolayısıyla

$$u(x_1, x_2) = u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = (x^0)^2 e^{2s} = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}$$ olur.

§7.3. Sınır Koşulları.

Karakteristik eğrileri kullanarak sınır değerleri $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ eğrisi üzerinde verilen bir problemi çözebilmek için eğrilerin Γ'ya teğet olmaması gerekir: $\dot{x}(0) \notin T_{x^0}\Gamma$.

Sınırı Düzeltmek.

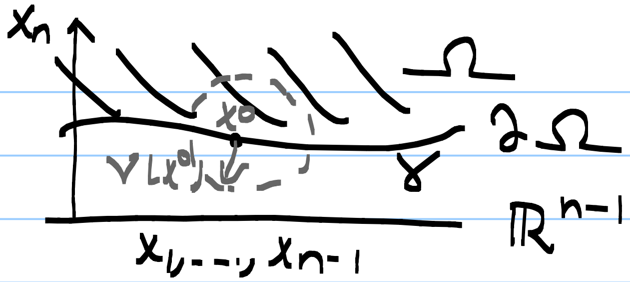
Tanım 7.6. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge ve $k \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer her $x^0 \in \partial\Omega$ noktası için

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$ olacak şekilde

bir $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ C^k-fonksiyonu ve $r > 0$ varsa $\partial\Omega$ sınırı C^k-sınıfındandır denir. Eğer $\partial\Omega$ her $k \in \mathbb{N}$ için C^k ise $\partial\Omega$ sınırına C^∞ ve eğer γ analitik ise $\partial\Omega$ sınırına analitik denir.

$f(x_1, \dots, x_n) \doteq \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\partial\Omega = \{f = 0\}$ olarak ifade edilebilir.

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_{x_1}^2 + \dots + \gamma_{x_{n-1}}^2}} \begin{pmatrix} \gamma_{x_1} \\ \vdots \\ \gamma_{x_{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix}$$ $\partial\Omega$ sınırının dış normalidir.



Amacımız $\partial\Omega$ sınırını düzleştirmek. Bunun için her $x^0 \in \partial\Omega$ noktasının civarında bir $\Phi : B_r(x^0) \to \mathbb{R}^n$, $y = \Phi(x)$, fonksiyonu tanımlayacağız:

$$\Phi^i(x) = y_i \doteq x_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \Phi^n(x) = y_n \doteq x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Bu fonksiyonun tersi $\Psi = \Phi^{-1}$, $x = \Psi(y)$ şöyle verilir:

$$\Psi^i(y) = x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \Psi^n(y) = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

$x \in \partial\Omega \iff x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \iff \Phi^n(x) = 0$ ve dolayısıyla $x \in \partial\Omega \iff \Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Şimdi problemin sınır değerlerini tekrar yazmalıyız: $u : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele bir fonksiyon olsun. $V \doteq \Phi(\Omega)$ ve $v(y) \doteq u(\Psi(y))$ olarak tanımlansın. Eğer u fonksiyonu problemin bir C^1 çözümü olsun.

$$\nabla u(x) = \nabla v(\Phi(x)) D\Phi(x) \text{ olduğu için}$$

$$0 = F(\nabla u(x), u(x), x) = F(\nabla v(y) D\Phi(\Psi(y)), v(y), \Psi(y))$$

elde edilir. Dolayısıyla, bu denklem bir başka fonksiyon için $G(\nabla v(y), v(y), y) = 0$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca, eğer $\Delta \doteq \Phi(\Gamma)$ üzerinde $h(y) \doteq g(\Psi(x))$ halini alır. Dolayısıyla denklem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} G(\nabla v, v, y) = 0, & \forall y \in V. \\ v = h & , \forall y \in \Delta. \end{cases}$$

Böylece Γ sınır bölgesini $\{x_n = 0\}$'ın içinde kalır.

Sınır Koşullarının Uyumluluğu.

Bir önceki bölümün sonucunu kullanarak $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$ olduğunu kabul edeceğiz. Başlangıç koşullarının karakteristik eğriler için
$p(0) = p^0$, $z(0) = z^0$ ve $x(0) = x^0$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla, $z^0 = z(0) = u(x_0) = g(x_0)$ ve böylece $z^0 = g(x^0)$ olmalıdır. Başka bir deyişle $z^0 = g(x^0)$ olarak seçilmelidir.

Ayrıca $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ olduğu için $p_i(0) = u_{x_i}(0) = g_{x_i}(0)$, $i = 1, \ldots, n-1$, olmalıdır.

Son olarak $F(p^0, z^0, x^0) = 0$ olduğu için karakteristik eğriler için toplamda n tane denklem elde edilmiş olur:

$$p_i^0 = g_{x_i}(x^0), \; i = 1, \ldots, n-1, \quad \text{ve} \quad F(p^0, z^0, x^0) = 0.$$

Tanım 7.7. Yukarıdaki koşulları sağlayan $(p^0, z^0, x^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ başlangıç değerlerine uyumludur denir.

Son olarak şunu belirtelim: z^0 tek bir şekilde g ve x_0 ile belirlenirken $(z^0 = u(x^0) = g(x^0))$ $p_i^0 = g_{x_i}(x^0)$ değerlerinin varlığı da tekliği de garanti değildir.

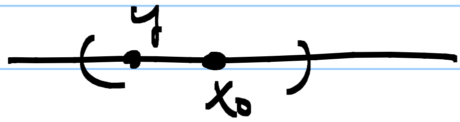
Karakteristik Olmayan Sınır Değerleri.

Diyelim ki (p^0, z^0, x^0) bir problem için uyumlu başlangıç sınır değeri olsun. Biz denklemi $x^0 \in \Gamma$ noktasının bir komşuluğunda çözmek istediğimiz için sınır değerlerinin $x^0 \in \Gamma$ noktasının bir komşuluğu halen uygun olarak seçilebilmesini isteyeceğiz. Başka bir deyişle $p_n(x_0)$ seçimini dikkatle yapmalıyız. Aşağıdaki lemma bunun bir yolunu (dolayısıyla karakteristik olmayan) vermektedir:

Lemma 7.8. (Karakteristik Olmayan Sınır Değerleri)

(p^0, z^0, x^0), $x^0 \in \Gamma$, uygun bir sınır değeri olsun. Eğer $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ ise $x^0 \in \Gamma$ noktasının bir komşuluğundaki tüm noktalar için uygun şekilde seçilebilir.

Kanıt:



$x^0 = (0, \dots, 0, 0)$ olsun. $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $G(p,y) = (G^1(p,y), \dots, G^n(p,y))$, ve

$G^i(p,y) \doteq p_i - g_{x_i}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$, $i = 1, \dots, n-1$, ve

$G^n(p,y) \doteq F(p, g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0), y)$, fonksiyonunu tanımlayalım.

Uygunluk koşulundan dolayı $G(p^0, x^0) = 0$ olur. Ayrıca,

$$D_p G(p^0, x^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ F_{p_1}(p^0, z^0, x^0), & \cdots & \cdots & , & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ olur.}$$

$$= \left(\frac{\partial(G^1, \dots, G^n)}{\partial(p^1, \dots, p^n)}\right)$$

[Son sütunda $G^1, \dots, G^{n-1}$ fonksiyonlarının p_n'e bağlı olmadıklarını gözlemleyiniz.)

$F_{p_n}(p^0; z^0, x^0) \neq 0$ olmadığı için $D_p G(p^0; x^0)$ matrisinin rankı n olur. Dolayısıyla, Kapalı Fonksiyon Teoreminden dolayı $G(p,y)=0$ denklemi $x^0 \in \Gamma$ noktasının açık bir komşuluğunda $p = q(y)$, $q \in C^1$ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere, bir çözüme sahiptir.

Şimdi, $x^0 \in \Gamma$ noktasının yakınındaki her $y \in \Gamma$ noktası için

$G(p,y) = G(q(y),y) = 0$ olur. Başka bir deyişle,

$$G^i(p,y) = p_i - g_{x_i}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = 0 \Rightarrow p_i = g_{x_i}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$$

$i = 1, \dots, n-1$, ve

$$G^n(p,y) = F(p, g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0), y) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla, $x^0 \in \Gamma$ noktasının bir komşuluğundaki tüm $y \in \Gamma$ noktaları için (p,z,y) uyumlu olacak şekilde $p \in \mathbb{R}^n$ seçilebilir. $F \in C^2$-sınıfından ise $q = q(y)$ fonksiyonu da C^2-sınıfındandır (Kapalı Fonk. Teoremi.)

Tanım 7.9. $F_{p_n}(p^0; z^0, x^0) \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $(p^0; z^0, x^0)$ uyumlu üçlüsüne karakteristik değildir denir.

Uyarı 7.10. $F_{p_n}(p^0; z^0, x^0) \neq 0$ koşulu $\nu(x^0)$ sınır bölgesinin birim dış normali olmak üzere

$$\nabla_p F(p^0; z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0$$ koşuluna denktir.

§7.4. Yerel Çözümler.

Yukarıda yaptığımız hazırlıklar sayesinde artık bize verilen bir başlangıç değer problemi için karakteristik sistem denklemlerini çözebilecek durumdayız. Başlangıç değerlerinin (p^0, z^0, x^0) ve $x^0 \in \Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 7.8. sayesinde $p^0 = q(x^0)$ koşulunu sağlayan bir q fonksiyonu vardır.

Şimdi bir $y = (y', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ noktası alalım ve bu nokta için karakteristik denklemlerin çözümlerinin

$$p(s) = p(y', s) = p(y_1, \dots, y_{n-1}, s)$$
$$z(s) = z(y', s) = z(y_1, \dots, y_{n-1}, s) \text{ ve}$$
$$x(s) = x(y', s) = x(y_1, \dots, y_{n-1}, s)$$

$p(0) = q(y)$, $z(0) = g(y)$ ve $x(0) = y$ başlangıç değerlerini sağladığını kabul edelim.

Lemma 7.11. (Yerel Tersinme)
(p^0, z^0, x^0)'ın uyumlu ve karakteristik olmayan bir başlangıç değeri ve $F \in C^2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \in \mathbb{R}$ noktasının bir $0 \in I$ ve $x^{0\prime} \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ noktasının bir $x_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ komşuluğu vardır öyle ki her $x \in V$ için $x = x(y', s)$ olacak şekilde tek bir $(y', s) \in W \times I$ ikilisi vardır ve $x \mapsto x(y', s)$ fonksiyonu C^2 sınıfındandır.

Kanıt: F fonksiyonu C^2 olduğu için yukarıdaki karakteristik eğriler de C^2 olur. $x(x^{0\prime}, 0) = x^0$ olduğu için sonuç Ters Fonksiyon Teoreminin bir sonucudur. O halde, $\det Dx(x^{0\prime}, 0) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Yukarıdaki verilenlerden $x(y',0)=(y',0)=y$, $\forall y\in\Gamma$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $i=1,\dots,n-1$ için $x^i(x^{0\prime},0)=x_i^0$, $1\le i\le n$ ve bundan dolayı $x^n(x^{0\prime},0)=0$ olduğundan

$$\frac{\partial x^j}{\partial y_i}(x^{0\prime},0)=\begin{cases}\delta_{ij}, & j=1,\dots,n-1,\\ 0, & j=n,\end{cases}$$ elde edilir.

Karakteristik denklemlerden $\partial x_j/\partial s\,(x^{0\prime},0)=F_{p_j}(p^0,z^0,x^0)$, $j=1,2,\dots,n$, elde edilir çünkü $p(x^{0\prime},0)=q(x^0)=p^0$ olduğunu biliyoruz. O halde, x'in türevi

$$Dx(x^{0\prime},0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & F_{p_1}(p^0,z^0,x^0)\\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 & F_{p_n}(p^0,z^0,x^0)\end{pmatrix}$$ ve böylece

$\det Dx(x^{0\prime},0)=F_{p_n}(p^0,z^0,x^0)\neq 0$ dır ve kanıt tamamlanır. ■

Şimdi, doğrusal olmayan birinci derece denklemler için varlık teoremini kanıtlamak için tekrar kısmi diferansiyel denklemlere dönmeliyiz.

Yukarıdaki Lemma 7.11 uyarınca, her $x\in V$ için $x=x(y',s)$ denkleminin tek bir çözümü vardır: $y'=y(x)$ ve $s=s(x)$. Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$u(x)\doteq z(y'(x),s(x)) \quad \text{ve} \quad p(x)\doteq p(y'(x),s(x)).$$

<u>Teorem 7.12.</u> $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ sınırı C^1-olan açık sınırlı bir bölge ve $\Gamma\subseteq\partial\Omega$ olsun. $F\in C^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\overline{\Omega})$, $g\in C^2(\Gamma)$ verilmiş olsun ve ayrıca (p^0,z^0,x^0) üçlüsünün karakteristik olmayan sınır değeri olduğunu kabul edelim.

Dolayısıyla, $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ olsun. O zaman, (7.19)'da tanımlandığı üzere $V \subseteq \overline{\Omega}$ ve $u: V \to \mathbb{R}$ C^2-fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon aşağıdaki problemin tek çözümüdür:

$$\begin{cases} F(\nabla u(x), u(x), x) = 0, & \forall x \in V, \\ u(x) = g(x), & \forall x \in \Gamma \cap V \\ \nabla u(x^0) = p^0. \end{cases}$$

<u>Kanıt:</u> I ve W Lemma 7.11'de verildiği gibi olsun. $y' \in W$ olmak üzere karakteristikler
$p(s) = p(y', s)$, $z(s) = z(y', s)$ ve $x(s) = x(y', s)$ olsun.

Kanıt üç adımdan oluşmaktadır.

<u>Adım 1.</u> $f(y', s) \doteq F(p(y', s), z(y', s), x(y', s)) = 0$ $\forall s$, $x(y', s) \in V$.

$f(y', 0) = F(p(y', 0), z(y', 0), x(y', 0)) = F(q(y), g(y), y) = 0$ ve

$$\frac{\partial f}{\partial s}(y', s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial x_j} \dot{x}_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p_j\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} p_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}$$
$= 0$'dır, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Dolayısıyla her $s \in I$ ve $x(y', s) \in V$ için

$f(y', s) \doteq F(p(y', s), z(y', s), x(y', s)) = 0$ olur.

O halde $F(p(x), u(x), x) = 0$, $\forall x \in V$, elde edilir.

<u>Adım 2.</u> $\forall x \in V$ için $p(x) = \nabla u(x)$.

Bir $(y', s) \in V_0 \times I$ ikilisi alalım. Karakteristik denklemlerden

$$\frac{\partial z}{\partial s}(y', s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(y', s) \frac{\partial x_j}{\partial s}(y', s), \quad \frac{\partial z}{\partial y_i}(y', s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(y', s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y', s),$$

$i = 1, \dots, n-1$, elde edilir (aslında ikinci denklem bir doğrusal ODE denkleminden gelir). Şimdi bu ikisini kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{= \delta_{kj}} = p_j \quad \text{olur.}
\end{aligned}$$

(Son iki eşitlik için x'in $y \longmapsto x(y'(x), s(x))$ şeklinde bir fonksiyon olarak yazılabileceğini ve dolayısıyla

$\frac{\partial}{\partial x_j}(x(y'(x), s(x))) = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{kj}$ olacağını akılda tutmak gerekir.)

Adım 3. Teklik. Lemma 7.11 gereğince her $x \in V$ noktası tek bir $x(y', s)$ karakteristik eğrisinin üzerinde kalır, ve dolayısıyla çözüm bu karakteristiklerce tek bir şekilde belirlenir.

Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Uyarı 7.13. Yarı-doğrusal (quasilinear) durumda varlık-teklik yine karakteristiklerden elde edilir. Tamamen doğrusal olmayan durumda ise varlık garanti değildir!

§7.5. Global Çözümün Varlığı.

Şu ana kadar çözümlerin $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ sınır bölgesi yakınındaki yerel çözümlerin varlığından bahsettik. Şimdi ise bazı özel durumlarda global çözümlerden bahsedeceğiz.

Doğrusal F fonksiyonu.

Eğer denklem $F(\nabla u, u, x) = b(x)\cdot \nabla u(x) + c(x)\, u(x) = 0, \ \forall x \in \Omega$ ile verilmişse karakteristik olmayan başlangıç koşulu (Uyarı 7.10'dan dolayı)

$$b(x^0)\cdot \nu(x^0) \neq 0, \ \forall x^0 \in \Gamma,$$

ile verilir.

Dolayısıyla bu koşul z^0 ve p^0'dan bağımsızdır ve eğer başlangıç koşulu Γ üzerinde $u=g$ ile verilmişse $q(y)$, $y \in \Gamma$, tek bir şekilde elde edilir (Lemma 7.8)

Özel olarak Γ düz ise karakteristik olmayan başlangıç koşulu $b_n(x^0) \neq 0$ olur ve başlangıç koşulunda

$$b\cdot q + cg = 0$$

olur.

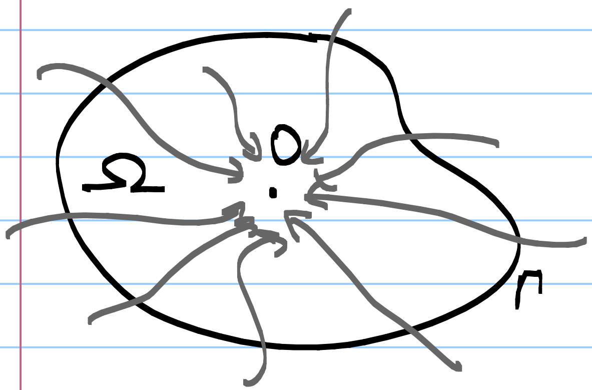
Dolayısıyla, q_n, $b_n \neq 0$ olma koşulundan ve diğer $q_i = g_{x_i}$, $i=1,\dots,n-1$, olarak elde edilir. Böylece $x^0 \in \Gamma$ noktasının civarında çözüm elde edilir.

Uyarı 7.14. Theorem 7.12 karakteristik sistemin tümünü kullanır. Diğer yandan, çözümün varlığı ve tekliği biliniyorsa, onu bulmak için x ve z yeterli olacaktır (p'ye gerek kalmaz!). Ayrıca, karakteristik sistemin tek bir çözümü olduğu için x^0 noktası yakınında karakteristik eğriler kesişemezler.

Örnek 7.15. Aşağıdaki problemi düşünelim:

$$b(x)\cdot\nabla u(x) = 0, \ \forall x\in\Omega \text{ ve } u=g, \ \forall x^0\in\Gamma$$

Ayrıca, $\dot{x}(s) = b(x(s))$ karakteristik denkleminin tüm çözümlerinin orijine doğru aktığını kabul edelim.



Bu b fonksiyonu Ω içinde sadece orijinde 0 değeri alırsa ve Γ sınır bölgesinde de $b\cdot\nu<0$ olursa mümkündür.

O halde Teorem 7.12 uyarınca $\partial\Omega$ yakınında tek bir u çözümü vardır ve ayrıca

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) = \nabla u(x(s))\cdot\dot{x}(s) = \nabla u(x(s))\cdot b(x(s)) = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda, her $x(0)=x^0$ koşulunu sağlayan her karakteristik için $u(x(s))$ sabit fonksiyon olur.

Böylece, g sabit olmadığı sürece u çözümünün tüm Ω bölgesine genişletilmesi mümkün olmayabilir.

Üç Boyutlu Uzayda 1. Derece Denklemler için Alternatif Teori.

Bu kısa not $P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ denkleminin basitleştirilmiş teorisini sunacaktır.

Teorem: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ve $R(x,y,z)$ verilen bir $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

(1) $P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ denkleminin

genel çözümü F rasgele bir C^1-fonksiyon olmak üzere $F(\phi,\psi)=0$ ile verilir. Burada $\varphi(x,y,z)=C_1$ ve $\psi(x,y,z)=C_2$

(2) $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=dt$ adi diferansiyel

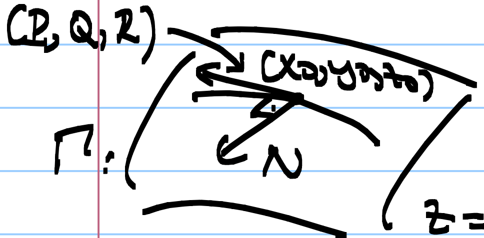
denklem sisteminin bir genel çözümüdür.

Kanıt: Aşağıdaki iki ifadeyi kanıtlayacağız.

a) (1) denkleminin tüm çözüm yüzeyleri (2) sisteminin çözüm eğrilerinin birleşimlerinden oluşur.

b) (2) sisteminin çözüm eğrilerinin oluşturduğu yüzeyler (1) denkleminin çözüm yüzeyleridir.

(a)'nın kanıtı: $z=f(x,y)$ (1) denkleminin bir çözüm yüzeyi olsun. Dolayısıyla, $Pz_x+Qz_y=R$ olur. (x_0,y_0,z_0) $z=f(x,y)$ yüzeyinin üzerinde bir nokta olsun. Başka bir deyişle, $z_0 = f(x_0, y_0)$.



$z = f(x,y)$

$N = (z_x, z_y, -1)$ yüzeye normal bir vektör alanıdır.

$P z_x + Q z_y - R = 0$ olduğu için $(P, Q, -1)$ vektör alanı N'ye diktir ve dolayısıyla yüzeye teğettir.

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)) \end{cases} \qquad (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

Yukarıdaki başlangıç değer probleminin tek çözümünü $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ile gösterelim.

Şimdi γ'nın Γ içinde kaldığını görelim!

$A(t) = f(x(t), y(t)) - z(t)$ olarak tanımlansın.

$A(t_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$ olur. Ayrıca,

$$A'(t) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t) - z'(t)$$

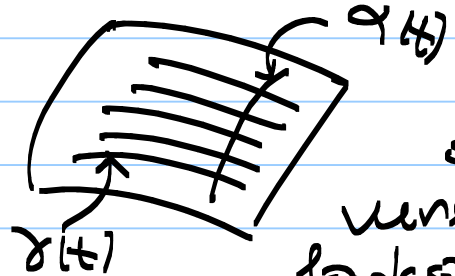
$$= f_x P + f_y Q - R = 0, \ \forall t \text{ olur.}$$

O halde, $A(t) = 0$, $\forall t$ elde edilir. Başka bir deyişle $\gamma(t)$ eğrisi $z = f(x,y)$ ile verilen Γ yüzeyinin üzerindedir.

Özetlersek şunu gösterdik: Γ yüzeyinin her noktasından (2) sisteminin tek bir çözüm eğrisi geçer ve bu eğri tamamen Γ yüzeyinin üzerinde kalır. Böylece (a)'nın kanıtı tamamlanır.

(b) Şimdi de Γ yüzeyinin (2) sisteminin çözüm eğrileri tarafından üretildiğini kabul edelim. Bu yüzeyin (4) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim.

Γ $(z = f(x,y))$ yüzeyinin üzerinde bir $\alpha(t)$ eğrisi alalım öyle ki (2) denklem sisteminin her çözüm eğrisi (karakteristiği) ile çapraz kesişsin.



(2) $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R} = dt$

sisteminin tüm çözümlerini veren $\phi(x,y,z) = C_1$ ve $\psi(x,y,z) = C_2$ fonksiyonlarını seçelim. Başka bir deyişle (x_0,y_0,z_0) başlangıç noktasından geçen çözüm eğrisi $C_1 = \phi(x_0,y_0,z_0)$ ve $C_2 = \psi(x_0,y_0,z_0)$ olmak üzere $\phi = C_1$, $\psi = C_2$ yüzeylerinin ortak kesişim eğrisidir.

Şimdi $\phi(\alpha(t))$ ve $\psi(\alpha(t))$ fonksiyonlarını düşünelim. Her ikisi de t'nin fonksiyonları olduğu için öyle bir $F(u,v)$ bulabiliriz ki $F(\phi(\alpha(t)), \psi(\alpha(t))) = 0$ olur.

$F(\phi,\psi) = 0$ denkleminin belirlediği yüzeyi Γ' ile gösterelim. Bu yüzeyin her (x_0,y_0,z_0) noktası için $C_1 = \phi(x_0,y_0,z_0)$, $C_2 = \psi(x_0,y_0,z_0)$ olarak seçilirse (x_0,y_0,z_0) noktasından geçen (2) sisteminin tek çözümü $\phi = C_1$, $\psi = C_2$ yüzeylerinin arakesitidir. Dolayısıyla bu çözüm eğrisi de $F(\phi,\psi) = 0$ yüzeyinin üzerindedir. Başka bir deyişle Γ' yüzeyi de $\alpha(t)$ eğrisinin noktalarından geçen karakteristik eğrilerin birleşimidir.

Fakat Γ eğrisi de aynı eğrilerin oluşturduğu yüzey olduğu için $\Gamma=\Gamma'$ olmalıdır. O halde, Γ yüzeyi de bir F fonksiyonu için $F(\phi,\psi)=0$ denklemi ile verilir.

Böylece kanıt tamamlanır. ■

Örnek. $yz_x - xz_y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemi $Pz_x+Qz_y=R$ ile karşılaştırarak $P(x,y,z)=y$, $Q(x,y,z)=-x$ ve $R(x,y,z)=0$ bulunur.

Karakteristik eğriler için denklem sistemi şöyledir:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=dt \Rightarrow \frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0}$$

$\Rightarrow xdx+ydy=0$ ve $dz=0$ elde edilir.

$\Rightarrow x^2+y^2=c_1$ ve $z=c_2$.

O halde, $\phi(x,y,z)=x^2+y^2=c_1$ ve $\psi(x,y,z)=z=c_2$ tüm karakteristik eğrileri verir.

Dolayısıyla, $F\in C^1$ olmak üzere $F(\phi,\psi)=F(x^2+y^2,z)=0$ tüm çözümleri verir.

Şimdi biraz daha ileri gidelim:

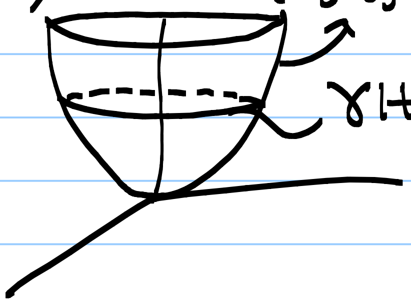
$c_1,c_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere her karakteristik eğri merkezi z-ekseni üzerinde olan ve xy-düzlemine paralel bir çemberdir: $x^2+y^2=c_1$, $z=c_2$.

Şimdi de kanıtın içinde kullandığımız $\alpha(t)$ eğrisini seçerek denklemin farklı çözümlerini, $z=f(x,y)$, bulalım.

1) 

$\phi(\alpha(t)) = \phi(0,t,t) = 0^2+t^2=t^2$, $\psi(\alpha(t))=\psi(0,t,t)=t$, elde edilir. O halde, $F(u,v)=u-v^2$ seçilirse $F(\phi,\psi)=\phi-\psi^2 = x^2+y^2-z^2=0 \Rightarrow z^2=x^2+y^2$ denklemi koninin bir çözüm yüzeyi olduğunu gösterir.

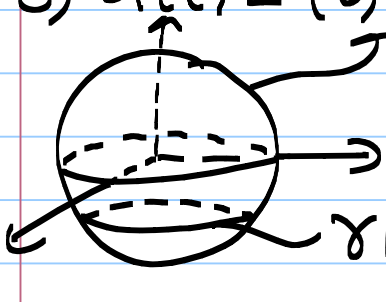
2) $\alpha(t)=(0,t,t^2)$ olsun. Bu durumda çözüm yüzeyi paraboloid olacaktır.



$\phi(\alpha(t))=\phi(0,t,t^2)=0^2+t^2=t^2$ ve
$\psi(\alpha(t))=\psi(0,t,t^2)=t^2$.

O halde $F(u,v)=u-v$ olursa $F(\phi,\psi)=0$ olur. Böylece çözüm $F(\phi,\psi)=\phi-\psi=x^2+y^2-z=0$ $\Rightarrow z=x^2+y^2$ bulunur.

3) $\alpha(t)=(0,\cos t,\sin t)$ eğrisi olsun.



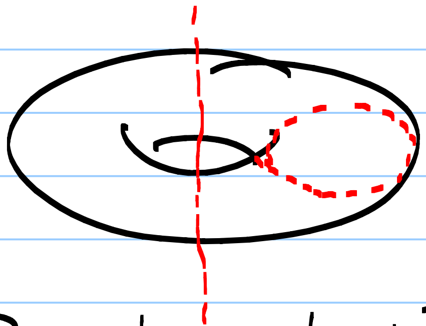
$\phi(\alpha(t))=0^2+\cos^2 t=\cos^2 t$
$\psi(\alpha(t))=\sin t$.
O halde, $F(u,v)=u+v^2-1$ alalım.

Böylece $F(\phi(\alpha(t)), \psi(\alpha(t))) = \cos^2 t + \sin^2 t - 1 = 0$ olur. O halde, çözüm $F(\phi, \psi) = 0$ ile verilir.

$\Rightarrow F(\phi, \psi) = F(x^2+y^2, z) = x^2+y^2+z^2-1=0$ küre denklemini buluruz.

4) Son olarak $\alpha(t) = (0, 2+\sin t, \cos t)$ alalım.

O halde çözüm yüzeyi bir torus olacaktır:



$$\phi(\alpha(t)) = 0^2 + (2+\sin t)^2$$
$$= 4 + \sin^2 t + 4\sin t$$
$$\psi(\alpha(t)) = \cos t.$$

Buradan, $\phi + \psi^2 = 5 + 4\sin t$ ve buradan da

$(\phi + \psi^2 - 5)^2 + 16\psi^2 = 16$ elde edilir.

$F(u,v) = (u+v^2-5)^2 + 16v^2 - 16$ alalım. Böylece çözüm yüzeyi, torus, aşağıdaki denklem ile verilir.

$$(\phi + \psi^2 - 5)^2 + 16\psi^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2-5)^2 + 16z^2 - 16 = 0.$$