Sonluötesi sayılar, Hidra oyunu ve Goodstein teoremi

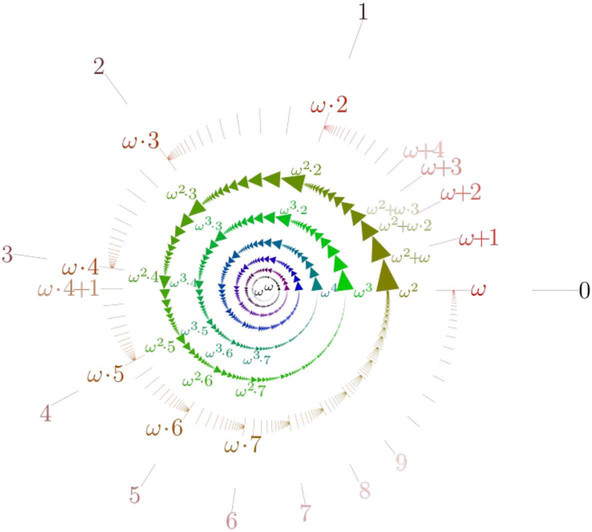
Burak Kaya

Orta Doğu Teknik Üniversitesi

burakk@metu.edu.tr

31 Mayıs 2023

Bölüm I: İyi sıralı kümeler ve ordinaller



İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \quad x \prec y \rightarrow y \not\prec x$

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \rightarrow y \not\prec x$
  - geçişkenlik, yani $\forall x, y, z \in X \;\; (x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z$

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \rightarrow y \not\prec x$
  - geçişkenlik, yani $\forall x, y, z \in X \;\; (x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z$
  - tamlık, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \vee x = y \vee y \prec x$

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \to y \not\prec x$
  - geçişkenlik, yani $\forall x, y, z \in X \;\; (x \prec y \wedge y \prec z) \to x \prec z$
  - tamlık, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \vee x = y \vee y \prec x$

  özelliklerini sağlıyorsa, $(X, \prec)$ yapısına doğrusal sıralı bir küme denir.

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \to y \not\prec x$
  - geçişkenlik, yani $\forall x, y, z \in X \;\; (x \prec y \wedge y \prec z) \to x \prec z$
  - tamlık, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \vee x = y \vee y \prec x$

  özelliklerini sağlıyorsa, $(X, \prec)$ yapısına doğrusal sıralı bir küme denir.
- $(X, \prec)$ doğrusal sıralı bir küme olmak üzere, boş olmayan her $S \subseteq X$ alt kümesinin $\prec$-minimal elemanı varsa, bu durumda $(X, \prec)$ yapısına iyi sıralı küme denir.

İyi sıralı kümeler

- X bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir $\prec$ bağıntısı
  - asimetri, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \rightarrow y \nprec x$
  - geçişkenlik, yani $\forall x, y, z \in X \;\; (x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z$
  - tamlık, yani $\forall x, y \in X \;\; x \prec y \vee x = y \vee y \prec x$

  özelliklerini sağlıyorsa, $(X, \prec)$ yapısına doğrusal sıralı bir küme denir.
- $(X, \prec)$ doğrusal sıralı bir küme olmak üzere, boş olmayan her $S \subseteq X$ alt kümesinin $\prec$-minimal elemanı varsa, bu durumda $(X, \prec)$ yapısına iyi sıralı küme denir.
- Eş değer olarak, doğrusal sıralı bir $(X, \prec)$ kümesinde

$$\cdots \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1 \prec x_0$$

bağıntılarını sağlayan bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yoksa, o zaman $(X, \prec)$ bir iyi sıralı kümedir.

Örnekler

- $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralı kümedir.

Örnekler

- $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralı kümedir.
- $(\mathbb{R}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı bir küme değildir çünkü $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.

Örnekler

- $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralı kümedir.
- $(\mathbb{R}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı bir küme değildir çünkü $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.
- Benzer şekilde, $(\mathbb{Z}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı değildir çünkü $\mathbb{Z}^{-} \subseteq \mathbb{Z}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.

Örnekler

- $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralı kümedir.
- $(\mathbb{R}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı bir küme değildir çünkü $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.
- Benzer şekilde, $(\mathbb{Z}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı değildir çünkü $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Z}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.
- Öte yandan $\mathbb{Z}$ kümesi üzerindeki $m \prec n$ ancak ve ancak

$$(m, n \in \mathbb{Z}^- \wedge n < m) \vee (m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n) \vee$$

$$(m \in \mathbb{Z}^- \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < m)$$

şeklinde tanımlanan $\prec$ bağıntısı için $(\mathbb{Z}, \prec)$ iyi sıralı bir kümedir.

Örnekler

- $(\mathbb{N}, <)$ bir iyi sıralı kümedir.
- $(\mathbb{R}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı bir küme değildir çünkü $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.
- Benzer şekilde, $(\mathbb{Z}, <)$ bir doğrusal sıralı kümedir ama iyi sıralı değildir çünkü $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Z}$ alt kümesinin $<$-minimal elemanı yoktur.
- Öte yandan $\mathbb{Z}$ kümesi üzerindeki $m \prec n$ ancak ve ancak

$$(m, n \in \mathbb{Z}^- \wedge n < m) \vee (m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n) \vee$$

$$(m \in \mathbb{Z}^- \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < m)$$

şeklinde tanımlanan $\prec$ bağıntısı için $(\mathbb{Z}, \prec)$ iyi sıralı bir kümedir.

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec -1 \prec -2 \prec -3 \prec \ldots$$

- Bir ordinal elemanı olmak ilişkisi $\in$ tarafından iyi sıralanmış bir geçişken kümedir.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- Bir ordinal elemanı olmak ilişkisi $\in$ tarafından iyi sıralanmış bir geçişken kümedir.
- Eğer α bir ordinalse, o zaman $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ da bir ordinaldir.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- Bir ordinal elemanı olmak ilişkisi $\in$ tarafından iyi sıralanmış bir geçişken kümedir.
- Eğer α bir ordinalse, o zaman $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ da bir ordinaldir. Eğer S kümesinin elemanları ordinallerse, o zaman $\bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ bir ordinaldir.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- Bir ordinal elemanı olmak ilişkisi $\in$ tarafından iyi sıralanmış bir geçişken kümedir.
- Eğer α bir ordinalse, o zaman $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ da bir ordinaldir. Eğer S kümesinin elemanları ordinallerse, o zaman $\bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ bir ordinaldir.
- İlk birkaç ordinal aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0, 1\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} \\
&\ldots \\
\omega &= \{0, 1, 2, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Teorem

Her iyi sıralanmış $(S, \prec)$ kümesi biricik bir $(\alpha, \in)$ ordinaline eş yapısaldır.

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha + \beta$ ordinali β'nın bir kopyasının α'nın ardına eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha + \beta$ ordinali β'nın bir kopyasının α'nın ardına eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin,

$$\begin{array}{rl} 2 & \bullet\ \bullet \\ \omega & \bullet\ \bullet\ \bullet \dots \\ \omega + 2 & \bullet\ \bullet\ \bullet \dots\ \bullet\ \bullet \\ 2 + \omega & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \dots \end{array}$$

Demek ki $2 + \omega = \omega$ ve $2 + \omega \neq \omega + 2$.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha + \beta$ ordinali β'nın bir kopyasının α'nın ardına eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin,

$$\begin{aligned} 2 \quad & \bullet\ \bullet \\ \omega \quad & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \\ \omega + 2 \quad & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots\ \bullet\ \bullet \\ 2 + \omega \quad & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \end{aligned}$$

  Demek ki $2 + \omega = \omega$ ve $2 + \omega \neq \omega + 2$.
- Ordinal toplaması, doğal sayılardaki toplamanın her özelliğine sahip olmasa da birleşme, sağdan sadeleştirme gibi bazı özelliklerine sahiptir.

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha \cdot \beta$ ordinali α'nın β tane sıralı kopyasının art arda eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha \cdot \beta$ ordinali α'nın β tane sıralı kopyasının art arda eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin,

$$
\begin{array}{rl}
2 & \bullet\ \bullet \\
\omega & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \\
\omega \cdot 2 & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots\ \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \\
2 \cdot \omega & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots
\end{array}
$$

Demek ki $2 \cdot \omega = \omega$ ve $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

- α ve β ordinaller olmak üzere $\alpha \cdot \beta$ ordinali α'nın β tane sıralı kopyasının art arda eklenmesiyle elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin,

$$
\begin{array}{rl}
2 & \bullet\ \bullet \\
\omega & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \\
\omega \cdot 2 & \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots\ \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \\
2 \cdot \omega & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \ldots
\end{array}
$$

  Demek ki $2 \cdot \omega = \omega$ ve $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.
- Ordinal çarpması, doğal sayılardaki çarpmanın her özelliğine sahip olmasa da birleşme, sağdan sadeleştirme gibi bazı özelliklerine sahiptir.

- α ve β ordinaller olmak üzere α^β ordinali β'dan α'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesinin (ters) sözlük sıralamasıyla elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.

Kümeler Kuramı 101: Ordinaller üzerine bir yoğun ders

- α ve β ordinaller olmak üzere α^β ordinali β'dan α'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesinin (ters) sözlük sıralamasıyla elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin, 2'den ω'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesini ω üzerinde 2 uzunluğunda diziler kümesi olarak düşünürsek ω^2 ordinali

$$(0,0) \prec (1,0) \prec \cdots \prec (0,1) \prec (1,1) \prec \cdots \prec (0,2) \prec (1,2) \prec \dots$$

kümesinin iyi sıralama tipidir.

- α ve β ordinaller olmak üzere α^β ordinali β'dan α'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesinin (ters) sözlük sıralamasıyla elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin, 2'den ω'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesini ω üzerinde 2 uzunluğunda diziler kümesi olarak düşünürsek ω^2 ordinali

$$(0,0) \prec (1,0) \prec \cdots \prec (0,1) \prec (1,1) \prec \cdots \prec (0,2) \prec (1,2) \prec \ldots$$

kümesinin iyi sıralama tipidir. Görülebileceği üzere $\omega^2 = \omega \cdot \omega$.

- α ve β ordinaller olmak üzere α^β ordinali β'dan α'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesinin (ters) sözlük sıralamasıyla elde edilen iyi sıralı kümenin sıralama tipidir.
- Örneğin, 2'den ω'ya sonlu destekli fonksiyonlar kümesini ω üzerinde 2 uzunluğunda diziler kümesi olarak düşünürsek ω^2 ordinali

$$(0,0) \prec (1,0) \prec \cdots \prec (0,1) \prec (1,1) \prec \cdots \prec (0,2) \prec (1,2) \prec \dots$$

kümesinin iyi sıralama tipidir. Görülebileceği üzere $\omega^2 = \omega \cdot \omega$.

- Ordinallerde üs alma işlemi, doğal sayılardaki üs alma işleminin çoğu özelliğine sahiptir.

Ordinallerin bir resmi

Ordinallerin Cantor normal formu

Ordinallerin Cantor normal formu

Teorem

$\alpha > 0$ bir ordinal olsun. O zaman öyle $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ordinalleri ve öyle $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitif tam sayıları bulunabilir ki

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

olur. Dahası, α'nın bu şekilde temsili biriciktir.

Ordinallerin Cantor normal formu

Teorem

$\alpha > 0$ bir ordinal olsun. O zaman öyle $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ordinalleri ve öyle $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitif tam sayıları bulunabilir ki

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

olur. Dahası, α'nın bu şekilde temsili biriciktir.

- Bu temsile α'nın Cantor normal formu denir.

Ordinallerin Cantor normal formu

Teorem

$\alpha > 0$ bir ordinal olsun. O zaman öyle $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ordinalleri ve öyle $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitif tam sayıları bulunabilir ki

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

olur. Dahası, α'nın bu şekilde temsili biriciktir.

- Bu temsile α'nın Cantor normal formu denir.
- Bir ordinalin Cantor normal formu bu ordinalin ω-tabanında yazımı olarak düşünülebilir.

Ordinallerin Cantor normal formu

Teorem

$\alpha > 0$ bir ordinal olsun. O zaman öyle $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ordinalleri ve öyle $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitif tam sayıları bulunabilir ki

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

olur. Dahası, α'nın bu şekilde temsili biriciktir.

- Bu temsile α'nın Cantor normal formu denir.
- Bir ordinalin Cantor normal formu bu ordinalin ω-tabanında yazımı olarak düşünülebilir.
- Diğer taraftan, doğal sayıların standart tabanlarda yazımından farklı olarak, bir ordinalin Cantor normal formu kendisini barındırabilir.

Ordinallerin Cantor normal formu

Teorem

$\alpha > 0$ bir ordinal olsun. O zaman öyle $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ordinalleri ve öyle $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pozitif tam sayıları bulunabilir ki

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

olur. Dahası, α'nın bu şekilde temsili biriciktir.

- Bu temsile α'nın Cantor normal formu denir.
- Bir ordinalin Cantor normal formu bu ordinalin ω-tabanında yazımı olarak düşünülebilir.
- Diğer taraftan, doğal sayıların standart tabanlarda yazımından farklı olarak, bir ordinalin Cantor normal formu kendisini barındırabilir. Örneğin, $\epsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$ olmak üzere $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$ olur.

Bölüm II: Herkül ve Hidra

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.
- V köşe kümesinin sonlu olduğu durumlarda (V, E) çizgesi bir diyagramla temsil edilebilir:
  - V'deki her eleman için bir nokta koy.
  - Her $\{v, w\} \in E$ sırasız ikilisi için v ve w köşelerini temsil eden noktaları bir çizgiyle (ya da eğriyle) birleştir.

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.
- V köşe kümesinin sonlu olduğu durumlarda (V, E) çizgesi bir diyagramla temsil edilebilir:
    - V'deki her eleman için bir nokta koy.
    - Her $\{v, w\} \in E$ sırasız ikilisi için v ve w köşelerini temsil eden noktaları bir çizgiyle (ya da eğriyle) birleştir.
- Bir çizgenin herhangi iki köşesi arasında her zaman bir patika bulunabiliyorsa bu çizgeye bağlantılı denir.

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.
- V köşe kümesinin sonlu olduğu durumlarda (V, E) çizgesi bir diyagramla temsil edilebilir:
  - V'deki her eleman için bir nokta koy.
  - Her $\{v, w\} \in E$ sırasız ikilisi için v ve w köşelerini temsil eden noktaları bir çizgiyle (ya da eğriyle) birleştir.
- Bir çizgenin herhangi iki köşesi arasında her zaman bir patika bulunabiliyorsa bu çizgeye bağlantılı denir.
- İçerisinde döngü barındırmayan bağlantılı çizgelere ağaç denir.

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.
- V köşe kümesinin sonlu olduğu durumlarda (V, E) çizgesi bir diyagramla temsil edilebilir:
  - V'deki her eleman için bir nokta koy.
  - Her $\{v, w\} \in E$ sırasız ikilisi için v ve w köşelerini temsil eden noktaları bir çizgiyle (ya da eğriyle) birleştir.
- Bir çizgenin herhangi iki köşesi arasında her zaman bir patika bulunabiliyorsa bu çizgeye bağlantılı denir.
- İçerisinde döngü barındırmayan bağlantılı çizgelere ağaç denir.
- (V, E) bir ağaç ve $r \in V$ olmak üzere (V, E, r) yapısına bir köklü ağaç denir.

Çizge Kuramı 101: Temel tanımlar

- V bir küme ve $E \subseteq [V]^2$ olmak üzere (V, E) yapısına bir çizge denir.
- V köşe kümesinin sonlu olduğu durumlarda (V, E) çizgesi bir diyagramla temsil edilebilir:
  - V'deki her eleman için bir nokta koy.
  - Her $\{v, w\} \in E$ sırasız ikilisi için v ve w köşelerini temsil eden noktaları bir çizgiyle (ya da eğriyle) birleştir.
- Bir çizgenin herhangi iki köşesi arasında her zaman bir patika bulunabiliyorsa bu çizgeye bağlantılı denir.
- İçerisinde döngü barındırmayan bağlantılı çizgelere ağaç denir.
- (V, E) bir ağaç ve $r \in V$ olmak üzere (V, E, r) yapısına bir köklü ağaç denir.
- (V, E, r) bir köklü ağaç olmak üzere V'nin derecesi 1 olan kökten farklı köşelerine yaprak denir.

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz.

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.
- Herkül kökten farklı bir hidranın (ağacın) kafalarını (yapraklarını) kesmeye başlasın.
- Herkül n. adımda bu köklü ağacın bir yaprağını kestiği zaman,

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.
- Herkül kökten farklı bir hidranın (ağacın) kafalarını (yapraklarını) kesmeye başlasın.
- Herkül n. adımda bu köklü ağacın bir yaprağını kestiği zaman,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlıysa, bu durumda ağaç değişime uğramamakta,

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.
- Herkül kökten farklı bir hidranın (ağacın) kafalarını (yapraklarını) kesmeye başlasın.
- Herkül n. adımda bu köklü ağacın bir yaprağını kestiği zaman,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlıysa, bu durumda ağaç değişime uğramamakta,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlı değilse, bu durumda ağacın kesilen yaprağından köke doğru bir adım ilerledikten sonra erişilen köşesinden ağacın "üstte kalan" parçasının n kopyası çıkmaktadır.

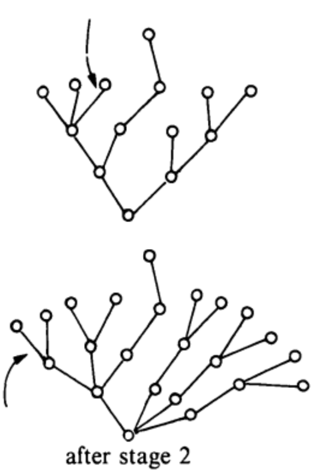
Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.
- Herkül kökten farklı bir hidranın (ağacın) kafalarını (yapraklarını) kesmeye başlasın.
- Herkül n. adımda bu köklü ağacın bir yaprağını kestiği zaman,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlıysa, bu durumda ağaç değişime uğramamakta,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlı değilse, bu durumda ağacın kesilen yaprağından köke doğru bir adım ilerledikten sonra erişilen köşesinden ağacın "üstte kalan" parçasının n kopyası çıkmaktadır.
- Eğer hidranın sadece kökü kalırsa, bu durumda Herkül hidrayı mağlup etmiş sayılır.

Hidra nedir?

- Bir hidrayı matematiksel olarak bir sonlu köklü (V, E, r) ağacıyla temsil edebiliriz. Bu durumda ağacın yaprakları hidranın kafalarını temsil edecektir.
- Herkül kökten farklı bir hidranın (ağacın) kafalarını (yapraklarını) kesmeye başlasın.
- Herkül n. adımda bu köklü ağacın bir yaprağını kestiği zaman,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlıysa, bu durumda ağaç değişime uğramamakta,
  - eğer kesilen yaprak köke bağlı değilse, bu durumda ağacın kesilen yaprağından köke doğru bir adım ilerledikten sonra erişilen köşesinden ağacın "üstte kalan" parçasının n kopyası çıkmaktadır.
- Eğer hidranın sadece kökü kalırsa, bu durumda Herkül hidrayı mağlup etmiş sayılır.
- Herkül hidrayı her zaman mağlup edebilir mi? Herkülün hangi stratejiyi takip etmesi lazım?

Hidra nasıl büyür?



Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Bu teoremi kanıtlayabilmek için önce her hidraya bir sayılabilir ordinal atayacağız.

Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Bu teoremi kanıtlayabilmek için önce her hidraya bir sayılabilir ordinal atayacağız. Verilen bir $H = (V, E, r)$ hidrası için α_H ordinali özyinelemeli olarak

Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Bu teoremi kanıtlayabilmek için önce her hidraya bir sayılabilir ordinal atayacağız. Verilen bir $H = (V, E, r)$ hidrası için α_H ordinali özyinelemeli olarak

- eğer hidra sadece kökten oluşuyorsa $\alpha_H = 0$,

Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Bu teoremi kanıtlayabilmek için önce her hidraya bir sayılabilir ordinal atayacağız. Verilen bir $H = (V, E, r)$ hidrası için α_H ordinali özyinelemeli olarak

- eğer hidra sadece kökten oluşuyorsa $\alpha_H = 0$,
- eğer hidra sadece kökten oluşmuyorsa, o zaman ağacın köküne bağlı köşeleri kök kabul eden alt hidraların ordinalleri $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_n$ olmak üzere
$$\alpha_H = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_n}$$

şeklinde tanımlansın.

Paris-Kirby teoremi

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

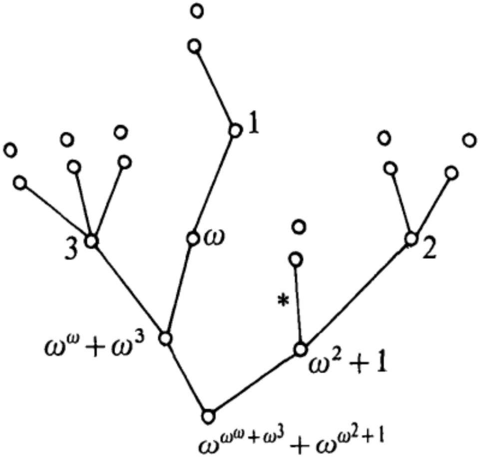
Bu teoremi kanıtlayabilmek için önce her hidraya bir sayılabilir ordinal atayacağız. Verilen bir $H = (V, E, r)$ hidrası için α_H ordinali özyinelemeli olarak

- eğer hidra sadece kökten oluşuyorsa $\alpha_H = 0$,
- eğer hidra sadece kökten oluşmuyorsa, o zaman ağacın köküne bağlı köşeleri kök kabul eden alt hidraların ordinalleri $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_n$ olmak üzere

$$\alpha_H = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_n}$$

şeklinde tanımlansın. Hidraların yüksekliği sonlu olduğu için bu özyinelemeli prosedür her hidra için sonlanacak ve her hidraya ϵ_0'dan küçük bir ordinal sayı atayacaktır.

Hidralardan ordinallere



Herkül'ün gücü

Önsav

Verilen kökten farklı bir $H = (V, E, r)$ *hidrasının bir yaprağı kesildikten sonra oluşan hidra* $H' = (V', E', r')$ *olsun. O zaman* $\alpha_{H'} < \alpha_H$.

Herkül'ün gücü

Önsav

Verilen kökten farklı bir $H = (V, E, r)$ *hidrasının bir yaprağı kesildikten sonra oluşan hidra* $H' = (V', E', r')$ *olsun. O zaman* $\alpha_{H'} < \alpha_H$.

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Herkül'ün gücü

Önsav

Verilen kökten farklı bir $H = (V, E, r)$ *hidrasının bir yaprağı kesildikten sonra oluşan hidra* $H' = (V', E', r')$ *olsun. O zaman* $\alpha_{H'} < \alpha_H$.

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Kanıt

Verilen bir $H_0 = (V, E, r)$ *hidrası için Herkül hidranın yapraklarını istediği bir sırada kesmeye başlasın.*

Herkül'ün gücü

Önsav

Verilen kökten farklı bir $H = (V, E, r)$ hidrasının bir yaprağı kesildikten sonra oluşan hidra $H' = (V', E', r')$ olsun. O zaman $\alpha_{H'} < \alpha_H$.

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Kanıt

Verilen bir $H_0 = (V, E, r)$ hidrası için Herkül hidranın yapraklarını istediği bir sırada kesmeye başlasın. Herkül'ün n.adım sonunda elde ettiği hidra H_n olsun. Önsav gereği $\alpha_{H_0} > \alpha_{H_1} > \dots$ olacaktır.

Herkül'ün gücü

Önsav

Verilen kökten farklı bir $H = (V, E, r)$ hidrasının bir yaprağı kesildikten sonra oluşan hidra $H' = (V', E', r')$ olsun. O zaman $\alpha_{H'} < \alpha_H$.

Teorem (Paris-Kirby)

Herkül her stratejide hidrayı mağlup eder.

Kanıt

Verilen bir $H_0 = (V, E, r)$ hidrası için Herkül hidranın yapraklarını istediği bir sırada kesmeye başlasın. Herkül'ün n.adım sonunda elde ettiği hidra H_n olsun. Önsav gereği $\alpha_{H_0} > \alpha_{H_1} > \dots$ olacaktır. Ancak ordinaller iyi sıralı bir sınıf olduğundan sonsuz azalan bir ordinal dizisi olamaz. Demek ki yeterince büyük bir $n \in \mathbb{N}$ için H_n hidrası sadece kökten oluşmak zorunda.

Bölüm III: Goodstein teoremi

Pür b-tabanı temsili

- Bir $b \geq 2$ tam sayısı alalım.

Pür b-tabanı temsili

- Bir $b \geq 2$ tam sayısı alalım.
- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için n'nin pür b-tabanı temsili
  - eğer $b > n \geq 1$ ise, n'nin pür b-tabanı temsili n olarak,
  - eğer $n \geq b$ ise, n'nin b-tabanında geleneksel temsili

$$n = b^{m_k} c_k + b^{m_{k-1}} c_{k-1} + \cdots + b^{m_1} c_1$$

    olmak üzere bu temsildeki her pozitif m_i üssünün pür b-tabanındaki temsiliyle değiştirilmesiyle,

özyinelemeli bir biçimde elde edilir.

Pür b-tabanı temsili

- Bir $b \geq 2$ tam sayısı alalım.
- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için n'nin pür b-tabanı temsili
  - eğer $b > n \geq 1$ ise, n'nin pür b-tabanı temsili n olarak,
  - eğer $n \geq b$ ise, n'nin b-tabanında geleneksel temsili

    $$n = b^{m_k} c_k + b^{m_{k-1}} c_{k-1} + \cdots + b^{m_1} c_1$$

    olmak üzere bu temsildeki her pozitif m_i üssünün pür b-tabanındaki temsiliyle değiştirilmesiyle,

  özyinelemeli bir biçimde elde edilir.
- Örneğin, 116 sayısının pür 3-tabanı temsili

$$116 = 3^4 \cdot 1 + 3^3 \cdot 1 + 3^1 \cdot 2 + 2 = 3^{3^1+1} \cdot 1 + 3^{3^1} \cdot 1 + 3^1 \cdot 2 + 2$$

Pür b-tabanı temsili

- Bir $b \geq 2$ tam sayısı alalım.
- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için n'nin pür b-tabanı temsili
    - eğer $b > n \geq 1$ ise, n'nin pür b-tabanı temsili n olarak,
    - eğer $n \geq b$ ise, n'nin b-tabanında geleneksel temsili

    $$n = b^{m_k} c_k + b^{m_{k-1}} c_{k-1} + \cdots + b^{m_1} c_1$$

    olmak üzere bu temsildeki her pozitif m_i üssünün pür b-tabanındaki temsiliyle değiştirilmesiyle,

  özyinelemeli bir biçimde elde edilir.
- Örneğin, 116 sayısının pür 3-tabanı temsili

  $$116 = 3^4 \cdot 1 + 3^3 \cdot 1 + 3^1 \cdot 2 + 2 = 3^{3^1+1} \cdot 1 + 3^{3^1} \cdot 1 + 3^1 \cdot 2 + 2$$

  pür 2-tabanı temsili

  $$116 = 2^6 \cdot 1 + 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 = 2^{2^{2^1}+2^1} \cdot 1 + 2^{2^{2^1}+1} \cdot 1 + 2^{2^{2^1}} \cdot 1 + 2^{2^1} \cdot 1$$

Goodstein dizisi

- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $R_b(n)$ sayısı n'nin pür b-tabanı temsilindeki tüm b'lerin $b+1$ ile değiştirilmesiyle oluşan sayı olmak üzere $R_b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonunu ele alalım.

Goodstein dizisi

- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $R_b(n)$ sayısı n'nin pür b-tabanı temsilindeki tüm b'lerin $b+1$ ile değiştirilmesiyle oluşan sayı olmak üzere $R_b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonunu ele alalım. Örneğin,

$$R_3(116) = 4^{4^1+1} + 4^{4^1} \cdot 1 + 4^1 \cdot 2 + 2$$

- Her $n \in \mathbb{N}$ için n ile başlayan Goodstein dizisi $\mathcal{G}^n$ özyineleme olarak şu şekilde tanımlansın:

Goodstein dizisi

- Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $R_b(n)$ sayısı n'nin pür b-tabanı temsilindeki tüm b'lerin $b+1$ ile değiştirilmesiyle oluşan sayı olmak üzere $R_b : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonunu ele alalım. Örneğin,

$$R_3(116) = 4^{4^1+1} + 4^{4^1} \cdot 1 + 4^1 \cdot 2 + 2$$

- Her $n \in \mathbb{N}$ için n ile başlayan Goodstein dizisi $\mathcal{G}^n$ özyineleme olarak şu şekilde tanımlansın:
  - $\mathcal{G}_0^n = n$ ve
  - Eğer $\mathcal{G}_k^n > 0$ ise $\mathcal{G}_{k+1}^n = R_{k+2}(\mathcal{G}_k^n) - 1$,
  - Eğer $\mathcal{G}_k^n = 0$ ise $\mathcal{G}_{k+1}^n = 0$,

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_2 = R_3(3) = R_3(3^1) - 1 = 4^1 - 1 = 3$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_2 = R_3(3) = R_3(3^1) - 1 = 4^1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_3 = R_4(3) = R_4(3) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_2 = R_3(3) = R_3(3^1) - 1 = 4^1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_3 = R_4(3) = R_4(3) - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\mathcal{G}^3_4 = R_5(2) = R_5(2) - 1 = 2 - 1 = 1$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_2 = R_3(3) = R_3(3^1) - 1 = 4^1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_3 = R_4(3) = R_4(3) - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\mathcal{G}^3_4 = R_5(2) = R_5(2) - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\mathcal{G}^3_5 = R_6(1) = R_6(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\mathcal{G}^3$ dizisi

- $\mathcal{G}^3$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^3_0 = 3$
- $\mathcal{G}^3_1 = R_2(3) = R_2(2^1 + 1) - 1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_2 = R_3(3) = R_3(3^1) - 1 = 4^1 - 1 = 3$
- $\mathcal{G}^3_3 = R_4(3) = R_4(3) - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\mathcal{G}^3_4 = R_5(2) = R_5(2) - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\mathcal{G}^3_5 = R_6(1) = R_6(1) - 1 = 1 - 1 = 0$
- $\mathcal{G}^3$ dizisi 6 adım sonunda 0'a ulaşıyor.

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$
- $\mathcal{G}^4_2 = R_3(26) = R_3(3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2) - 1 = 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$
- $\mathcal{G}^4_2 = R_3(26) = R_3(3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2) - 1 = 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$
- $\mathcal{G}^4_3 = R_4(41) = R_3(4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 1) - 1 = 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1 - 1 = 60$

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$
- $\mathcal{G}^4_2 = R_3(26) = R_3(3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2) - 1 = 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$
- $\mathcal{G}^4_3 = R_4(41) = R_3(4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 1) - 1 = 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1 - 1 = 60$
- $\mathcal{G}^4_4 = R_5(60) = R_3(5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2) - 1 = 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 2 - 1 = 83$

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$
- $\mathcal{G}^4_2 = R_3(26) = R_3(3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2) - 1 = 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$
- $\mathcal{G}^4_3 = R_4(41) = R_3(4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 1) - 1 = 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1 - 1 = 60$
- $\mathcal{G}^4_4 = R_5(60) = R_3(5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2) - 1 = 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 2 - 1 = 83$
- ...

$\mathcal{G}^4$ dizisi

- $\mathcal{G}^4$ dizisinin ilk birkaç elemanı şu şekildedir:
- $\mathcal{G}^4_0 = 4$
- $\mathcal{G}^4_1 = R_2(4) = R_2(2^{2^1}) - 1 = 3^{3^1} - 1 = 26$
- $\mathcal{G}^4_2 = R_3(26) = R_3(3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2) - 1 = 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2 - 1 = 41$
- $\mathcal{G}^4_3 = R_4(41) = R_3(4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 1) - 1 = 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1 - 1 = 60$
- $\mathcal{G}^4_4 = R_5(60) = R_3(5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2) - 1 = 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 2 - 1 = 83$
- ...
- $\mathcal{G}^4$ dizisi $3 \cdot 2^{402653211} - 2$ adım sonunda 0'a ulaşıyor.

Goodstein teoremi

Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ *için öyle bir* $m \in \mathbb{N}$ *vardır ki* $\mathcal{G}^n_m = 0$ *olur.*

Goodstein teoremi

Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ki $\mathcal{G}_m^n = 0$ olur.

Goodstein fonksiyonu $\mathcal{G} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ şu şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{G}(n) = \min\{m \in \mathbb{N} : \mathcal{G}_m^n = 0\} + 1$$

Dolayısıyla

Goodstein teoremi

Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ki $\mathcal{G}_m^n = 0$ olur.

Goodstein fonksiyonu $\mathcal{G} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ şu şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{G}(n) = \min\{m \in \mathbb{N} : \mathcal{G}_m^n = 0\} + 1$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(1) &= 2 \\
\mathcal{G}(2) &= 4 \\
\mathcal{G}(3) &= 6 \\
\mathcal{G}(4) &= 3 \cdot 2^{402653211} - 2 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Goodstein teoremi

Kanıt (Ana fikir)

Her $b \geq 2$ *tam sayısı ve* $n \in \mathbb{Z}^+$ *için* n *sayısının bir pür* b*-tabanı temsilindeki tüm* b*'lerin* ω*'ya değiştirildiğinde elde edilen ordinal sayı* $f(n)$ *olmak üzere* $f_b : \mathbb{Z}^+ \to \epsilon_0$ *fonksiyonunu ele alalım.*

Goodstein teoremi

Kanıt (Ana fikir)

Her $b \geq 2$ *tam sayısı ve* $n \in \mathbb{Z}^+$ *için* n *sayısının bir pür* b*-tabanı temsilindeki tüm* b*'lerin* ω*'ya değiştirildiğinde elde edilen ordinal sayı* $f(n)$ *olmak üzere* $f_b : \mathbb{Z}^+ \to \epsilon_0$ *fonksiyonunu ele alalım.*

Bu durumda $f_2(\mathcal{G}_0^n) > f_3(\mathcal{G}_1^n) > f_4(\mathcal{G}_2^n) > \ldots$ *azalan bir ordinal dizisi olacaktır.*

Goodstein teoremi

Kanıt (Ana fikir)

Her $b \geq 2$ tam sayısı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için n sayısının bir pür b-tabanı temsilindeki tüm b'lerin ω'ya değiştirildiğinde elde edilen ordinal sayı $f(n)$ olmak üzere $f_b : \mathbb{Z}^+ \to \epsilon_0$ fonksiyonunu ele alalım.

Bu durumda $f_2(\mathcal{G}_0^n) > f_3(\mathcal{G}_1^n) > f_4(\mathcal{G}_2^n) > \dots$ azalan bir ordinal dizisi olacaktır. Ordinaller iyi sıralı bir sınıf olduğu için bu dizi sonlu adımda 0'a erişmek zorundadır. Demek ki yeterince büyük bir $m \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_m^n = 0$ olmalı.

Bölüm IV: Metamatematiksel bazı sonuçlar

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım.

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \quad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \quad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  - $\forall x \quad x + 0 = x$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \quad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  - $\forall x \quad x + 0 = x$
  - $\forall x \forall y \quad x + S(y) = S(x + y)$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \;\; S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \;\; S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  - $\forall x \;\; x + 0 = x$
  - $\forall x \forall y \;\; x + S(y) = S(x + y)$
  - $\forall x \;\; x \cdot 0 = 0$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \quad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  - $\forall x \quad x + 0 = x$
  - $\forall x \forall y \quad x + S(y) = S(x + y)$
  - $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$
  - $\forall x \forall y \quad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$

Peano aritmetiği

- Birincil derece mantıkta çalışalım. Dilimiz, $+$ ve $\cdot$ ikili işlem sembolleri, S bir tekli işlem sembolü ve 0 bir sabit sembolü olmak üzere $\{+, \cdot, 0, S\}$ kümesinden oluşsun.
- Peano aksiyomları (PA) aşağıdaki 6 aksiyom ve 1 aksiyom şemasından oluşur,
  - $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  - $\forall x \forall y \quad S(x) = S(y) \to x = y$
  - $\forall x \quad x + 0 = x$
  - $\forall x \forall y \quad x + S(y) = S(x + y)$
  - $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$
  - $\forall x \forall y \quad x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
  - Bu dildeki her $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülü için,

$$\forall y_1 \ldots \forall y_k \; ((\varphi(0, y_1, \ldots, y_k) \wedge$$

$$\forall x \; \varphi(x, y_1, \ldots, y_k) \to \varphi(S(x), y_1, \ldots, y_k)) \to \forall x \; \varphi(x, y_1, \ldots, y_k))$$

Sonlu kümeler kuramı

- ZF aksiyomlarından sonsuzluk aksiyomunun değiliyle değiştirilmesiyle oluşan aksiyom sistemine $\mathsf{ZF}_{\mathsf{sonlu}}$ diyelim.

Sonlu kümeler kuramı

- ZF aksiyomlarından sonsuzluk aksiyomunun değiliyle değiştirilmesiyle oluşan aksiyom sistemine $\mathrm{ZF}_{\mathrm{sonlu}}$ diyelim.
- $\mathrm{ZF}_{\mathrm{sonlu}}$ aksiyom sistemi sonlu matematik yapmak için kullanacağımız en doğal aksiyom sistemidir.

Sonlu kümeler kuramı

- ZF aksiyomlarından sonsuzluk aksiyomunun değiliyle değiştirilmesiyle oluşan aksiyom sistemine $\mathrm{ZF}_{\mathrm{sonlu}}$ diyelim.
- $\mathrm{ZF}_{\mathrm{sonlu}}$ aksiyom sistemi sonlu matematik yapmak için kullanacağımız en doğal aksiyom sistemidir.

Teorem

PA ve ZF_{sonlu} aksiyom kümeleri karşılıklı yorumlanabilirdir.

Sonlu kümeler kuramı

- ZF aksiyomlarından sonsuzluk aksiyomunun değiliyle değiştirilmesiyle oluşan aksiyom sistemine $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ diyelim.
- $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom sistemi sonlu matematik yapmak için kullanacağımız en doğal aksiyom sistemidir.

Teorem

PA ve $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom kümeleri karşılıklı yorumlanabilirdir.

- Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak PA ve $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom kümelerinin "aynı güçte" olduğu söylenebilir.

Sonlu kümeler kuramı

- ZF aksiyomlarından sonsuzluk aksiyomunun değiliyle değiştirilmesiyle oluşan aksiyom sistemine $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ diyelim.
- $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom sistemi sonlu matematik yapmak için kullanacağımız en doğal aksiyom sistemidir.

Teorem

PA ve $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom kümeleri karşılıklı yorumlanabilirdir.

- Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak PA ve $\mathrm{ZF}_{\text{sonlu}}$ aksiyom kümelerinin "aynı güçte" olduğu söylenebilir. Bu aksiyom sistemlerinin birinde kanıtlanabilir bir cümlenin diğer aksiyom sistemindeki karşılığı da kanıtlanabilirdir.

İki bağımsızlık sonucu

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Hidra teoremi, yani "Herkül her (özyinelemeli) stratejide hidrayı mağlup eder" cümlesi, PA içerisinde kanıtlanamaz.

İki bağımsızlık sonucu

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Hidra teoremi, yani "Herkül her (özyinelemeli) stratejide hidrayı mağlup eder" cümlesi, PA içerisinde kanıtlanamaz.

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Goodstein teoremi PA içerisinde kanıtlanamaz.

İki bağımsızlık sonucu

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Hidra teoremi, yani "Herkül her (özyinelemeli) stratejide hidrayı mağlup eder" cümlesi, PA içerisinde kanıtlanamaz.

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Goodstein teoremi PA içerisinde kanıtlanamaz.

Sonuç

Eğer ZF_{sonlu} tutarlıysa, Hidra teoremi ve Goodstein teoremi ZF_{sonlu} içerisinde kanıtlanamaz.

İki bağımsızlık sonucu

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Hidra teoremi, yani "Herkül her (özyinelemeli) stratejide hidrayı mağlup eder" cümlesi, PA içerisinde kanıtlanamaz.

Teorem (Paris-Kirby)

Eğer PA tutarlıysa, Goodstein teoremi PA içerisinde kanıtlanamaz.

Sonuç

Eğer ZF_{sonlu} tutarlıysa, Hidra teoremi ve Goodstein teoremi ZF_{sonlu} içerisinde kanıtlanamaz.

Dolayısıyla, Hidra teoremi ve Goodstein teoremi aslında sonlu nesnelerle ilgili önermeler oldukları halde sonsuz bir kümenin varlığını kabul etmeden kanıtlayamayacağımız teoremlere örnektir.

Beni dinlediğiniz için teşekkür ederim!

Referanslar

- Caicedo, Andrés Eduardo. Goodstein's function. Rev. Colombiana Mat. 41 (2007), no. 2, 381–391.
- Goodstein, R. L. On the restricted ordinal theorem. J. Symbolic Logic 9 (1944), 33–41.
- Kaye, Richard; Wong, Tin Lok. On interpretations of arithmetic and set theory. Notre Dame J. Formal Logic 48 (2007), no. 4, 497–510.
- Kirby, Laurie; Paris, Jeff. Accessible independence results for Peano arithmetic. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 4, 285–293.
- Rathjen, Michael. Goodstein's theorem revisited. Gentzen's centenary, 229–242, Springer, Cham, 2015.
- Sladek Will. The termite and the tower: Goodstein sequences and provability in PA, https://andrescaicedo.files.wordpress.com/2017/09/sladekgoodstein.pdf, accessed: 2023-05-30.
- Towsner, Henry. Goodstein's theorem, ϵ_0 and unprovability, https://www.sas.upenn.edu/ htowsner/GoodsteinsTheorem.pdf, accessed: 2023-05-30

Resimler için referanslar

- Kirby, Laurie; Paris, Jeff. Accessible independence results for Peano arithmetic. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 4, 285–293.
- Burghardt, Jochen, Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-normal_ svg.svg, accessed: 2023-05-30
- Moreau, Gustave, Art Institute of Chicago, 29 Mayıs 2023 tarihinde erişildi, https://www.artic.edu/artworks/20579/hercules-and-the-lernaean-hydra, accessed: 2023-05-29
- Louis Goodstein - Biography, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goodstein, accessed: 2023-05-30