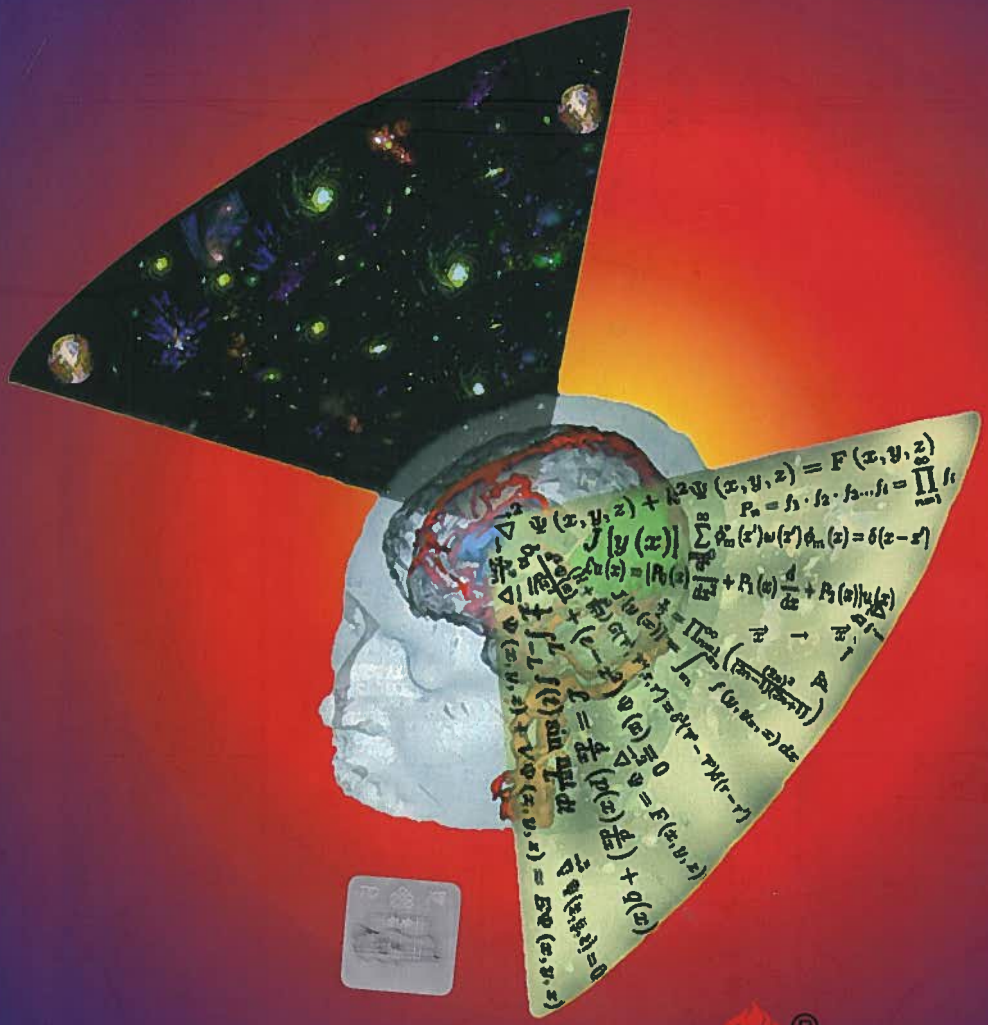
FEN ve MÜHENDİSLİK BİLİMLERİNDE MATEMATİK YÖNTEMLER

Genişletilmiş II. Baskı



SELÇUK BAYIN

D.K®

DERS KİTAPLARI A.Ş.

Bu kitabın amacı fen ve mühendislik alanlarında çalışacak yüksek lisans ve doktora öğrencilerinin, meslek yaşamlarında gerekli olacak matematik altyapısını sağlam bir şekilde oluşturmalarına yardımcı olmaktır.

Kitaptan araştırmacıların da yararlanması hedeflendiğinden her bölüm bağımsız olarak okunabilecek şekilde konusunun geniş bir özeti olarak yazılmıştır.

Konular çok geniş bir okuyucu kitlesi düşünülerek özenle seçilmiş ve ders kitabında olması gerektiği gibi bir bütünlük içinde sunulmuşlardır. Kitabın tarzı, fizikçi ve mühendislerin matematiğe yaklaşımı doğrultusunda formalizmden çok kullanıma ve uygulamaya yöneliktir. Konular, Matematik yöntemlerin çok disiplinli oluşlarını ön plana çıkaracak biçimde örneklerle işlenmektedir.

Bu kitap yüksek lisans ve doktora düzeyinde zorunlu olarak okutulan ' Matematiksel Yöntemler I&II ' dersleri için uygun ders kitabı özellikleri taşımaktadır. Kitabın tamamı üç yarı yılda okutulabileceği gibi modüler yapısı sayesinde isteyen öğretim üyeleri kendi konu başlıklarını seçerek ileri lisans, yüksek lisans ve doktora düzeylerinde tek veya iki yarı yıllık dersler de tasarlayabilir.

Bir önceki baskısına göre pek çok değişiklik ve yenilik içeren bu kitapta, her geçen gün yeni ve ilginç uygulama alanları bulan kesirli matematik ve yol integralleri konularında iki yeni bölüm de bulunmaktadır.

İÇİNDEKİLER

- Doğa ve Matematik
- Legendre Denklemi ve Polinomları
- Laguerre Polinomları
- Hermite Polinomları
- Gegenbauer ve Chebyshev Polinomları
- Bessel Fonksiyonları
- Gauss Denklemi ve Çözümleri
- Sturm-Liouville Teorisi
- Kompleks Değişkenler ve Fonksiyonlar
- Kompleks İntegraller, Seriler ve Analitik Süreklilik
- Kesirli Türev ve İntegraller: Diferintegraller
- Sonsuz Seriler
- İntegral Dönüşümler
- Varyasyon Hesabı
- İntegral Denklemler
- Green Fonksiyonları
- Green Fonksiyonları ve Yol İntegralleri

ISBN 975-443-397-6

9 799754 433974

İSTANBUL – 2004

FEN ve MÜHENDİSLİK BİLİMLERİNDE MATEMATİK YÖNTEMLER

Genişletilmiş II. Baskı

SELÇUK BAYIN

DERS KİTAPLARI A.Ş.

FEN ve MÜHENDİSLİK BİLİMLERİNDE MATEMATİK YÖNTEMLER

Prof. Dr. Selçuk Ş. Bayın
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fizik Bölümü
Ankara TÜRKİYE

Genişletilmiş II. Baskı
(2004)

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Ders Kitapları A.Ş.
İstanbul Ankara

Annem Nermin Bayın, babam Ömer Bayın
ile
Adalet ve Sumru'ya

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

ÖNSÖZ

İlk baskısı 2000 yılında yapılmış olan bu kitap, yaklaşık olarak son 15 yıldır ODTÜ Fizik Bölümünde vermiş olduğum 'Fizikte Matematik Yöntemler I & II' derslerinin notlarını temel almakla birlikte, öğrencilik yıllarımdan başlayan bilinçli bir birikimin ürünüdür. İngilizce olarak hazırlanıp verilmiş olan bu derslerin kitaba dönüşmesi de doğal olarak İngilizce yazıp yurtdışında bastırmak olacaktı. Ancak, ülkemizdeki Türkçe kaynak açığını gözönüne alınca, Türkçesine öncelik verdim. Kendi içinde bilimsel değer yargılarını henüz yerleştirememiş yasa devleti olmak (kitabına uydurmak) ile hukuk devleti olmak arasındaki farkın hala anlaşılmadığı ülkemizde, kısa vadede hiçbir şekilde karşılığını alamayacağımı bile bile böylesine emek ve bilgi yoğun bir projeye kalkışmak şüphesiz ki cesaret ve özveri ister. Ancak, ülkem insanına ve geleceğine inanç ve sevgi olmadan da yapılacak iş değildir. Kitabın Türkçe eğitim veren kurumların öğrencileri kadar, İngilizce eğitim veren kurumların öğrencileri tarafından da kullanılması (çoğunlukla fotokopilerinin de olsa) benim için bu kararın ne kadar 'yerinde' olduğunun ilk belirtileridir. Kitabın ikinci ve genişletilmiş baskısı ise, ikinci bir kitap yazmaya eşdeğer bir çabanın ürünü olmuştur. Kitabın içeriği ve baskı kalitesinin yükseltilmesi için bütün olanaklar zorlanmış, keyifle okunacak bir eserin ortaya çıkmasına çalışılmıştır.

Bu baskıda Kesirli Matematik ve Yol İntegralleri gibi, fizik ve mühendislik bilimlerinde her geçen gün yeni ve ilginç uygulamaları çıkan iki önemli konuda iki yeni bölüm ilave edilmiştir. Kitabın kullanımını kolaylaştırmak için, denklemlerin yazımından konuların alt başlıklar altında organizasyonuna kadar sayısız değişiklik yapılmıştır. Sturm-Liouville teorisi ve İntegral denklemlerle ilgili bölümler yeniden tasarlanıp yazılmış ve kitabın akıcılığını engelleyen durumlar olabildiğince ortadan kadırılmıştır. Geçen zaman içinde farkına vardığımız yazım hataları düzeltilmiştir. Kitabın dilinden denklemlerin göze hoş gelecek biçimde yazımlarına kadar özen gösterilmiş ve yapılan değişikliklerin sonucunda da sayfa adedi 317'den 464'e çıkmıştır. Bu yaşayan ve gelişmekte olan bir projedir. Tamamlanması için ise, büyük bir olasılıkla bir baskı daha gerekecektir. Kitap pek çok yönü ile mesajlar ve dersler içermektedir. Her ne kadar başta Türkçe kaynak açığı dediysek de hedefi çok daha kapsamlıdır. Umarım yolu açık olur.

Selçuk Ş. Bayın
bayin@metu.edu.tr
Ankara-TÜRKİYE
Ağustos 2004

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın Yönler

TEŞEKKÜRLER

Bu eserin hazırlanışı sırasında, pek çok kişinin görüş ve desteği yararlı olmuştur. Kesirli matematik ve yol integralleri ile ilgili bölümler yazılırken Prof. Dr. N.K. Pak'ın değerli görüş ve kritikleri, Prof. Dr. M. Durgut ile yapmış olduğumuz sohbetler sonucu ortaya çıkan fikirler ise, her zaman çok yararlı ve yol gösterici olmuşlardır. Prof. Dr.Y. Elerman ve Prof. Dr. Atalay Karasu ise, kitabın tamamını titizlikle okuyarak hataların en aza indirilmesinde çok büyük yardımları olmuştur. Teknik terimlerin Azerice karşılıkları için Prof. Dr. T. Aliyev'e teşekkür ederim. Ayrıca, Prof. Dr. M. Abak, Doç. Dr. Ç. Tuncay, Doç. Dr. Ayşe Karasu ve Y. Doç. Dr. B. Tekin'e de değerli görüşleri için teşekkür ederim. Bölüm başkanımız Prof. Dr. Sinan Bilikmen'e bu eserin oluşması ve yazımı aşamasında bana gerekli ortamın sağlanması konusunda verdiği desteğe teşekkür ederim. Bu arada öğrencilerim de dahil olmak üzere, pek çok kişinin bana dolaylı ya da dolaysız yoldan yardımı olmuştur, hepsine tekrar teşekkür ederim.

KİTAP HAKKINDA

Fen bilimlerinde temel matematik eğitimi genelde üç ana kısıma ayrılır. Lisans eğitiminin giriş bölümü olarak adlandıracağımız ilk üç yıl, öğrenciler matematik (Calculus), ileri matematik (Advanced calculus-Kaplan), kompleks analiz (Churchill), diferansiyel denklemler (Ross), lineer cebir veya giriş düzeyinde matematiksel fizik (Hildebrand veya Boas) derslerini alırlar. Daha sonra da ileri lisans denilen 4. sınıf düzeyinde ve sonunda da lisansüstü düzeyde yüksek lisans ve doktora dersleri gelir. Orta Doğu Teknik Üniversitesinde ise, 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler I & II' dersleri; biri yüksek lisans ve diğeri de doktora dersi olmak üzere iki yarı yılda verilmektedir. Dünyada bir çok üniversitede bu iki ders yüksek lisans ve doktora öğrencilerine de zorunlu olmakla birlikte, ileri lisans dersi olarak 400'lü kodlarla da açılabilmektedir.

Bu kitabın hedef kitlesi, fen eğitimlerinin ilk üç yılında yukarıda adlarını verdiğimiz dersler ve kitaplar düzeyinde bir matematik olgunluğa erişmiş 4.sınıf öğrencileri ile araştırmacı olmaya ilk adımlarını atmış yüksek lisans ve doktora düzeyindeki fizik ve mühendislik öğrencileridir. Amacı ise, öğrencilerin meslek yaşamlarında gerekli olacak matematik altyapıyı, sağlam bir şekilde oluşturmalarına yardımcı olmaktır. Kitaptan araştırmacıların da yararlanması hedeflendiğinden her bölüm bağımsız olarak da okunabilecek şekilde yazılmıştır.

Konular çok geniş bir okuyucu kitlesinin ihtiyaçları göz önüne alınarak dikkatle seçilmiş ve ders kitabında olması gerektiği gibi, bir bütünlük içerisinde sunulmuşlardır. Kitabın üslubu, fizikçi ve mühendislerin matematiğe yaklaşımı doğrultusunda formalizmden çok kullanıma ve uygulamaya yöneliktir. Bir zamanlar klasik ve kuantum fiziğinin alt yapısını oluşturmak üzere sadece fizik bölümlerinde verilen bu dersler, çok disiplinli alanların ve dolayısı ile de talebin artması ile artık mühendislik ve matematik bölümleri tarafından da tasarlanıp verilen popüler dersler olmuşlardır.

Bölümlerde verilen örnekler özenle seçilmiş olup, konuların işlenişinde ve kavramların tanıtılmasında önemli rol oynarlar. Her bölümün arkasında sınırlı sayıda problem verilmiştir. Bu problemler ve örneklerden meraklı öğrenciler kolaylıkla başka problemler türetebilirler. Araştırmacı olmak isteyenler için tavsiye ettiğimiz yöntem de budur. Konular işlenirken kuantum mekaniği, termodinamik, mekanik ve elektromanyetik gibi çok değişik alanlardan örnekler seçilmiştir. Konuların fizik ve mühendislik açısından özellik gösteren kısımları çok geniş bir okuyucu kitlesi düşünülerek herkesin anlayabileceği tarzda yazılmıştır.

Kitabın en önemli özelliklerinden bir tanesi de denklemler kalıplar halinde algılandığında okunabilir bir matematik kitabı olmasıdır. Bu benim ders verme tarzımın da bir parçasıdır. Öğrencilerden ilk aşamada beklenen (derste veya kitabı ilk okuyuşta) denklemlerin ayrıntılarına girmeden, kavramsal çerçeveyi oturtmalarıdır. İkinci aşama ise, denklemlerin bizzat içlerine girip ayrıntıların anlaşılmasıdır. İşte bu noktada anlaşılmayan konular anlaşıl-

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

maya başlanacak, ortaya yeni sorular ve o sorulara da cevaplar aranırken yeni problemler ve fikirler çıkacaktır.

Bu kitabın, ders kitabı olmanın yanında bir amacı da çok disiplinli alanlarda çalışanlara karşılaşacakları problemleri çözmede yardımcı olacak yöntemleri sunmaktır.

Kitabın kullanımını kolaylaştırmak için, bölümler olabildiğince alt başlıklar yardımı ile düzenlenmiştir. Okura önerimiz, kitabın önce içindekiler kısmı ile tanışması ve kitabın bütününe hakim olmasıdır. Elimizden geldiğince arı bir Türkçe kullanmaya dikkat ettik. Ancak, kitaptan Türkçe eğitim veren üniversitelerimiz ile İngilizce eğitim veren kurumların öğrencilerinin de yararlandığını görünce, yerleşmiş bazı teknik kavramların Türkçeleştirilmesi konusunda fazla da ısrarcı olmadık. Anlaşılabilirliği her zaman ön plana aldık ve gerek Türkçe ve gerekse İngilizce eğitim almış kişiler arasında kopukluk yaratmamaya çalıştık. Sonuçta İngilizce eğitim alsalar da bu kişilerin çoğu yarın Türkçe eğitim veren kurumlarda çalışacaklar, Türkçe eğitim alanlar da İngilizce yayın yapıp, İngilizce dergileri takip edeceklerdir. Gerektiği zaman okuyucuya yardımcı olmak üzere, kitabın arkasına bir de Türkçeden İngilizceye ve İngilizceden Türkçeye sözlük ekledik. İlk sütun kitapta kullandığımız kelimelerden oluşmakta ve karşılarında İngilizce karşılıkları verilmektedir. Üçüncü sütun ise, varsa başkaları tarafında kullanılmış veya diğer Türkçe kelimeler ve dördüncü sütunda da bulabildiğimiz kadarı ile Azerice karşılıkları vardır. Kaynaklar bölümüne elektronik ortamda yararlanılabilecek, eğitim ve araştırma amaçlı siteler de eklenmiştir.

KİTABIN ÖZETİ

Giriş bölümünden sonra gelen ilk beş bölümde genelde karşılaşılan özel fonksiyonlar uygulama alanları ile birlikte ayrıntılı bir biçimde anlatılır.

Yedinci bölümde fizik ve mühendislikte karşılaşılan ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin ve çözümlerinin ki bunlara özel fonksiyonlar da dahildir, Gauss hipergeometrik denklemi ve fonksiyonları cinsinden parametrik bir şekilde nasıl yazılabileceği gösterilir.

Sekizinci bölümde özel fonksiyonlar arasında gördüğümüz benzerlikleri, Sturm-Liouville teorisinin çatısı altında diferansiyel operatörler için özdeğer problemi olarak sistemli bir şekilde inceleriz.

Dokuz ve onuncu bölümler ise, kompleks analiz yöntemlerinin fizik ve mühendislikte uygulamalarını anlatır. Analitik fonksiyonlar teorisi, haritalamalar, Schwarz-Christoffel dönüşümleri ve bunların ısı transferi, elektrostatik ve akış problemlerine uygulanışları, seriler, analitik süreklilik ile bazı belirli integrallerin kompleks yöntemlerle alınması işlenen ilginç konular arasındadır.

Onbirinci bölüm, kitabın özel bölümlerinden bir tanesidir ve kesirli türev ve integrallerin işlendiği kesirli matematiğe ayrılmıştır. Tarihi açısından oldukça eski olan bu ilginç konu, son zamanlarda gittikçe artan bir şekilde fizik ve mühendislik alanlarında çalışan araştırmacıların gündemine

girmiştir. Bu bölümde kesirli matematiğin temel özellikleri, bazı uygulamaları ve teknikleri anlatılmaktadır. Öğrenciler kadar bu konuyu merak eden araştırmacılar için de kapsamlı bir özet olan bu bölüm, kesirli matematiğe uygun bir başlangıç noktası olacaktır.

Onikinci bölümde uygulamalar açısından çok önemli olan seriler kapsamlı bir biçimde incelenir. Önce serilerin yakınsaklıklarının nasıl kontrol edileceği ve eğer yakınsaklarsa, toplamlarının nasıl bulunacağı anlatılır. Asimtotik seriler, sonsuz çarpımlar ile fizikte karşılaşılan bazı ıraksak serilerden nasıl anlamlı sonuçlar çıkarılabileceği de işlenen diğer ilginç konular arasındadır.

Onüçüncü bölümde önce genel integral dönüşümleri ve sonra da kapsamlı bir biçimde Fourier ve Laplace dönüşümleri uygulama alanları ile anlatılır.

Ondördüncü bölümde varyasyon hesaplarının türleri, özdeğer ve özfonksiyonların yaklaşık olarak varyasyon tekniği ile nasıl bulunabileceği gösterilir.

Onbeşinci bölüm, İntegral denklemlere ayrılmıştır. İntegral denklemlerin sınıflandırılmasından sonra, çözüm teknikleri ve Hilbert-Schmidt teorisi adı altında integral operatörler için özdeğer problemi işlenir.

Onaltıncı bölüm, fen bilimlerinde çok geniş kullanım alanı olan ve kitabın geri kalan bölümlerinde gördüğümüz bir çok yöntemin kullanıldığı bir bölümdür. Zamandan bağımsız ve zamana bağlı olarak iki başlıkta inceleyeceğimiz Green fonksiyonlarının özellikleri, sınır şartları, bulunuşları ve özdeğer problemleri ile ilgileri işlenen ilginç konular arasındadır.

Onyedinci bölüm kitabın bir başka özel sayılması gereken yol integralleri ile ilgili bölümüdür. Fizik ve mühendislikte yoğun uygulamaları olan bu ilginç tekniği, önce doğadaki pek çok olayın prototipini oluşturan Brown hareketine uygulaması ile tanıtacağız. Sonra da Feynman yol integrali adı altında kuantum mekaniğine uygulamalarını göreceğiz.

DERS ÖNERİLERİ

Kitabın tamamı iki yarı yılda bitirilemeyecek kadar çok konu içermektedir. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fizik bölümünde yüksek lisans programı için zorunlu ders olarak 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler I' dersinde ilk 10 bölüm okutulmaktadır. Bunun devamı olan ve doktora programının zorunlu dersi olan 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler II' dersinde ise, 12-16. bölümler okutulur

İleri lisans düzeyi olan 4. sınıfta, ilk yedi bölüm özel fonksiyonlar üzerine bir ders için başarı ile kullanılmaktadır. Bu ders özellikle master ve doktoraya devam edecek öğrenciler için alacakları Jackson düzeyinde elektromanyetik ve Mertzbacher düzeyinde kuantum derslerine çok yardımcı olmaktadır.

Ayrıca, 12-16. bölümlerden uygun alt başlıklar seçilerek tek yarı yıllık bir başka ileri lisans dersi için de kullanılmıştır.

14-17. bölümler yüksek lisans/doktora düzeyinde Green fonksiyonları üzerine tek yarı yıllık bir ders olarak kullanılabilir.

Kesirli matematik konusundaki 11. bölüm, öğrencilere verilecek projelerle desteklenerek tek başına yarı yıllık seçmeli bir ders olarak verilebilir. Kay-

Fizik ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı
Selçuk Ş. Bayın

naklar arasında verdiğimiz internet sitelerinden projeler için yararlanılabilir.

Bunların dışında olarak da bazı bölüm ve alt bölümler seçilerek, gerek ileri lisans ve gerekse yüksek lisans/doktora düzeylerinde tek veya iki yarı yıllık dersler tasarlamak mümkündür.

1

DOĞA ve MATEMATİK

İnsanoğlu doğaya gözlerini açtığı ilk anda, önce etrafında olup biten ve sayılamayacak kadar değişik olayın varlığı ile ürpermiş, sınırlı zekası ve fizik kapasitesi ile de böyle bir evrende nasıl yaşamını sürdüreceği endişesine kapılmış olmalıdır. Ancak, zaman ilerledikçe evrenin hiç de ilk göründüğü gibi acımasız olmadığını, birbirinden farklı bunca olayın, nasıl olduğunu tam olarak ilk anda çıkaramasa da belli bir düzen içerisinde olduğunu farketmiştir: Güneş belli aralıklarla doğup batmaktadır. Yoluna çıkan büyük taşlara tekme attığı zaman hem ayağı acımakta hem de taşlar çok uzağa gitmemektedir. Küçük taşlar ise, canını yakmadığı gibi onları aynı darbelerle çok daha uzağa atabilmektedir. Çevresinde incelediği alan büyüdükçe bu düzenin aynı zamanda güvenilebilir bir düzen olduğunu görür. Küçük taşlar dün olduğu gibi bugün de ve orada olduğu gibi başka bir yerde de canını yakmamaktadır. Bugün kaybolan güneş bir süre sonra tekrar ortaya çıkıp onu aydınlatıp ısıtmaktadır. Zaman içerisinde insanoğlu toplum içinde yaşamayı öğrenir, yaptığı gözlemlerin sayısı ve evrenin düzeni hakkındaki tespitleri artar. Hatta, bazı gözlemlerini sabırla nesilden nesile aktarıp biriktirerek, sonuçlarını İngiltere'de StoneHenge'de olduğu gibi onlara tarım zamanlarını gösteren bir öncü bilgisayar yapmakta bile kullanır.

İnsanoğlu için doğayı tanımak, bu hayranlık uyandıran sistem içinde kendi yerini anlamak, öğrenmek adeta içgüdüsel bir istektir. Ancak, insanoğlu bir süre sonra evrende var olan bu düzeni anlamak ve ifade etmekte günlük konuşma dilinin yetersiz kaldığını görür. Bu iş için kendine has ve evrenle uyumlu bir mantığı olan ve çok daha zengin diyebileceğimiz bir dile ihtiyaç vardır. İşte bu noktada matematik ve fizik tanışmaya başlar. Buna bir de hür insan beyninin en önemli buluşlarından biri diyebileceğimiz koordinat sistemi kavramı eklenince, bu ilişkinin temeli hazır olur. Koordinat sisteminin özdeki önemi bize evrendeki olayları sayılara indirgememizi sağlamasındadır. Artık çevremizde gözlemlediğimiz ve varlığını her yerde hissettiğimiz düzeni, olayları temsil eden sayılar arasında matematik kavramları kullanarak çok daha ekonomik ve kullanışlı bir biçimde ifade etmek mümkün olacaktır. Yürürken ayağımızın çarptığı ve önümüzde taklalar atarak giden bir taşın hareketinden, güneş ve ay tutulmalarına, gezegen ve yıldızların hareketlerine kadar bir çok olayı ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olan Newton'un dinamik yasası:

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \tag{1.1}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

ile

$$\overrightarrow{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\widehat{e}_r \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilen yerçekimi kuramını kullanarak açıklamak mümkündür. Newton yasalarının tarihi, kolay kolay her teoriye kısmet olmayacak başarı ve zafer öyküleriyle doludur. Bunlardan en dramatik olanlarından biri de Neptün gezegeninin keşfidir. O tarihlerde Uranüs gezegeninin teorik olarak hesaplanan yörüngesinden bazı küçük sapmalar gözlemlenir. Uzun zaman bu sapmaların Satürn ve Jüpiter gibi komşu gezegenlerin etkilerinden olduğu sanılır. Ancak, yapılan bütün titiz hesaplara rağmen diğer gezegenlerin etkisi çıkarıldıktan sonra da açıklanamayan bir miktar sapma kaldığı görülür. Bunun üzerine bilim adamları Uranüs'ün dışında bir başka gezegenin varlığından şüphelenirler ve açıklanamayan sapmanın miktarından yola çıkarak, bu gezegenin kütlesini ve yörüngesini hesaplarlar. Bu yeni gezegene bir de isim konur: Neptün. Sıra onu gözlemlemeye gelmiştir. Teorinin belirlediği zamanda teleskoplar önceden belirlenen koordinatlara çevrildiğinde: "İşte! Neptün oradadır". Newton yasaları 19. yüzyılın başlarında elektromanyetik olayları açıklayan Maxwell yasaları ile tamamlanınca, Bertrand Russell gibi zamanın ünlü düşünürleri bile, teorik fiziğin artık sonuna gelindiğini ve bundan sonra eldeki yasalarla prensipte açıklanamayacak doğa olayının kalmadığını düşünmeye başlarlar.

Aslında, gerek Newton denklemleri ve gerek de Maxwell denklemleri için genelde kullanılan doğa yasası tabiri yerine belli varsayımlar ve kavramlar üzerine inşa edildikleri için teori veya model tanımları çok daha uygun olacaktır. Zaman zaman bilimde bir takım varsayımlar zorunluluk karşısında ilerleme kaydetmek için veya problemleri basitleştirerek çözülebilir hale getirmek için yapılmaktadır. Fakat asıl önemli olan, bizim farkına varmadan doğa hakkındaki önyargılarımızın teorilerimiz içine sızmasıdır. Bunlar bize o kadar doğal gelirler ki, yanlışlıklarının veya ancak özel durumlarda geçerli olduklarının anlaşılması için aradan nesiller geçmesi gerekebilir. Farkına varıldıklarında ve doğru kavramlarla değiştirildiklerinde ise, doğa anlayışımızın temelinde büyük depremlere yol açarlar. Newton'un dinamik teorisinin de temelleri, 19. asrın sonlarında parçacıkların yer ve momentumlarının aynı anda tam olarak belirlenemeyeceği, ışığın dalga özelliğinin yanında tanecik özelliğinin de olduğu, parçacıkların ise, bazı durumlarda dalga özellikleri gösterdiği gibi, o zamana kadar insanların hayal bile etmekte zorlandığı bir dizi yeni kavramın, kuantum mekaniği adı altında yeni bir teoriyle hayata geçirilmesi ile sarsılır. Newton'un yerçekimi teorisi ise, önce üzerine inşa edildiği *mutlak uzay* kavramının doğru olmadığının ortaya çıkması ve yerini *uzay-zaman* kavramına bırakması ile sarsılır, sonra da yerini *uzay-zamanının* eğriliğine dayanan *Einstein gravitasyon* teorisine bırakır.

Zaman içinde doğayı anlamak için ihtiyaç duyduğumuz matematiksel kavramlar gelişir ve çeşitlenir. Ancak, bir gerçek hiç değişmez: *Matematik*

bir sayılar bilmidir ve doğa da matematik ile anlaşılmak isteniyorsa önce bir şekilde sayılara indirgenmelidir. Nedir bu matematik ile doğa arasındaki gizemli ilişki? Neticede matematikte tamsayıların dışındaki sayılar, hür insan düşüncesinin ürünüdürler. Evet, bazı matematiksel yapılar doğadaki düzeni tanımlamakta oldukça yararlıdırlar ancak, geliştirilmiş her matematiksel yapının da entellektüel açıdan bize ne kadar çekici ve doyurucu gelirse gelsin, mutlaka fizikte bir yerde işe yarayacağı diye bir şart da yoktur. Neticede doğanın bütünü hakkındaki bilgimiz, onu mantığımız ile anlayıp çözemeyeceğimiz kadar sınırlıdır. Bazen fizikçiler kullandıkları matematiğin etkisinde o kadar kalırlar ki farkına varmadan doğadan da uzaklaşırlar. Matematiksel açıdan bazı teorilerin bize çok mantıklı ve cazip gelen uzantılarının doğada tercih edilmemiş olmaları bizi sinirlendirip şaşırtmamalıdır. Doğa hakkındaki bilgilerimizi mevcut teorilerin matematiksel yapılarının bize mantıklı gelen genelleme ve geliştirmeleriyle arttırabilseydik, fizikçi olarak işimiz çok kolay olurdu.

1.1 Doğa Yasaları

Eskiden *doğa yasası* olarak elimizde sadece *Newton'un dinamik yasası* ve *Gravitasyon teorisi* vardı, buna *Maxwell denklemleri* de eklenince fizikte kısa bir süre de olsa, doğada olan her şeyin ve hatta kendisinin, proton, nötron, elektron ve fotonlarla ve bunların aralarındaki iki temel etkileşmeyle açıklanabilme umudunun belirdiği bir yapı ortaya çıkar. Ancak, kısa bir süre sonra evrende temel parçacık tanımına uyan bir sürü başka parçacık bulununca ve temel denilen etkileşmelere zayıf ve kuvvetli etkileşmeler de katılınca tablo biraz karışır. Bugün ise, sicim teorisi ile ilgili fizikçilerin umudu, herşeyin teorisi olacağına inandıkları bir yapı altında bütün temel etkileşmeleri toplamaktır. Bu konuda bir anlamda başarılı olunsa bile, görünen odur ki; Newton, Maxwell ve Einstein teorilerinin matematiksel ifadelerindeki basitliği ve zerafeti yakalamak mümkün olmayacaktır. Nelere *doğa yasaları* diyeceğimiz sorusuna gelince: Benim görüşüme göre doğa yasası diyebileceğimiz genel ifadeler veya kurallar, gittikçe karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olan ve fizikçilerin kendilerinin bile takip etmekte zorlandığı bir takım denklem yumaklarından çok, basit ve az sayıda olan ve

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \tag{1.3}$$

şeklinde verilen Heisenberg belirsizlik prensibi ile

$$\delta S(\text{ evrenin toplam entropisi}) \geq 0 \tag{1.4}$$

olarak ifade edilen termodinamiğin ikinci yasası gibi eşitsizlikler şeklinde verilen ifadeler olacaktır. Diğerleri ise, belli varsayımlarla ve kavramlarla

Bu web sayfasındaki bilgilerin her hakkı Selçuk Ş. Bayın'a aittir. 2004 II. baskı

doğadaki bazı olayların nasıl olduğunu anlamamızda yararlı olan ve zaman içerisinde gelişmeye ve değişmeye açık modeller veya teorilerdir. Başarıları ise, basitlikleri ve kapsamları oranında olacaktır. Ancak, fizikte gelişme geçmişin başarılı teorilerinin tamamen yok edilip, yenileriyle değiştirilmeleri şeklinde de olmaz. *Newton'un gravitasyon teorisi, Einstein'ın gravitasyon teorisi* ile içindeki bazı kavramlarla birlikte kapsamlı bir değişime uğramasına rağmen, bugün birçok olayı anlamak ve çalışmakta hala Einstein teorisinden çok daha pratik ve kullanışlıdır. Uzay mutlak olmasa da ışık hızından çok düşük hızlarda mutlak gibi davranmaktadır ve güneş sistemi gibi sistemlerde uzay zamanın eğriliğinin neticelere etkisi yok sayılabilir düzeylerde kalmaktadır.

1.2 Matematik ve Doğa

Matematiğin doğayı anlama ve anlatmada çok yararlı bir dil olduğunu söylemiştik, matematik aynı zamanda da hür insan iradesinin ürünü olan fikirlerin bilimidir. Bu fikirler ise, doğal olarak insan beyninde bir takım fiziksel değişimler ve oluşumlar sonucu ortaya çıkmaktadır. Bugün insanların gözlerinin ve saçlarının rengi gibi somut özelliklerinin yanında birçok davranış biçimlerinin de genlerine bağlanmakta olduğunu görmekteyiz. Hatta, DNA molekülleri içinde bu tür özelliklerden sorumlu kısımlar belirlenmekte ve arzu edilmeyen özelliklerin çıkarılması veya başkaları ile değiştirilmesi imkanları araştırılmaktadır. Bu konuda henüz yolun çok başında olunmakla birlikte insanoğlu genetik yapısını anlama ve kontrol etme konusunda, en azından ilk ve çok önemli adımları atmıştır. Fikirler aleminin ise, bir takım temel fiziksel olaylar cinsinden anlaşılması ve sınıflandırılması, insan beyninin bugün olduğundan çok daha üst düzeyde bir anlayışını gerektirecektir. İşte o zaman, özellikle (bilimsel, ekonomik, toplumsal, kurumsal veya bireysel) kriz dönemlerinde veya tıkanıklıklarda ihtiyaç duyduğumuz ve bugün için işleyişi tesadüflere kalmış olan yaratıcılığımızı, çok daha değişik bir boyutta ve yoğunlukta kullanma olanağı bulacağız. Bugün için şüphesiz ki bunun çok uzağındayız. Ancak, fikirlerin de temel yapıtaşı rolü üstlenen bir takım doğa olayları cinsinden ifadesi ve anlaşılması olasılığı ise, doğa ve matematik arasındaki ilişkinin aslında iki yönlü olabileceğinin belirtisidir.

1.3 Doğa ve İnsan

Nedir insanın doğadaki yeri ve rolü? İnsanoğlu daha ilk andan itibaren bu sorunun cevabını merak etmiştir. Bilimin bugün geldiği nokta itibarı ile kendimizi bu sorunun cevabına daha yakın hissedebilir miyiz? Bazı bilim adamlarının iddia ettiği gibi herşeyin teorisi bulunursa, bu soruların cevabı

da kendiliğinden ortaya çıkar mı? Bilim adamı olsun olmasın, herkes bu tür soruları kendine sormuş ve yine kendince bir cevap aramıştır.

Öyle bir uygarlık düşünelim ki evrenleri Shakespeare'in bütün eserlerinden oluşmuş olsun. Bu uygarlığın bireyleri de Shakespeare'in eserlerindeki karakterlerden, insan ilişkilerinden, dramdan büyük ölçüde etkilenmiş ve bütün bunların nedenini ve kaynağını merak ederlermiş. Günün birinde içlerinden bir bilim adamı bu eserlerin sonlu sayıda değişik kelimeden oluştuğunu iddia etmiş ve bir de sözlük hazırlamış. Deneyciler derhal işe koyulup bulabildikleri her cümleyi, her paragrafı incelemeye almışlar. Zamanla bu sözlüğe ufak tefek ekleme veya çıkarmalar olmuş ama, Shakespeare evreninin sonlu ve sayılabilir sayıda kelimeden oluştuğu gerçeği değişmemiş. Bir süre sonra bir başka bilim adamı, bu eserlerin 27 harf ve belli sayıda noktalama işaretinden oluştuğu gibi bir başka ilginç model ortaya atmış. Deneycilerin yoğun testlerinden sonra bu model de herkesi çok etkilemiş ve bu bilim adamına tarihlerinin en büyük nişanlarını vermişler. Doğal olarak bu uygarlık, bu şekilde gelişmeye devam etmiş ve gözlemlerinin kalitesi arttıkça da gramer kurallarını keşfetmeye başlamışlar. Hemen anlaşılacağı gibi içinde yaşadığımız evren ile Sheakspeare evrenini kıyaslarsak, onların gramer kurallarının bizim doğa yasalarımıza karşı geldiğini görürüz. Bilindiği gibi gramer kuralları bize bir eserin neden yazıldığını ve özündeki güzellikleri tek başına veremez. Ancak, gramer kurallarını bilmeden de bir eseri okursanız pek birşey anlamazsınız.

Daha önce söylediğimiz gibi, bilim adamı olsun olmasın herkes evrenin neden var olduğunu, insan olarak da bu hayranlık uyandıran sistem içerisindeki yerini mutlaka merak etmiş ve *kendince* de bir çözüm aramış ve hatta bulmuştur. Burada önemli olan, bu tür soruların tek bir cevabının olamayacağını görmek ve yukarıdaki gibi benzetmelerle gerçeğin bir çok yüzünden belki de ancak bir tanesinin yakalanabileceğini kavramaktır. Bir başkası da pekala başka bir benzetme ile karşımıza çıkabilir. Ünlü fizikçi Paul Davies, fizikteki simülasyon deneylerinin başarısından yola çıkarak, evrenin kendisinin bir büyük bilgisayar olduğu benzetmesini yapmıştır. Burada evren içindeki madde bilgisayarın donanımını; kablosu, transistörü, ekranı vs. temsil etmekte, yazılımı ise, doğa yasalarına karşı gelmektedir. Asıl soru ise, bu bilgisayarı kimin yaptığı ve neyi hesaplamak veya ne için kullandığıdır.....

„Doğanın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır."
ALBERT EİNSTEİN

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

2

LEGENDRE DENKLEMİ ve POLİNOMLARI

Fizik ve mühendislik alanında karşılaşılan diferansiyel denklemlerden pek çoğu

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + k^2(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = F(\vec{r}) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tür denklemlere aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

1. $k(\vec{r})$ ve $F(\vec{r})$ 'nin sıfır olduğu durumlarda Laplace denklemi elde edilir:

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) = 0. \tag{2.2}$$

   Bu denklem elektrostatik, magnetostatik, düzgün akış problemleri, yüzey dalgaları, ısı transferi ve gravitasyon gibi pek çok değişik konuda karşımıza çıkar.

2. Laplace denkleminin sağ tarafı sıfırdan farklı olursa Poisson denklemi elde edilir:

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r}). \tag{2.3}$$

   Sağ taraftaki terim genelde yüklerin, kayıp veya kaynakların varlığını gösterir.

3. Helmholtz veya dalga denklemi ise,

$$\vec{\nabla}^2 \Psi \pm k^2\Psi(\vec{r}) = 0 \tag{2.4}$$

   şeklinde verilir, burada k bir sabittir.

4. Bu tür denklemlere bir başka önemli örnek de zamandan bağımsız Schrödinger denklemidir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \tag{2.5}$$

   Bunu (2.1) denklemi ile karşılaştırırsak, $F(\vec{r})$ sıfır ve k parametresi de

$$k^2(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}\,[E - V(\vec{r})\,] \tag{2.6}$$

   olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Bütün bu denklemlerin ortak özellikleri: Doğrusal, ikinci dereceden ve kısmi türevli diferansiyel denklem olmalarıdır. Analitik yaklaşımlar arasında seriler, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler en çok kullanılan yöntemlerdir. Analitik tekniklerin başarısız olduğu durumlarda ise, Runge Kutta gibi sayısal yöntemlere başvurulur. Bilimin değişik alanlarında karşılaşabileceğimiz bu denklemlerin herhangi bir alanda bulunmuş çözümünü, başka bir alana uyarlarken sınır şartlarının farklılık gösterebileceğine dikkat etmelidir. Elektrostatik problemlerinde Laplace denklemini çözerken kullanacağımız sınır şartları, düzgün akış problemlerinde anlamlı olmayacaktır. Elektrostatikte elektrik alanları yüzeylere dik olurken, akış problemlerinde hız alanı yüzeyleri takip edecektir.

2.1 Legendre Denklemi

Bu bölümde (2.1) denklemini küresel kutupsal koordinatlarda ve k parametresinin sadece radyal koordinat r'ye bağlı olduğu durumlarda değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanarak çözeceğiz. Potansiyel enerjinin

$$V(\overrightarrow{r}) = V(r) \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabildiği merkezcil kuvvetler için, zamandan bağımsız Schrödinger denklemi bu tür denklemlere çok önemli bir örnek oluşturur. İlk etapta $\Psi(r,\theta,\phi)$ çözümünün r ve (θ,ϕ) değişkenlerine bağımlılığını ayıralım:

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)\,Y(\theta,\phi)\,. \tag{2.8}$$

Bu çözüm sistemdeki r bağımlılığının (θ,ϕ)'den yani, yönden bağımsız olduğunu göstermektedir. Bunu (2.5) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(R(r)\,Y(\theta,\phi)\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R(r)\,Y(\theta,\phi)\right)\right]$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(R(r)\,Y(\theta,\phi)\right)+k^2(r)\,R(r)\,Y(\theta,\phi)=0 \tag{2.9}$$

bulunacaktır. Bu denklemi

$$\frac{r^2}{R(r)\,Y(\theta,\phi)} \tag{2.10}$$

ile çarpıp, r bağımlılığını sol ve (θ,ϕ) bağımlılığını da sağ tarafta toplarsak,

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right]+k^2(r)\,r^2 \tag{2.11}$$

$$=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y(\theta,\phi)\right]-\frac{1}{\sin^2\theta Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}$$

elde ederiz. r ve (θ,ϕ) birbirlerindenden bağımsız değerler alabildiklerinden, bu denklemin bütün r ve (θ,ϕ) değerleri için sağlanması ancak her iki tarafınında aynı sabite eşit olması ile mümkün olacaktır. Bu sabite ayrılma sabiti denir ve λ ile gösterirsek, (2.11) denklemi aşağıdaki iki denkleme indirgenir:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+r^2k^2(r)\,R(r)-\lambda R(r)=0, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda Y(\theta,\phi)=0. \tag{2.13}$$

$R(r)$'nin sağladığı (2.12) denklemi, sıradan bir diferansiyel denklemdir. İkinci denklemde ise,

$$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\phi) \tag{2.14}$$

şeklinde tekrar ayrılabilir bir çözüm dener ve ayrılma sabitine m^2 dersek,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\lambda\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=m^2 \tag{2.15}$$

yazabiliriz. Buradan, $\Theta(\theta)$ ve $\Phi(\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}+\left[\lambda\sin^2\theta-m^2\right]\Theta(\theta)=0 \tag{2.16}$$

ve

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0 \tag{2.17}$$

olarak bulunurlar. Görüldüğü gibi, kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan (2.1) denklemi, küresel simetrik problemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi ile, (2.12), (2.16) ve (2.17)'de verilen üç sıradan diferansiyel denkleme dönüşmüştür. Bu arada, henüz üzerlerinde hiç bir sınırlama olmayan λ ve m^2 gibi iki sabit parametre de probleme dahil olmuştur.

2.1.1 Değişkenlerin Ayrılması Yöntemi

Kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan (2.1) denkleminin, üç boyutta değişkenlerin ayrılması yöntemi ile üç sıradan diferansiyel denkleme dönüştüğünü gördük. Bu problemde (2.1) denkleminin ayrılabilir olması, küresel kutupsal koordinatların kullanılması ile yakından ilgilidir. Bu koordinat

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 11. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

sistemi, merkezcil kuvvetten kaynaklanan simetrileri tam olarak yansıtmaktadır. Aynı problemi kartezyen koordinatlarında çözmeyi deneseydik, çözüm

$$\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılmayacaktı. Verilen kısmi türevli bir diferansiyel denklemin değişkenlerin ayrılması yöntemi ile çözülüp çözülemeyeceği, denklemin simetrileri ile yakından ilgilidir. Kısmi türevli bir diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılamıyorsa, ayrılabileceği bir koordinat sisteminin var olup olmadığını kontrol etmek diferansiyel denklemin simetrilerini araştırmakla mümkündür. Böyle bir koordinat sistemi var ise, onu da sistemin simetrilerinin türeticileri yardımı ile oluşturmak mümkündür (Stephani, sayfa 193).

Bu denklemlerden (2.17) derhal çözülebilir ve genel çözümü

$$\Phi(\phi) = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi} \tag{2.18}$$

olarak kolayca bulunur. m üzerinde henüz bir sınırlama yoktur ancak,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \tag{2.19}$$

olarak verilen periyodik sınır şartı kullanılırsa, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gibi tamsayı değerler alması gerektiğini görürüz.

$\Theta(\theta)$ için çözülmesi gereken denklem ise,

$$x = \cos\theta \qquad (\theta \in [0,\pi],\ x \in [-1,1]) \tag{2.20}$$

gibi yeni bir bağımsız değişken tanımlanarak

$$(1-x^2)\frac{d^2Z(x)}{dx^2} - 2x\frac{dZ(x)}{dx} + \left[\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]Z(x) = 0 \tag{2.21}$$

şeklinde yazılır. $m = 0$ için bu denkleme *Legendre denklemi* ve $m \neq 0$ için de *asosiye Legendre denklemi* denir.

2.2 Legendre Denkleminin Frobenius Yöntemi ile Seri Çözümü

$$m = 0$$

için

$$(1-x^2)\frac{d^2Z(x)}{dx^2} - 2x\frac{dZ(x)}{dx} + \lambda Z(x) = 0 \tag{2.22}$$

şeklinde verilen Legendre denkleminin ∓ 1 noktalarında iki tane düzenli tekilliği vardır. Bu noktalar (2.22) denkleminin tanım aralığı olan $[-1,1]$ aralığının uç noktaları olduklarından,

$$x = 0 \tag{2.23}$$

etrafında

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{2.24}$$

şeklinde bir seri çözüm deneyebiliriz. (2.24)'ü (2.22)'de yerine koyarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha}\left[(k+\alpha)(k+\alpha-1) + 2(k+\alpha) - \lambda\right]a_k = 0 \tag{2.25}$$

buluruz. Burada birinci seriyi,

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + \sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'}(k'+\alpha)(k'+\alpha-1)x^{k'+\alpha-2} \tag{2.26}$$

şeklinde yazar ve k' değişkenini

$$k' = k+2 \tag{2.27}$$

olarak yeniden tanımlarsak, (2.25) denklemi

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha}\left[a_{k+2}(k+2+\alpha)(k+1+\alpha) - a_k(k+\alpha)(k+\alpha+1) - \lambda\right] = 0 \tag{2.28}$$

şeklini alır. Kuvvet serilerin teklik özelliğini kullanırsak bu denklemi bütün x noktalarında sağlamak, ancak x'in bütün kuvvetlerinin katsayılarının aynı anda sıfıra eşit olması ile mümkün olacağından, (2.24) seri çözümünün katsayıları arasında

$$a_0\alpha(\alpha-1) = 0, \tag{2.29}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$a_1(\alpha+1)\alpha=0, \tag{2.30}$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_k}=\frac{[(k+\alpha)(k+\alpha+1)-\lambda]}{(k+1+\alpha)(k+\alpha+2)} \qquad k=0,1,2... \tag{2.31}$$

ilişkilerini buluruz. Burada x'in en küçük kuvvetinin katsayısının sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denkleme indis denklemi (2.29) denir. $a_0\neq 0$ olduğunu varsayarsak, çözümü bize α değerlerini

$$\alpha=0 \text{ ve } \alpha=1 \tag{2.32}$$

olarak verir. (2.31) denklemi ise, bize seri çözümdeki katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısını verir. Öncelikle ele $\alpha=1$ değerini alırsak, tekrarlama bağıntısını

$$a_{k+2}=a_k\frac{(k+1)(k+2)-\lambda}{(k+2)(k+3)} \qquad k=0,1,2... \tag{2.33}$$

olarak buluruz. $\alpha=1$ için (2.30) denklemi

$$a_1=0 \tag{2.34}$$

verdiğinden, sıfırdan farklı katsayıları

$$a_2=a_0\frac{(2-\lambda)}{6}, \tag{2.35}$$

$$a_3=a_1\frac{(6-\lambda)}{12}=0, \tag{2.36}$$

$$a_4=a_2\frac{(12-\lambda)}{20}, \tag{2.37}$$

$$\vdots$$

olarak buluruz. $\alpha=1$ değeri için seri çözüm ise,

$$Z_1(x)=a_0\left[x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5+...\right] \tag{2.38}$$

şeklinde olacaktır. Aynı şekilde $\alpha=0$ değeri için seri çözümü bulursak, (2.29) ve (2.30) numaralı denklemler bize

$$a_0\neq 0 \text{ ve } a_1\neq 0 \tag{2.39}$$

verirler. Tekrarlama bağıntısı ise,

$$a_{k+2}=a_k\frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)} \qquad k=0,1,2... \tag{2.40}$$

olur. Bu da bize sıfırdan farklı katsayıları

$$a_2=a_0\left(-\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$a_3=a_1\left(\frac{2-\lambda}{6}\right),$$

$$a_4=a_2\left(\frac{6-\lambda}{12}\right), \tag{2.41}$$

$$a_6=a_4\left(\frac{20-\lambda}{30}\right),$$

.....

olarak verir. Bütün bunları bir araya toplarsak, $\alpha=0$ için seri çözümü

$$Z_2(x)=a_0\left[1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2-\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{6-\lambda}{12}\right)x^4+...\right]$$

$$+a_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5+...\right] \tag{2.42}$$

şeklinde buluruz. Legendre denklemi ikinci dereceden, sıradan, doğrusal bir diferansiyel denklem olduğundan, iki tane bağımsız çözümü olacaktır. Görüldüğü gibi a_0 ve a_1 birbirlerinden bağımsız rastgele değerler alacağından, $\alpha=0$ için bulduğumuz çözüm $\alpha=1$ çözümünü de içermekte olup iki bağımsız çözümü bir arada vermektedir. Dolayısıyla, Legendre denkleminin sonsuz seri olarak genel çözümü iki birbirinden bağımsız çözümün doğrusal bileşimi olarak,

$$Z(x)=C_0\left[1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2-\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{6-\lambda}{12}\right)x^4+...\right]$$

$$+C_1\left[x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5+...\right] \tag{2.43}$$

şeklinde verilir. Burada C_0, ve C_1 integral sabitleridir. Bu serilere Legendre serileri adı verilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

2.3 Legendre Polinomları

Legendre serilerinin $|x| < 1$ değerleri için yakınsaklığı oran testi ile kolayca görülür. Ancak, $x = \pm 1$ değerlerinde nasıl davrandıklarını anlamak için tekrarlama bağıntısına $k \to \infty$ limitinde bakarsak,

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \to 1 \tag{2.44}$$

buluruz. Bu bize her iki serinin de yeteri kadar büyük k değerlerinden sonra,

$$Z(x) = ... + a_k x^k \left(1 + x^2 + x^4 + ...\right) \tag{2.45}$$

şeklinde davrandığını söyler. Parantez içindeki serinin toplamı ise,

$$\frac{1}{1-x^2} \tag{2.46}$$

olarak kolayca bulunur. Özetlersek; Legendre serileri $x = \pm 1$ noktalarında $\frac{1}{1-x^2}$ gibi ıraksaktır. Oysa, çözmeye çalıştığımız fizik problemi küresel simetriktir ve bu uç noktaların kürenin üzerindeki yerleri tamamen rastgele seçilebilir. Bir başka deyişle, bu noktaların fiziksel olarak hiçbir ayrıcalığı yoktur. Bundan dolayıdır ki; geçerli çözüm her yerde sonlu olmalıdır. Her yerde sonlu çözümler ise, Legendre serilerini sınırlı sayıda terimden sonra sonlandırmakla mümkündür. Bu da λ ayrılma sabitini belli tamsayı değerler almaya kısıtlamakla elde edilebilir. λ değerlerini

$$\lambda = l(l+1) \qquad l = 0, 1, 2, ... \tag{2.47}$$

olarak parametrize edersek, verilen bir l değeri için Legendre serilerinden birisi sonlu sayıda terimden sonra biter. Öbür serinin de önündeki katsayıyı sıfır olarak alırsak, Legendre denkleminin $P_l(x)$ olarak gösterilen polinom çözümlerini elde ederiz:

$$Z(x) = P_l(x),$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Başlarındaki katsayı $x = 1$ noktasında değerleri 1 olacak şekilde ayarlanmıştır. Genelde Legendre polinomları

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l (l-2n)!\,(l-n)!\,n!} x^{l-2n} \tag{2.49}$$

olarak yazılabilir. Burada $\left[\frac{l}{2}\right]$ en büyük tamsayı değeri alınacak demektir. Sonlu çözümler elde etmek için λ ayrılma sabitinin belli değerler almaya zorlanması fiziksel bir şarttır ve kuantum mekaniğinde açısal momentumun kuantize olması gibi çok önemli sonuçları vardır. Dalga mekaniğinde ise, sistemin sadece belli dalga boylarında salınması sonucunu doğurur.

2.3.1 Legendre Polinomlarının Rodriguez Formülü Tanımı

Legendre Polinomlarının bir başka tanımı da

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l \tag{2.50}$$

şeklinde verilen Rodriguez formülüdür. Bunun (2.49)'a eşdeğer olduğunu göstermek için,

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!\,(m-n)!} x^n y^{m-n} \tag{2.51}$$

şeklinde verilen binom formülünü kullanırsak denklem (2.50)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \sum_{n=0}^{l} \frac{l!\,(-1)^n}{n!\,(l-n)!} x^{2l-2n} \tag{2.52}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan da

$$\frac{d^l x^m}{dx^l} = \frac{m!}{(m-l)!} x^{m-l} \tag{2.53}$$

formülü ile

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{(-1)^n}{2^l} \frac{(2l-2n)!}{n!\,(l-n)!\,(l-2n)!} x^{l-2n} \tag{2.54}$$

bulunur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

2.3.2 *Legendre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu Tanımı*

Legendre polinomlarını elde etmenin bir başka yolu da

$$T(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\,t^l \qquad |t|<1 \tag{2.55}$$

şeklinde verilen türetim fonksiyonudur. Bunun Legendre polinomlarını verdiğini göstermek için $T(x,t)$'yi

$$\frac{1}{[1-t(2x-t)]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.56}$$

olarak yazalım ve

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})!\,(-1)^l\,x^l}{l!\,(-\frac{1}{2}-l)!} \tag{2.57}$$

binom açılımını kullanalım. Burada

$$\frac{(-\frac{1}{2})!}{(-\frac{1}{2}-l)!}=\frac{(-\frac{1}{2})\,(-\frac{1}{2}-1)\,(-\frac{1}{2}-2)\,(-\frac{1}{2}-3)\ldots}{(-\frac{1}{2}-l)\,(-\frac{1}{2}-l-1)\,(-\frac{1}{2}-l-2)\ldots}$$

$$=\frac{(-1)^l\,(-1)^{\xi}\left[\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}+1)\,(\frac{1}{2}+2)\ldots(\frac{1}{2}+l-1)\,(\frac{1}{2}+l)\,(\frac{1}{2}+l+1)\ldots\right]}{(-1)^{\xi}\left[(\frac{1}{2}+l)\,(\frac{1}{2}+l+1)\ldots\right]}$$

$$=(-1)^l\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+l-1\right)\right]$$

$$=(-1)^l\,\frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{2^l}$$

$$=(-1)^l\,\frac{(2l)!}{2^{2l}l!} \tag{2.58}$$

bağıntısını kullanarak,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l)!\,(-1)^{2l}}{2^{2l}\,(l!)^2}x^l \tag{2.59}$$

yazarız. Bunu da (2.56) numaralı denklemde kullanarak,

$$\frac{1}{(1-t(2x-t))^{\frac{1}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l)!\,(-1)^{2l}\,t^l}{2^{2l}\,(l!)^2}\,(2x-t)^l \tag{2.60}$$

buluruz. Bu denklemdeki

$$(2x-t)^l \tag{2.61}$$

terimine tekrar binom açılımı uygularsak,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l)!\,(-1)^{2l}\,t^l}{2^{2l}\,(l!)^2}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!\,(l-k)!}\,(2x)^{l-k}\,(-t)^k$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l)!\,(-1)^k\,(2x)^{l-k}\,t^{k+l}}{2^{2l}l!k!\,(l-k)!} \tag{2.62}$$

elde ederiz. Buradaki çift toplamı

$$k \;\rightarrow\; n, \tag{2.63}$$

$$l \;\rightarrow\; l-n \tag{2.64}$$

dönüşümü ile yeniden düzenlersek,

$$T(x,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{[\frac{l}{2}]}\left[\frac{(-1)^n\,(2l-2n)!}{2^l\,(l-n)!n!\,(l-2n)!}x^{l-2n}\right]t^l \tag{2.65}$$

buluruz. Bunu da (2.55) numaralı denklemin sağ tarafında olan

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\,t^l \tag{2.66}$$

terimi ile karşılaştırırsak,

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{[\frac{l}{2}]}\frac{(-1)^n\,(2l-2n)!}{2^l\,(l-n)!n!\,(l-2n)!}x^{l-2n} \tag{2.67}$$

bulunacaktır.

2.3.3 *Legendre Polinomlarının Tekrarlama Bağıntıları*

Legendre Polinomlarının türetim fonksiyonu olan $T(x,t)$'nin, t'ye göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)=-\frac{-2\,(x-t)}{2\,(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{l=1}^{\infty}P_l(x)\,l\,t^{l-1} \tag{2.68}$$

olur. Bu ise,

$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\,t^l=\sum_{l=1}^{\infty}P_l(x)\,l\,t^{l-1}\,(1-2xt+t^2) \tag{2.69}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde yazılabilir. Bu denklemi

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l (2l+1) x P_l(x) = \sum_{l'=1}^{\infty} P_{l'} l' t^{l'-1} + \sum_{l''=0}^{\infty} t^{l''+1} (l''+1) P_{l''}(x) \tag{2.70}$$

şeklinde açarsak ve

$$\begin{aligned} l' &= l+1, \\ l'' &= l-1 \end{aligned} \tag{2.71}$$

dönüşümlerini yapıp, t'nin eşit kuvvetleri altında toplarsak,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) x P_l(x) - P_{l+1}(x)(l+1) - l P_{l-1}(x) \right] t^l = 0 \tag{2.72}$$

olur. Bu ise, bütün t değerleri için ancak

$$(2l+1) x P_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) + l P_{l-1}(x) \tag{2.73}$$

olduğu zaman mümkündür. Aynı şekilde $T(x,t)$'nin x'e göre türevini alırsak, bir başka tekrarlama bağıntısı olarak

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2x P'_l(x) \tag{2.74}$$

elde ederiz. Bu tür bağıntılar uygulamalarda çok kullanışlı olduğu gibi başkalarını da türetmek mümkündür.

2.3.4 *Legendre Polinomlarının Özel Değerleri*

Değişik uygulamalarda işimize yarayacak olan bazı özel değerler, Legendre polinomlarının $x = \pm 1$ ve 0 noktalarındaki değerleridir. Türetim fonksiyonunda (2.55) $x = \pm 1$ yazarsak,

$$\frac{1}{(1 \mp t)} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1) t^l (\pm)^l \tag{2.75}$$

buluruz. Sol tarafı binom formülünü kullanarak açar ve t'nin aynı kuvvetlerini karşılaştırırsak,

$$\begin{aligned} P_l(1) &= 1, \\ P_l(-1) &= (-1)^l \end{aligned} \tag{2.76}$$

elde ederiz. Aynı şekilde $x = 0$ yazarsak,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) t^l, \tag{2.77}$$

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} t^{2l} \tag{2.78}$$

olur ki, bu da bize

$$P_{2s+1}(0) = 0, \tag{2.79}$$

$$P_{2l}(0) = \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \tag{2.80}$$

verir.

2.3.5 *Legendre Polinomlarının Bazı İntegralleri*

1. Uygulamalarda sıkça karşımıza çıkan integrallerden biri de

$$\int_0^1 dx P_l(x) \tag{2.81}$$

integralidir. Bu integrali (2.74) tekrarlama bağıntısını kullanarak,

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \int_0^1 dx \left[P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2x P'_l(x) \right] \tag{2.82}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise,

$$\int_0^1 dx P_l(x) = P_{l+1}(1) + P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0) - 2x P_l(x)\Big|_0^1 \tag{2.83}$$

$$+2 \int_0^1 dx P_l(x)$$

olur. Yukarıda bulduğumuz değerleri kullanarak,

$$\int_0^1 dx P_l(x) = P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0) \tag{2.84}$$

yazarız. Bu da bize

$$\int_0^1 dx P_l(x) = \begin{cases} 0 & l \geq 2 \text{ olan bir çift sayı} \\ 1 & l = 0 \\ \frac{1}{2(s+1)} P_{2s}(0) & l = 2s+1 \end{cases} \tag{2.85}$$

verir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

2. Dipol hesaplarında kullanışlı bir başka integral ise,

$$\int_{-1}^{1} dx\; xP_l(x)\,P_k(x) \tag{2.86}$$

olarak verilir. (2.73) tekrarlama bağıntısını kullanarak bunu

$$\int_{-1}^{1} dx\; xP_l(x)\,P_k(x) = \int_{-1}^{1} dx \frac{P_l(x)}{(2k+1)}\left[(k+1)\,P_{k+1}(x) + kP_{k-1}(x)\right] \tag{2.87}$$

olarak yazarız. Bu da bize,

$$\int_{-1}^{1} dx\; xP_l(x)\,P_k(x) = \begin{cases} 0 & k \neq \pm 1 \\ \frac{l}{(2l-1)}\frac{2}{(2l+1)} & k = l-1 \\ \frac{l+1}{(2l+3)}\frac{2}{(2l+1)} & k = l+1 \end{cases} \tag{2.88}$$

verecektir. Genelde,

$$\int_{-1}^{1} dx\; x^l P_n(x) = \frac{2^{n+1} l!\left(\frac{l+n}{2}\right)!}{(l+n+1)!\left(\frac{l-n}{2}\right)!} \qquad l-n = |\text{çift tamsayı}| \tag{2.89}$$

integralinin doğruluğu gösterilebilir.

2.3.6 *Legendre Polinomlarının Tam ve Dik Bir Set Olma Özelliği*

Legendre denklemini (2.22)

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx}\right] + l(l+1)\,P_l(x) = 0 \tag{2.90}$$

şeklinde yazar ve $P_{l'}(x)$ ile çarpıp, $[-1,1]$ aralığında integralini alırsak

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx}\right] + l(l+1)\,P_l(x)\right\} dx = 0 \tag{2.91}$$

buluruz. Bu ifadenin de kısmi integralini alırsak,

$$\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)\frac{dP_l(x)}{dx}\frac{dP_{l'}(x)}{dx} + l(l+1)\,P_{l'}(x)\,P_l(x)\right] dx = 0 \tag{2.92}$$

olur. Bu denklemde l ve l' 'nü yer değiştirerek yazar ve (2.29) denkleminden çıkartırsak,

$$\left[l(l+1) - l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\,P_l(x)\,dx = 0 \tag{2.93}$$

buluruz. Bu denklem bize $l \neq l'$ olduğu zaman,

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\,P_l(x)\,dx = 0 \tag{2.94}$$

ve $l = l'$ olduğu zaman ise;

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\,P_l(x)\,dx = N_l \tag{2.95}$$

verecektir. N_l sonlu bir sayıdır ve normlama sabiti olarak bilinir. Değerini Rodriguez formülünü kullanarak bulabiliriz:

$$N_l = \int_{-1}^{1} P_l^2(x)\,dx, \tag{2.96}$$

$$= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l dx \tag{2.97}$$

yazar ve l defa kısmi integral uygularsak,

$$N_l = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}\left(x^2-1\right)^l dx \tag{2.98}$$

olur.

$$\frac{d^m}{dx^m}A(x)\,B(x) = \sum_{s=0}^{m}\frac{m!}{s!\,(m-s)!}\frac{d^s A}{dx^s}\frac{d^{m-s}B}{dx^{m-s}} \tag{2.99}$$

formülünü kullanarak $\left(x^2-1\right)^l$ teriminin $2l$ kez türevi alınırsa, $(2l)!$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$N_l = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l dx \tag{2.100}$$

olur. Bunu ise, $\left(1-x^2\right)^l$ 'yi

$$\left(1-x^2\right)^l = \left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{l-1} = \left(1-x^2\right)^{l-1} + \frac{x}{2l}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^l \tag{2.101}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

şeklinde yazarak,

$$N_l = \frac{(2l-1)}{2l} N_{l-1} + \frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^{1} x d\left[\left(1-x^2\right)^l\right] \tag{2.102}$$

olarak ifade edebiliriz. Bu da bize,

$$N_l = \frac{(2l-1)}{2l} N_{l-1} - \frac{1}{2l} N_l \tag{2.103}$$

veya

$$(2l+1)\, N_l = (2l-1)\, N_{l-1} \tag{2.104}$$

olduğunu gösterir. Bu ise,

$$(2l+1)\, N_l \tag{2.105}$$

ifadesinin değerinin l'den bağımsız bir sayı olduğunu gösterir. l değerini sıfır olarak alırsak bu ifadenin değeri kolayca hesaplanır ve 2 olarak bulunur. Bu da bize normlama sabitini,

$$N_l = \frac{2}{(2l+1)} \tag{2.106}$$

olarak verir. Bu N_l değerini kullanarak $U_l(x)$ fonksiyonlarını

$$U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \tag{2.107}$$

şeklinde tanımlarsak, bu fonksiyonlar

$$\int_{-1}^{1} U_{l'}(x)\, U_l(x)\, dx = \delta_{ll'} \tag{2.108}$$

bağıntısını sağlar ve dik bir set olan $\{U_l(x)\}$ setini oluştururlar. (2.108) ifadesi diklik şartı olarak da bilinir. Bu set aynı zamanda da tamdır. Yani, herhangi bir $\Psi(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında yeteri kadar iyi davranışlı ve parçalı da olsa sürekli ise, $\{U_l(x)\}$ seti cinsinden

$$\Psi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l U_l(x) \tag{2.109}$$

şeklinde sonsuz bir seri olarak ifade edilebilir. Burada C_l sabitlerini bulmak için her iki tarafı $U_{l'}(x)$ ile çarpar ve $[-1,1]$ aralığında integralini alırsak

$$\int_{-1}^{1} U_{l'}(x)\, \Psi(x)\, dx = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \int U_{l'}(x)\, U_l(x)\, dx \tag{2.110}$$

buluruz. Bu ifade de (2.108) diklik özelliğini kullanarak, C_l sabitlerini

$$C_l = \int_{-1}^{1} U_l(x)\, \Psi(x)\, dx \tag{2.111}$$

olarak belirleriz. Burada yeteri kadar iyi davranışlı ifadesi hakkında 8. Bölümde daha açık olacağız ancak, bu aşamada uygulamalarda karşılaşılan pek çok fonksiyonun bu şartı sağlayacağını söylemekle yetineceğiz.

Örnek (2.1) ***Legendre polinomları ve elektrostatik problemleri:*** .

Elektrostatik problemlerinde boşlukta Ψ potansiyeli için çözülmesi gereken denklem

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) = 0 \tag{2.112}$$

olarak verilen Laplace denklemidir. Problem z ekseni etrafında (azimutal) simetri içeriyorsa ϕ bağımlılığı olmayacaktır, dolayısı ile (2.112) denkleminin çözümünde

$$m = 0 \tag{2.113}$$

olarak alınır. r bağımlılığı için çözülmesi gereken denklem ise, (2.12) denkleminde

$$k^2 = 0 \tag{2.114}$$

olacağından,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0 \tag{2.115}$$

şeklinde bulunur. Bunun çözümleri ise kolayca r^l ve $\frac{1}{r^{l+1}}$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (2.112) denkleminin genel çözümü

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] P_l(x = \cos\theta) \tag{2.116}$$

şeklinde olur. Şimdi ortasından bir yalıtkan ile birleştirilmiş ve kuzey yarıküresi V_0 ve güney yarıküresi de $-V_0$ potansiyelinde tutulan bir iletken küre düşünelim. Bu kürenin dışındaki ($r \geq a$) potansiyeli bulmak istersek A_l değerini sıfır olarak alırız çünkü, küreden uzaklaştıkça bu terim sonsuza gitmektedir. Dolayısıyla, $r \geq a$ için çözüm,

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(x) \tag{2.117}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde olmalıdır. B_l değerlerini bulmak için $r = a$ noktasındaki sınır değerlerini kullanırız, bu da bize

$$\Psi(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x \leq 1 \\ -V_0 & 0 > x \geq -1 \end{cases} \tag{2.118}$$

verir. Her iki tarafı $P_{l'}(x)$ ile çarpar, integralini alır ve Legendre polinomlarınında dik olma özelliğini kullanırsak,

$$\int_{-1}^{1} \Psi(a,x) P_l(x)\, dx = \frac{B_l}{a^{l+1}} \frac{2}{(2l+1)}, \tag{2.119}$$

$$V_0 \int_0^1 dx P_l(x) - V_0 \int_{-1}^{1} dx P_l(x) = \frac{2B_l}{(2l+1)\, a^{l+1}}, \tag{2.120}$$

$$B_l = \frac{(2l+1)\, a^{l+1}}{2} V_0 \int_0^1 \left[1 - (-1)^l\right] P_l(x)\, dx \tag{2.121}$$

buluruz. Buradan l 'nin çift değerleri için B_l değerlerinin sıfır olduğunu görürüz, tek değerleri için ise, (2.85) sonucunu kullanarak

$$B_{2s+1} = \frac{(4s+3)}{2} a^{2l+2} 2V_0 \frac{P_{2s}(0)}{(2s+2)} \qquad s = 0, 1, 2, ... \tag{2.122}$$

buluruz. Bunları çözümün genel ifadesi olan (2.117)'de yerine koyarsak, kürenin dışındaki potansiyeli

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{s=0}^{\infty} (4s+3)\, a^{2l+2} \frac{V_0 P_{2s}(0)}{(2s+2)} \frac{1}{r^{2s+2}} P_{2s+2}(\cos\theta) \tag{2.123}$$

şeklinde elde ederiz. Kürenin içindeki potansiyel ise, yine aynı yöntemle bulunur.

2.4 Asosiye Legendre Denklemi ve Çözümleri

Legendre denklemi (2.21)'i

$$m \neq 0 \tag{2.124}$$

değerleri için ele alır ve Frobenius yöntemini kullanarak,

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{2.125}$$

şeklinde sıfır noktası etrafında bir seri çözüm denersek, tekrarlama bağıntısını

$$(k+4)(k+3)\, a_{k+4} + \left[(\lambda - m)^2 - 2(k+2)^2\right] a_{k+2} + \left[k(k+1) - \lambda\right] a_k = 0 \tag{2.126}$$

olarak elde ederiz. Bu denklemin daha önce karşımıza çıkan tekrarlama bağıntısından (2.31) farkı üç terimli olmasıdır. Bu yanlış olmamakla birlikte çok da kullanışlı değildir. Bu tür durumlarda iki terimli tekrarlama bağıntısı elde etmek için genellikle denklemin tanım aralığının uç noktalarındaki davranışına bakarız. $x = +1$ noktasının yakını için,

$$y = (1 - x) \tag{2.127}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlarsak denklemimiz (2.21)

$$(2-y)\, y \frac{d^2P(y)}{dy^2} + 2(1-y)\frac{dP(y)}{dy} + \left[\lambda - \frac{m^2}{y(2-y)}\right] P(y) = 0 \tag{2.128}$$

olur. $y \to 0$ limitinde bu denklem yaklaşık olarak

$$2y\frac{d^2P(y)}{dy^2} + 2\frac{dP(y)}{dy} - \frac{m^2 P(y)}{2y} = 0 \tag{2.129}$$

şeklini alır ve

$$y^{\frac{m}{2}} \quad \text{ve} \quad y^{-\frac{m}{2}} \tag{2.130}$$

gibi iki bağımsız çözümü vardır. $m \geq 0$ alınırsa, y'nin sıfıra yakın olduğu bölgede işimize yarayan çözüm $y^{\frac{m}{2}}$ olur. Aynı şekilde $x \to -1$ limiti için,

$$y = (1 + x) \tag{2.131}$$

değişkenini tanımlarsak, $y^{-\frac{m}{2}}$ çözümünü buluruz. Bu çözümlerden hareket ederek Legendre denkleminde (2.21)

$$Z(x) = (1+x)^{\frac{m}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}} f(x),$$

$$= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} f(x) \tag{2.132}$$

gibi bir çözüm denersek, $f(x)$ için çözülmesi gereken

$$(1-x^2)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - 2x(m+1)\frac{df(x)}{dx} + [\lambda - m(m+1)] f(x) = 0 \tag{2.133}$$

denklemini buluruz. Şimdi bu denklemde

$$f(x) = \sum_k a_k x^{k+\alpha} \tag{2.134}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

seri çözümünü denersek, iki terimli bir tekrarlama bağıntısı olan

$$a_{k+2} = a_k \frac{[(k+m)(k+m+1)-\lambda]}{(k+2)(k+1)} \tag{2.135}$$

denklemini elde ederiz. Bu seri de daha önce olduğu gibi sınır noktalarında ıraksaktır. Bu noktalarda sonlu bir çözüm elde etmek için λ değerlerini

$$(k+m)[(k+m)+1]-\lambda = 0, \tag{2.136}$$

$$\lambda = (k+m)[(k+m)+1] \tag{2.137}$$

olarak sınırlamamız gerekir.

$$l = k+m \tag{2.138}$$

olarak yeni bir tamsayı tanımlarsak

$$\lambda = l(l+1) \tag{2.139}$$

olur.

$$k = l-m \tag{2.140}$$

ifadesinde k pozitif tam sayı değerler aldığından verilen bir l değeri için m'nin ancak

$$m = -l, ...0, ...l \tag{2.141}$$

olarak verilen tamsayı değerleri alabildiğini görürüz.

2.4.1 *Asosiye Legendre Polinomları*

Legendre polinomlarının sağladığı diferansiyel denklemi,

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_l(x) = 0, \tag{2.142}$$

şeklinde tekrar ele alır ve

$$\frac{d^m}{dx^m}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^{m} \frac{m!}{s!(m-s)!}\left[\frac{d^sA}{dx^s}\right]\left[\frac{d^{m-s}B}{dx^{m-s}}\right] \tag{2.143}$$

formülünü kullanarak m kez türevini alırsak,

$$\begin{aligned}&(1-x^2)P_l^{(m+2)}(x) - 2xmP_l^{(m+1)}(x) - \frac{2m(m-1)}{2}P_l^{(m)}(x)\\ &= 2xP_l^{(m+1)}(x) + 2mP_l^{(m)}(x) - l(l+1)P_l^{(m)}(x)\end{aligned} \tag{2.144}$$

olacaktır. Buradan da

$$\begin{aligned}&(1-x^2)P_l^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)P_l^{(m+1)}(x)\\ &-[m(m+1)-l(l+1)]P_l^{(m)}(x) = 0\end{aligned} \tag{2.145}$$

elde ederiz. Burada

$$P_l^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{2.146}$$

olduğundan, (2.133) denklemi ile kıyaslarsak çözümün

$$f(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{2.147}$$

olduğunu görürüz. (2.132) denklemini yeniden yazarsak, **asosiye Legendre denkleminin** çözümlerini

$$Z_{l,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = P_l^m(x) \tag{2.148}$$

olarak buluruz. Bu polinomlara ise, **asosiye Legendre Polinomları** denir ve $P_l^m(x)$ ile gösterilirler:

$$\begin{aligned}P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2}\\ P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2}\\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2)\\ P_3^1(x) &= (3/2)(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}\\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2)\\ P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2}.\end{aligned}$$

m'nin eksi değerleri için $P_l^{-m}(x)$,

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{2.149}$$

olarak verilir.

2.4.2 *Asosiye Legendre Polinomlarının Diklik Özelliği*

Asosiye Legendre polinomlarının diklik özelliğini Rodriguez formülünü kullanarak gösterelim:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{l+l'}l!l'!}\int_{-1}^{1} X^m\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}X^l\frac{d^{l'+m}}{dx^{l'+m}}X^{l'}dx \tag{2.150}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

yazalım. Burada,

$$X = x^2 - 1, \tag{2.151}$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{2.152}$$

ve

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \tag{2.153}$$

olarak alınmıştır. (2.150) formülündeki integralde $(l'+m)$ kez kısmi integral alınırsa

$$(-1)^{l'+m} \int_{-1}^{1} \frac{d^{l'+m}}{dx^{l'+m}} \left[X^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} X^l \right] X^{l'} dx \tag{2.154}$$

buluruz. Buradan da, (2.143) formülü ile

$$(-1)^{l'+m} \int_{-1}^{1} X^{l'} \sum_{\lambda} \binom{l'+m}{\lambda} \frac{d^{l'+m-\lambda}}{dx^{l'+m-\lambda}} X^m \frac{d^{l+m+\lambda}}{dx^{l+m+\lambda}} X^l dx \tag{2.155}$$

elde ederiz. X^m ifadesindeki en yüksek kuvvet x^{2m}, X^l ifadesinde ise, x^{2l} olacaktır. Bundan dolayı toplama işaretinin önündeki her terim eğer

$$l' + m - \lambda \leq 2m \tag{2.156}$$

ve

$$l + m + \lambda \leq 2l \tag{2.157}$$

eşitsizlikleri aynı anda sağlanmıyorsa sıfır olur. Birinci eşitsizlik,

$$\lambda \geq l' - m \tag{2.158}$$

ve ikinci eşitsizlik de

$$\lambda \leq l - m \tag{2.159}$$

verir. $m \geq 0$ için $l < l'$ varsayarsak, toplam sıfırdan farklı hiç bir terim içermez ve integral sıfırdır. (2.150) ifadesi l' ve l 'ye göre simetrik olduğundan, $l > l'$ için de bu sonuç geçerlidir. l ve l' eşit olursa, bu iki eşitsizlik aynı anda sağlanabilir ve $\lambda = l - m$ değerini alır. Bu durumda toplam sadece sıfırdan farklı tek bir terim içerir ve (2.155) ifadesi,

$$(-1)^{l+m} \int_{-1}^{1} X^l \binom{l+m}{l-m} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} X^l dx$$

$$= (-1)^{l+m} \binom{l+m}{l-m} (2l)!\,(2m)! \int_{-1}^{1} X^l dx \tag{2.160}$$

olur. Buradaki integral ise,

$$\int_{-1}^{1} X^l dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l dx = 2(-1)^l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2l+1}\theta d\theta$$

$$= \frac{(-1)^l 2^{l+1} l!}{3.5...(2l+1)}$$

$$= \frac{(-1)^l 2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!} \tag{2.161}$$

olarak alınır. Ayrıca, binom katsayıları

$$\binom{l+m}{l-m} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!\,(2m)!} \tag{2.162}$$

olduğundan, asosiye Legendre polinomlarının diklik özelliği de

$$\int_{-1}^{1} [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^m}{2^{2l}(l!)^2} \frac{(l+m)!\,(-1)^{l+m}}{(l-m)!\,(2m)!} (2l)!\,(2m)! \frac{(-1)^l 2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!}$$

sonucu basitleştirilerek bulunur:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{(2l+1)} \delta_{ll'} \tag{2.163}$$

2.5 Küresel Harmonikler

(2.17) denkleminin ϕ değişkenine göre bağımsız çözümlerini

$$\Phi(\phi) = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi} \tag{2.164}$$

şeklinde bulmuştuk. $\Phi_m(\phi + 2\pi) = \Phi_m(\phi)$ olarak verilen periyodik sınır şartları uygulanırsa, m ayrılma sabitinin tamsayı değerler alması gerektiği kolayca görülür. Önceki bölümde assosiye Legendre polinomlarını tanımlarken, m'nin sadece $-l, ...0, ...l$ arasındaki tamsayı değerleri alabileceğini görmüştük. Bu fonksiyonları kullanarak tanımlayacağımız

$$\{\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}\}, \quad m = -l, ..., 0, ...l \tag{2.165}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

seti ise, tam bir set olup,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_{m'}(\phi)\Phi_m^*(\phi) = \delta_{mm'} \tag{2.166}$$

diklik şartını sağlayacaktır.

Bu noktada her ikisi de tam ve dik olan $\{\Phi_m(\phi)\}$ seti ile $\{P_l^m(\theta)\}$ setlerini birleştirerek, bir çok fizik ve mühendislik uygulamalarında çok kullanışlı olan ve gene tam ve dik bir fonksiyon seti oluşturan küresel harmonikleri,

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \tag{2.167}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $m \geq 0$ olarak alınmıştır ancak, m'nin eksi değerleri için küresel harmonikler

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y_l^{*\,m}(\theta,\phi) \tag{2.168}$$

olarak tanımlanırlar:

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \\
Y_1^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_1^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} \\
Y_2^2(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{2i\phi} \\
Y_2^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \\
Y_2^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) \\
Y_2^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi} \\
Y_2^{-2}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{-2i\phi}.
\end{aligned}$$

Küresel harmoniklerin diklik şartı ise,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y_{l'}^{*\,m'}(\theta,\phi) Y_l^m(\theta,\phi) = \delta_m^{m'}\delta_l^{l'} \tag{2.169}$$

olarak verilir. Küresel harmonikler aynı zamanda tam bir set oluşturduğundan, verilen bir $g(\theta,\phi)$ fonksiyonu,

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} A_m^l Y_l^m(\theta,\phi) \tag{2.170}$$

olarak yazılabilecektir. Burada A_m^l sabitleri,

$$A_m^l = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\phi d\theta \sin\theta g(\theta,\phi) Y_l^{*\,m}(\theta,\phi) \tag{2.171}$$

formülü ile hesaplanır.

Daha önce gördüğümüz (2.13) denklemine bakarak küresel harmoniklerin sağladığı diferansiyel denklemin

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi) = 0. \tag{2.172}$$

olduğunu görürüz. Bu denklemi

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] Y_l^m(\theta,\phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{2.173}$$

şeklinde yazarsak, sol taraftaki diferansiyel operatörün kuantum mekaniğinde

$$\begin{aligned}
\vec{L}^2 = (\vec{r}\times\vec{p})^2 &= \left(\vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 \\
&= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]
\end{aligned} \tag{2.174}$$

olarak verilen, ($\hbar^2$ çarpanı dışında) açısal momentum operatörünün karesi olduğu görülür. Dolayısı ile λ ayrılma sabitinin $l(l+1)$ gibi tam sayı değerler almasının, klasik mekanikte sürekli olarak değişebilen açısal momentum büyüklüğünün, kuantum mekaniğinde ancak belirli değerler alabilmesi, yani kuantize olması gibi çok ilginç ve önemli bir sonucu olduğu görülür.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

2.6 Problemler

1. Örnek (2.1)'deki potansiyeli kürenin içinde bulunuz.
2. (2.15) denkleminin çözümlerini r^l ve $r^{-(l+1)}$ olduğunu seriler yöntemi ile gösteriniz.
3. Aşağıda verilen diferansiyel denklemin $x \in [0,1]$ aralığında sonlu çözümlerini bulunuz ve λ'nın en küçük üçüncü değeri için çözümü açık olarak yazınız:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{3}{2} - 2x)\frac{dy}{dx} + \left[\lambda - \frac{(2+5x-x^2)}{4x(1-x)}\right] y(x) = 0.$$

4. Aşağıda verilen tekrarlama bağıntısını gösteriniz:

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2xP'_l(x)$$

5. Legendre polinomlarından P_2, P_3, ve P_4'ü her üç tanımını da kullanarak yazınız.
6. Aşağıda verilen integrali alınız:

$$\int_{-1}^{1} dx x^l P_n(x) = \frac{2^{n+1} l! \left(\frac{l+n}{2}\right)!}{(l+n+1)! \left(\frac{l-n}{2}\right)!} \quad l-n = |\text{çift tamsayı}|$$

7. Aşağıda verilen formülü gösteriniz:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

8. Kuantum mekaniğinde açısal momentumun z-bileşeni L_z, ve büyüklüğünün karesi $\overrightarrow{L}^2$'nin aldığı değerlerin

$$L_z Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial \phi} = m\hbar Y_l^m(\theta,\phi)$$

$$\overrightarrow{L}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta,\phi)$$

özdeğer problemleri ile belirlendiğini gösteriniz. Buradan, küresel harmoniklerin L_z ve $\overrightarrow{L}^2$ operatörlerinin ortak özfonksiyonu olduğunu görürüz.

9. Maple ve Mathematica gibi programlar yardımı ile seçeceğiniz Legendre ve asosiye Legendre polinomlarını çizdirerek inceleyiniz. aynı şekilde küresel harmonikleri çizdiriniz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

3

LAGUERRE POLİNOMLARI

İkinci bölümde küresel simetrik problemler için zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin çözümlerinin,

$$R(r)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{3.1}$$

şeklinde verildiğini görmüştük. $Y_l^m(\theta,\phi)$ olarak gösterilen açısal kısmın çözümleri küresel harmonikler olup, (2.172) denklemini sağlarlar. Radyal kısmın sağladığı denklem ise,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right) + r^2k^2(r)R_l(r) - l(l+1)R_l(r) = 0, \tag{3.2}$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x,y,z)\right]$$

olarak verilir. Burada bağımlı değişkeni

$$R_l(r) = \frac{u_{E,l}(r)}{r} \tag{3.3}$$

şeklinde değiştirirsek, çözülmesi gereken denklem

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_{E,l}}{dr^2} + [\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)]u_{E,l}(r) = Eu_{E,l}(r) \tag{3.4}$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümleri sistemin açısal momentum ve enerji özdeğerlerine bağlı olacağından,

$$u_{E,l}(r)$$

olarak gösterilmiştir.

Tek elektronlu atom modellerinde potansiyel enerji,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \tag{3.5}$$

olarak alınabilir. Burada Z çekirdekteki proton sayısını e'de elektronun yükünü temsil etmektedir. Atom modellerinde elektron çekirdeğe bağlı olacağından enerji $E < 0$ şartını sağlayacaktır. (3.4) denklemi seriler yöntemi ile çözülürse üç terimli bir tekrarlama bağıntısı vereceğinden, iki terimli bir tekrarlama bağıntısı elde etmek için asosiye Legendre denklemindeki deneyimimizden yararlanarak, denklemin 0 ve ∞'daki davranışlarına bakarız.

$\rho = r\sqrt{2\mu|E|/\hbar^2}$ gibi birimsiz bir bağımsız değişken tanımlarsak, çözüm $\rho \to 0$ limitinde $\backsim \rho^{l+1}$ ve $\rho \to \infty$ limitinde de $\backsim e^{-\rho}$ gibi davranacağından

$$u_{E,l}(r) = \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho) \tag{3.6}$$

şeklinde bir çözüm deneriz. $w(\rho)$ fonksiyonunun sağladığı denklem de

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{Ze^2}{\hbar}, \tag{3.7}$$

$$\frac{V}{E} = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{3.8}$$

tanımları ile

$$\rho \frac{d^2 w(\rho)}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{dw}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]w(\rho) = 0 \tag{3.9}$$

olarak bulunur.

Bu denklemde

$$w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \tag{3.10}$$

gibi bir seri çözüm denersek, a_k katsayıları arasında iki terimli bir tekrarlama bağıntısı bulunacaktır:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2(k+l+1)-\rho_0}{(k+1)(k+2l+2)}. \tag{3.11}$$

Bu tekrarlama bağıntısı, (3.10) serisinin $k \to \infty$ limitinde katsayıların oranını $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 2/k$ olarak verdiğinden, $w(\rho)$ çözümünün $\rho \to \infty$ limitinde $e^{2\rho}$ gibi davrandığını gösterir. Bu ise, $\rho \to \infty$ limitinde $R_{E,l}(r)$ fonksiyonlarının e^{ρ} gibi sonsuza gitmesi demektir. $R_{E,l}(r)$ fonksiyonları,

$$|R_{E,l}(r) Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 \tag{3.12}$$

ifadesi ile elektronun olasılık yoğunluğunu vereceğinden, her yerde sonlu değerler almalıdır. Özellikle de çekirdekten uzaklaştıkça olasılık azalmalıdır. Bunu sağlamak için (3.11) sonsuz serisini bir şekilde sonlandırmamız gerekecektir. Bunu da atomun enerjisini temsil eden E değerlerini, yani ρ_0 değerlerini,

$$\rho_0 = 2(N+l+1), \; N = 0,1,2,.... \tag{3.13}$$

ifadesi ile belirlenen tamsayı değerleri ile sınırlamakla sağlayabiliriz. (3.13) İfadesini E için ve tamsayı değerler alan yeni bir n parametresi cinsinden yazarsak, sistemin alabileceği enerji değerlerini

$$E_n = -\frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1,2,.... \tag{3.14}$$

olarak buluruz. Bunlar ise, Bohr atom modelinde karşımıza çıkan kuantize enerji değerlerinden başka birşey değildir.

$w(\rho)$ için çözülmesi gereken denklem (3.9) ise,

$$\frac{\rho}{2}\frac{d^2 w}{d\rho^2} + (l+1-\rho)\frac{dw}{d\rho} + Nw = 0 \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin polinom çözümleri, birazdan ayrıntılı bir biçimde inceleyeceğimiz asosiye Laguerre polinomları cinsinden ifade edilir.

3.1 Laguerre Denklemi ve Polinomları

Laguerre denklemi $[0,\infty]$ aralığında

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{3.16}$$

olarak tanımlanır. Sıfır noktası etrafında

$$y(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} \tag{3.17}$$

şeklinde bir seri çözümü denersek, indis denkleminin köklerinin ikisinin de 0 ve tekrarlama bağıntısının da

$$a_{r+1} = a_r \frac{(s+r-n)}{(s+r+1)^2} \tag{3.18}$$

olduğunu görürüz. Burada n henüz üzerinde herhangi bir kısıtlama olmayan sabit bir sayıdır. Frobenius yönteminde indis denkleminin

$$s = 0 \tag{3.19}$$

gibi çift kökü olursa, birbirinden bağımsız çözümler,

$$y(x,0) \quad \text{ve} \quad \left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{3.20}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde alınırlar (Ross). Burada ikinci çözüm $x \to 0$ limitinde $\ln x$ gibi sonsuza gideceğinden, bütün x değerleri için sonlu olabilecek $y(x,0)$ çözümünü alırız. Bunun tekrarlama bağıntısı ise,

$$a_{r+1} = -a_r \frac{(n-r)}{(r+1)^2} \tag{3.21}$$

olacaktır. Bu çözümü seri olarak yazarsak,

$$y(x) = a_0 \left\{ 1 - \frac{nx}{1^2} + \frac{n(n-1)}{(2!)^2}x^2 + .. + \frac{(-1)^r n(n-1)...(n-r+1)}{(r!)^2}x^r + .. \right\} \tag{3.22}$$

elde ederiz. Bu seri ise, $x \to \infty$ limitinde e^x gibi sonsuza gittiğinden bütün x değerleri için sonlu çözümler için n parametresini tamsayı değerler ile sınırlarız. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{(r!)^2} x^r \quad \text{veya} \\ y(x) &= a_0 \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n! x^r}{(n-r)!\,(r!)^2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklinde verilen ve Laguerre Polinomları olarak bilinen polinom çözümlerini elde ederiz. Lagıuerre polinomları (3.22) ifadesinde $a_0 = 1$ alınarak

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n! x^r}{(n-r)!\,(r!)^2} \tag{3.24}$$

olarak tanımlanır.

3.2 Laguerre Polinomlarının Diğer Tanımları

3.2.1 Laguerre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu

Laguerre polinomlarının türetim fonksiyonu $T(x,t)$,

$$T(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{(1-t)}}}{(1-t)} \tag{3.25}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n \tag{3.26}$$

olarak verilir. Bunun (3.24) ile aynı polinomları verdiğini göstermek için sol tarafı kuvvet serisi olarak açarsak,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{xt}{(1-t)}}}{(1-t)} &= \frac{1}{(1-t)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left[-\frac{xt}{1-t} \right]^r, \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

buluruz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{r+1}} &= 1 + (r+1)t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + ..., \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!} t^s \end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde verilen binom açılımını kullanırsak, (3.26) denkleminin sağ tarafını

$$\frac{1}{(1-t)} \exp\left\{ -\frac{xt}{(1-t)} \right\} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(r+s)!}{(r!)^2\, s!} x^r t^{r+s} \tag{3.29}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$n = r + s \tag{3.30}$$

gibi yeni bir değişken tanımlarsak, t^n'in katsayılarını

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2\,(n-r)!} x^r \tag{3.31}$$

olarak buluruz. Burada

$$s = n - r \tag{3.32}$$

bağıntısından $s \geq 0$ şartı $r \leq n$ verecektir. Dolayısı ile $L_n(x)$ polinomları da

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2\,(n-r)!} x^r \tag{3.33}$$

olarak bulunur.

3.2.2 Laguerre Polinomlarının Rodriguez Formülü Tanımı

Laguerre polinomlarının bir başka tanımı da

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right) \tag{3.34}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
III. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde verilen Rodriguez formülüdür. Bu tanımın diğerlerine eşdeğerliğini

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}} \frac{d^r v}{dx^r} \tag{3.35}$$

formülünü kullanarak ve

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \frac{d^{n-r}x^n}{dx^{n-r}} \frac{d^r e^{-x}}{dx^r} \tag{3.36}$$

ifadesini yazarak gösterebiliriz. Buradan ise,

$$\begin{aligned} \frac{d^p x^q}{dx^p} &= q(q-1)...(q-p+1)\,x^{q-p}, \\ &= \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p} \end{aligned} \tag{3.37}$$

formülü ile

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) &= \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}, \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!x^r}{(r!)^2(n-r)!}, \\ &= L_n(x) \end{aligned} \tag{3.38}$$

olarak istediğimiz sonucu elde ederiz.

3.3 Laguerre Polinomlarının Dikliği

Laguerre polinomlarının birbirine dik fonksiyonlar seti oluşturduğunu göstermek için aşağıda verilen

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\,dx \tag{3.39}$$

integralinin değerini hesaplayalım. Türetim fonksiyonu tanımını kullanarak,

$$\frac{1}{1-t}\exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n \tag{3.40}$$

ve

$$\frac{1}{1-s}\exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_m(x)\,s^m \tag{3.41}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

yazarız. Yukarıdaki serileri önce birbirileri ile ve sonra da e^{-x} ile çarparsak,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m = \frac{e^{-x}\exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)}\frac{\exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)} \tag{3.42}$$

elde ederiz. Her iki tarafın da x'e göre integralini alırsak,

$$\sum [\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\,dx] t^n s^m$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}\exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)}\frac{\exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)}dx \tag{3.43}$$

olacaktır. Buradan (3.38) integralinin değerinin,

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)}\frac{\exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)}dx \tag{3.44}$$

integralinin t ve s 'nin kuvvetleri olarak açıldığında $t^n s^n$ teriminin katsayısı olacağı görülür. Bu integrali de

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^\infty \exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}dx \tag{3.45}$$

olarak yazarsak kolayca alınır ve

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{-\exp^{\left[-x\left(1+\frac{t}{(1-t)}+\frac{s}{(1-s)}\right)\right]}}{1+\left[\frac{t}{(1-t)}\right]+\left[\frac{s}{(1-s)}\right]}\right]_0^\infty \tag{3.46}$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{1}{1+\left[\frac{t}{(1-t)}\right]+\left[\frac{s}{(1-s)}\right]}\right] \tag{3.47}$$

$$= \frac{1}{1-st} \tag{3.48}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n \tag{3.49}$$

bulunur. Bu da bize Laguerre polinomlarının diklik ilişkisini,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\,dx = \delta_{nm}$$

olarak verir. Legendre polinomlarından farklı olarak, Laguerre polinomları ağırlık fonksiyonu e^{-x} 'e göre diktir deriz.

3.4 Laguerre Polinomlarının Diğer Özellikleri

3.4.1 Laguerre Polinomlarının Tekrarlama Bağıntıları

Legendre polinomlarında kullandığımız yöntemle türetim fonksiyonunu sırası ile t ve x 'e göre türevlerini alarak aşağıdaki tekrarlama bağıntılarını buluruz:

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x) - nL_{n-1}(x)\,, \tag{3.50}$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)\,. \tag{3.51}$$

Ayrıca, bir başka tekrarlama bağıntısı olan

$$L'_n(x) = nL_n(x) - \sum_{r=0}^{n-1} L_r(x) \tag{3.52}$$

formülü de çok kullanışlıdır.

Bazı n değerleri için Laguerre polinomları,

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x+1 \\ L_2(x) &= \tfrac{1}{2!}\left(x^2-4x+2\right) \\ L_3(x) &= \tfrac{1}{3!}\left(-x^3+9x^2-18x+6\right) \\ L_4(x) &= \tfrac{1}{4!}\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right) \end{aligned} \tag{3.53}$$

olarak verilirler.

3.4.2 Laguerre Polinomlarının Özel Değerleri

Türetim fonksiyonunda $x=0$ alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)\,t^n = \frac{1}{1-t} \tag{3.54}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \tag{3.55}$$

olur ve

$$L_n(0) = 1 \tag{3.56}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

özel değerini buluruz. Ayrıca, diğer bir özel değeri de Laguerre denklemini $x=0$ noktasında yazarsak,

$$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}L_n(x) + nL_n(x) = 0\Big|_{x=0}\,, \tag{3.57}$$

$$L'_n(x) = -n \tag{3.58}$$

olarak buluruz.

3.5 Asosiye Laguerre Denklemi ve Polinomları

k parametresinin sıfır olduğu durumlarda Laguerre denklemine dönüşen asosiye Laguerre denklemi ise,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{3.59}$$

şeklinde verilir. Bu denklemin de çözümü aşağıdaki teorem kullanılarak bulunabilir:

Teorem: Eğer $Z(x)$ fonksiyonu $(n+k)$ derecesinden Laguerre denklemini sağlarsa, $\frac{d^kZ(x)}{dx^k}$ fonksiyonu da asosiye Laguerre denklemini sağlar.

İspat: $(n+k)$ derecesinden Laguerre denklemini

$$x\frac{d^2Z}{dx^2} + (1-x)\frac{dZ}{dx} + (n+k)\,Z = 0 \tag{3.60}$$

şeklinde yazar ve k kez türevini alırsak,

$$x\frac{d^{k+2}Z}{dx^{k+2}} + k\frac{d^{k+1}Z}{dx^{k+1}} + (1-x)\frac{d^{k+1}Z}{dx^{k+1}} + k(-1)\frac{d^kZ}{dx^k} + (n+k)\frac{d^kZ}{dx^k} = 0 \tag{3.61}$$

buluruz. Bu denklem düzenlenince bize,

$$x\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] + (k+1-x)\frac{d}{dx}\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] + n\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] = 0 \tag{3.62}$$

olarak istenilen sonucu verir.

Buradan Laguerre polinomları için bulduğumuz (3.32) ifadesini kullanırsak, asosiye Laguerre polinomlarını

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n+k-r)!\,(r!)^2} \tag{3.63}$$

şeklinde yazabiliriz. x^r 'nin k derecesinden türevi r'nin k'dan küçük değerleri için sıfır vereceğinden,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)! x^r}{(n+k-r)! (r!)^2}, \tag{3.64}$$

$$L_n^k(x) = (-1)^k \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)! (r!)^2} \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \tag{3.65}$$

yazabiliriz. Yeni bir değişken olarak s'yi

$$s = r - k \tag{3.66}$$

olarak tanımlarsak, asosiye Laguerre polinomlarının son şeklini,

$$L_n^k(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(n+k)! x^s}{(n-s)! (k+s)! s!} \tag{3.67}$$

olarak buluruz:

$$L_0^k(x) = 1$$

$$L_1^k(x) = -x + k + 1$$

$$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k+2)x + \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

3.6 Asosiye Laguerre Polinomlarının Önemli Özellikleri

3.6.1 Asosiye Laguerre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu

Asosiye Laguerre polinomlarının türetim fonksiyonu

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n \tag{3.68}$$

şeklinde verilir. Bunun göstermek için Laguerre polinomlarının

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \tag{3.69}$$

şeklinde verilen türetim fonksiyonunun türevini k kez alalım:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)}\right] = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=k}^{\infty} L_n(x) t^n. \tag{3.70}$$

Türev ve integral işaretlerini yer değiştirerek,

$$\left[\frac{-t}{(1-t)}\right]^k \frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) t^{n+k} \tag{3.71}$$

yazar ve

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \tag{3.72}$$

ilişkisini kullanırsak,

$$(-1)^k \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k L_n^k(x) t^{n+k} \tag{3.73}$$

buluruz. Buradan da asosiye Laguerre polinomlarının türetim fonksiyonu

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n \tag{3.74}$$

şeklinde elde edilir.

3.6.2 Rogriguez Formülü ve Dik Olmaları

Asosiye Laguerre Polinomlarının Rodriguez formülü

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x} x^{n+k}\right] \tag{3.75}$$

olarak verilir. Bu polinomların diklik ilişkisi ise,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x)\, dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \tag{3.76}$$

şeklindedir. Burada ağırlık fonksiyonu

$$(e^{-x} x^k) \tag{3.77}$$

olarak bulunur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

3.6.3 *Tekrarlama Bağıntıları*

Asosiye Laguerre polinomlarının sıkça kullanılan tekrarlama bağıntıları ise,

$$L_{n-k}^{k}(x) + L_{n}^{k-1}(x) = L_{n}^{k}(x), \tag{3.78}$$

$$(n+1)\,L_{n+1}^{k}(x) = (2n+k+1-x)\,L_{n}^{k}(x) - (n+k)\,L_{n-1}^{k}(x), \tag{3.79}$$

$$x\frac{d}{dx}L_{n}^{k}(x) = nL_{n}^{k}(x) - (n+k)\,L_{n-1}^{k}(x) \tag{3.80}$$

olarak verilirler.

3.7 Problemler

1. (3.4) denkleminin üç terimli bir tekrarlama bağıntısı vereceğini çözmeden görebiliyormusunuz?

2. (3.6) denkleminde

$$u_{E,l}(r) = \rho^{l+1}e^{-\rho}w(\rho)$$

tanımı ile $w(\rho)$'nun sağlayacağı diferansiyel denklemin iki terimli bir tekrarlama bağıntısı vereceğini önce görünüz ve sonra da (3.11)'de verilen tekrarlama bağıntısını çıkarınız.

3. Laguerre polinomları için verdiğimiz

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_{n}(x) - nL_{n-1}(x),$$

$$xL_{n}'(x) = nL_{n}(x) - nL_{n-1}(x)$$

$$L_{n}'(x) = nL_{n}(x) - \sum_{r=0}^{n-1} L_{r}(x)$$

tekrarlama bağıntılarını çıkarınız.

4. Asosiye Laguerre polinomlarının diklik ilişkisini gösteriniz.

5. Üç boyutlu izotropik harmonik salınıcı için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2}m\omega^2r^2\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

olarak verilir. Değişkenlerin ayrılması yöntemi ile küresel kutupsal koordinatlarda r, θ ve ϕ için çözülecek denklemleri yazınız.

6. Hidrojen atomunun dalga fonksiyonunun normlanmış şeklini asosiye Laguerre polinomları ve küresel harmonikler cinsinden yazınız.

7. Asosiye Laguerre polinomları için

$$L_{n}^{k}(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}$$

özel değerini gösteriniz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

8. Kuantum mekaniğinde 3 boyutlu izotropik harmonik salınıcı için Schrödinger denkleminin radyal kısmının sağladığı denklem

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dR(x)}{dx}+(\epsilon-x^2-\frac{l(l+1)}{x^2})R(x)=0$$

olarak verilir. Burada

$$x=\frac{r}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}},\quad \text{ve}\quad \epsilon=\frac{E}{\hbar\omega/2}$$

olarak tanımlanmıştır ve $l=0,1,2....$ değerlerini alır.

i)$x=\infty$ noktasındaki tekil noktasını inceleyiniz.

ii)$x\to\infty$ limitinde çözümün $R\to e^{-x^2/2}$ gibi gittiğini gösteriniz.

iii)Seriler yöntemini kullanarak $[0,\infty]$ aralığında sonlu çözümler bulunuz.

iv)Sistemin alabildiği enerji değerleri nelerdir. Neden?

v)Bulduğunuz çözümleri asosiye Laguerre polinomları cinsinden ifade ediniz.

9. Seçeceğiniz Laguerre ve asosiye Laguerre polinomlarını Maple ve Mathematica gibi programlar yardımı ile çizdiriniz.

10. Aşağıda verilen tekrarlama bağıntılarını gösteriniz:

$$L_{n-k}^{k}(x)+L_{n}^{k-1}(x)=L_{n}^{k}(x),$$

$$(n+1)\,L_{n+1}^{k}(x)=(2n+k+1-x)\,L_{n}^{k}(x)-(n+k)\,L_{n-1}^{k}(x),$$

$$x\frac{d}{dx}L_{n}^{k}(x)=nL_{n}^{k}(x)-(n+k)\,L_{n-1}^{k}(x).$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

4

HERMİTE POLİNOMLARI

Kuantum mekaniğinde zamandan bağımsız Schrödinger hareket denklemi,

$$\hat{H}\Psi(\overrightarrow{r})=E\Psi(\overrightarrow{r}) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $\Psi(\overrightarrow{r})$ dalga fonksiyonu, E enerji özdeğerleri ve $\hat{H}$ ise, Hamilton operatörüdür. $\hat{H}$ klasik Hamilton ifadesindeki $\overrightarrow{r}$ (konum) ve $\overrightarrow{p}$ (momentum) değişkenlerinin operatör karşılıkları olan;

$$\overrightarrow{r}\ \to\ \overrightarrow{r}, \tag{4.2}$$

$$\overrightarrow{p}\ \to\ \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla} \tag{4.3}$$

ile yer değiştirerek bulunur. Hamilton operatörü tek boyutlu harmonik salınıcı için

$$\hat{H}(y)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{m\omega^2}{2}y^2 \tag{4.4}$$

şeklinde yazılırsa, Schrödinger denklemi de

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-\frac{m\omega^2}{2}y^2]\Psi(y)=0 \tag{4.5}$$

şeklinde verilen bir diferansiyel denklem olur. Bu denklemde

$$x=\frac{y}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}\quad\text{ve}\quad\epsilon=\frac{E}{(\frac{\hbar\omega}{2})} \tag{4.6}$$

gibi iki birimsiz değişken tanımlarsak, Hermite denklemi ile yakından ilişkili olan,

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\left(\epsilon-x^2\right)\Psi(x)=0,\quad x\in[0,\infty] \tag{4.7}$$

denklemini buluruz.

4.1 Hermite Denklemi ve Polinomları

Yukarıdaki (4.7) denkleminin $[0,\infty]$ aralığında sonlu çözümlerini bulmak için Frobenius yöntemini kullanırsak, üç terimli bir tekrarlama bağıntısı

elde ederiz. İki terimli bir tekrarlama bağıntısı elde etmek için, asosiye Legendre denkleminde yaptığımız gibi, sonsuzdaki tekillik yakınında çözümün nasıl davrandığına bir bakalım:

Önce tekilliğin cinsini bulmak için

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \Psi(x) = \Psi(\xi) \tag{4.8}$$

gibi bir bağımsız değişken tanımlayalım. Bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\Psi(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\xi^4}\left[\varepsilon - \frac{1}{\xi^2}\right]\Psi(\xi) = 0 \tag{4.9}$$

olacaktır. Buradan da tekilliğin gerekli olduğu görülür. Ancak, bu nokta çözüm aralığının ucunda olduğundan sıfır noktası etrafında seri çözüm bulmamıza bir engel oluşturmaz. $x \to \infty$ limitinde (4.7) denklemi

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - x^2\Psi(x) = 0 \tag{4.10}$$

gibi davranır ve $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ile $e^{\frac{x^2}{2}}$ olarak verilen iki çözümü vardır. $e^{\frac{x^2}{2}}$ sonsuzda sonsuz olacağından ilk çözümü alarak,

$$\Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}h(x) \tag{4.11}$$

gibi bir çözümü (4.7) denkleminde yerine koyarsak, $h(x)$ için

$$\frac{d^2h}{dx^2} - 2x\frac{dh(x)}{dx} + (\varepsilon - 1)h(x) = 0 \tag{4.12}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{4.13}$$

gibi bir seri çözüm denersek,

$$a_{k+2} = a_k \frac{(2k+1-\varepsilon)}{(k+2)(k+1)} \tag{4.14}$$

olarak verilen iki terimli bir tekrarlama bağıntısı elde ederiz. Bu seri ise, $k \to \infty$ limitinde e^{x^2} gibi davrandığından, $\Psi(x)$ çözümü $x \to \infty$ limitinde

$$\Psi(x) \to e^{\frac{x^2}{2}} \tag{4.15}$$

gibi sonsuza gidecektir. Bundan dolayı, $[0, \infty]$ aralığında sonlu çözümler elde etmek için, seri çözümü sonlu sayıda terimden sonra sonlandırmamız

gerekir. Bu ise, ε enerji parametresini belli tam sayı değerler almaya zorlamakla mümkündür:

$$\varepsilon - 1 = 2n\ ,\ n = 0, 1, 2... \tag{4.16}$$

alırsak tekrarlama bağıntısı

$$a_{k+2} = a_k \frac{(2k-2n)}{(k+2)(k+1)} \tag{4.17}$$

olur ki, bu da bize (4.12) denklemi için,

$$\begin{array}{lll} n=0 & h_0(x) = & a_0 \\ n=1 & h_1(x) = & a_1 x \\ n=2 & h_2(x) = & a_0\left(1-2x^2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{4.18}$$

şeklinde verilen polinom çözümlerini verir. (4.17) tekrarlama bağıntısından n. dereceden polinomun, x'in azalan kuvvetlerinin katsayılarını

$$a_{n-2j} = (-1)^j \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-2j+1)}{2^j 2.4...2j} a_n \tag{4.19}$$

$$a_{n-2j} = \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)!} \frac{1}{2^j 2^j j!} a_n \tag{4.20}$$

olarak yazabiliriz. a_n ise, $a_n = 2^n$ olarak alındığında,

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \frac{2^{n-2j}x^{n-2j}n!}{(n-2j)!j!} \tag{4.21}$$

olarak tanımlanan Hermite polinomlarını buluruz. Bu polinomların sağladığı diferansiyel denklem ise,

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{4.22}$$

olarak verilen Hermite denklemidir. Burada tekrar fiziksel birimi olan E parametresini yazarsak,

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}\varepsilon, \tag{4.23}$$

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.24}$$

buluruz. Bu bize, kuantum mekaniğinde tek boyutlu harmonik salınıcının sadece belli enerji değerlerinde salınım yapabileceğini, bir başka deyişle; enerjinin kuantize olduğu sonucunu verir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

4.2 Hermite Polinomlarının Diğer Tanımları

4.2.1 Türetim Fonksiyonu

Hermite polinomları için türetim fonksiyonu $T(x,t)$;

$$T(t,x) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{4.25}$$

şeklinde verilir. Bunun daha önce verdiğimiz (4.21) tanımı ile eşdeğerliğini göstermek için sol tarafı,

$$e^{t(2x-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(2x-t)^n}{n!}, \tag{4.26}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n!2^{n-m}}{m!\,(n-m)!n!} x^{n-m} t^{n+m} \tag{4.27}$$

şeklinde yazalım. Burada

$$n+m \to n' \tag{4.28}$$

dönüşümünü kullanırsak (n' yerine tekrar n kullanılmıştır.),

$$e^{t(2x-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{2^{n-2m}x^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!} t^n \tag{4.29}$$

elde ederiz. (4.25) denkleminden bu ifade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{4.30}$$

serisine eşit olacağından, $H_n(x)$ kolayca (4.21)'de verilen ifade olarak elde edilir.

4.2.2 Rodriguez Formülü

Hermite polinomlarının bir başka tanımı da

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right] \tag{4.31}$$

şeklinde verilen Rodriguez formülüdür. Bunun türetim fonksiyonu tanımı ile özdeş olduğunu göstermek için, $F(t)$ gibi herhangi bir fonksiyonun,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{d^n F(t)}{dt^n}\right|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \tag{4.32}$$

şeklinde verilen Taylor açılımını ele alalım. Bunu (4.25) ile kıyasladığımızda,

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{dt^n} e^{2tx-t^2}\right]_{t=0} \tag{4.33}$$

$$= \left.\frac{\partial^n}{dt^n} e^{x^2-(x-t)^2}\right|_{t=0} \tag{4.34}$$

$$= \left. e^{x^2} \frac{\partial^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} \tag{4.35}$$

elde ederiz. Fakat, herhangi bir f fonksiyonu için

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t) \tag{4.36}$$

olacağından,

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x-t) = (-1)^n \left.\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} \tag{4.37}$$

$$\left. e^{x^2} \frac{\partial^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{4.38}$$

yazarak, istediğimiz sonucu elde ederiz.

4.3 Hermite Polinomlarının Tekrarlama Bağıntıları

Hermite polinomlarının türetim fonksiyonunu önce t'ye, sonra da x'e göre türevlerini alarak,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad \text{ve} \tag{4.39}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{4.40}$$

gibi iki kullanışlı tekrarlama bağıntısı elde ederiz.

4.4 Hermite Polinomlarının Dikliği

Hermite polinomlarının diklik özelliğini göstermek için

$$I_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \tag{4.41}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

integralini Rodriguez formülünü kullanarak yazalım:

$$I_{nm} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} e^{x^2} \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right] H_m(x). \tag{4.42}$$

Bu ifadeye n kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$I_{nm} = (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x^2}\right) H_n(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\right] H'_m(x)$$

....

$$= (-1)^{2n} \int dx e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_m \tag{4.43}$$

elde ederiz.

$n > m$ olduğu zaman, m. dereceden Hermite polinomunda x'in en yüksek kuvveti m olacağından, bu ifade sıfırdır. Eğer $n = m$ olursa,

$$H_n(x) = 2^n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + ... \tag{4.44}$$

olacağından

$$\frac{d^n H_n(x)}{dx^n} = 2^n n! \tag{4.45}$$

olacaktır. Buradan da

$$\begin{aligned} I_{nn} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n^2(x) \\ &= 2^n n! \sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{4.46}$$

buluruz. Bu bilgilerden yola çıkarak,

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.47}$$

fonksiyonlarını kullanarak tanımlayacağımız $\{\phi_n(x)\}$ seti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n(x) \phi_m(x) = \delta_{nm}$$

ilişkisini sağlayan dik bir set olacaktır. Bu set aynı zamanda da tam bir set olacağından, $[-\infty, \infty]$ aralığında verilen ve yeteri kadar iyi davranışlı herhangi bir fonksiyon bu set cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x) \tag{4.48}$$

şeklinde yazılabilecektir. C_n katsayıları ise,

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) \phi_n(\xi) \tag{4.49}$$

olarak bulunurlar.

Örnek (4.1) ***Gauss eğrisi ve Hermite polinomları:*** Kuantum mekaniğinde x_0 noktası etrafında lokalize olmuş bir parçacığın dalga fonksiyonunu,

$$f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2} \tag{4.50}$$

şeklinde verilen Gauss eğrisi ile temsil edebiliriz. Bu fonksiyonun Hermite polinomları cinsinden açılımına bir bakalım. Burada A normlama sabitidir ve Gauss eğrisinin altındaki alan 1 olacak şekilde belirlenir. Bu açılım, harmonik salınıcı potansiyeli altında hareket eden bir parçacığın dalga fonksiyonunun, harmonik salınıcının enerji özfonksiyonları cinsinden açılımına karşı gelmektedir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \tag{4.51}$$

yazarsak, C_n açılım sabitleri de

$$C_n = \frac{A}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi - x_0)^2 - \frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \tag{4.52}$$

olarak verilir. Bunu

$$C_n = \frac{A}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} \left[e^{2\xi\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\right] e^{-\frac{x_0^2}{4}} \tag{4.53}$$

olarak yazar ve t parametresini

$$\frac{x_0}{2} = t \tag{4.54}$$

olarak tanımlarsak, türetim fonksiyonunun tanımından da yararlanarak,

$$C_n = \frac{A}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x_0^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(\xi)}{m!} \left(\frac{x_0}{2}\right)^m H_n(\xi) \tag{4.55}$$

yazabiliriz. Burada diklik ilişkisi kullanılarak,

$$C_n = \frac{A}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x_0^2}{4}} \left(\frac{x_0}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int d\xi e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 \tag{4.56}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x_0^2}{4}} \left(\frac{x_0}{2}\right)^n \frac{1}{n!} 2^n n! \sqrt{\pi} \tag{4.57}$$

$$= Ae^{-\frac{x_0}{4}} \left(\frac{x_0}{2}\right)^n \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{n!}} \pi^{\frac{1}{4}} \tag{4.58}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

elde ederiz. C_n sabitleri ise,

$$|C_n|^2$$

olarak, harmonik salınıcı potansiyelinin etkisi altında hareket eden bir parçacığın, x_0 noktasında E_n enerji özhalinde bulunma olasılığını verir.

Örnek (4.2) ***Kuantum mekaniğinde dipol hesapları:*** Kuantum mekaniğinde elektrik dipol hesaplarında karşımıza çıkan bir integral ise,

$$I_{nm} = e\int_{-\infty}^{\infty} dx\phi_n(x)\,\phi_m(x)\,x \tag{4.59}$$

olarak verilir. Burada e elektrik yüküdür.

$$I_{nm} = \frac{e}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)\,H_m(x)\,x \tag{4.60}$$

ifadesini yazalım ve türetim fonksiyonu tanımını kullanarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx T(t,x)\,S(s,x)\,e^{-x^2}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)\,H_m(x)\,x\right]t^n s^m \tag{4.61}$$

integralini oluşturalım. Sağ taraftaki köşeli parantez içindeki ifade ki; buna J_{nm} dersek, aradığımız I_{nm} değerlerine

$$I_{nm} = \frac{e}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}}J_{nm} \tag{4.62}$$

ilişkisi ile bağlı olacaktır. (4.62) denkleminin sol tarafını açık olarak yazarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-t^2+2tx}e^{-s^2+2sx}e^{-x^2}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-(s+t))^2}e^{2st}\left[(x-(s+t))+(s+t)\right]$$

$$= e^{2st}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}du + (s+1)\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}\right\}$$

$$= e^{2st}(s+t)\sqrt{\pi} \tag{4.63}$$

bulunacaktır. Burada

$$u = x-(s+t) \tag{4.64}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu sonucu ise, t ve s'nin kuvvetleri olarak açarsak,

$$\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k s^k t^{k+1}}{k!} + \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k s^{k+1}t^k}{k!} \tag{4.65}$$

ifadesini ve bunu da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\left[J_{nm}\right]t^n s^m \tag{4.66}$$

ifadesi ile kıyasladığımızda,

$m \neq n \mp 1$	$J_{nm} = 0$	$I_{nm} = 0$
$m = n+1$	$J_{n,n+1} = \sqrt{\pi}2^n(n+1)!$	$I_{n,n+1} = e\sqrt{(n+1)/2}$
$m = n-1$	$J_{n,n-1} = \sqrt{\pi}2^{n-1}n!$	$I_{n,n-1} = e\sqrt{n/2}$

sonuçlarını elde ederiz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

4.5 Problemler

1.

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad \text{ve}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

denklemlerinde verilen tekrarlama bağıntılarını çıkarınız.

2. Kuantum mekaniğinde 3 boyutlu izotropik harmonik salınıcı problemi dalga fonksiyonunun radyal kısmı için aşağıdaki denklemi verir:

$$\frac{d^2R(r)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dR(r)}{dx} + (\varepsilon - x^2 - \frac{l(l+1)}{x^2})R(x) = 0.$$

Burada,

$$x = \frac{r}{\sqrt{\hbar/m\omega}}, \quad \varepsilon = \frac{E}{(\hbar\omega/2)}$$

olarak tanımlanmışlardır.

i) $x = \infty$ noktasındaki tekil noktasını inceleyiniz.
ii) $x \to \infty$ limitinde çözümün $R(x) \to e^{-x^2/2}$ gibi davrandığını gösteriniz.
iii)$x = 0$ noktası etrafında ve $x \in [0, \infty]$ aralığında sonlu çözümler için enerji özdeğerlerini bulunuz.
iv)İlk iki enerji özdeğeri için özfonksiyonları yazınız.

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n! (n + \frac{1}{2})$$

olduğunu gösteriniz.

4. Seçeceğiniz Hermit polinomlarını Mathematica ve Maple gibi programlar yardımı ile çizdirip inceleyiniz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

5

GEGENBAUER ve CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Helmholtz denklemini kutupsal koordinatlarda çözdüğümüzde karşımıza küresel harmonikler çıkar. l uzunluğunda bir telin salınımları nasıl sin ve cos fonksiyonları cinsinden gösteriliyorsa, Üç boyutta da bir kürenin yüzey salınımları küresel harmonikler cinsinden ifade edilir. Dört boyutlu küresel simetrik problemlerde veya dört boyutta bir hiper-kürenin yüzey salınımlarında ise, küresel harmoniklerin doğal uzantısı olan Gegenbauer polinomları kullanılır. Bu yüzden Gegenbauer polinomlarına ultra-küresel polinomlar da denir. Gegenbauer polinomları kozmolojide ve eğik uzay-zamanlar üzerinde kuantum alan teorisi hesaplarında çok yararlıdır. Chebyshev polinomları ise, Gegenbauer polinomları ile yakından ilişkili bir başka tam ve dik polinom setidir.

5.1 Kozmoloji ve Gegenbauer Polinomları

Kozmolojide sık kullanılan modellerden bir tanesi de evrenin yaşanan bölümünün 4 boyutlu bir kürenin 3 boyutlu yüzeyine karşı geldiği modellerdir. Bu modeller kapalı Friedmann modelleri olarak da bilinir. Böyle bir evrende herhangi bir yönde sürekli olarak hareket edilirse, başlangıç noktasına geri dönülecektir. Kapalı Friedmann modellerinde sonsuz yakın iki nokta arasındaki mesafe elemanı (line element),

$$ds^2 = c^2dt^2 - R_0(t)^2[d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2] \tag{5.1}$$

olarak verilir. Burada t evrensel zamanı göstermektedir. $R_0(t)$ evrenin yarıçapı olup, açısal koordinatlar χ, θ ve ϕ ise,

$$\chi \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \tag{5.2}$$

sınırları arasında değişirler. R_0'ın sabit olduğu durumlarda kütlesiz konformal skalar alanın dalga denklemi

$$\Box^2\Phi(t, \chi, \theta, \varphi) + \frac{1}{R_0^2}\Phi(t, \chi, \theta, \varphi) = 0 \tag{5.3}$$

olacaktır. Burada dalga operatörü (D'Alambert) $\Box^2$,

$$\Box^2 = \frac{d^2}{dt^2} - \overrightarrow{\nabla}^2 \tag{5.4}$$

olarak tanımlanmış ve ışığın hızı da $c = 1$ olarak alınmıştır. (5.3) denkleminde

$$\Phi(t, \chi, \theta, \varphi) = T(t)X(\chi)Y(\vartheta, \varphi) \tag{5.5}$$

gibi ayrılabilir bir çözüm denersek,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}\right] - \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{X(\chi)}\frac{d^2X(\chi)}{d\chi^2} - \frac{2\cos\chi}{\sin\chi}\frac{1}{X(\chi)}\frac{dX(\chi)}{d\chi} + 1\right]$$

$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\theta^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right] = 0 \tag{5.6}$$

denklemini elde ederiz. t, χ, θ, ve φ bağımsız değişkenler olduklarından T, X ve Y için çözülmesi gereken denklemleri

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -\omega^2, \tag{5.7}$$

$$\sin^2\chi\frac{d^2X(\chi)}{d\chi^2} + 2\sin\chi\cos\chi\frac{dX(\chi)}{d\chi} + \left(\omega^2 - \frac{1}{R_0^2}\right)R_0^2\sin^2\chi X(\chi) = -\lambda, \tag{5.8}$$

$$\left[\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right] = \lambda \tag{5.9}$$

olarak buluruz. Burada, ω ve λ ayrılma sabitleridir. Dalga hareketlerinde ω açısal frekansa karşı gelmektedir.

(5.7) denkleminin çözümü kolayca

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Üçüncü denklem ise, 2. Bölümde gördüğümüz küresel harmoniklerin sağladığı (2.173) denkleminden başka birşey değildir ve bu bölümde gördüğümüz nedenlerden dolayı ayrılma sabiti λ,

$$\lambda = -l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, ... \tag{5.11}$$

olarak verilir. (5.8) denklemi üç terimli bir tekrarlama bağıntısı vereceğinden,

$$X(\chi) = C_0\sin^l\chi C(\cos\chi), \tag{5.12}$$

$$x = \cos\chi, \; x \in [-1, 1] \tag{5.13}$$

gibi bir tanımlama ile $C(x)$ için

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2C(x)}{dx^2} - (2l+3)x\frac{dC(x)}{dx} + \left[-l(l+2) + (\omega^2 - \frac{1}{R_0^2})R_0^2\right]C(x) = 0 \tag{5.14}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin $x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil noktası vardır. $[-1, 1]$ aralığında ve sıfır noktası etrafında

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{5.15}$$

gibi bir seri çözüm denersek,

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\{a_{k+2}(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)$$

$$+[-(k+\alpha)(k+\alpha-1) - (2l+3)(k+\alpha) + A]a_k\}x^{k+\alpha} = 0 \tag{5.16}$$

buluruz. Burada

$$A = -l(l+2) + (\omega^2 - \frac{1}{R_0^2})R_0^2 \tag{5.17}$$

olarak tanımlanmıştır. (5.16) denkleminin bütün x değerleri için sağlanması, x'in bütün kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkün olacağından,

$$a_0\alpha(\alpha-1) = 0, \tag{5.18}$$

$$a_1\alpha(\alpha+1) = 0, \tag{5.19}$$

$$a_{k+2} = a_k[\frac{(k+\alpha)(k+\alpha-1) + (2l+3)(k+\alpha) - A}{(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)}], \tag{5.20}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$k = 0, 1, 2, ... \tag{5.21}$$

yazarız. İndis denklemi olan (5.18)'in çözümlerinden olan $\alpha = 0$ değerini kullanarak, genel çözümü

$$C(x) = a_0 \left[1 - \frac{A}{2}x^2 - \left(\frac{2 + 2(2l+3) - A}{3.4}\right)\left(\frac{A}{2}\right)x^4 + ...\right]$$

$$+a_1 \left[x + \frac{(2l+3) - A}{2.3}x^3 + ...\right] \tag{5.22}$$

şeklinde buluruz. a_0 ve a_1 integral sabitleri olup, tekrarlama bağıntısı da genelde

$$a_{k+2} = a_k[\frac{k(k-1) + (2l+3)k - A}{(k+2)(k+1)}], k = 0, 1, 2, ... \tag{5.23}$$

olarak verilir. Tekrarlama bağıntısında

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+2}}{a_k} \to 1 \tag{5.24}$$

limiti doğru olduğundan, $x = \pm 1$ noktalarında bu seriler, $\frac{1}{1-x^2}$ gibi sonsuza giderler. Bunu önlemek için daha önce yaptığımız gibi ω'yı belli değerler ile sınırlayarak serileri sonlandırmamız gerekir. Bu değerler ise,

$$\omega_n = \frac{(n+1)c}{R_0} \tag{5.25}$$

olarak kolayca bulunabilir. Burada ışık hızı c denkleme tekrar dahil edilmiştir. Bu şekilde bulunan polinom çözümler, biraz sonra göreceğimiz gibi Gegenbauer polinomları cinsinden ifade edilebilir.

Dikkat edilirse, frekansın kuantize olması önceden tahmin edebileceğimiz bir sonuçtur. Kapalı bir evrenin çevresinin $2\pi R_0$ olarak verildiğini ve bir çevre üzerinde de sadece dalga boylarının tamsayı katlarının bulunabileceğini düşünürsek,

$$(1+n)\lambda = 2\pi R_0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.26}$$

yazar ve

$$\omega_n = 2\pi c/\lambda,$$

formülü ile kolayca (5.25)'de verilen frekansları buluruz.

5.2 Gegenbauer Denklemi ve Çözümleri

Gegenbauer denklemi genelde

$$(1-x^2)\frac{d^2C_n^\lambda(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x\frac{dC_n^\lambda(x)}{dx} + n(n+2\lambda)C_n^\lambda(x) = 0 \tag{5.27}$$

şeklinde verilir. Bu denklem $\lambda = 1/2$ değeri için Legendre denklemine indirgenir. n parametresinin tamsayı değerler aldığı durumlarda çözümü,

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{\Gamma(n-r+\lambda)}{\Gamma(\lambda)r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \tag{5.28}$$

şeklinde verilen Gegenbauer polinomlarıdır.

5.2.1 Gegenbauer Polinomlarının Diklik İlişkisi ve Türetim Fonksiyonu

Bu polinomların diklik ilişkisi

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)dx = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)^2\Gamma(n+1)}\delta_{nm} \tag{5.29}$$

şeklindedir.

Gegenbauer polinomlarının türetim fonksiyonu ise,

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)t^n, \quad |t|<1, \ |x|\le 1, \ \lambda > 1/2 \tag{5.30}$$

şeklindedir. Kozmolojide karşımıza çıkan (5.14) denkleminin çözümü de Gegenbauer polinomları cinsinden,

$$C_{n-l}^{l+1}(x) \tag{5.31}$$

olarak verilir.

5.3 Chebyshev Denklemi ve Polinomları

5.3.1 Birinci Dereceden Chebyshev Polinomları

$$T_n(\cos\chi) = \cos(n\chi), \quad n = 0, 1, 2.... \tag{5.32}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 2004 III. baskı

şeklinde tanımlanan polinomlara birinci dereceden Chebyshev polinomları denir ve bu polinomlar,

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2} - x\frac{dT_n(x)}{dx} + n^2T_n(x) = 0 \tag{5.33}$$

olarak verilen Chebyshev denklemini sağlarlar. Burada

$$x = \cos\chi \tag{5.34}$$

olarak tanımlanmıştır.

5.3.2 *Chebyshev ve Gegenbauer Polinomları Bağıntısı*

Chebyshev denkleminin x'e göre türevini n kez alırsak,

$$(1-x^2)\frac{d^{l+3}(\cos n\chi)}{dx^{l+3}} - (2l+3)x\frac{d^{l+2}(\cos n\chi)}{dx^{l+2}} \tag{5.35}$$

$$+\left[-l^2-2l-1+\omega^2R_0^2\right]\frac{d^{l+1}(\cos n\chi)}{dx^{l+1}} = 0 \tag{5.36}$$

elde ederiz. Burada n^2 yerine $\omega^2R_0^2$ yazılmıştır. Bu denklemi ise,

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (2l+3)\frac{d}{dx} + \left[-l(l+2+\left(\omega^2-\frac{1}{R_0^2}\right)R_0^2\right]\right\}\frac{d^{l+1}(\cos n\chi)}{dx^{l+1}} = 0$$

şeklinde yazarsak, (5.14) denkleminin çözümünün

$$C(x) = \frac{d^{l+1}(\cos n\chi)}{d(\cos\chi)^{l+1}} \tag{5.37}$$

olarak veya birinci dereceden Chebyshev polinomları cinsinden

$$C(x) = \frac{d^{l+1}T_n(x)}{dx^{l+1}} \tag{5.38}$$

şeklinde de yazılabileceğini görürüz.

5.3.3 *İkinci dereceden Chebyshev polinomları*

İkinci dereceden Chebyshev polinomları

$$U_n(x) = \sin(n\chi), \qquad x = \cos\chi \tag{5.39}$$

olarak tanımlanırlar ve birinci dereceden Chebyshev polinomları ile aynı denklemi (5.33) sağlarlar.

Genelde, x değişkeni cinsinden Chebyshev polinomları

$$T_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^n\frac{n!}{(2r)!(n-2r)!}(1-x^2)^r x^{n-2r} \quad \text{ve} \tag{5.40}$$

$$U_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^n\frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}x^{n-2r-1} \tag{5.41}$$

olarak yazılabilirler. Bazı n değerleri için bu ifadeler

$$T_0 = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \tag{5.42}$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

.....

ve

$$U_0 = 0$$

$$U_1(x) = \sqrt{(1-x^2)}$$

$$U_2(x) = \sqrt{(1-x^2)}(2x)$$

$$U_3(x) = \sqrt{(1-x^2)}(4x^2-1) \tag{5.43}$$

$$U_4(x) = \sqrt{(1-x^2)}(8x^3-4x)$$

$$U_5(x) = \sqrt{(1-x^2)}(16x^4-12x^2+1)$$

.....

polinomlarını verilirler. Birinci ve ikinci dereceden Chebyshev polinomları, Chebyshev denkleminin (5.33) bağımsız çözümleridir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

5.3.4 *Chebyshev Polinomlarının Diklik İlişkisi ve Türetim Fonksiyonları*

Chebyshev polinomlarının türetim fonksiyonları

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_n(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n \quad \text{ve} \tag{5.44}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)t^n \tag{5.45}$$

olarak verilirler. Diklik ilişkileri ise,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{array} \right\} \quad \text{ve} \tag{5.46}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \end{array} \right\} \tag{5.47}$$

şeklinde verilirler.

5.4 Problemler

1. (5.8) denklemin üç terimli bir tekrarlama bağıntısı verdiği gerçeğinden yola çıkarak, iki terimli bir tekrarlama bağıntısı elde etmek için (5.12) dönüşümünü bulunuz.
2. (5.1) mesafe elemanını kullanarak kapalı bir evrenin hacmini bulunuz.
3. (5.14) denkleminin çözümlerinin $C_{n-l}^{l+1}(x)$ şeklinde verildiğini gösteriniz.
4. Gegenbauer polinomlarının diklik ilişkisini gösteriniz.
5. Türetim fonksiyonu tanımını kullanarak Gegenbauer polinomlarını bulunuz.
6. Chebyshev denkleminin, $[-1, 1]$ aralığında seriler yöntemi ile sonlu çözümlerini bulunuz. n parametresi üzerinde bir kısıtlama gereği var mıdır?

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
III. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

6

BESSEL FONKSİYONLARI

Doğada bir sistemin üzerine etki eden kuvvetlerin toplamının sıfır olduğu denge durumları kadar, denge durumundan sapmalarda önemlidir. Kararlı denge durumu olarak bilinen durumlarda sapmalar zamanla söner ve sistem eski haline döner. Kararsız denge durumlarında ise, sapmalar gittikçe büyüyerek sistemin sonunda topyekün çöküşüne neden olur. Sistem ne olursa olsun, içinde bulunulan durumun kararlı olup olmadığını belirlemek çok önemlidir ve genelde problemin kendinden daha zordur. Birinci tip olarak adlandıracağımız kararsızlık dış etkenlerden (pertürbasyonlardan) kaynaklanır. İkinci tip kararsızlık ise, kaosta olduğu gibi sistemin yapısında var olan ve doğrusal olmayan özelliklerden ortaya çıkar. Birinci tip sapmalara örnek olarak, Dünya'nın yakınından geçebilecek küçük bir göktaşının etkisini verebiliriz. Bu olay Dünya'yı yörüngesinden çıkarmasa da bir miktar sapmaya neden olacaktır. Dünya, her zaman takip ettiği yörüngesi etrafında küçük salınımlar yaptıktan sonra, az da olsa var olan sürtünmenin etkisi ile zamanla eski eliptik yörüngesine dönecektir. Burada önemli olan, göktaşının kütlesi ve yörüngesinin bilinmesi durumunda sapmanın miktarının öngörülebilir olmasıdır.

Kaosta, sistemin öngörülemeyen ve rasgele olan davranışı, sistemin içinde var olan ve doğrusal olmayan durumlardan kaynaklanır. Bu tür sistemlerde uzun vadeli öngörü ya çok zor, ya da mümkün olmamaktadır. Sistemin anlık durumu çok duyarlı olarak bilinse bile, daha sonra ne olacağı konusunda bu yeterli olmaz. Kaotik sistemlerin bir özelliği de sistemin başlangıç şartlarına duyarlığıdır. Birbirine çok yakın başlangıç şartlarındaki iki kaotik sistem, hızlı bir şekilde birbirinden çok farklı durumlara gelişir. Kaotik sistemlerin bir başka özelliği ise, uzun süre belli bir şekilde davranan bir sistemin, öngörülemeyen bir zamanda ve çok kısa bir sürede tamamen farklı bir şekilde davranmaya başlayabilmesidir. Son yıllarda kaotik sistemlere birleşik sarkaçlardan, damlayan musluklara, avcı-av ekolojisinden, kızamık salgınlarına, salınan kimyasal reaksiyonlardan, tavukların düzensiz kalp atışlarına kadar pek çok örnek bulunmuştur. Sosyoloji, ekonomi ve finans alanlarına uygulamaları ise, şüphesiz ki çok ilginç olacaktır. Kaos için bir başka ilginç uygulama alanı ise, atmosfer olayları ve hava durumu tahminleridir. Uydu fotoğraflarından Mars'ın atmosferinin bir zamanlar Dünya'dakinden çok da farklı olmadığı anlaşılmaktadır. Ancak, ne olmuştur da Mars birden yaşam için çok zor bir gezegene dönüşmüştür? Bizi asıl endişelendiren ise, Dünya'da da aynı şeyin olup olamıyacağı ve olacaksa ne zaman olacağıdır.

Birinci tip problemlere örnek olarak l boyunda, ucundan asılmış ve serbestçe salınabilen katı bir çubuğu ele alalım. Çubuğu denge durumundan θ

kadar çekip bırakırsak, hareket denklemi

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \tag{6.1}$$

olacaktır. Burada $I = \frac{1}{3}ml^2$ eylemsizlik momenti, m çubuğun kütlesi, g de yerçekimi ivmesidir. Küçük sapmalar için $\sin\theta \simeq \theta$ yazarsak, (6.1) denkleminin çözümü de trigonometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}\ . \tag{6.2}$$

olarak verilecektir.

Şimdi, bu çubuğun viskoz bir sıvı içinde küçük salınımlarla hareket ettiğini düşünelim. Bu durumda çubuğun hareketini engelleyen $-kl\frac{d\theta}{dt}$ gibi bir kuvvet olacaktır. Hareket denklemi ise,

$$I\ddot{\theta} \simeq -kl\frac{d\theta}{dt} - mgl\theta \tag{6.3}$$

şeklinde verilecektir. Bu durumda viskositenin az olduğu durumlarda çözüm gene trigonometrik fonksiyonlar cinsinden verilecek, ancak viskositenin yüksek olduğu durumlarda çözüm,

$$\theta = A\cosh\omega t + B\sinh\omega t, \qquad \omega = \frac{3}{ml}[-k \pm \sqrt{k^2 - \frac{4m^2l^2}{3}}]\ . \tag{6.4}$$

şeklinde hiperbolik fonksiyonlar cinsinden olacaktır.

Şimdi katı bir çubuk yerine, l boyunda düzgün ve esnek bir zincirin salınımlarını ele alalım. Zincirin halkalarının zincirin boyundan çok küçük olduğunu varsayalım ve yoğunluğu da $\rho_o(gm/cc)$ olarak verilsin. Zincirin serbest ucundan yukarı doğru olan dikey koordinatını x, denge durumundan sapmasını da $y(x,t)$ olarak gösterelim. Denge halindeki zincirde gerilim $\rho_o g x$ olacağından denge durumundan küçük sapmalar için Δx boyundaki bir halkanın hareket denklemini

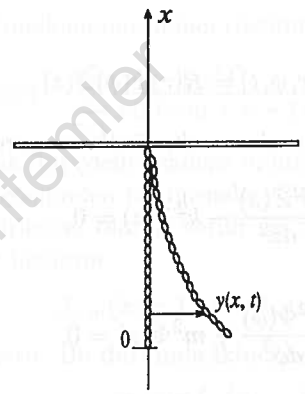
$$\begin{aligned}(\rho_o\Delta x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x}[\rho_o g x\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}]\Delta x, \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{dt^2}\Delta x &= g\frac{\partial}{\partial x}[x\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}]\Delta x\end{aligned} \tag{6.5}$$

olarak yazabiliriz (Şekil (6.1)). Bu da sadeleştirince

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{dt^2} = g\frac{\partial}{\partial x}[x\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}] \tag{6.6}$$

şeklinde olur. Bu denklemde

$$y(x,t) = u(x)v(t) \tag{6.7}$$



ŞEKİL 6.1. **Düzgün ve esnek bir zincirin küçük salınımları.**

gibi ayrılabilir bir çözüm denersek,

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} = \frac{g}{u(x)}[\frac{du}{dx} + x\frac{d^2u}{dx^2}] = -\omega^2 \tag{6.8}$$

yazabiliriz. Burada ω ayrılma sabitidir. $v(t)$ için çözüm kolayca

$$v(t) = c_0\cos(\omega t - \delta) \tag{6.9}$$

şeklinde bulunur. $u(x)$ ise,

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \frac{\omega^2}{g}u = 0 \tag{6.10}$$

denklemini sağlar. Yeni bir bağımsız değişken

$$z = 2\sqrt{\frac{x}{g}} \tag{6.11}$$

tanımlarsak, bu denklem

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \omega^2 u = 0 \tag{6.12}$$

şeklini alacaktır. Bu denklemin çözümünü ifade etmek için ise, Bessel fonksiyonu olarak bilinen yeni bir fonksiyona ihtiyaç vardır. Bu denklem de Bessel denkleminin özel bir durumudur.

6.1 Bessel Denklemi

Silindirik koordinatlarda Laplace denklemini

$$\overrightarrow{\nabla}^2\Psi(r,\phi,z) = 0 \tag{6.13}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

olarak yazar ve

$$\Psi(r,\phi,t) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \tag{6.14}$$

şeklinde ayrılabilir bir çözüm denersek, çözülmesi gereken denklemleri,

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0, \tag{6.15}$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0, \tag{6.16}$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R(r) = 0 \tag{6.17}$$

olarak elde ederiz. Birinci ve ikinci denklemlerin çözümleri

$$Z(z) = \bar{c}_1 e^{ikz} + \bar{c}_2 e^{-ikz}, \tag{6.18}$$

$$\Phi(\phi) = c_1 e^{im\phi} + c_2 e^{-im\phi} \tag{6.19}$$

olarak kolayca bulunur. (6.5) numaralı denklem ise, Bessel denklemi olarak bilinir ve genelde

$$x = kr, \quad R(r) = J_m(x) \tag{6.20}$$

dönüşümü ile

$$J_m''(x) + \frac{1}{x}J_m'(x) + (1 - \frac{m^2}{x^2})J_m(x) = 0 \tag{6.21}$$

şeklinde yazılır. Çözümleri olan $J_m(x)$ fonksiyonları ise, Bessel fonksiyonları olarak bilinir.

6.2 Bessel Denkleminin Çözümleri

6.2.1 Bessel Fonksiyonları $J_{\pm m}(x), N_m(x), H_m^{(1,2)}(x)$

Bessel denkleminin seri çözümü

$$J_m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(m+r+1)}(\frac{x}{2})^{m+2r} \tag{6.22}$$

olarak verilir. Bessel denkleminin ikinci çözümü ise,

$$J_{-m}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-m+r+1)}(\frac{x}{2})^{-m+2r} \tag{6.23}$$

olarak bulunur. Ancak, bu çözüm sadece m'nin tamsayıdan farklı değerler aldığı zaman birinci çözümden bağımsızdır. Bu durumda, genel çözüm iki çözümün doğrusal birleşimi olarak verilir. m'nin tamsayı değerler aldığı zaman ise, iki çözüm birbirine

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \tag{6.24}$$

ilişkisi ile bağlı olacaktır. Bu durumda ikinci bağımsız çözüm olarak,

$$N_m(x) = \frac{\cos m\pi J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \tag{6.25}$$

şeklinde tanımlanan Neumann fonksiyonları alınır.

Bazı durumlarda yararlı olan bir başka çözüm seti de

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x), \tag{6.26}$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x), \tag{6.27}$$

olarak tanımlanan Hankel fonksiyonlarıdır.

$J_m(x)$ fonksiyonları $x \to 0$ limitinde $m \geq 0$ için sonludur ve

$$\lim_{x\to 0} J_m(x) \to \frac{1}{\Gamma(m+1)}(\frac{x}{2})^m \tag{6.28}$$

şeklinde davranır. Diğer fonksiyonların tümü

$$\lim_{x\to 0} N_m(x) \to \left\{ \begin{array}{c} \frac{2}{\pi}\left[\ln(\frac{x}{2}) + 0.5772...\right] \\ -\frac{\Gamma(m)}{\pi}(\frac{2}{x})^m \end{array} \right\} \tag{6.29}$$

olduğundan, $x \to 0$ limitinde sonsuzdurlar.

$x \to \infty$ limitinde ise, aşağıdaki gibi davranırlar:

$$J_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{6.30}$$

$$N_m(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{6.31}$$

$$H_m^{(1)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\right], \tag{6.32}$$

$$H_m^{(2)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\right]. \tag{6.33}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

6.2.2 *Modifiye Bessel Fonksiyonları* $I_m(x), K_m(x)$

Bessel fonksiyonlarının değişkeni sanal olarak alınırsa, modifiye (değiştirilmiş) Bessel fonksiyonu olarak bilinen

$$I_m(x) = \frac{J_m(ix)}{i^m} \tag{6.34}$$

ve

$$K_m(x) = \frac{\pi i}{2}(i)^m H_m^{(1)}(ix) \tag{6.35}$$

fonksiyonları karşımıza çıkar. Bu fonksiyonlar,

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} - (1 + \frac{m^2}{x^2})R(x) = 0 \tag{6.36}$$

denklemini sağlarlar. Bu fonksiyonların $x \to 0$ ve $x \to \infty$ limitleri ise,

$$\lim_{x\to 0} I_m(x) \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)}, \tag{6.37}$$

$$\lim_{x\to 0} K_m(x) \to \left\{ \begin{array}{ll} -(\ln(\frac{x}{2}) + 0.5772...) & m = 0 \\ \frac{\Gamma(m)}{2}(\frac{2}{x})^m & m \neq 0 \end{array} \right\} \tag{6.38}$$

ve

$$\lim_{x\to\infty} I_m(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + 0(\frac{1}{x})\right], \tag{6.39}$$

$$\lim_{x\to\infty} K_m(x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + 0(\frac{1}{x})\right] \tag{6.40}$$

olarak verilirler.

6.2.3 *Küresel Bessel Fonksiyonları* $j_n(x), n_n(x)$

Küresel Bessel fonksiyonları olan $j_l(x)$, $n_l(x)$ ve $h_l^{(1,2)}(x)$ ise,

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \tag{6.41}$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{6.42}$$

ve

$$h_l^{(1,2)}(x) = (\frac{\pi}{2x})^{1/2} \left[J_{l+\frac{1}{2}}(x) \pm iN_{l+\frac{1}{2}}(x)\right] \tag{6.43}$$

olarak tanımlanırlar. Bu fonksiyonların hepsi

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} + (1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{x^2})R(x) = 0 \tag{6.44}$$

denklemini sağlarlar. Küresel Bessel fonksiyonları

$$j_l(x) = (-x)^l (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^l \frac{\sin x}{x}, \tag{6.45}$$

$$n_l(x) = (-x)^l (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^l (-\frac{\cos x}{x}) \tag{6.46}$$

olarakda tanımlanabilirler.

6.3 Bessel Fonksiyonlarının Diğer Tanımları

6.3.1 *Türetim Fonksiyonu*

Bessel fonksiyonları $T(x,t)$ şeklinde bir türetim fonksiyonu cinsinden

$$\exp\left[\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \tag{6.47}$$

olarak da tanımlanabilir.

6.3.2 *İntegral Tanımları*

Bessel fonksiyonlarının

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left[n\varphi - x\sin\varphi\right] d\varphi, \qquad n = \text{ tamsayı} \tag{6.48}$$

ve

$$J_n(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt, \qquad (n > -\frac{1}{2}) \tag{6.49}$$

şeklinde, integral tanımları da vardır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

6.4 Bessel Fonsiyonları için Tekrarlama Bağıntıları

Bessel fonksiyonlarının seri tanımını kullanarak aşağıdaki tekrarlama bağıntılarını elde edebiliriz:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \tag{6.50}$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \tag{6.51}$$

Bunları ise, önce toplayıp sonra çıkararak, sırası ile

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x) \tag{6.52}$$

$$J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x) \tag{6.53}$$

bağıntılarını elde ederiz. N_n, $H_n^{(1)}$ve $H_n^{(2)}$ fonksiyonları da aynı tekrarlama bağıntılarını sağlayacaktır.

6.5 Bessel Fonksiyonlarının Kökleri ve Dik Olmaları

Bessel fonksiyonunun asimtotik halinden (6.30) sonsuz sayıda kökü olacağı açıktır:

$$J_n(x_{nl}) = 0 \quad l = 1, 2, 3..... \quad . \tag{6.54}$$

Burada x_{nl}, n. dereceden Bessel fonksiyonunun l. kökünü göstermektedir. n'nin tamsayı değerler aldığı durumlarda ilk üç kök aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{array}{llll} \text{n=0} & x_{ol} = 2.405 & 5.520 & 8.654 \\ \text{n=1} & x_{1l} = 3.832 & 7.016 & 10.173 \\ \text{n=2} & x_{2l} = 5.136 & 8.417 & 11.620 \end{array} \tag{6.55}$$

Yüksek dereceden kökler ise, yaklaşık olarak

$$x_{nl} \backsimeq l\pi + (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} \tag{6.56}$$

formülü ile bulunabilir.

Bessel fonksiyonlarının $[0, a]$ aralığında diklik özelliği

$$\int_0^a r J_n(x_{nl}\frac{r}{a}) J_n(x_{nl'}\frac{r}{a}) dr = \frac{a^2}{2} \left[J_{n+1}(x_{nl})\right]^2 \delta_{ll'} \tag{6.57}$$

olarak verilir. Bessel fonksiyonları aynı zamanda da tam bir set oluşturduğundan, verilen bir $f(r)$ fonksiyonu

$$r \in [0, a] \tag{6.58}$$

aralığında,

$$f(r) = \sum_{l=1}^{\infty} A_{nl} J_n(x_{nl}\frac{r}{a}) \tag{6.59}$$

olarak ifade edilebilir. Burada A_{nl} katsayıları

$$A_{nl} = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(x_{nl})} \int_0^a r f(r) J_n(x_{nl}\frac{r}{a}) dr \tag{6.60}$$

formülü ile bulunur.

6.6 Bessel Fonksiyonları ve Sınır Şartları

Bir önceki bölümde (6.40) denkleminde Dirichlet sınır şartı olarak bilinen

$$R(a) = 0 \tag{6.61}$$

şartını kullandık. Bessel fonksiyonu cinsinden bu şart

$$J_n(ka) = 0 \tag{6.62}$$

şeklinde yazılır ve bize Bessel fonksiyonunun,

$$x_{nl} \tag{6.63}$$

olarak gösterdiğimiz sonsuz sayıda olan köklerini verir. Bu kökleri sıralayan l indisine göre

$$\{J_n(x_{nl}\frac{r}{a})\} \tag{6.64}$$

setinin dik ve tam bir set olduğunu söylemiştik. Aynı şeyler,

$$\frac{dR(r)}{dr}|_{r=a} = 0 \tag{6.65}$$

olarak verilen Neumann şartları ile her ikisinin bir karışımı olarak alınabilen ve

$$[A_o \frac{dR(r)}{dr} + B_o R(r)]|_{r=a} = 0 \tag{6.66}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde ifade edilen Robin şartı için de geçerlidir. Bessel fonksiyonları cinsinden Neumann şartı

$$k\frac{dJ_n(x)}{dr}|_{x=a} = 0 \tag{6.67}$$

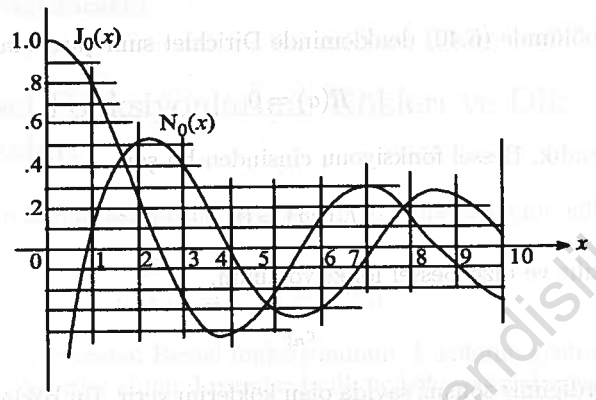
şeklinde ve Robin şartı ise,

$$\left[A_o J_n(r) + B_o k\frac{dJ_n(x)}{dr}\right]|_{x=a} = 0 \tag{6.68}$$

olarak verilir. Neumann şartı için (6.67) denkleminin sonsuz sayıda kökü vardır ve cetvellerden bulunabilir. Robin şartı için sonsuz sayıda kök olmasına rağmen, değerleri A_o ve B_o katsayılarına bağlı olacağından, bulunmaları için nümerik analiz gereklidir. Her üç sınır şartında da

$$\{J_n(x_{nl}\frac{r}{a})\}\ ,\ l = 1, 2, 3, ... \tag{6.69}$$

şeklinde verilen dik ve tam bir fonksiyon seti elde ederiz.



ŞEKİL 6.2. J_0ve N_0 fonksiyonları.

Örnek (6.1) ***Esnek zincir problemi:*** Bölümün başında hareket denklemini yazdığımız bir ucundan asılı zincir problemine geri dönersek,

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \omega^2 u = 0$$

denkleminin çözümünün

$$u(z) = a_0 J_0(\omega z) + a_1 N_0(\omega z), \qquad (z = 2\sqrt{\frac{x}{g}})$$

olduğunu görürüz. z sıfıra yaklaştıkça $N_0(\omega z)$ sonsuza gideceğinden a_1 sabitini sıfır olarak seçeriz (Şekil(6-2)) . Böylece zincirin denge noktasından sapması

$$y(x,t) = a_0 J_0(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}})\cos(\omega t - \delta)$$

olarak bulunur.

$$y(l,t) = 0$$

şartını da koşarsak, salınımların normal modlarının frekanslarını

$$2\omega_n\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.405,\ 5.520,\ .....\quad (n = 1, 2, ...)$$

olarak buluruz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

6.7 Problemler

1. Esnek zincirin hareket denklemini çıkarınız.

2. Bessel fonksiyonlarının (6.50) ve (6.53) denklemlerinde verilen tekrarlama bağıntılarını gösteriniz.

3. $$\nabla^2\Psi(\overrightarrow{r},t)-\frac{\partial^2\Psi(\overrightarrow{r},t)}{c^2\partial t^2}=0$$

   şeklinde verilen dalga denklemini 3-boyutta küresel simetrik koordinatlarda yazarak ve koordinatların ayrılması yöntemi ile çözerek, radyal koordinat için çözümlerin küresel Bessel fonksiyonları olduğunu gösteriniz.

4. Yukarıdaki çözümlerinizi küresel-ayrık yani, $r=a$ yüzeyinde

   $$\Psi(\overrightarrow{r},t)=\begin{cases} V_0e^{-iw_0t} & 0<\ \theta<\frac{\pi}{2} \\ -V_0e^{-iw_0t} & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi \end{cases}$$

   olan bir anten için uyguluyarak akustik dalga çözümlerini bulunuz. $r\to\infty$ limitinde çözümün

   $$\psi\backsim\frac{1}{r}e^{i(k_0r-\omega_0t)},\ k=k_0=\frac{\omega_0}{c}$$

   gibi davrandığını varsayınız.

5. İki boyutta dairesel bir davul zarı için dalga denklemini çözünüz. Hangi sınır şartlarını kullandınız?

6. Maple ve Mathematica gibi programlar yardımı ile Bessel fonksiyonlarını çizdirip çalışınız.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

7

GAUSS DENKLEMİ ve ÇÖZÜMLERİ

Özel fonksiyonlar ile fizik ve mühendislik uygulamalarında karşımıza çıkabilecek pek çok ikinci dereceden diferansiyel denklem,

$$x(1-x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy(x)}{dx}-aby(x)=0 \qquad (7.1)$$

şeklinde ifade edilen Gauss denklemi ve a,b,c gibi üç parametre cinsinden sınıflandırılabilir. Gauss denkleminin çözümlerine de hipergeometrik fonksiyonlar denir.

7.1 Hipergeometrik Fonksiyonlar

Gauss denkleminin $x=0,1$ ve ∞'da olmak üzere üç tane düzgün tekilliği vardır. Dolayısıyla, $x=0$ noktası etrafında Frobenius yöntemini kullanabilir ve

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{s+r} \qquad (7.2)$$

şeklinde bir seri çözüm deneyebiliriz. Bunu Gauss denkleminde yerine koyarsak,

$$\begin{gathered} x\left(1-x\right)\sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)\left(s+r-1\right)x^{s+r-2} \\ +\left\{c-\left(a+b+1\right)x\right\}\sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)x^{s+r-1} \\ -ab\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{r+s}=0, \end{gathered} \qquad (7.3)$$

elde ederiz. Bu ise,

$$\begin{gathered} \sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)\left(s+r-1\right)x^{s+r-1} \\ -\sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)\left(s+r-1\right)x^{s+r} \\ +c\sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)x^{s+r-1} \\ -\left(a+b+1\right)\sum_{r=0}^{\infty}a_r\left(s+r\right)x^{s+r}-ab\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{r+s}=0 \end{gathered} \qquad (7.4)$$

şeklinde yazılır ve düzenlenirse,

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left[(s+r)(s+r-1)+c(s+r)\right]a_r x^{s+r-1}$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}\left[(s+r-1)(s+r-2)+(a+b+1)(s+r-1)+ab\right]a_{r-1}x^{s+r-1}=0 \tag{7.5}$$

bulunur. Burada da ilk terimi açık olarak yazarsak,

$$\left[s(s-1)+sc\right]a_0+$$
$$\sum_{r=1}^{\infty}\{[(s+r)(s+r-1)+c(s+r)]a_r$$
$$-a_{r-1}\left[(s+r-1)(s+r-2)+ab+(a+b+1)(s+r-1)\right]\}x^{s+r-1} \tag{7.6}$$

elde ederiz. Bu bize indis denklemini

$$s(s-1)+sc=0 \tag{7.7}$$

şeklinde ve tekrarlama bağıntısını da

$$a_r=\frac{(s+r-1+a)(s+r-1+b)}{(s+r)(s+r-1+c)}a_{r-1} \qquad r\geq 1 \tag{7.8}$$

olarak verir. İndis denkleminin kökleri ise,

$$s=0 \text{ ve } s=1-c \tag{7.9}$$

olarak bulunur. $s=0$ kökü için tekrarlama bağıntısı

$$a_r=\frac{(r-1+a)(r-1+b)}{(r-1+c)r}a_{r-1} \qquad r\geq 1 \tag{7.10}$$

şeklini alır. Serinin katsayıları ise,

$$a_1=\frac{ab}{c}a_0$$

$$a_2=\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)2}a_1 \tag{7.11}$$

$$a_3=\frac{(a+2)(b+2)}{(c+2)3}a_2$$

.....

olarak bulunur. Genel terimi

$$a_k=\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)\,b(b+1)...(b+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)\,1.2.3...k} \tag{7.12}$$

şeklinde ifade edilen bu serinin kendisi de

$$y_1(x)=a_0\left[1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,2!}x^2+...\right], \tag{7.13}$$

olarak verilir. Bu çözümde c değerleri

$$c\neq 0,-1,-2,... \tag{7.14}$$

olmalıdır. Bu seri $|x|<1$ değerleri için yakınsaktır ve ilk tekil noktası $x=1$ noktasındadır. Diğer tekil noktarı etrafında da benzer şekilde seri çözümler bulunabilir (Morse & Feshbach).

Benzer şekilde indis denkleminin

$$s=1-c \tag{7.15}$$

kökünü ele alırsak, tekrarlama formülü de

$$a_r=a_{r-1}\frac{(r+a-c)(r+b-c)}{r(1-c+r)} \qquad r\geq 1 \tag{7.16}$$

şeklinde olacaktır. Bu da bize katsayıları

$$a_1=a_0\frac{(a+1-c)(1+b-c)}{(2-c)}$$

$$a_2=a_1\frac{(a-c+2)(b-c+2)}{2(3-c)}$$

.....

olarak ve genelde de

$$a_k=a_0\left[\frac{(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k)(b-c+1)...(b-c+k)}{(2-c)(3-c)...(k+1-c)\,k!}\right] \tag{7.17}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde verir. Çözüm ise,

$$y_2(x) = a_0 x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{7.18}$$

$$y_2(x) = a_0 x^{1-c}\left[1 + \frac{(a+1-c)(1+b-c)}{(2-c)}x...\right] \tag{7.19}$$

olacaktır. $y_1(x)$ fonksiyonunda a_0 değerini 1 olarak aldığımızda, Gauss denkleminin çözümü hipergeometrik fonksiyon olarak

$$y_1(x) = F(a,b,c,x) \tag{7.20}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çözüm $|x|<1$ aralığında yakınsaktır. $x=1$ noktasında yakınsak olması için $c>a+b$ ve $x=-1$ noktasında yakınsak olması için de $c>a+b-1$ olmalıdır. Aynı şekilde, $y_2(x)$ çözümünü de hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \qquad c \neq 2,3,4... \tag{7.21}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Sonuç olarak, Gauss denkleminin genel çözümü bu iki çözümün doğrusal bileşimi olarak

$$y(x) = AF(a,b,c,x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \tag{7.22}$$

şeklinde verilir.

7.2 Gauss Denklemi ve Bazı Özel Fonksiyonlar

(7.1) denkleminde bağımsız değişkeni

$$x = \frac{(1-\xi)}{2} \tag{7.23}$$

olarak değiştirirsek, Gauss denklemini

$$(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} + \{a+b+1-2c-(a+b+1)\xi\}\frac{dy}{d\xi} - aby = 0 \tag{7.24}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca, a, b ve c değerlerini de

$$a = \nu+1,\ b = -\nu \quad \text{ve} \quad c = 1 \tag{7.25}$$

olarak alırsak, bu denklem

$$(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dy}{d\xi} + \nu(\nu+1)y = 0 \tag{7.26}$$

şeklini alır ki, bu da çözümlerini

$$y_\nu(\xi) = P_\nu(\xi) \tag{7.27}$$

olarak bulduğumuz Legendre denkleminden başka birşey değildir. Kısaca, Legendre polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$P_\nu(\xi) = F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1-\xi}{2}\right) \qquad \nu = 0,1,2,... \tag{7.28}$$

olarak yazılabilir.

Asosiye Legendre polinomları ise,

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!}F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-x}{2}\right) \tag{7.29}$$

şeklinde ve Gegenbauer polinomları da

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)}F\left(-n, n+2\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \tag{7.30}$$

olarak hipergeometrk fonksiyonlar cinsinden yazılabilirler. Doğal olarak hipergeometrik fonksiyonların asıl yararı, araştırmalarımızda karşımıza çıkabilecek herhangi bir ikinci dereceden denklemin çözümlerinin kapalı bir şekilde yazımı olacaktır.

7.3 Konfluent Gauss Denklemi

Bessel fonksiyonları $J_n(x)$ ve Laguerre polinomları $L_n(x)$ ise,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0 \tag{7.31}$$

denklemini sağlayan ve kısaca çözümleri $M(\alpha,\beta,x)$ olarak gösterilen konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$J_n(x) = \frac{e^{-ix}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n M\left(n+\frac{1}{2}, 2n+1, 2ix\right), \tag{7.32}$$

$$L_n(x) = M(-n, 1, x) \tag{7.33}$$

şeklinde yazılabilir. (7.31) denkleminin $x=0$ noktasında düzgün ve $x=\infty$ noktasında da esaslı olmak üzere iki tekil noktası vardır. Bağımsız çözümleri ise,

$$y_1(x) = M(a,c,x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} + ..,\ c \neq 0,-1,-2,...,$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$y_2(x) = x^{1-c}M(a+1-c, 2-c, x), \qquad c \neq 2, 3, 4, \ldots \tag{7.34}$$

olarak verilir.

7.4 Problemler

1. Hermite polinomlarının,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M(-n, \frac{1}{2}, x^2), \quad \text{ve}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} xM(-n, \frac{3}{2}, x^2)$$

şeklinde yazılabildiğini gösteriniz.

2. Kummer formülü olarak bilinen,

$$M(a, c, x) = e^x M(c-a, c, -x)$$

formülünü çıkarınız.

3. Modifiye Bessel fonksiyonlarının,

$$I_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n M\left(n+\frac{1}{2}, 2n+1, 2x\right)$$

olarak yazılabildiğini gösteriniz..

4. Chebyshev fonksiyonlarını hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazınız.

5. Aşağıdaki ilişkileri gösteriniz:

i)

$$(1-x)^{-\alpha} = F(\alpha, \beta, \beta, x)$$

ii)

$$\ln(1-x) = -xF(1, 1, 2, x)$$

iii)

$$\sin^{-1} x = xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2)$$

iv)

$$e^x = M(\alpha, \alpha, x)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

8

STURM-LIOUVILLE TEORİSİ

Fizik ve mühendislikte karşılaşılan bir çok kısmi diferansiyel denklemin değişkenlerin ayrılması yöntemi ile ikinci dereceden sıradan diferansiyel denklemlere dönüştüğünü gördük. Bu diferansiyel denklemlerin ve çözümlerinin de pek çok benzerliği dikkatimizi çekmiştir. Bu bölümde ise, bu benzerlikleri Sturm-Liouville teorisinin çatısı altında sistematik bir şekilde inceleyeceğiz.

8.1 Self-Adjoint Diferansiyel Operatörler

İkinci dereceden doğrusal bir diferansiyel operatörü,

$$\pounds = P_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_2(x) \tag{8.1}$$

şeklinde $[a, b]$ aralığında tanımlayalım. Burada, $P_i(x)$ reel fonksiyonlar olup, ilk $(2-i)$ türevleri süreklidir. Ayrıca, $P_0(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında sıfırdan farklı olmakla birlikte, sınır noktalarında sıfırları olabilir. $\pounds$ operatörünün adjoint operatörü olan $\bar{\pounds}$ ise,

$$\bar{\pounds}u(x) = \frac{d^2}{dx^2}[P_0(x)u(x)] - \frac{d}{dx}[P_1(x)u(x)] + P_2(x)u(x) \tag{8.2}$$

$$\bar{\pounds}u(x) = [P_0\frac{d^2}{dx^2} + (2P_0' - P_1)\frac{d}{dx} + P_0''(x) - P_1'(x) + P_2(x)]u(x) \tag{8.3}$$

şeklinde tanımlanır. Verilen bir $\pounds$ operatörünün

$$\pounds = \bar{\pounds} \tag{8.4}$$

şartını sağlaması, yani *self-adjoint* olması için gerekli ve yeterli şart

$$P_0'(x) = P_1(x) \tag{8.5}$$

olarak verilir. *Self-adjoint* bir operatör

$$\bar{\pounds}u(x) = \pounds u(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x), \tag{8.6}$$

$$p(x) = P_0(x), \quad q(x) = P_2(x) \tag{8.7}$$

şeklinde de yazılabilir. Self-adjoint olmayan bir operatör ise, her zaman

$$\frac{1}{P_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx\right] \tag{8.8}$$

şeklinde bir fonksiyon ile çarpılarak self-adjoint duruma getirilebilir.

8.2 Sturm-Liouville Sistemi

(8.1) denkleminde tanımladığımız operatöre Sturm-Liouville operatörü denir. Bu operatörü kullanarak

$$\pounds u(x) = -\lambda\omega(x)u(x) \tag{8.9}$$

şeklinde tanımlayacağımız denklem de Sturm-Liouville denklemidir. Bu denklem $\pounds$ operatörü için bir özdeğer problemi tanımlamaktadır. Özdeğerleri $-\lambda$, tanım aralığında sayılı noktada sıfır olsada $\omega(x) > 0$ koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonunu $\omega(x)$ ve özfonksiyonları da $u(x)$ temsil etmektedir. Diferansiyel denklemlerin sınır şartları belirtilmeden herhangi bir problemi tam olarak tanımlamaya yetmedikleri ortadadır. Yukarıdaki denklemi de

$$p(x)u(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=a} = 0\,, \tag{8.10}$$

$$p(x)u(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=b} = 0 \tag{8.11}$$

sınır şartları ile tamamlayarak elde edeceğimiz sisteme Sturm-Liouville sistemi denir. Burada $u(x)$ Sturm-Liouville denkleminin çözümüdür. Ancak daha az sınırlayıcı olan

$$v(x)p(x)u(x)'|_{x=a} = v(x)p(x)u(x)'|_{x=b} \tag{8.12}$$

şartı ile de çalışılabilir. $u(x)$ ve $v(x)$, (8.9) denkleminin aynı veya farklı λ değerleri için herhangi iki çözümüdür. Bu sınır şartı genelde aşağıdaki durumlardan birine karşı gelir:

1. $u(x)$ ve $v(x)$ çözümlerini $x = a$ ve $x = b$ noktalarında sıfır olduğu durumlar. Bu tür sınır şartlarına (homojen) **Dirichlet şartları** denir. Uçlarından tutturulmuş bir telin salınımlarında bu şart kullanılır.
2. $\frac{du(x)}{dx}$ ve $\frac{dv(x)}{dx}$ türevlerinin $x = a$ ve $x = b$ noktalarında sıfır olduğu durumlar. Bu tür sınır şartlarının kullanımına örnek akustik dalga problemlerini verebiliriz. Bunlara da (homojen) **Neumann şartları** denir.

3. $u(x) + \alpha\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=a} = 0$ ve $v(x) + \beta\frac{dv(x)}{dx}\Big|_{x=b} = 0$ şeklinde α ve β'nın özdeğerlerden bağımsız sabitler olduğu durumlar. Bu tür durumlara örnek olarak iki ucundan esnek olarak tutturulmuş bir telin salınımlarını verebiliriz.
4. Yukarıdaki şartlardan birinin $x = a$ ve diğerinin de $x = b$'de uygulandığı durumlar.
5. $u(a) = v(b)$ ve $\frac{du(x)}{dx}\Big|_a = \frac{dv(x)}{dx}\Big|_b$ olarak alınan durumlar. Bir kürenin yüzey salınımlarında **periyodik sınır şartı** olarak bilinen bu şartlar kullanılır. Burada $p(a) = p(b)$ alınmıştır.

Bütün bu şartların ortak özelliği, $\frac{du(x)}{dx}$ ve $u(x)$'in a noktasındaki değerlerinin b noktasındaki değerlerinden bağımsız olmasıdır.Ancak, problemin yapısına göre her zaman daha karmaşık sınır şartları uygulamakta mümkündür.

$\pounds$ operatörü reel olmakla birlikte çözüm kompleks fonksiyonlar da içerebileceğinden (8.12) şartı

$$v^*pu'|_{x=a} = v^*pu'|_{x=b} \tag{8.13}$$

olarak da yazılır. Bunun kompleks eşleniğini alarak,

$$vpu^{*\prime}|_{x=a} = vpu^{*\prime}|_{x=b} \tag{8.14}$$

yazar ve u ve v'yi de yer değiştirirsek,

$$v^{*'}pu\Big|_{x=a} = v^{*'}pu\Big|_{x=b} \tag{8.15}$$

buluruz.

8.3 Hermit Operatörleri

Şimdi, daha önce self-adjoint $\pounds$ operatörü ile tanımladığımız,

$$\pounds u(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0 \tag{8.16}$$

diferansiyel deklemi ve (8.13) ve (8.15) sınır şartını sağlayan çözümlerin ilginç bir özelliğini göstereceğiz. Önce,

$$\pounds u(x)$$

ifadesini sol tarafından v^* ile çarpıp $[a, b]$ aralığında integralini alalım:

$$\int_a^b v^*\pounds u dx = \int_a^b v^*(pu')'\,dx + \int_a^b v^*qu dx. \tag{8.17}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik (Yöntemler) 2004 II. baskı Selçuk Ş. Bayın

Sağ taraftaki ilk terimin kısmi integralini alınırsa,

$$\int_a^b v^* (pu')' \, dx = v^* pu'|_a^b - \int_a^b v^{*\prime} pu' dx \tag{8.18}$$

elde edilir. (8.13) sınır şartını kullanırsak sağdaki ilk terim sıfır olacaktır. Kalan terimin de yeniden kısmi integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^b v^* (pu')' \, dx \\ = & - \int_a^b v^{*\prime} pu' dx \\ = & - v^{*\prime} pu|_a^b + \int_a^b u \left(pv^{*\prime}\right)' dx \end{aligned} \tag{8.19}$$

bulunacaktır. Burada da (8.15) sınır şartını kullanırsak integrali alınmış kısım tekrar sıfır olacağından, bu sonucu (8.17) denkleminde yerine koyarak,

$$\int_a^b v^* \pounds u dx = \int_a^b u \pounds v^* dx \tag{8.20}$$

buluruz. Bu ilişkiyi sağlayan operatörlere, (8.13) ve (8.15) sınır şartını sağlayan u ve v özfonksiyonlarına göre Hermittir denir.

8.4 Hermit Operatörlerinin Özellikleri

Hermit operatörlerinin:

1. Özdeğerlerinin reel olması.
2. Özfonksiyonlarının dik olması.
3. Özfonksiyonların tam bir set oluşturması gibi çok önemli ve kullanışlı özellikleri vardır.

8.4.1 Özdeğerlerin Reel Olması

u_i ve u_j özfonksiyonları için özdeğer problemini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\pounds u_i + \lambda_i \omega(x) u_i = 0, \tag{8.21}$$

$$\pounds u_j + \lambda_j \omega(x) u_j = 0. \tag{8.22}$$

Burada $\pounds$ operatöründeki $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları ile $\omega(x)$ fonksiyonu reel olmalarına karşın, özdeğer ve özfonksiyonlar kompleks olabileceğinden, ikinci denklemin kompleks eşleniğini alarak,

$$\pounds u_j^* + \lambda_j^* w(x) u_j^* = 0 \tag{8.23}$$

yazalım. Bu denklemi u_i ve (8.21) denklemini de u_j^* ile çarpıp farklarını alırsak,

$$u_j^* \pounds u_i - u_i \pounds u_j^* = \left(\lambda_j^* - \lambda_i\right) \omega(x) u_i u_j^* \tag{8.24}$$

bulunacaktır. Bunun da her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int_a^b u_j^* \pounds u_i dx - \int_a^b u_i \pounds u_j^* dx = \left(\lambda_j^* - \lambda_i\right) \int_a^b u_i u_j^* \omega(x) dx \tag{8.25}$$

olur. Hermit operatörleri için sol taraf sıfır olacağından,

$$\left(\lambda_j^* - \lambda_i\right) \int_a^b u_i u_j^* \omega(x) dx = 0 \tag{8.26}$$

bulunur. $i = j$ olduğunda ve (sınırlı sayıda nokta dışında) $\omega(x) \neq 0$ olduğundan, (8.26) ifadesi bize

$$\lambda_i^* - \lambda_i = 0 \tag{8.27}$$

verecektir. Bu da Hermit operatörlerinin özdeğerlerinin reel olduğunu gösterir. Kuantum mekaniğinde özdeğerler laboratuvarda ölçülebilen özelliklere karşı geldiğinden, enerji ve momentum gibi fiziksel büyüklükler Hermit operatörleri tarafından temsil edilirler.

8.4.2 Özfonksiyonların Dikliği

$i \neq j$ olduğu durumlarda $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise, (8.26) bize

$$\int_a^b u_i(x) u_j^*(x) \omega(x) \, dx = 0 \qquad i \neq j \tag{8.28}$$

verir ki, biz buna u_i fonksiyonları $[a, b]$ aralığında ve $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktir deriz. Özdeğerlerin dejenere olduğu yani, iki farklı özfonksiyonun aynı özdeğere ($i \neq j$ fakat $\lambda_i = \lambda_j$) sahip olduğu durumlarda

$$\int_a^b u_i u_j^* \omega dx$$

integrali sıfır olmak zorunda değildir. Ancak, Gram-Schmidt dikleştirme yöntemi kullanılarak bu durumda da özfonksiyonlar dik olarak seçilebilirler. Özetle, $u_i(x)$ özfonksiyonları uygun bir normlama sabiti ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre,

$$\int_a^b u_i(x) u_j^*(x) \omega(x) \, dx = \delta_{ij} \tag{8.29}$$

bağıntısı ile dik bir set oluşturur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

8.4.3 $\{u_m\}$ Setinin Tam Olması

Hermit operatörlerinin özfonksiyonlarından oluşan $\{u_m(x)\}$ setinin tam olma özelliğini ispat oldukça teknik bir konu olup uygulamalarda çoğu zaman önemli olan yeteri kadar iyi davranışlı (en azından parçalı sürekli) bir $F(x)$ fonksiyonunun, $\{u_m(x)\}$ seti cinsinden

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(x) \tag{8.30}$$

şeklinde sonsuz seri olarak ifade edilebilmesidir. Bu serinin Sturm-Liouville problemi için yakınsak olması ve $F(x)$ fonksiyonuna yakınsaması varyasyon tekniği ile (Mathews ve Walker sayfa 338.)

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[F(x) - \sum_{m=0}^{N} a_m u_m(x)\right]^2 \omega(x)\, dx \to 0 \tag{8.31}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(x) \tag{8.32}$$

serisi, $F(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında ortalamada yakınsaktır denir. Bu limit yukarıdaki serinin,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} a_m u_m(x) \to F(x) \tag{8.33}$$

şeklinde gösterilen ve her noktada yakınsak (düzgün yakınsak) olması kadar kuvvetli olmasada, fizik ve mühendislik uygulamaları açısından genelde düzgün yakınsaklıkla beraber görülecektir ve çoğu durumda da yeterli olacaktır. Mutlak ve düzgün yakınsaklık koşulları ise, aşağıdaki teorem ile verilir (Courant ve Hilbert):

Teorem: Tanım aralığında parçalı sürekli ve ilk türevinin karesinin integrali var olan her fonksiyonun özfonksiyonlar cinsinden $F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(x)$ şeklinde bir seri açılımı verilebilir. Bu seri süreksizlik içermeyen her alt aralıkta mutlak ve düzgün yakınsak olacaktır. Fonksiyonun süreksiz olduğu noktalardaki değeri, sağ ve sol limitlerin aritmetik ortalaması olarak verilir.

Bu teoremde açılımı yapılan fonksiyonun sınır şartlarını sağlama zorunluğu yoktur. Ayrıca, bu teorem ortalamada yakınsaklığı da içermektedir, ancak tersi doğru değildir. Bir başka deyişle, ortalamada yakınsaklık daha az kısıtlayıcıdır.

8.5 Genelleştirilmiş Fourier Serileri

$F(x)$'in bu şekilde $\{u_m(x)\}$ seti cinsinden ifadesine genelleştirilmiş Fourier serisi denir. a_m katsayıları ise, $\{u_m(x)\}$ setinin diklik özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)\, u_m^*(x)\, \omega(x)\, dx &= \sum_n \int_a^b a_n u_n(x)\, u_m^*(x)\, \omega(x)\, dx \\ &= \sum_n a_n \int_a^b u_n(x)\, u_m^*(x)\, \omega(x)\, dx \\ &= \sum_n a_n \delta_{nm} \\ &= a_m \end{aligned} \tag{8.34}$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç (8.30) ifadesinde tekrar kullanılırsa

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b F(x')\, u_m^*(x')\, \omega(x')\, u_m(x)\, dx' \tag{8.35}$$

$$= \int_a^b F(x') \left[\sum_{m=0}^{\infty} u_m^*(x')\, \omega(x')\, u_m(x)\right] dx' \tag{8.36}$$

bulunacaktır. Buradan da $\{\phi_m(x)\}$ setinin tam olması şartının

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m^*(x')\, \omega(x')\, u_m(x) = \delta(x - x') \tag{8.37}$$

şeklinde de yazılabildiğini görürüz.

8.6 Trigonometrik Fourier Serileri

Trigonometrik Fourier serileri, $\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ operatörü için tanımlanan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y(x) = 0 \tag{8.38}$$

özdeğer probleminin,

$$u_n = \cos nx \tag{8.39}$$

$$v_n = \sin nx \tag{8.40}$$

özfonksiyonları ile tanımlanırlar.

$$vpu'|_a = vpu'|_b \tag{8.41}$$

sınır şartını, $a = x_0$ ve $b = x_0 + 2\pi$ için periyodik sınır şartı olarak alırsak,

$$-n \sin mx \sin nx|_a^b = 0 \tag{8.42}$$

$$m \cos mx \cos nx|_a^b = 0 \tag{8.43}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

elde ederiz. Özfonksiyonların diklik ilişkisi ise,

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \sin nx dx = C_n \delta_{nm}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nx dx = D_n \delta_{nm} \tag{8.44}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$C_n = \begin{cases} \pi & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \tag{8.45}$$

$$D_n = \begin{cases} \pi & n \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \tag{8.46}$$

olarak verilir. Herhangi bir iyi davranışlı $f(x)$ fonksiyonu ise,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, ..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, ...$$

olarak trigonometrik Fourier serisi cinsinden yazılabilir ($x_0 = -\pi$ alınmıştır).

Örnek (8.1) ***Trigonometrik Fourier serisi:***

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{h}{2} & 0 < x \leq \pi \\ -\frac{h}{2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \tag{8.47}$$

fonksiyonunun trigonometrik seri açılımı,

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{h}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = çift \\ \frac{2h}{n\pi} & n = tek \end{cases} \tag{8.48}$$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} \tag{8.49}$$

olarak bulunur.

8.7 Problemler

1. Laguerre denkleminin self-adjoint durumuna e^{-x} ile çarpılarak getirilebileceğini gösteriniz.

2. Laguerre denklemini Sturm-Liouville formunda yazınız.

3. Asosiye Laguerre denkleminin ağırlık fonksiyonunu bulunuz.

4. Aşağıda verilen diferansiyel denklemin $x \in [0, 1]$ aralığında sonlu çözümlerini bulunuz:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{3}{2} - 2x)\frac{dy}{dx} + \left[\lambda - \frac{(2+5x-x^2)}{4x(1-x)}\right] y(x) = 0.$$

   i) λ'nın ilk üç değeri için çözümü açık olarak yazınız.

   ii)Denklemin ağırlık fonksiyonunu bulunuz.

   iii)Çözüm setinin yukarıda bulduğunuz ağırlık fonksiyonuna göre dik olduğunu gösteriniz.

5. Legendre denkleminin Sturm-Liouville formunda

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_l'] + l(l+1)P_l = 0$$

   şeklinde yazıldığını gösteriniz.

6. Aşağıda verilen Sturm-Liouville sistemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunuz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 0,$$
$$y(\pi) - y'(\pi) = 0.$$

7. Aşağıda verilen Sturm-Liouville sistemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunuz ($x = \tan t$ tanımını deneyiniz):

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)\frac{dy}{dx}] + \frac{\lambda}{x^2+1} y = 0,$$

$$y(0) = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

8. Hermite denkleminin Sturm-Liouville formunun,

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}H_n'] + 2ne^{-x^2}H_n = 0$$

olduğunu gösteriniz

9. Bessel denkleminin Sturm-Liouville formunun,

$$\frac{d}{dx}[xJ_n'] + (x - \frac{n^2}{x})J_n = 0$$

olduğunu gösteriniz.

10. Aşağıda verilen fonksiyonun trigonometrik Fourier açılımını bulunuz:

$$f(x) = \pi \quad -\pi \leq x < 0$$
$$= x \quad 0 < x \leq \pi.$$

9

KOMPLEKS DEĞİŞKENLER ve FONKSİYONLAR

Kompleks sayılar doğada doğrudan var olmasalar da fizik ve mühendislik uygulamalarında çok işimize yararlar:

1. Kompleks fonksiyonlar teorisinde harmonik fonksiyonlar olarak bilinen, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ gibi her ikisi de Laplace denklemini sağlayan fonksiyon setleri bulabiliriz. Bu fonksiyonlar, elektrostatik ve hidrostatik gibi Laplace denkleminin çözümünü gerektiren ve problemin iki boyuta indirgenebildiği durumlarda çok kullanışlıdır.

2. Analitik süreklilik yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümünde ve bazı integrallerin alınmasında çok yararlıdır.

3. Sonsuz çarpımlar, sonsuz seriler, asimtotik çözümler ve kararlılık hesapları, kompleks analiz yöntemlerinin çok yararlı olduğu başka alanlardır.

4. Kompleks sayılar bazı hesapların daha kolay yapılmasında yararlı oldukları gibi, kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonunun yazılmasında fiziksel bir gereklilik olarak da karşımıza çıkar. Öyle ki; doğadan kaynaklanan kompleks sayılarla, bizim hesaplarda kolaylık olsun diye kullandığımız kompleks sayıları takip etmek ve ayrı ayrı işleme koymak gerekir.

9.1 Kompleks Cebir

z olarak göstereceğimiz herhangi bir kompleks sayıyı,

$$z = (a, b) \tag{9.1}$$

olarak bir çift reel (gerçel) sayı ile tanımlayabileceğimiz gibi,

$$z = a + ib\ ,\ \ i^2 = -1 \tag{9.2}$$

olarak da gösterebiliriz. a kompleks sayının reel, b de sanal kısmı olup,

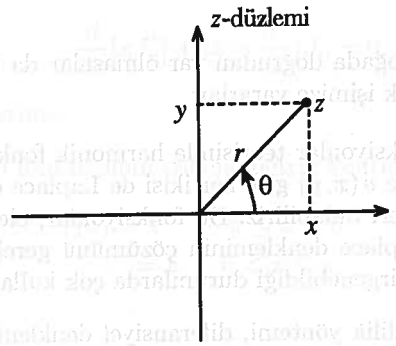
$$\mathrm{Re}\, z = a, \quad \mathrm{Im}\, z = b \tag{9.3}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak da gösterilir. Kompleks uzay (veya düzlem) kavramını kullanarak Şekil (9.1)'de gösterildiği gibi, kompleks z-uzayında herhangi bir noktayı,

$$z = (x, y) = x + iy \tag{9.4}$$

şeklinde gösterebiliriz.



ŞEKİL 9.1. **Kompleks z-düzleminde bir nokta.**

Kutupsal koordinatları kullanırsak,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{9.5}$$

olacağından, z noktasını aynı zamanda da

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \quad \text{veya} \quad z = re^{i\theta} \tag{9.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \text{mod}\, z \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{9.7}$$

olarak verilen r'ye modülüs (büyüklük veya kompleks sayının mutlak değeri),

$$\begin{aligned} \theta &= \arg z \\ &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{9.8}$$

olarak verilen θ'ya da kompleks sayının argümanı denir. Kompleks uzayda cebirsel işlemler, $i^2 = -1$ olduğu göz önüne alınarak, alışıldığı gibi yapılır:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)\,, \\ &= (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,, \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned} z &= c\,(x_1 + iy_1)\,, \\ &= cx_1 + icy_1. \end{aligned} \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2)\,, \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,, \end{aligned} \tag{9.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}, \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}\frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

$$= \frac{1}{(x_2^2 + y_2^2)}\left[(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_1y_2 - y_1x_2)\right]. \tag{9.13}$$

Burada c herhangi bir sabit sayıdır. Kompleks bir sayının eşleniği (konjügesi) olan z^* ise,

$$z^* = x - iy \tag{9.14}$$

olarak tanımlanır. Kompleks düzlemde yapılan işlemlerde De Moivre formülü:

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{9.15}$$

ile

$$\begin{aligned} |z_1| - |z_2| &\le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,, \\ |z_1z_2| &= |z_1|\,|z_2|\,, \\ \arg(z_1z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned} \tag{9.16}$$

eşitsizlikleri de çok kullanışlıdır.

9.2 Kompleks Fonksiyonlar

Kompleks fonksiyonlar, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ gibi iki reel fonksiyon ile

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{9.17}$$

şeklinde tanımlanır (Şekil (9.2)). Kompleks fonksiyonlara örnek olarak polinomları verebiliriz:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i\,(2xy)\,. \tag{9.18}$$

Trigonometrik fonksiyonlar gibi reel uzayda tanımlanmış pek çok fonksiyon, kompleks uzayda da reel değişkenleri ile z yer değiştirilerek tanımlanabilir:

$$\sin z \quad \cos z \quad \exp z \quad \sinh z \quad \ln z \quad \ldots\ldots . \tag{9.19}$$

Ancak, biraz sonra $\ln z$ örneğinde göreceğimiz gibi, bazı kompleks fonksiyonların çok değerli olmaları durumuna dikkat etmek gerekir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

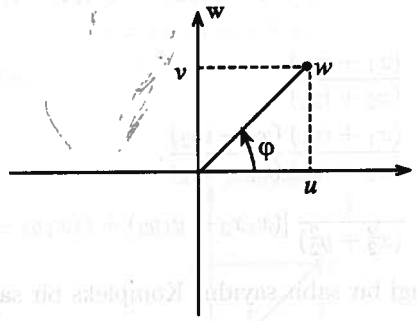


FIGURE 9.2. **w-düzlemi.**

9.3 Kompleks Fonksiyonların Türevi ve Analitik Fonksiyonlar

Tek değerli ve sürekli bir fonksiyonun, reel analizde olduğu gibi herhangi bir z noktasındaki türevini,

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{(\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0)\ \Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \tag{9.20}$$

$$= \lim_{(\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0)\ \Delta z\to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta z}+i\frac{\Delta v}{\Delta z}\right]$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Doğal olarak bu türevin anlamlı olabilmesi için, sonucun z noktasına yaklaşılan yönden bağımsız olması gerekmektedir. z noktasına önce x ekseni yönünden yaklaşırsak,

$$\Delta z = \Delta x \tag{9.21}$$

olacağından türev de

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{9.22}$$

şeklinde bulunacaktır. Benzer şekilde y ekseni yönünden yaklaşılırsa,

$$\Delta z = i\Delta y \tag{9.23}$$

olacağından türev de

$$\frac{df}{dz} = -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{9.24}$$

olarak bulunacaktır. Türevin var olduğu durumlarda her iki ifadenin de eşit olacağını düşünürsek,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \tag{9.25}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{9.26}$$

şeklinde verilen **Cauchy-Riemann** şartlarını elde ederiz. Bu şartlar, $f(x)$ fonksiyonunun z noktasında türevinin var olması için gerekli ve aynı zamanda da yeterlidir.

9.3.1 Analitik Fonksiyonların Özellikleri

$f(z)$ fonksiyonu, z_o noktasında ve civarında türevi varsa yani, Cauchy-Riemann şartlarını sağlıyorsa, $f(z)$ o noktada analitiktir denir.

Örnek (9.1) ***Analitik fonksiyonlar:*** Bütün polinomlar gibi,

$$f(z) = z^2 \tag{9.27}$$

fonksiyonu da $z-$düzleminin tamamında analitiktir. Ama,

$$f(z) = |z^2| \tag{9.28}$$

fonksiyonu $z=0$ noktasında türevi olmasına rağmen, başka hiç bir noktada türevi olmadığından analitik değildir.

Bir fonksiyon, $z-$uzayının her noktasında analitikse, ona **tüm-fonksiyon** denir. Bütün polinomlar tüm-fonksiyondur. Bir fonksiyon, z_o noktası etrafında bir bölgede, her noktada analitik, ama z_o noktasında analitik değil ise, z_o noktasına o fonksiyonun **tekil noktası** denir.

Örnek (9.2) ***Analitik fonksiyonlar:***

$$f(z) = \frac{1}{z} \tag{9.29}$$

fonksiyonunun türevini alırsak,

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \tag{9.30}$$

elde ederiz ki, bu bize $z=0$ noktasının tekil noktası olduğunu gösterir. Diğer bütün noktalarda bu fonksiyon analitiktir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Teorem $f(z)$ fonksiyonu, z-düzleminin herhangi bir bölgesinde analitik ise, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarının bütün derecelerden kısmi türevleri vardır. Böyle bir fonksiyonun, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları da Laplace denklemini sağlayacaktır:

$$\overrightarrow{\nabla}^2_{xy} u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \tag{9.31}$$

$$\overrightarrow{\nabla}^2_{xy} v(x,y) = 0. \tag{9.32}$$

İspat. (9.31) denklemi için Cauchy-Riemann birinci şartını kullanıp, x'e göre türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{9.33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{9.34}$$

elde ederiz. Aynı şekilde ikinci şartı da yazıp, y'ye göre türevini alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.35}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \tag{9.36}$$

buluruz ki, bu iki denklemin toplamından da

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.37}$$

olarak istenilen sonucu elde ederiz. İkinci denklem olan (9.32)'de aynı şekilde ispat edilir.

$f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu zaman, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarının bütün derecelerden türevlerinin var olmasının ispatı ise, bir sonraki bölümde göreceğimiz Cauchy formülünden kolayca görülür (10.19).

Burada, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarına **harmonik fonksiyonlar** ve $(u(x,y), v(x,y))$ çiftine de **eşlenik harmonik fonksiyonlar** denir. Harmonik fonksiyonlardan birisi bilinirse, diğeri de Cauchy-Riemann şartlarından bulunabilir.

9.3.2 Harmonik Fonksiyonların Özellikleri

Harmonik fonksiyonların uygulamalarda çok yararlı özellikleri vardır:

1. $u = c_i$ ve $v = d_i$ eğri aileleleri birbirlerine diktir (burada c_i ve d_i sabit sayılardır) .

   İspat.

$$\overrightarrow{\nabla} u \cdot \overrightarrow{\nabla} v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{9.38}$$

$$\overrightarrow{\nabla} u \cdot \overrightarrow{\nabla} v = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{9.39}$$

$$\overrightarrow{\nabla} u \cdot \overrightarrow{\nabla} v = 0. \tag{9.40}$$

   Bu sonucu elde ederken Cauchy-Riemann şartları kullanılır.

2. $w = w(z)$ gibi bir analitik fonksiyon ele alır ve türevini alırsak,

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)(-i^2), \tag{9.41}$$

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dx + idy}{dz}\right), \tag{9.42}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{9.43}$$

elde ederiz. Bunun modülüsü ise,

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \tag{9.44}$$

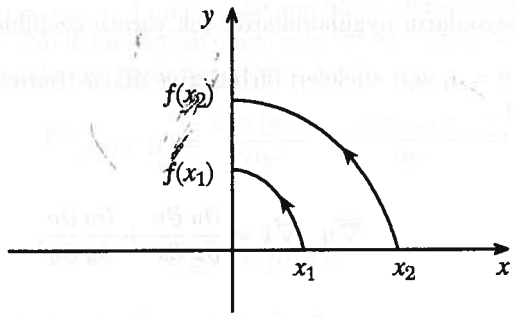
olarak bulunur. Harmonik foksiyonların kullanım alanlarından biri olan elektrostatik teoride, $u(x,y)$ fonksiyonunu potansiyel enerji olarak alırsak, elektrik alanı da

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} u \tag{9.45}$$

olacağından, (9.44)'de bulduğumuz modülüs de elektrik alanının büyüklüğünü verecektir:

$$\left|\overrightarrow{E}\right| = \left|\frac{dw}{dz}\right|. \tag{9.46}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.3. **Reel fonksiyonlara haritalama olarak bakmak ilginç olmaz.**

3. Eğer $\Psi(u,v)$ w-düzleminde Laplace denklemini sağlarsa, yani

$$\frac{\partial^2\Psi(u,v)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi(u,v)}{\partial v^2}=0 \tag{9.47}$$

olursa, $\Psi(x,y)$ fonksiyonu da z-düzleminde Laplace denklemini sağlayacaktır. Bir başka deyişle,

$$\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{9.48}$$

olacaktır.

9.4 Haritalama (Mappings)

Analitik geometride tek bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon olan

$$y=f(x), \tag{9.49}$$

xy-düzleminde bir eğri ile gösterilebildiği gibi, haritalama dilinde x-ekseninde bir noktayı y-ekseninde bir noktaya gönderen (haritalayan) bir operatör olarak da algılanabilir (Şekil (9.3)). Ancak, bu ilginç bir yaklaşım olmaz. Kompleks düzlemde ise,

$$\begin{aligned} w &= f(z), \\ w &= u(x,y)+iv(x,y) \end{aligned} \tag{9.50}$$

şeklinde verilen bir fonksiyon, z-düzleminde (x,y) gibi bir noktayı w-düzleminde (u,v) gibi bir başka noktaya gönderecektir. Bu ise, z-düzleminde eğrilerin veya bölgelerin, w-düzleminde başka eğrilere veya bölgelere haritalanması sonucunu doğurur ki, bunun çok ilginç uygulama alanları vardır.

Örnek (9.3) ***Öteleme:***

$$w=z+z_o \tag{9.51}$$

fonksiyonunu ele alalım. u ve v fonksiyonları sırası ile

$$u=x+x_o, \tag{9.52}$$

$$v=y+y_o \tag{9.53}$$

olacaklarından, bu fonksiyonun z-düzlemindeki (x,y) noktasına etkisi; w-düzleminde $(x+x_o, y+y_o)$ noktasına gönderilmesi, yani $z-$düzleminde ötelenmesidir.

Örnek (9.4) ***Dönme:***

$$w=zz_o \tag{9.54}$$

fonksiyonunda polar koordinatları kullanırsak;

$$\begin{aligned} w &= \rho e^{i\phi} \\ z &= re^{i\theta} \\ z_o &= r_o e^{i\theta_o} \end{aligned} \tag{9.55}$$

olacağından,

$$\rho e^{i\phi}=rr_o e^{i(\theta+\theta_o)} \tag{9.56}$$

yazabiliriz Bu da bize w-düzleminde

$$\rho = rr_o \tag{9.57}$$

$$\phi = \theta+\theta_o \tag{9.58}$$

verecektir. Burada iki şey değişmiştir:

i. Modülüs (mutlak değeri) r_o değerine göre büyümüş veya küçülmüştür.

ii. θ değeri ise, θ_o kadar değişmiştir.

$z_o=i$ alırsak bu fonksiyon (haritalama) $\frac{\pi}{2}$ kadar salt dönmeye karşı gelir.

Örnek (9.5) ***Tersinme:***

$$w(z)=\frac{1}{z} \tag{9.59}$$

fonksiyonunu ise,

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}}, \tag{9.60}$$

$$= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \tag{9.61}$$

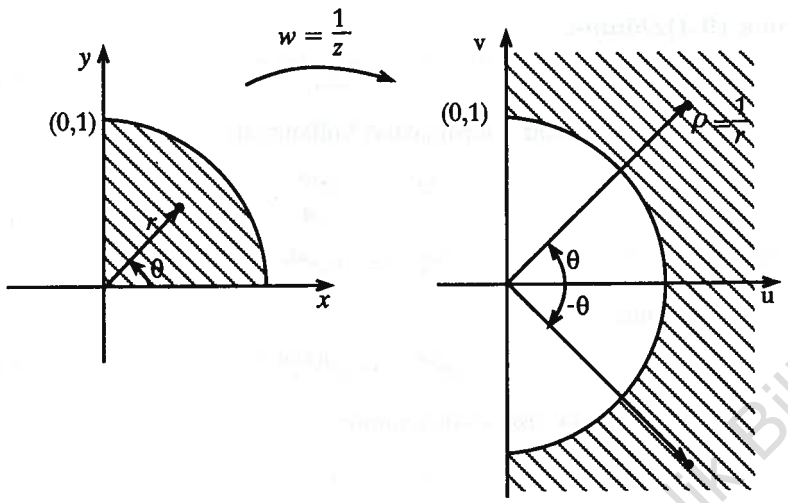
Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak yazılabileceğinden,

$$\rho = \frac{1}{r} \tag{9.62}$$

$$\phi = -\theta \tag{9.63}$$

olacaktır. Burada z-düzleminde birim çemberin içinde bir nokta, w-düzleminde birim çemberin dışında bir noktaya ve u ekseni etrafında bir yansıma ile haritalanmıştır (Şekil (9.4)).



ŞEKİL 9.4. **Tersinme fonksiyonu çemberleri, çemberlere haritalar.**

Örnek (9.6) ***Tersinme fonksiyonu:***

$$w(z) = \frac{1}{z} \tag{9.64}$$

fonksiyonunun, z-düzlemindeki eğrileri w-düzlemine nasıl haritaladığına bakmak için,

$$w = u + iv$$

$$= \frac{1}{x+iy} \tag{9.65}$$

$$= \frac{1}{x+iy}.\frac{x-iy}{x-iy} \tag{9.66}$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)} \tag{9.67}$$

yazalım. Bu bize,

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{9.68}$$

$$v = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{9.69}$$

veya

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \tag{9.70}$$

$$y = \frac{-v}{u^2+v^2} \tag{9.71}$$

verecektir. Şimdi, z-düzleminde ve merkez etrafında

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{9.72}$$

olarak tanımlanmış bir çemberi ele alalım. (9.64) fonksiyonu bu çemberi w-düzleminde,

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} = r^2 \tag{9.73}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2} \tag{9.74}$$

$$u^2 + v^2 = \rho^2 \tag{9.75}$$

olarak verilen ve yine merkez etrafında, ama yarıçapı $\frac{1}{r}$ olan bir başka çembere haritalayacaktır.

Şimdi z-düzleminde,

$$y = c_1 \tag{9.76}$$

olarak verilen bir doğruyu ele alalım. (9.64) fonksiyonu bize,

$$-\frac{v}{u^2+v^2} = c_1 \tag{9.77}$$

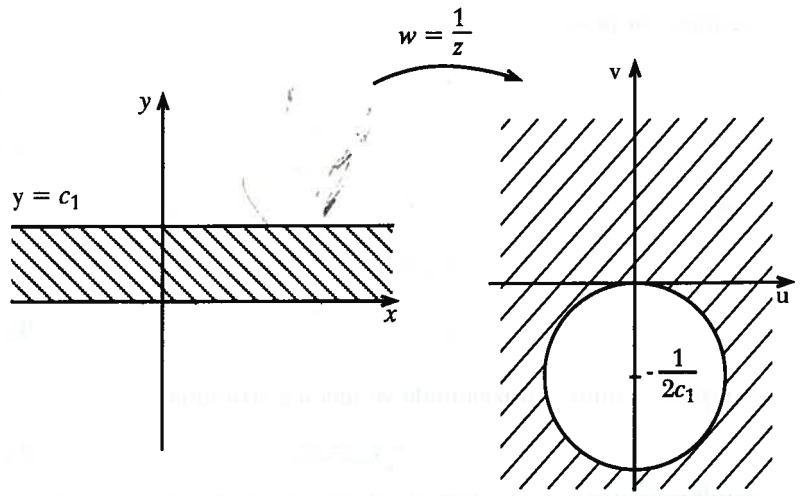
veya

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{c_1} + \frac{1}{(2c_1)^2} = \frac{1}{(2c_1)^2} \tag{9.78}$$

verecektir. Bu ise, w-düzleminde $\left(0, -\frac{1}{2c_1}\right)$ merkezli ve yarıçapı $\frac{1}{2c_1}$ olan bir çember olduğundan, tersinme fonksiyonunun z-düzleminde doğruları, w-düzleminde çemberlere haritaladığını görürüz (Şekil (9.5)).

Yukarıda verdiğimiz bütün örnekler **bir-e-bir** haritalamalardır. Bir başka deyişle, z-düzleminde bir nokta w-düzleminde tek bir noktaya gönderilmektedir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.5. **Tersinme fonksiyonu doğruları, çemberlere haritalar.**

Örnek (9.7) ***İkiden-bire haritalama:***

$$w = z^2 \tag{9.79}$$

fonksiyonunu ele alırsak,

$$w = \rho e^{i\theta} \tag{9.80}$$

$$z = re^{i\theta} \tag{9.81}$$

tanımı ile

$$\rho = r^2 \tag{9.82}$$

$$\phi = 2\theta \tag{9.83}$$

olacaktır. Burada θ'nın önündeki iki faktörü çok önemlidir. Bunun anlamı ise, z-düzleminde I. çeyrek $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, w-düzleminde üst yarı-uzaya $(0 \leq \phi < \pi)$ haritalanır. z-düzleminde üst yarı-uzay $(0 \leq \phi < \pi)$ ise, w-düzleminin tamamına $(0 \leq \phi < 2\pi)$ haritalanır. Yani, $z-$düzleminin alt yarı-uzayı zaten haritalanmış (kullanılmış) olan $w-$düzlemine tekrar haritalanacaktır. Bir başka deyişle, z-düzlemini bir kere kaplamak için, w-düzlemini iki kere taramak gerekecektir. Buna da **ikiden-bire** haritalama denir. z-düzleminde iki farklı nokta:

$$z_o \tag{9.84}$$

ve

$$z_o e^{-i\pi} = -z_o, \tag{9.85}$$

w- düzleminde aynı noktaya yani,

$$w = z_o^2 \tag{9.86}$$

noktasına haritalanacaktır.

Şimdi de

$$w = e^z \tag{9.87}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\rho e^{i\phi} = e^{x+iy} \tag{9.88}$$

$$\rho = e^x \tag{9.89}$$

$$\phi = y \tag{9.90}$$

yazarsak, z-düzleminde $0 \leq y < 2\pi$ bandı w-düzleminin tamamına haritalanacaktır. Öbür taraftan, z-düzleminde

$$x + i\,(y + 2n\pi) \qquad (n \text{ tamsayı}) \tag{9.91}$$

olan diğer bütün paralel bantlar, hali hazırda tamamı kullanılmış olan w-düzlemine tekrar haritalanacaklardır. Bir başka deyişle, elimizde **çokdan-bire** haritalama vardır.

Şimdi de

$$w = z^{\frac{1}{2}} \tag{9.92}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\rho e^{i\phi} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \tag{9.93}$$

$$2\phi = \theta \tag{9.94}$$

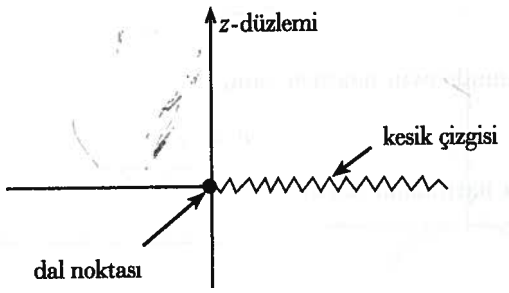
olacağından, z-düzleminde

$$r = r_o,\ \theta = 0 \tag{9.95}$$

noktası, w-düzleminde

$$w = \sqrt{r_o} \tag{9.96}$$

Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.6. **Kesik çizgisi dal noktasında son bulur.**

noktasına ve z-düzleminde

$$r = r_o, \ \theta = 2\pi \tag{9.97}$$

noktası da w-düzleminde

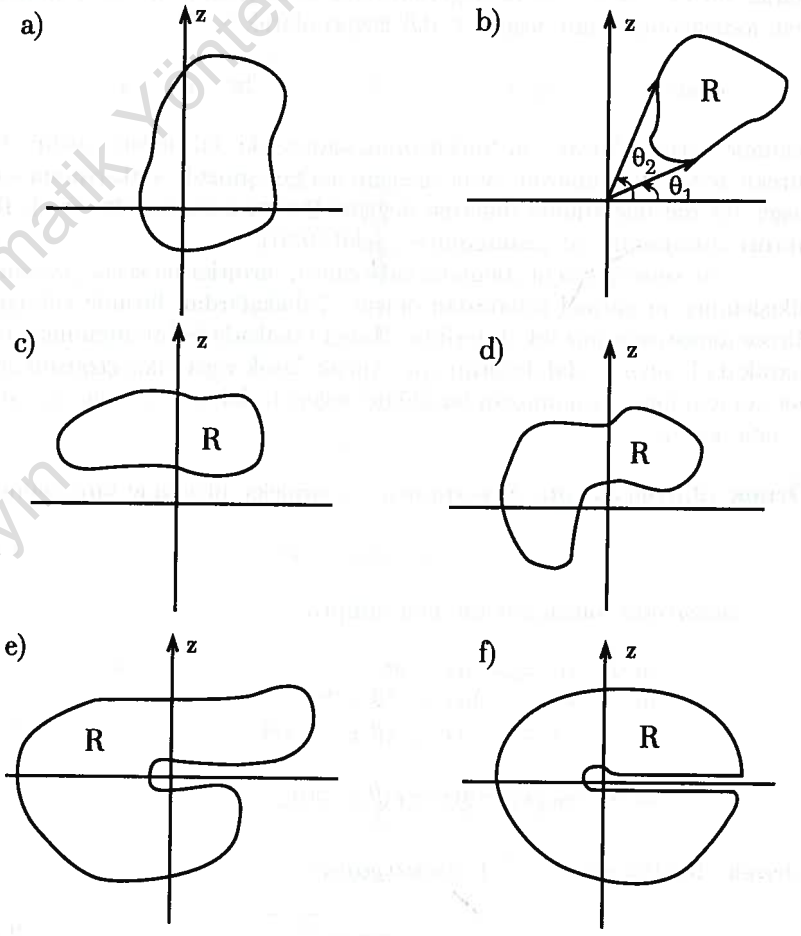
$$w = \sqrt{r_o}e^{-i\pi} = -\sqrt{r_o} \tag{9.98}$$

noktalarına gönderilir. (9.95) ve (9.97) noktaları ($z = 0$ hariç) ise, z-düzleminde aynı noktayı temsil ederler. Dolayısıyla, z-düzleminde tek bir nokta, w-düzleminde farklı iki noktaya haritalanır. Buna **birden-ikiye** ha- ritalama denir. Tek değerli, yani her z için bir tek w değeri alan bir fonksiyon tanımlamak istersek, yapacağımız şey z-düzleminden $\theta = 2\pi$ çizgisini kesip atmaktır. Bu çizgiye **kesik çizgisi** ve bu çizginin son bulduğu $z = 0$ noktasına ise, **dal noktası** denir (Şekil (9.6)). Burada önemli olan fonksiyonumuzun tek değerli olduğu bir bölge bulmak ve bu bölgeyi mümkün olduğu kadar z-düzleminin tamamına yaymaktır. Sorun, Şekil (9.7a ve b)'den görüleceği gibi,

$$z = 0 \tag{9.99}$$

noktasındadır. Merkezi içermeyen her bölge içinde fonksiyonumuz tek değerli olacaktır. Ancak, merkezi içeren bölgelerdeki noktalar için θ değerleri $[0, 2\pi]$ aralığında değişeceğinden, yukarıda bahsettiğimiz problem karşımıza çıkacaktır. Doğal olarak, Şekil (9.7b,c,d,e, ve f)'den görüleceği gibi, fonksiyonumuzun tek değerli olduğu R bölgesini, merkezi içermeden z-düzleminin tamamına yaymanın yolu, merkezden başlayıp sonsuza kadar uzanan herhangi bir eğri (genelde doğru olarak alınır) üzerindeki noktaların bölgemiz dışında tutulmasıdır. Şekil (9.8)'den de görüleceği üzere, kesik çizgisini geçmeyen her yol üzerindeki noktalar için fonksiyonumuz tek değerlidir. Aldığı değere de I. dal değeri denir ve

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.7. **Merkezi içermeyen her R bölgesi içinde $w = z^{1/2}$ fonksiyonu tek değerli olacaktır.**

$$I.dal \qquad w_1(z) = \sqrt{r}e^{-\frac{i\theta}{2}} \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

olarak verilir. $2\pi \le \theta \le 4\pi$ değerleri için, kesik çizgisi bir kez geçileceğinden, fonksiyonumuzun değeri II. dal değeri olarak,

$$II.dal \qquad w_2(z) = -\sqrt{r}e^{-\frac{i\theta}{2}} \qquad 2\pi \le \theta < 4\pi$$

şeklinde verilir. Ancak, bu fonksiyonun sadece iki dal değeri vardır. θ'nın sürekli arttığı durumlarda, kesik çizgisini her geçişimizde fonksiyonun aldığı değer bir dal değerinden diğerine değişir. Bu durumu pratik olarak **Riemann tabakaları** ile gösterebiliriz (Şekil (9.9)).

Bu fonksiyon için Riemann tabakaları, birbirlerine kesik çizgisinden dikişlenmiş iki paralel tabakadan oluşur. Tabakalardan birinde kaldığımız sürece fonksiyonumuz tek değerlidir. Hangi tabakada bulunduğumuza bağlı olarak da I. veya II. dal değerini alır. Ancak, kesik veya dikiş çizgisini geçen her yol için fonksiyonumuzun başlangıç değeri I. dal ise, II. dala, II. dal ise, I. dala değişir.

Örnek (9.8) ***w(z)=lnz fonksiyonu:*** Kompleks düzlemde tanımlanmış

$$w(z) = \ln z = \ln r + i\theta \tag{9.100}$$

fonksiyonu sonsuz sayıda dala sahiptir:

$$\begin{array}{lll} \text{dal } 0 & w_0(z) = \ln r + i\theta & 0 \le \theta < 2\pi \\ \text{dal } 1 & w_1(z) = \ln r + i(\theta + 2\pi) & \\ \text{dal } 2 & w_2(z) = \ln r + i(\theta + 2(2\pi)) & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{dal } n & w_n(z) = \ln r + i(\theta + 2\pi n) & \end{array} \tag{9.101}$$

Örnek (9.9) $\boldsymbol{w(z)=\sqrt{z^2-1}}$ ***fonksiyonu:***

$$w(z) = \sqrt{z^2 - 1} \tag{9.102}$$

fonksiyonunun dal yapısını incelemek için,

$$w(z) = \rho e^{i\phi}, \tag{9.103}$$

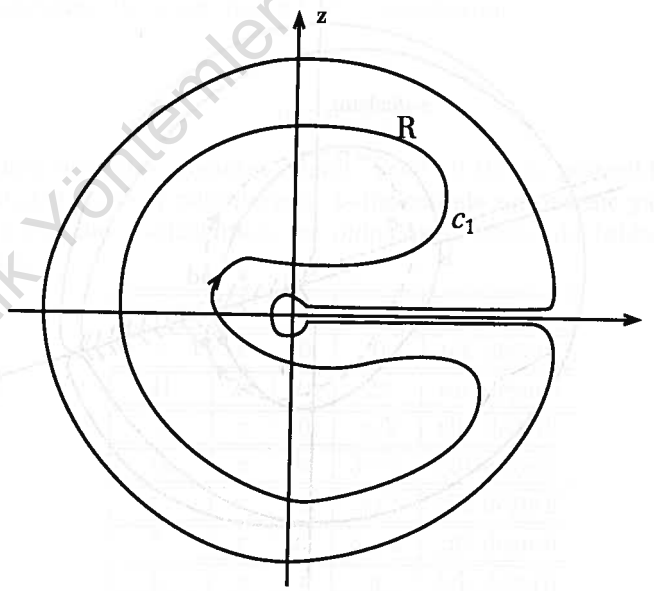
$$= \sqrt{(z-1)(z+1)}, \tag{9.104}$$

$$= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \tag{9.105}$$

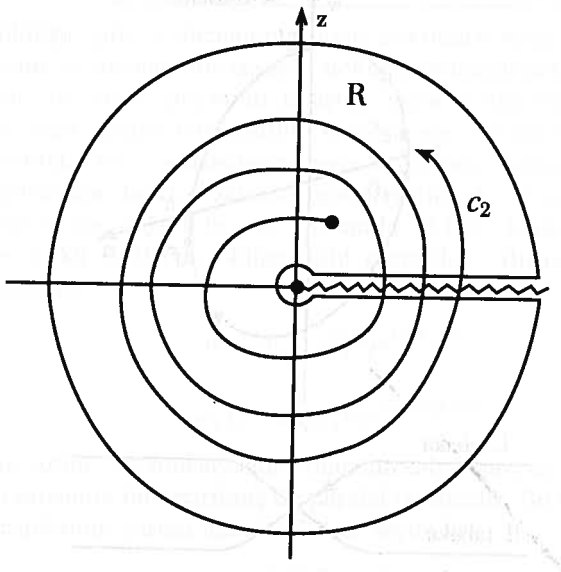
yazalım ve

$$(z-1) = r_1 e^{i\theta_1}\ ,\ (z+1) = r_2 e^{i\theta_2} \tag{9.106}$$

a)

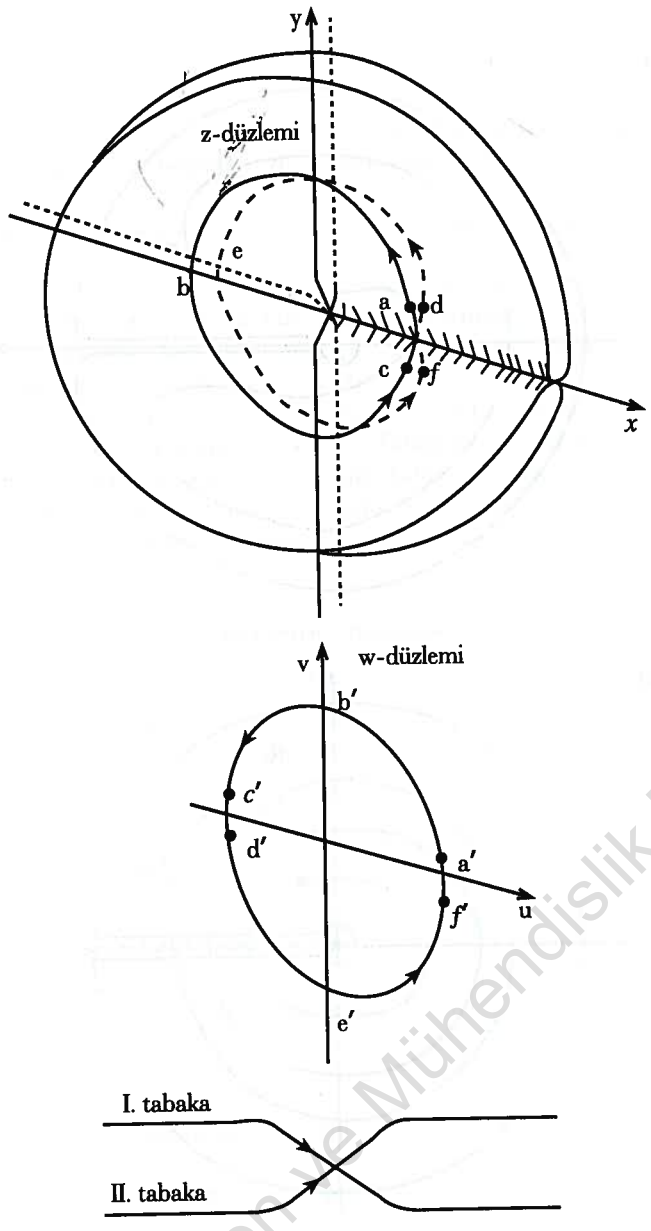


b)



ŞEKİL 9.8. **Kesik çizgisini her geçişimizde, $w = z^{1/2}$ fonksiyonu bir dal değerinden diğerine geçer.**

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.9. $z^{1/2}$ **fonksiyonu için Riemann tabakaları. Yolumuz tabakaların birleştiği kesik çizgisini her geçişinde kendimizi öbür tabakada buluruz. Fonksiyonumuz ise, bir dal değerinden ötekine geçer.**

olarak alalım. Her iki kökün de kesik çizgisini reel eksenin sağ tarafına yerleştirelim. Bu seçim bize θ_1 ve θ_2 değerlerinin,

$$0 \leq \theta_1 < 2\pi, \tag{9.107}$$

$$0 \leq \theta_2 < 2\pi \tag{9.108}$$

şeklinde olduğunu gösterir. Şimdi, Şekil (9.10)'da gösterildiği gibi A,B,C,D,F,G ve H noktalarının, z-düzleminde reel eksene yaklaştıkları durumda, w-düzleminde ne olduklarına aşağıdaki tablodan bir bakalım:

Nokta	θ_1	θ_2	ϕ	
A	0	0	0	tek değerli
H	2π	2π	2π	tek değerli
B	π	0	$\pi/2$	çift değerli
G	π	2π	$3\pi/2$	çift değerli
C	π	0	$\pi/2$	çift değerli
F	π	2π	$3\pi/2$	çift değerli
D	π	π	π	tek değerli
E	π	π	π	tek değerli

(9.109)

Görüldüğü gibi, z-düzleminde aynı noktalara karşı gelen A ve H noktaları w-düzleminde de aynı noktaya gönderilmektedir. Bir başka deyişle, iki kesik çizgisinin kesiştiği yerde fonksiyon tek değerlidir ve iki kesik çizgisi birbirlerinin etkisini yok etmektedir. B, G ve C, F noktaları ise, z-düzleminde aynı noktalara yaklaşmakla birlikte, w-düzleminde farklı noktalara gönderilirler. D, E noktalarında ise, fonksiyon tek değerlidir. Bu durumda (9.102) fonksiyonunun kesik çizgisi Şekil (9.10)'da olduğu gibi gösterilir. Birinci ve ikinci dal değerleri ise,

$$w_1(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}}, \tag{9.110}$$

$$w_2(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2+2\pi)}{2}} \tag{9.111}$$

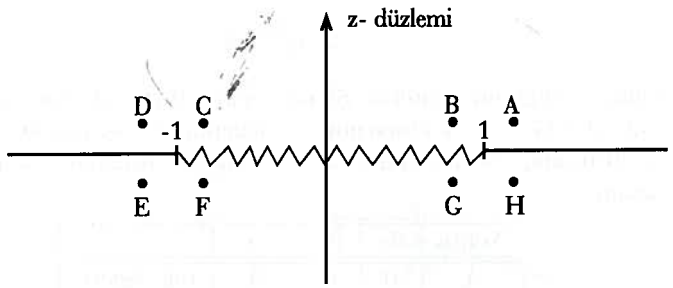
olarak verilir. Bu fonksiyonun Riemann tabakaları ise, -1 ve $+1$ noktaları arasında birleştirilmiş iki paralel tabakadır. Bu fonksiyonun kesik çizgilerinin yerleri için, bir başka seçim ise,

$$0 \leq \theta_1 < 2\pi, \tag{9.112}$$

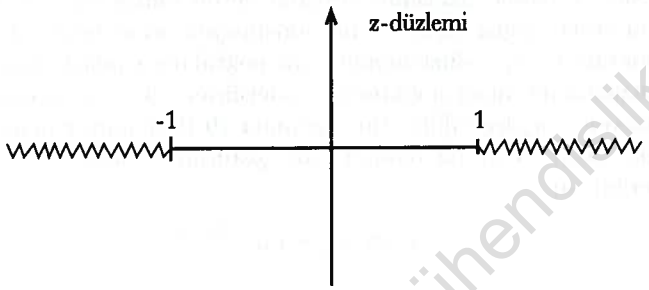
$$-\pi \leq \theta_2 < \pi \tag{9.113}$$

olarak verilebilir (Şekil (9.11)).

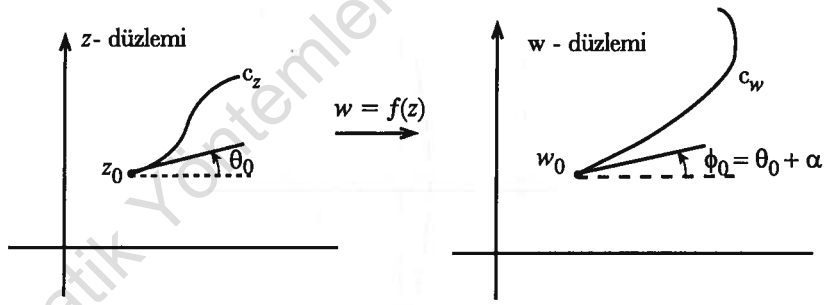
Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.10. $\sqrt{z^2-1}$ **için kesik çizgileri.**



ŞEKİL 9.11. $\sqrt{z^2-1}$ **için kesik çizgilerinin değişik bir seçimi.**



ŞEKİL 9.12. **Konformal haritalama.**

9.4.1 Konformal Haritalama

Analitik fonksiyonların ilginç ve çok kullanışlı bir özelliğini görmek için

$$w = f(z) \tag{9.114}$$

olarak verilen bir analitik fonksiyonun, z_o noktasında türevini alalım ve kutupsal koordinatları kullanarak her iki tarafın da argümanlarını inceleyelim (Şekil (9.12)) :

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z_o} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_o}, \tag{9.115}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_o}, \tag{9.116}$$

$$\arg\left[\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_o}\right] = \lim_{\Delta z\to 0}\arg[\Delta w] - \lim_{\Delta z\to 0}\arg[\Delta z], \tag{9.117}$$

$$\arg\left[\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_o}\right] = \alpha. \tag{9.118}$$

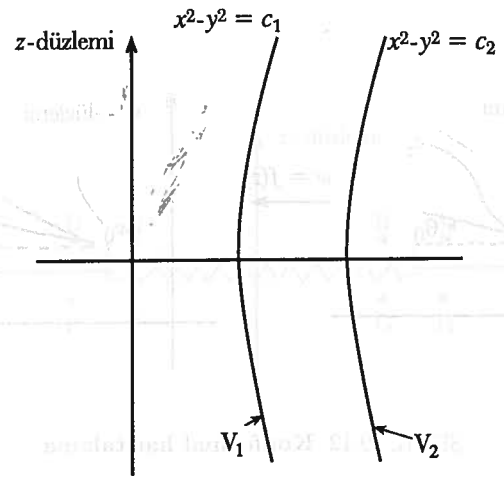
z-düzleminde c_z olarak gösterilen bir eğrinin, bu fonksiyon tarafından w-düzlemine, c_w olarak haritalandığını düşünelim: c_z'nin z_o noktasındaki eğimi θ_o olursa, c_w'nun w_o noktasındaki eğimi de $\theta_o + \alpha$ olacaktır. z_o noktasında kesişen bir çift eğri düşünürsek, bu iki eğrinin tanjantları arasındaki açı,

$$\phi_2 - \phi_1 = (\theta_2 + \alpha) - (\theta_1 + \alpha), \tag{9.119}$$

$$= \theta_2 - \theta_1 \tag{9.120}$$

denklemlerinden de görüleceği gibi değişmeyecektir. Özetlersek, analitik fonksiyonlar haritaladıkları eğriler arasındaki açıları korurlar. Bu tür haritalamalara konformal haritalar veya konformal dönüşümler de denir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.13. **Hiperbolik kesiti olan iki iletken levha.**

9.4.2 Elekrostatik Problemleri ve Konformal Haritalama

Konformal dönüşümler elektrostatik ve hidrodinamik gibi Laplace denkleminin çözümünü gerektiren ve problemin iki boyuta indirgenebildiği durumlarda çok kullanışlıdır. İki boyuta indirgenebilen problemlerden kastımız, sayfa düzlemine dik doğrultuda öteleme simetrisi olan problemlerdir.

Örnek (9.10) ***Elektrostatik problemleri ve konformal haritalama:*** V_1 ve V_2 potansiyellerinde tutulan ve Şekil (9.13) de gösterildiği gibi kesitleri,

$$x^2 - y^2 = c_1 \text{ ve } x^2 - y^2 = c_2 \tag{9.121}$$

olarak verilen iki hiperbolik iletkenin arasındaki elektrik alan çizgilerini ve eşpotansiyel yüzeylerini bulalım. z-düzleminde problem Şekil (9.13)'de gösterildiği gibidir. Bu eğrileri,

$$w = z^2, \tag{9.122}$$

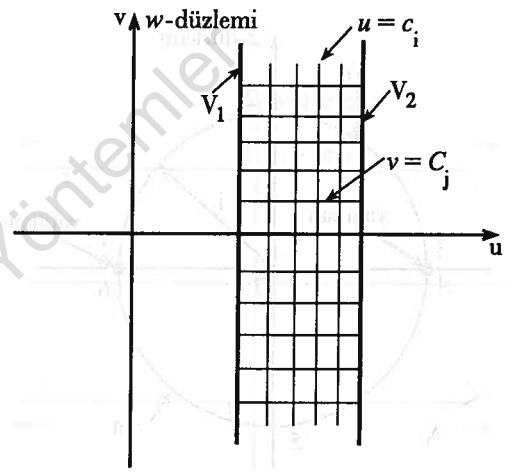
$$w = x^2 - y^2 + i\,(2xy) \tag{9.123}$$

Konformal dönüşümünü kullanarak, w-düzleminde,

$$u = c_1,\ u = c_2 \tag{9.124}$$

doğrularına haritalarız (Şekil (9.14)). Artık w-düzleminde problem, V_1 ve V_2 potansiyellerinde tutulan iki paralel iletken levha arasındaki elektrik alan ve eşpotansiyel yüzeyleri bulmaya dönüşür ki, burada elektrik alan çizgileri,

$$v = C_j \tag{9.125}$$



ŞEKİL 9.14. ***w*-düzleminde eşpotansiyel ve elektrik alan çizgileri.**

ve eşpotansiyel yüzeyler de

$$u = c_i \tag{9.126}$$

doğru aileleri olarak kolayca bulunur. Asıl problemimizin z-düzleminde olduğunu hatırlarsak, bu doğruların z-düzleminde neye karşı geldiklerini ters dönüşüm ile buluruz. Bu da bize elektrik alan çizgileri için,

$$(v =)2xy = C_j \tag{9.127}$$

ve eşpotansiyeller için de

$$(u =)x^2 - y^2 = c_i \tag{9.128}$$

eğri ailelerini verir.

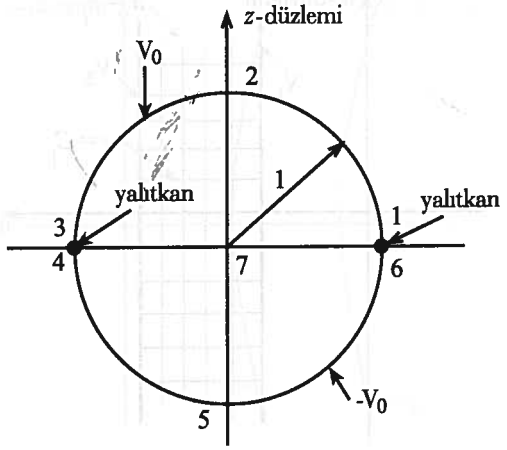
Örnek (9.11) ***Elektrostatik problemleri ve konformal haritalama:*** Bu örnekte biraz daha karmaşık bir duruma bakalım. Kesiti çember olan ve şekilde gösterildiği gibi $+V_0$ ve $-V_0$ potansiyellerinde tutulan iki iletkenin içindeki eşpotansiyel yüzeylerini bulalım. z-düzleminde denklemi,

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{9.129}$$

olarak verilen yarım çemberler,

$$w\,(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{9.130}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.15. **Kesiti çember olan iki iletken**

dönüşümü kullanılarak, w-düzleminde Şekil (9.16)'da gösterildiği gibi birbirine paralel doğrulara haritalanır. (9.130) dönüşümünü,

$$\begin{aligned} u+iv &= \ln\frac{1+x+iy}{1-x-iy} && (9.131)\\ &= \ln\left[\frac{1-x^2-y^2+2iy}{1-2x+x^2+y^2}\right] && (9.132)\end{aligned}$$

olarak yazar ve ln fonksiyonunun argumanını $\mathrm{Re}^{i\alpha}$ olarak ifade edersek,

$$u+iv = \ln R + i\alpha \qquad (9.133)$$

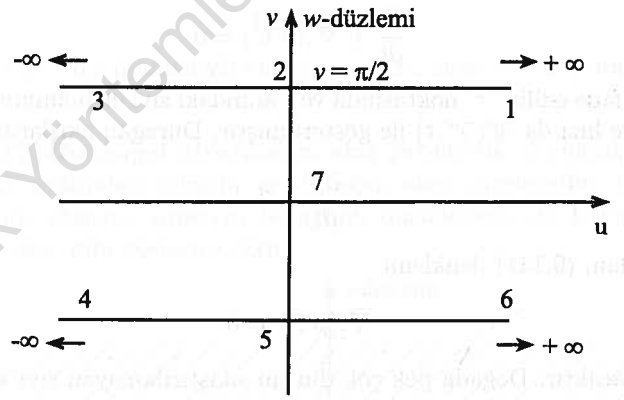
olur ve bizde v fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} v &= \alpha && (9.134)\\ &= \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} && (9.135)\end{aligned}$$

olarak buluruz . Bu ifadenin,

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y>0}} \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{2}, \qquad (9.136)$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y<0}} \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = -\frac{\pi}{2}$$



ŞEKİL 9.16. **Kesiti yarım çember olan iki iletkenin w- düzlemindeki durumu**

limitlerinden, z-düzlemindeki yarım çemberlerin w-düzleminde,

$$v = \frac{\pi}{2} \text{ ve } v = -\frac{\pi}{2} \qquad (9.137)$$

doğrularına haritalandığını görürüz. w-düzlemindeki eşpotansiyel eğriler ise,

$$V = \frac{2V_0}{\pi}v \qquad (9.138)$$

şeklinde kolayca yazılır. z-düzleminde ki eşpotansiyel eğriler ise, (9.135) kullanılarak,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2V_0}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right], && (9.139)\\ &= \frac{2V_0}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right] && (9.140)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu problemin kağıt düzlemine dik yönde öteleme simetrisi olduğundan, eşpotansiyel eğriler bu yönde devam ettirilerek eşpotansiyel yüzeyler bulunur. Görüldüğü gibi, bu yöntem çözümü Legendre polinomları ve genel Fourier serisi açılımı yönteminden çok daha kolay vermektedir. Bu problemin çözümünde anahtar olan (9.130) dönüşümü ve pek çok başka kullanışlı dönüşüm, matematik el kitaplarından bulunabilir. Ancak, Schwarz-Christoffel dönüşümlerinde göreceğimiz gibi, bazı durumlarda kendimiz de çıkarabiliriz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
11. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

9.4.3 *Akışkanlar Mekaniği ve Konformal Haritalama*

Sürtünmesiz ve düzgün akan sıvılar için maddenin korunumu denklemi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0 \tag{9.141}$$

şeklinde ifade edilir. $\vec{r}$ noktasında ve t anındaki sıvı elemanının yoğunluğu $\rho(\vec{r},t)$ ve hızı da $\vec{v}(\vec{r},t)$ ile gösterilmiştir. Durağan akışlarda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{9.142}$$

olacağından, (9.141) denklemi

$$\vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0 \tag{9.143}$$

şeklini alacaktır. Doğada pek çok durum sıkıştırılamayan sıvı varsayımına uygun olacağından, hal denklemi olarak

$$\rho = sabit. \tag{9.144}$$

alırsak, (9.143) denklemi bize

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{9.145}$$

verecektir. Ancak, bu denklem tek başına $\vec{v}(\vec{r},t)$ vektör alanını belirlememize yeterli olmaz. Eğer akışta girdap hareketi de yoksa, yani sıvı düzgün akıyorsa, sıvı elemanlarının hızları aynı zamanda da

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \tag{9.146}$$

denklemini sağlayacaktır. Bu iki denklem:

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{9.147}$$

ve

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0, \tag{9.148}$$

artık düzgün akan bir sıvının kinematiğini tam olarak belirler. Bu denklemler, aynı zamanda da doğrusal ve açısal momentum korunumunun ifadesidirler. Bu tür düzgün akışlarda sıvı elemanları akış çizgileri olarak bilinen eğrileri takip ederler. Herhangi bir noktadaki $\vec{v}(\vec{r},t)$ hızı ise, akış çizgisine o noktada teğet olacaktır.

(9.147) ve (9.148) denklemleri elektrostatikde elektrik alanının sağladığı denklemler ile aynıdır. Dolayısı ile benzer bir yol izleyerek, (9.148) denkleminden

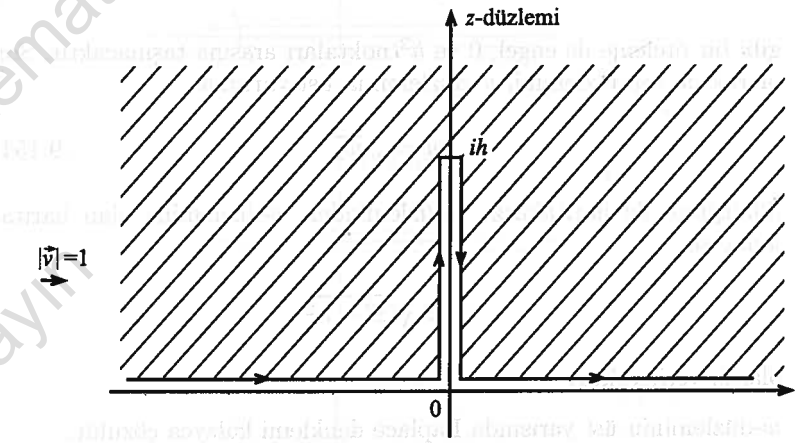
$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) \tag{9.149}$$

şeklinde bir potansiyel tanımlarız. Bunu da (9.147) denkleminde yerine koyarsak, Laplace denklemini buluruz:

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r},t) = 0 \tag{9.150}$$

Burada $\Phi(\vec{r},t)$, hız potansiyeli olarak anılsada, elekrostatik potansiyelden çok farklıdır.

Örnek (9.12) ***Bir engel etrafından akış problemi:*** h yüksekliğinde bir engelin erafından düzgün ve durağan akışı inceleyelim. Olayın z-yönünde öteleme simetrisi olduğunu düşünürsek, iki boyutta Şekil (9.17)'deki gibi gösterilecektir.



ŞEKİL 9.17. **h-yüksekliğinde bir engel etrafından akış: Hız potansiyelini bulacağımız alan taranmıştır.**

Aradığımız, O ile gösterilen taralı bölge içinde hız potansiyeli için Laplace denkleminin çözümüdür. Burada hız potansiyeli elektrostatikteki gibi Laplace denklemini sağlasa da dikkat edilmesi gereken incelik, sınır şartlarının çok farklı olduğudur. Nitekim, elektrostatikte elektrik alanı yüzeylere (iletkenlere yani eşpotansiyellere) dik olacağından, test parçacıkları sadece yüzeylere dik yönde hareket edebilecektir. Akış problemlerinde ise, sıvı elemanları yüzeylere dik yönde hareket edemezler. Bunun içindir ki, akış çizgileri yüzeyleri takip eder. Bu problemde sınır şartı olarak, akış çizgilerini engelden uzak noktalarda x-eksenine paralel, x-ekseni ve engele yaklaştıkça da O alanının sınırı olarak alırız. Ayrıca, engelden uzak noktalarda akış hızı

$$v_\infty = 1 \tag{9.151}$$

olarak verilmiş olsun.

Burada aradığımız $z-$düzleminde O olarak gösterdiğimiz bölgeyi w-düzleminin üst yarısına haritalayan bir dönüşümdür. Şekil (9.17)'de

Fen & Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

O bölgesinin alt sınırı olarak gösterilen akım çizgisi de doğal olarak w-düzleminde reel eksene haritalanmış olacaktır. Şimdi bu dönüşümü üç adımda yapalım: Önce,

$$w_1 = z^2 \tag{9.152}$$

gibi bir dönüşüm ile O bölgesini w_1-düzleminin tamamına haritalayalım. Burada engel, w_1-düzleminde 0 ve $-h^2$ noktaları arasında olacaktır. İkinci etapta ise,

$$w_2 = z^2 + h^2 \tag{9.153}$$

gibi bir öteleme ile engel, 0 ve h^2 noktaları arasına taşınacaktır. Son olarak da w_2-düzlemini, w-düzleminin üst yarısına

$$w = \sqrt{w_2} \tag{9.154}$$

dönüşümü ile haritalarız. z-düzleminden w-düzlemine olan haritalama ise,

$$w = \sqrt{z^2 + h^2}$$

olarak verilecektir.

w-düzleminin üst yarısında Laplace denklemi kolayca çözülür.

$$v = c_j$$

çizgileri akım çizgilerini, bunlara dik olan

$$u = b_j$$

çizgileri ise, hız eşpotansiyellerini verecektir. Tekrar z-düzlemine dönersek, akım çizgileri

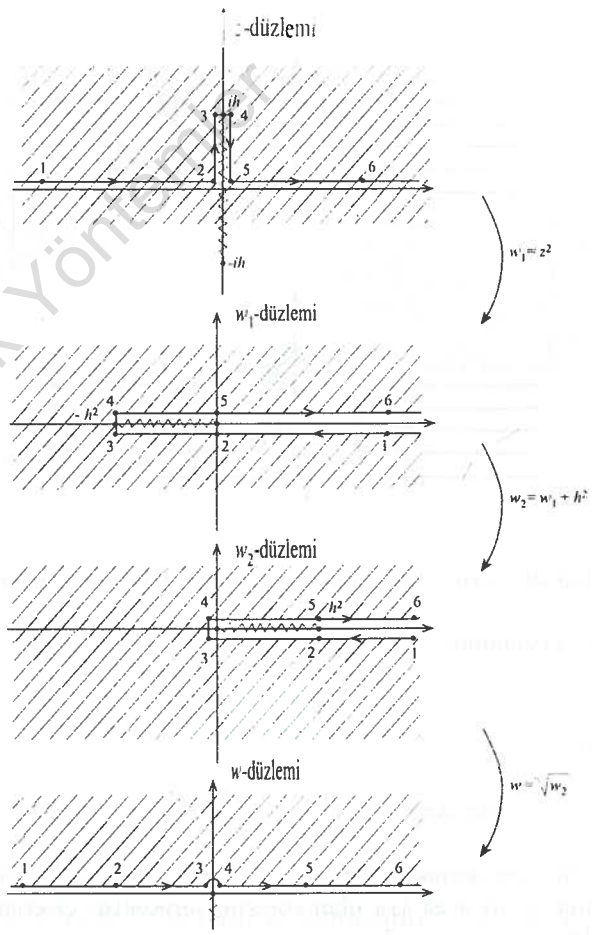
$$c_j = \mathrm{Re}[\sqrt{z^2 + h^2}]$$

ile verilecektir. Sıvı elemanlarının hızı,

$$|\vec{v}| = \left|\frac{dw}{dz}\right|$$

denklemi ile verilirken yönleri de akış çizgilerine teğet olacaktır (Şekil (9.19)).

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.18. **z-düzleminden w-düzlemine geçiş.**

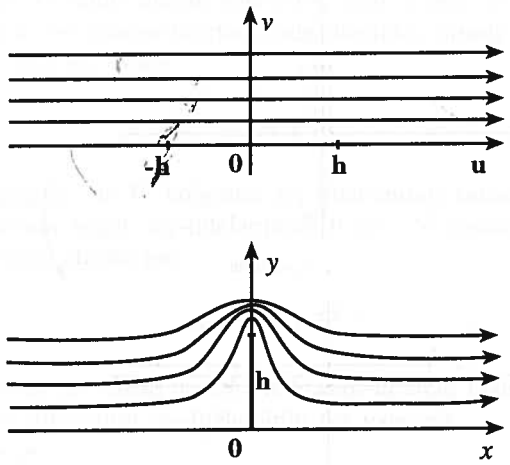
9.4.4 Schwarz-Christoffel Dönüşümleri

Uygulamalarda çok yararlı dönüşümlerden biri de z-düzleminde bir poligonun içini, w- düzleminin üst yarısına haritalayan Schwarz-Christoffel dönüşümüdür (Şekil (9.20)). Schwarz-Christoffel dönüşümünü oluşturmak için,

$$\frac{dz}{dw} = A\,(w - w_1)^{-k_1} \tag{9.155}$$

gibi bir fonksiyonu ele alalım. Burada, A kompleks, k_1 ise reel sayılardır. w_1 ise, u-ekseni üzerinde bir noktadır. (9.155) denkleminde her iki tarafın da argümanlarını karşılaştırırsak,

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \begin{cases} \arg A - k_1\pi & w < w_1 \\ \arg A & w > w_1 \end{cases} \tag{9.156}$$



ŞEKİL 9.19. w **ve** z**-düzlemlerinde akım çizgileri (streamlines).**

buluruz. $w-$düzleminde

$$\arg\Delta w = 0 \tag{9.157}$$

olacağından,

$$\arg\Delta z = \begin{cases} \arg A - k_1\pi & w < w_1 \\ \arg A & w > w_1 \end{cases} \tag{9.158}$$

yazabiliriz. Bu bize herhangi bir A sabiti için, z-düzleminde bir poligonun z_1 noktasında ve dış açısı $k_1\pi$ olan köşesini verecektir. Özetlersek; (9.155) denkleminde,

$$(w - w_1)^{-k_1} \tag{9.159}$$

faktörü bize poligonun bir köşesini verecektir. n-köşeli bir poligon için ise, Schwarz-Christoffel dönüşümü

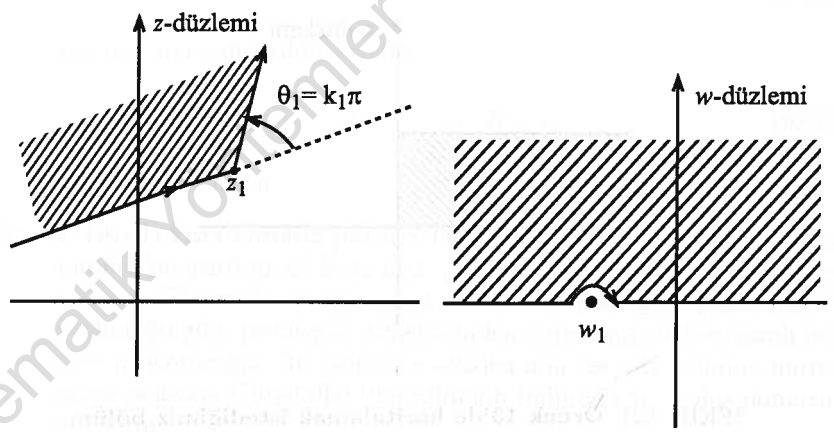
$$\frac{dz}{dw} = A\,(w - w_1)^{-k_1}\,(w - w_2)^{-k_2}\,....\,(w - w_n)^{-k_n} \tag{9.160}$$

olarak yazılır. Burada, bir poligonun dış açıları toplamı 2π olacağından k_i sabitleri,

$$\sum_{i=1} k_i = 2 \tag{9.161}$$

eşitliğini sağlamalıdır. (9.160) denkleminin integralini de alırsak,

$$z = A\int^{w} (w - w_1)^{-k_1}\,(w - w_2)^{-k_2}\,....\,(w - w_n)^{-k_n}\,dw + B$$



ŞEKİL 9.20. **Schwarz-Christoffel dönüşümü, bir poligonun içini w-düzleminin üst yarısına haritalar.**

buluruz. Burada A sabiti poligonun yönünü, B sabiti ise, konumunu belirler. z-düzleminde bir poligon n köşesi verilerek belirlenebilir. Bu ise, Schwarz-Christoffel dönüşümündeki $2n$ sabitin belirlenmesinde kullanılır. Schwarz-Christoffel dönüşümünde n tane w_i , n tane k_i ve 4 tane de A ve B 'den gelen toplam $2n+4$ parametre vardır. $(2n+4)$ parametreden $2n$ tanesini köşelerin konumundan bulabiliriz. Bu da bize reel eksen üzerindeki w_i değerlerinden, 3 tanesini seçebileceğimizi gösterir.

Örnek (9.13) ***Schwarz-Christoffel dönüşümü:*** Şekil (9.21)'de taralı olarak gösterilen bölgeyi, Schwarz-Christoffel dönüşümünü kullanarak w- düzleminin üst yarısına haritalayalım. Bu tür haritalar uygulamalarda karşımıza sıkça çıkarlar. Schwarz-Christoffel dönüşümünü uygulamak için Şekil (9.22)'de görüldüğü gibi, z_3 köşesi $-\infty$ 'a giderken iç kısmı istediğimiz bölgeye dönüşen bir poligon tanımlayalım. Schwarz-Christoffel dönüşümündeki serbestliği kullanarak z_1, z_2, ve z_3 noktalarının w-düzlemindeki yerlerini,

$$w_3 \to -\infty,\;\; w_1 = -1,\;\; w_2 = +1 \tag{9.162}$$

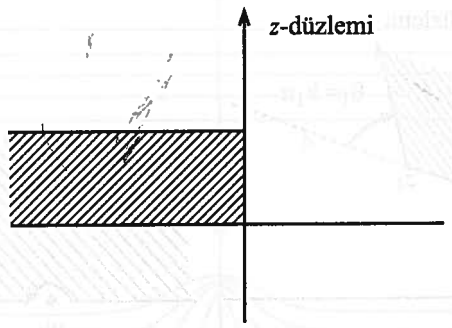
olarak seçersek, Schwarz-Christoffel dönüşümü

$$\frac{dz}{dw} = c\,(w+1)^{-k_1}\,(w-1)^{-k_2}\,(w - w_3)^{-k_3} \tag{9.163}$$

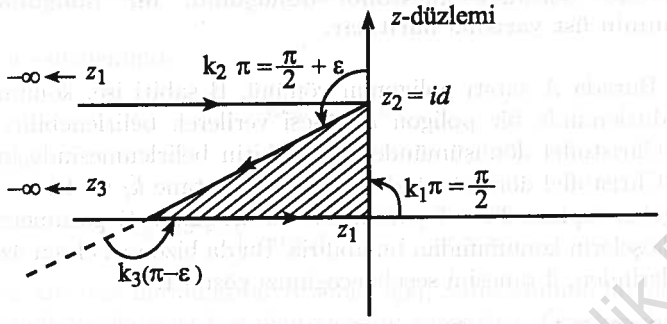
şeklinde yazılabilir. c sabitinin henüz belirlenmediğini düşünürsek,

$$\lim_{w_3 \to -\infty} \frac{c}{(-w_3)^{k_3}} \to A \tag{9.164}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.21. **Örnek 13'de haritalamak istediğimiz bölüm.**



ŞEKİL 9.22. **İç tarafı $z_3 \to \infty$ limitinde, örnek 13'de istediğimiz alana giden poligon.**

limiti ile yeni ve sonlu bir Kompleks A sayısı tanımlayabiliriz. Bu da bize Schwarz-Christoffel dönüşümünü,

$$\frac{dz}{dw} = A\,(w+1)^{-\frac{1}{2}}\,(w-1)^{-\frac{1}{2}} \tag{9.165}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{w^2-1}} \tag{9.166}$$

şeklinde verir. Bu ifadenin integrali kolayca alınıp,

$$z = A\cosh^{-1} w + B \tag{9.167}$$

bulunur. A ve B sabitleri ise, 0 ve id noktaları,

$$z = 0 \quad \to \quad w = -1 \tag{9.168}$$

$$z = id \quad \to \quad w = +1 \tag{9.169}$$

noktalarına gönderildiklerinden,

$$A = \frac{d}{\pi} \quad \text{ve} \quad B = id \tag{9.170}$$

olarak belirlenirler.

Örnek (9.14) ***Yarı sonsuz paralel kapasitör:*** Bu örnekte yarı sonsuz paralel kapasitörün elektrik alan çizgileri ve eşpotansiyel yüzeylerini, Schwarz-Christoffel dönüşümünü kullanarak bulacağız . Şekil (9.23)'de görüldüğü gibi, problemin simetrisinden yararlanıp sadece taralı bölgeyi inceleyeceğiz. Bu bölgeyi w-düzleminin üst yarı alanına haritalayan Schwarz-Christoffel dönüşümünü bulmak için, poligonumuzun köşelerini

$$\begin{gathered} z_1 \to w_1 \to -\infty \\ z_4 \to w_4 \to +\infty \\ z_2 \to w_2 \to -1 \\ z_3 \to w_3 \to 0 \end{gathered} \tag{9.171}$$

olarak w- düzlemine gönderelim. $k_2 = -1$ ve $k_3 = 1$ olacağından,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= c\,(w+1)^{-k_2}\,(w-0)^{-k_3} \\ &= c\frac{(w+1)}{w} \\ &= c(1+\frac{1}{w}) \end{aligned} \tag{9.172}$$

yazabiliriz. Bunun integrali ise,

$$z = c\,(w + \ln w) + D \tag{9.173}$$

olarak kolayca bulunur. Burada

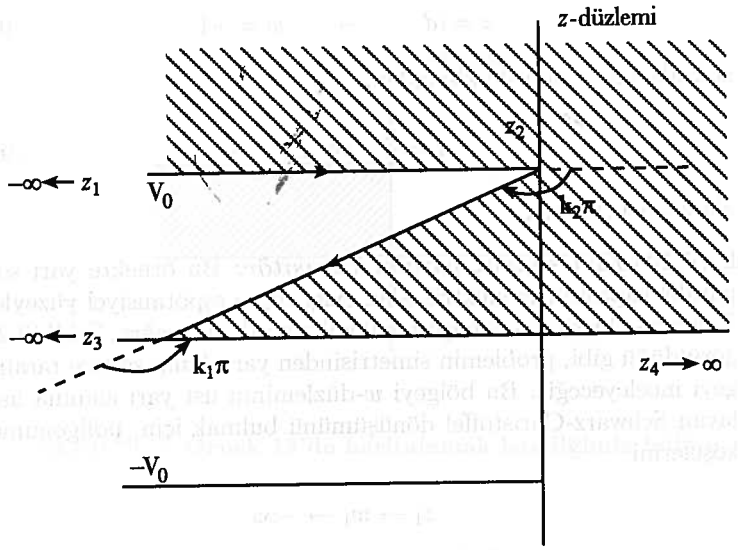
$$w = |w|\,e^{i\phi} \tag{9.174}$$

yazarsak,

$$z = c\left[|w|\,e^{i\phi} + \ln|w| + i\phi\right] + D \tag{9.175}$$

elde ederiz. Şekil (9.24)'de gösterilen limiti gözönüne alırsak,

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.23. **Yarı sonsuz kapasitör problemi.**

$$z_3^{üst} - z_3^{alt} = id$$

ve

$$z_3^{üst} - z_3^{alt} = c\left[0 + i\left(\phi_3^{üst} - \phi_3^{alt}\right)\right] = ci\,(\pi - 0) \tag{9.176}$$

olacağından, c sayısını

$$c = \frac{d}{\pi} \tag{9.177}$$

olarak belirleriz. Aynı zamanda $z-$düzleminde

$$z_2 = id \tag{9.178}$$

noktasının, $w-$düzleminde -1 noktasına gönderildiğini düşünürsek,

$$z_2 = id$$

ve

$$z_2 = \frac{d}{\pi}(-1 + i\pi) + D \tag{9.179}$$

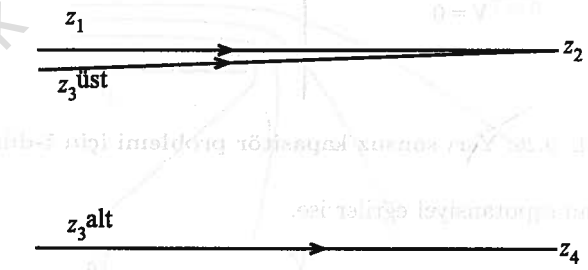
yazar ve D 'yi de

$$D = \frac{d}{\pi} \tag{9.180}$$

olarak belirleriz. Bu da bize aradığımız Schwarz-Christoffel dönüşümünü,

$$z = \frac{d}{\pi}\left[w + \ln w + 1\right] \tag{9.181}$$

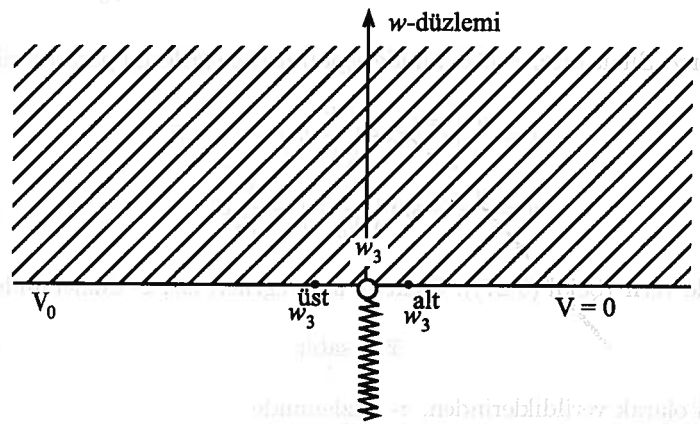
şeklinde verir. Şekil (9.23)'de gösterilen taralı alan ise, $w-$düzleminde Şekil (9.25)'deki taralı alana haritalanacaktır. Şimdi,



ŞEKİL 9.24. z_3 **nokasının limiti.**

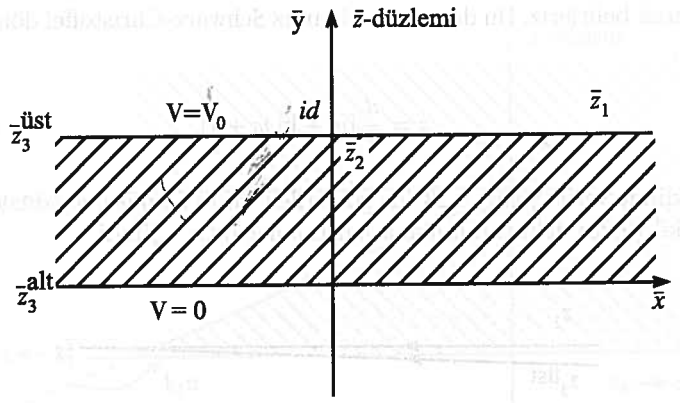
$$\overline{z} = \frac{d}{\pi}\ln w \quad \text{ve } w = e^{\overline{z}\frac{\pi}{d}}$$

olarak verilen bir konformal dönüşümü ele alalım. Bu dönüşüm bize Şekil (9.25)'de gösterilen taralı alanı, $\overline{z}$- düzleminde Şekil (9.26)'da gösterilen taralı alana haritalayacaktır. $\overline{z}$- düzleminde problemin çözü-



ŞEKİL 9.25. **Yarı sonsuz paralel kapasitör için w-düzlemi.**

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 9.26. **Yarı sonsuz kapasitör problemi için $\overline{z}$-düzlemi.**

mü olan eşpotansiyel eğriler ise,

$$\overline{y} = \text{sabit} = \frac{V}{V_0} d \Longrightarrow V(\overline{y}) = \frac{V_0}{d} \overline{y} \tag{9.182}$$

olarak bulunurlar. Ters dönüşümleri kullanarak,

$$z = x + iy \tag{9.183}$$

$$z = \frac{d}{\pi}\left[e^{-\overline{x}\frac{\pi}{d}}\left(\cos\left(\frac{V}{V_0}\pi\right) + i\sin\left(\frac{V}{V_0}\pi\right)\right) + 1\right] + \overline{x} + i\frac{V}{V_0}d \tag{9.184}$$

yazarız. Bu da bize, z-düzleminde eşpotansiyel eğrilerini parametrik olarak

$$x = \frac{d}{\pi}\left[e^{\overline{x}\frac{\pi}{d}}\cos\left(\frac{V}{V_0}\pi\right) + 1\right] + \overline{x}, \tag{9.185}$$

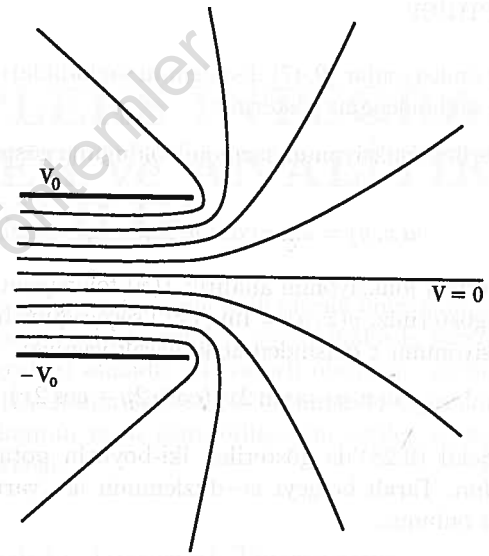
$$y = \frac{d}{\pi} e^{\overline{x}\frac{\pi}{d}} \sin\left(\frac{V}{V_0}\pi\right) + \frac{V}{V_0} d \tag{9.186}$$

şeklinde verir (Şekil (9.27)). Elektrik alan eğrileri ise, $\overline{z}$- düzleminde

$$\overline{x} = \text{sabit} \tag{9.187}$$

eğrileri olarak verildiklerinden, z- düzleminde

$$\frac{\overline{x}\pi}{d} = \kappa, \quad \theta = \frac{\overline{y\pi}}{d} \tag{9.188}$$



ŞEKİL 9.27. **Yarı sonsuz paralel kapasitör için eşpotansiyeller.**

tanımları ile

$$x = \frac{d}{\pi}\left[e^{\kappa}\cos\theta + 1\right] + \kappa\frac{d}{\pi}, \tag{9.189}$$

$$y = \frac{d}{\pi}\left[e^{\kappa}\sin\theta + \theta\right] \tag{9.190}$$

şeklinde bulunacaklardır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

9.5 Problemler

1. Harmonik fonksiyonlar (9.47) denklemini sağladıklarında, (9.48) denklemininde sağlanacağını gösteriniz.

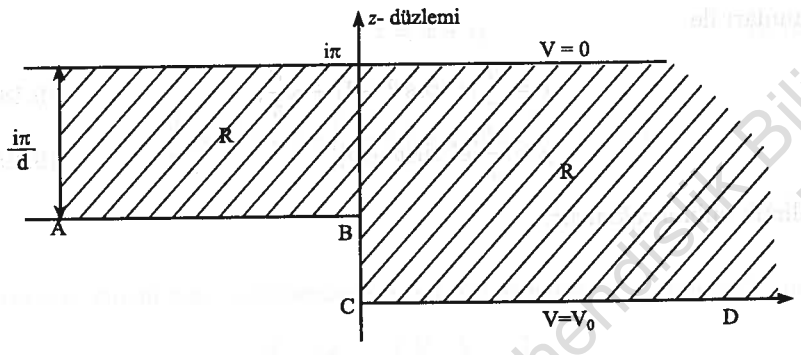
2. Aşağıda verilen fonksiyonun harmonik olduğunu gösteriniz ve eşleniğini bulunuz:

$$u(x,y) = \sin x \cosh y + x^2 - y^2 + 4xy.$$

3. Aşağıda verilen fonksiyonun analitik $f(x)$ fonksiyonun reel kısmı olabileceğini gösteriniz. $v(x,y) = \text{Im}\, f(x)$'i seçeceğiniz bir yolla bulunuz. $f(z)$ fonksiyonunu z cinsinden açık olarak yazınız:

$$u(x,y) = \sin 2x/(\cosh 2y + \cos 2x)$$

4. Aşağıda Şekil (9.28)'de gösterilen iki-boyutlu potansiyel problemini ele alalım. Taralı bölgeyi $w-$düzleminin üst yarısına haritalayan dönüşümü bulunuz.



ŞEKİL 9.28. **İki boyutlu potansiyel problemi.**

5. Örnek (9.11)'deki problemde silindirik kutupsal koordinatları kullanarak Laplace denkleminin değişkenleri ayırma yöntemi ile seri çözümünü bulunuz. Her iki yöntemle bulunan çözümlerin aynı olduğunu gösteriniz.

6. Örnek (9.14)'de parametrik olarak verilen eşpotansiyel ve elektrik alan eğrilerini, Maple veya Mathematica gibi programlar yardımı ile çizdiriniz.

10

KOMPLEKS İNTEGRALLER, SERİLER ve ANALİTİK SÜREKLİLİK

Bu bölümde kompleks yöntemlerle ilgili olarak önce kompleks yol integrali teoremlerini göreceğiz. Bu teoremler, uygulamalarda karşımıza çıkabilecek bazı belirli integralleri almada çok yararlı olacaktır. Ayrıca, reel eksen üzerinde veya z-düzleminin sadece bir bölümünde tanımlanmış bir fonksiyonun, tanım alanının nasıl genişletileceğini seriler ve analitik süreklilik bölümünde işleyeceğiz.

10.1 Kompleks İntegral Teoremleri

I.Cauchy-Goursat Teoremi

Verilen bir $f(z)$ fonksiyonu, basit bağlantılı bir bölgede C kapalı yolu üzerinde ve içinde analitik ise, C kapalı yolu üzerinden integrali sıfırdır (Şekil (10.1)):

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{10.1}$$

İspat. $f(z)$ fonksiyonunu,

$$f(z) = u + iv \tag{10.2}$$

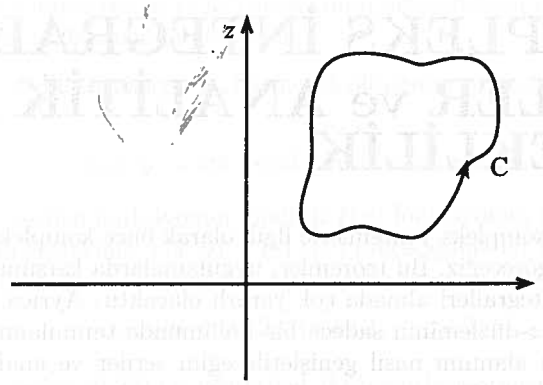
olarak yazarsak, (10.1) integrali de aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} &\oint_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) \qquad (10.3) \\ &= \oint_C \vec{A_1}\cdot d\vec{l} + i\oint_C \vec{A}_2 \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Burada $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ vektör alanları, $\vec{A}_1 = (u,-v)$ ve $\vec{A}_2 = (v,u)$ olarak tanımlanmışlardır. Sağ taraftaki yol integrallerini Stokes teoremi olarak bilinen,

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_V \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot \hat{n}ds \tag{10.4}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.1. **Cauchy-Goursat teoreminin yolu.**

ifadesini kullanarak,

$$\iint_S \left(-\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) ds + \iint_S \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) ds \qquad (10.5)$$

şeklinde yüzey integrali olarak yazabiliriz. Burada S yüzeyi, C yolu tarafından sınırlanan yönelimli bir yüzeydir. C yolu üzerinde ve içinde $f(z)$ fonksiyonu analitik olduğu zaman, Cauchy-Riemann şartları sağlanacağından bu ifadenin değeri de sıfır olacaktır.

II. Cauchy Integral Teoremi

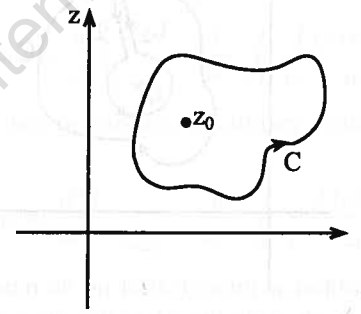
$f(z)$ fonksiyonu, Şekil (10.2)'de gösterildiği gibi basit bağlantılı bir bölgede C kapalı yolu üzerinde ve içinde analitik ise, C yolu içinde herhangi bir z_0 noktası için aşağıda verilen integrali yazabiliriz:

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} = 2\pi i f(z_0) \qquad (10.6)$$

İspat. Bu teoremi ispat için, Şekil (10.2)'de gösterilen yolu, Şekil (10.3)'de gösterildiği gibi değiştirip Cauchy-Goursat teoremini uygularsak,

$$\oint_{C+L_1+L_2+C_0} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} = 0 \qquad (10.7)$$

olacaktır. Bu integral C_0 yolunun yarıçapının sıfıra gittiği durumda hesaplanacaktır. L_1 ve L_2 integrallerinin birbirlerini götürdüğü ve C_0



ŞEKİL 10.2. **Cauchy integral teoreminin yolu.**

yolu üzerinden alınan integralin de saat ibreleri yönünde alındığını düşünürsek; bu denklemi

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} \qquad (10.8)$$

olarak yazabiliriz. Sol taraftaki ifade aradığımız integraldir. Sağ taraftaki integrali ise, C_0 yolunun yarıçapının sıfıra gittiği durumda hesaplamak için,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \oint \frac{dz}{(z-z_0)} + \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}dz \qquad (10.9)$$

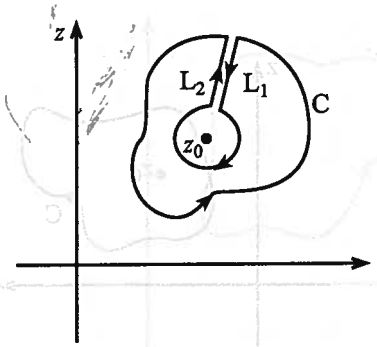
şeklinde yazabiliriz. Burada, sağ taraftaki birinci integral kolayca alınabilir ve

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} f(z_0)\, i \int_0^{2\pi} \frac{R_0 e^{i\theta} d\theta}{R_0 e^{i\theta}} + I_2 \qquad (10.10)$$

elde edilir. I_2 terimi ise, yukarıdan,

$$|I_2| \le \int_{C_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| |dz| \le M \cdot L \qquad (10.11)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.3. **Cauchy integral teoreminde yolun değiştirilmiş hali.**

olarak sınırlandırılabilir. Burada, $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$ ifadesinin C_0 üzerindeki maksimum değeri M, C_0 yolunun cevresi olan L ise,

$$L = 2\pi R_0 \tag{10.12}$$

olacaktır. Şimdi ϵ, daha önce belirlenmiş herhangi bir küçük sayı olsun. Her zaman C_o yolu içinde ve üzerinde

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \tag{10.13}$$

şartını şağlayacak kadar küçük bir δ:

$$|z - z_0| \leq R_0 = \delta, \tag{10.14}$$

yarıçapını bulabileceğimizden $\delta \to 0$ limitinde $\epsilon \to 0$ limiti de doğru olacaktır. Buradan,

$$I_2 \leq M \cdot L = 2\pi\epsilon \tag{10.15}$$

yazabileceğimizden ve

$$\lim_{\delta \to 0} \epsilon \to 0 \tag{10.16}$$

limitinde de $I_2 \to 0$ olacağından,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)} = f(z_0) \tag{10.17}$$

elde ederiz.

III. Cauchy Teoremi

Cauchy integral teoreminde z_0 noktası rastgele seçildiğinden, z_0'ı bir değişken gibi düşünüp, (10.6)'nın z_0'a göre türevini alırsak,

$$f'(z_0) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2} \tag{10.18}$$

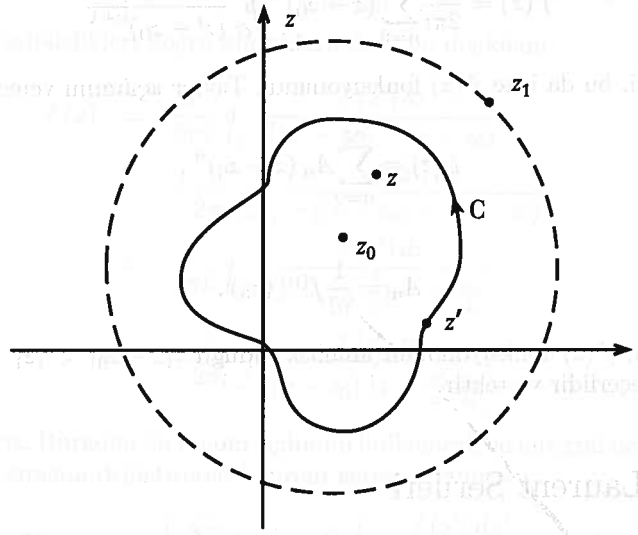
elde ederiz. Bu işlem n kez tekrarlanırsa, oldukça kullanışlı bir formül olan

$$f^{(n)}(z_0) = \left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{10.19}$$

formülü bulunur. Buradan da bir fonksiyonun z_0 noktasında analitik olması durumunda, o noktada onun bütün türevlerinin de var olacağını görürüz.

10.2 Taylor Serileri

$f(z)$ fonksiyonunu analitik olduğu z_0 noktası etrafında açalım ve z_1 noktası da $f(z)$'nin z_0 noktasına en yakın tekil (analitik olmadığı) noktası olsun. $f(z)$'nin içinde ve üzerinde analitik olduğu C kapalı yolu için, Cauchy



ŞEKİL 10.4. **Taylor serileri.**

integral teoremini kullanarak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z)} \tag{10.20}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bay

yazabiliriz. Burada z', C yolu üzerinde ve z ise, C içinde bir noktadır (Şekil (10.4)). (10.20) denklemini

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{[(z'-z_0)-(z-z_0)]} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)\left[1-\frac{(z-z_0)}{z'-z_0}\right]} \end{aligned} \tag{10.21}$$

olarak yazabiliriz. Buradan da $\frac{|z-z_0|}{|z'-z_0|} < 1$ eşitsizliği ile

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad |t|<1 \tag{10.22}$$

şeklinde verilen binom açılımını kullanarak,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}} f(z')\,dz' \tag{10.23}$$

denklemini elde ederiz. İntegral ve toplama işaretlerini yer değiştirirsek,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} \tag{10.24}$$

buluruz ki, bu da bize $f(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımını verecektir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n, \tag{10.25}$$

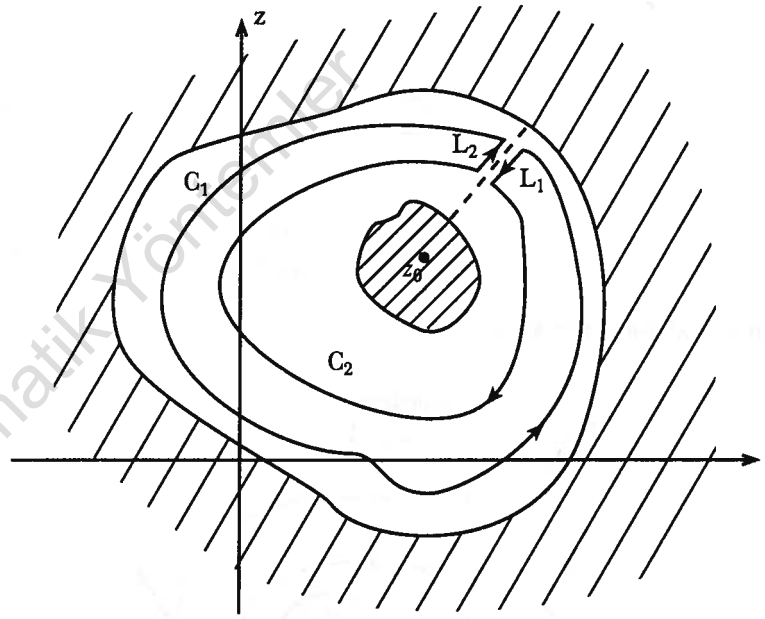
$$A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{10.26}$$

Bu açılım, $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ bölgesinde geçerlidir ve tektir.

10.3 Laurent Serileri

Bazen $f(z)$ fonksiyonu, Şekil (10.5)'de gösterildiği gibi halka şeklinde bir bölgede analitiktir. $f(z)$ fonksiyonunun $r < |z-z_0| < R$ bölgesinde analitik olduğunu düşünürsek,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)} \tag{10.27}$$



ŞEKİL 10.5. **Laurent serileri halka şeklinde bir bölgede geçerlidir.**

yazabiliriz. Burada C_1 yolu üzerinde, $\frac{|z-z_0|}{|z'-z_0|} < 1$ ve C_2 yolu üzerinde de $\frac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} < 1$ eşitsizlikleri doğru olacaklarından, bu denklemi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{[(z'-z_0)-(z-z_0)]} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')\,dz'}{-[(z-z_0)-(z'-z_0)]} \end{aligned} \tag{10.28}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right]} \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z')\,dz'}{(z-z_0)\left[1-\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right]} \end{aligned} \tag{10.29}$$

olarak yazarız. Buradan da binom açılımını kullanarak ve integral ile toplama işlemlerinin sırasını değiştirerek Laurent serisini buluruz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{C_2}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{-n}} \end{aligned} \tag{10.30}$$

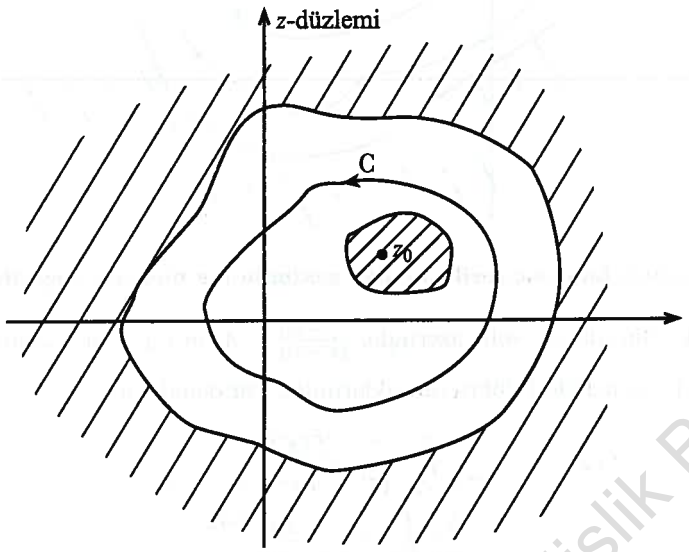
Laurent serileri, Şekil (10.6)'da gösterilen yol kullanılarak da kısaca

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \tag{10.31}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\, dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \tag{10.32}$$

şeklinde şeklinde ifade edilir.



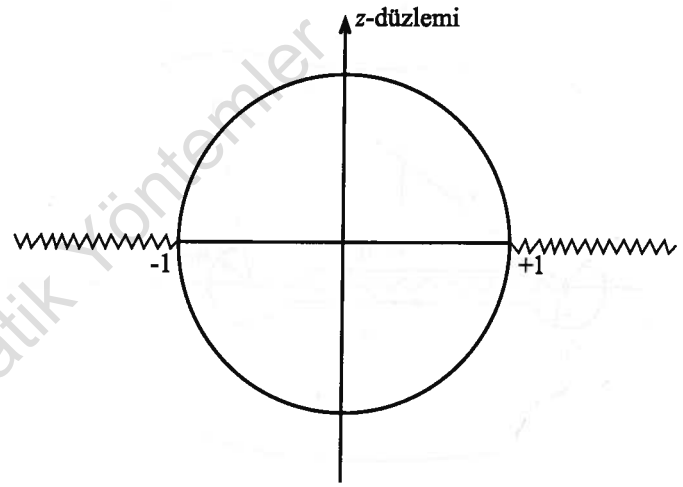
ŞEKİL 10.6. **Laurent serilerinin yolu.**

Örnek (10.1) ***Taylor serisi:***

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{10.33}$$

fonksiyonunun, $|z| < 1$ bölgesinde seri açılımına bakalım. Bu bölgede fonksiyonumuz analitik olduğundan, hesaplamamız gereken Taylor serisidir. Taylor serisini sıfır noktası etrafında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \tag{10.34}$$



ŞEKİL 10.7. $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ **için,** $|z|<1$ **bölgesinde Taylor serisini yazarız.**

olarak yazarsak, a_n katsayılarını da

$$a_n = \left[\frac{d^n f}{d\lambda^n}\right]_{\lambda=0} \tag{10.35}$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right) \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \tag{10.36}$$

olarak buluruz. Burada $z^2 = \lambda$ olarak alınmıştır.

Örnek (10.2) ***Laurent serisi:*** Bu sefer de

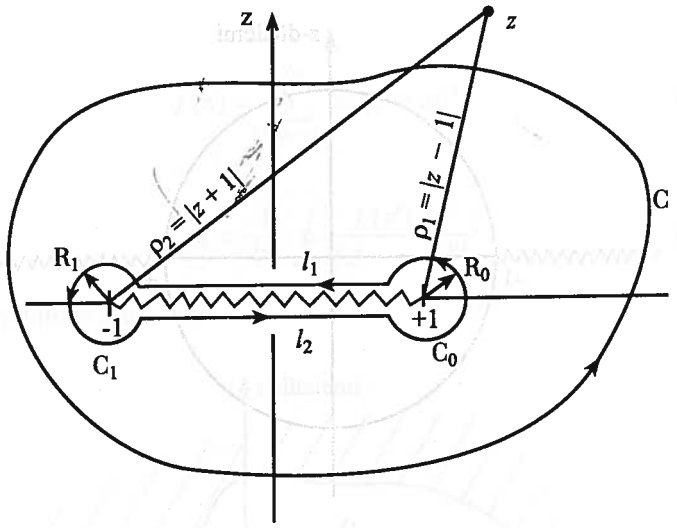
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{10.37}$$

fonksiyonunun $|z| > 1$ aralığında ve $z = 0$ etrafında seri açılımını bulalım. Bu durumda kesik çizgilerini ilgilendiğimiz alanın dışına yani, Şekil (10.8)'de gösterildiği gibi yerleştirmek daha doğru olacaktır. $f(z)$ fonksiyonu, halka şeklinde bir bölgede analitik olduğundan, hesaplamamız gereken seri Laurent serisidir. Bu bölgenin dış sınırı, yarı çapı sonsuzda olan bir daire, iç sınırı ise; kesik çizgisinin etrafında kemik şeklinde ve kesik çizgisine mümkün olduğu kadar yakın bir yol olarak düşünülebilir (Şekil (10.8)). $z = 0$ etrafında Laurent serisi,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n \tag{10.38}$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z'^{n+1}} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 - 1}} \tag{10.39}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.8. $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ **için,** $|z|>1$ **bölgesinde Laurent serisini yazarız.**

olarak verilir. z', C üzerinde bir nokta ve C de $f(z)$'nin analitik olduğu bölgede herhangi bir kapalı yoldur. Bu yolu serideki $n \geq 0$ terimlerinin katsayılarını bulmak için, yarıçapı sonsuza giden bir daire olarak alırsak ve yolumuz üzerindeki noktalar için

$$z' = Re^{i\theta} \tag{10.40}$$

yazarsak, a_n $(n \geq 0)$ katsayılarını $R \to \infty$ limitinde,

$$a_n = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz'}{z'^{n+1}\sqrt{z'^2-1}} \tag{10.41}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^{n+2}e^{i(n+2)\theta}} \tag{10.42}$$

$$= 0 \tag{10.43}$$

olarak buluruz.

$n < 0$ katsayıları için ise, yolumuzu $[-1,+1]$ arasındaki kesik çizgisini sıkıca saracak şekilde alırsak, katsayıları belirleyen integrali,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\circlearrowleft C_1 + \leftrightarrows + \circlearrowleft C_0} \frac{1}{z'^{n+1}} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2-1}} \tag{10.44}$$

olarak yazarız. Burada yolumuzun C_0 ve C_1 olarak belirlenen kesimleri, yarıçapları sıfıra giderken hesaplanacaktır. C_0 üzerinde alınacak

integralin hesabına bakarsak,

$$z' - 1 = R_0 e^{i\theta} \tag{10.45}$$

yazarız ve bunun da a_n'ye katkısı,

$$\lim_{R_0\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\circlearrowleft C_0}^{-\pi} \frac{(+1)^{|n|-1}}{\sqrt{2}} \frac{R_0 i e^{i\theta_0} d\theta_0}{\sqrt{R_0} e^{\frac{1}{2}\theta_0}} \to 0 \tag{10.46}$$

olacaktır. Aynı şekilde, C_1'in de katkısıda sıfır olarak bulunur. Bunlardan dolayı, $a < 0$ için,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint}_{l_1+l_2} \frac{1}{z'^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{z'^2-1}} dz' \tag{10.47}$$

olarak verilir. l_1 ve l_2 yolları üzerinde

$$\begin{aligned} z' - 1 &= r_1 e^{i\theta_1} \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi \\ z' + 1 &= r_2 e^{i\theta_2} \quad 0 \leq \theta_2 < 2\pi \end{aligned} \tag{10.48}$$

parametrelerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{z'^{|n|-1} dz'}{\sqrt{|z'-1|\,|z'+1|\, e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{z'^{|n|-1} dz'}{\sqrt{|z'-1|\,|z'+1|\, e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}} \end{aligned} \tag{10.49}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{-1} \frac{x^{|n|-1} dx}{e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-x)(1+x)}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{x^{|n|-1} dx}{e^{i\frac{3\pi}{2}} \sqrt{(1-x)(1+x)}} \end{aligned} \tag{10.50}$$

$$a_n = -\frac{(-1)^{|n|}}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x^{|n|-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x^{|n|-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10.51}$$

yazabiliriz. Buradan da a_n katsayılarını,

$$a_{-|n|} = \frac{1}{2\pi} \left[1 - (-1)^{|n|}\right] \int_{-1}^{1} \frac{x^{|n|-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{10.52}$$

$$a_{-|n|} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & |n| = çift \\ \frac{(|n|-1)!}{2^{|n|-1}\left[\left(\frac{|n|-1}{2}\right)!\right]^2} & |n| = tek \end{array} \right\} \tag{10.53}$$

olarak buluruz. Bu da bize, $|z|>1$ için ve $z=0$ etrafında bulunmuş Laurent serisini,

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{8}\frac{1}{z^5} + \frac{5}{16}\frac{1}{z^7} + ... \tag{10.54}$$

olarak verir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (10.3) ***Laurent serisi-bir başka yötem:*** Bir önceki örnekte,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \tag{10.55}$$

fonksiyonunun, $z = 0$ noktası etrafında ve $|z| > 1$ için Laurent açılımını, a_n katsayılarının yol integrali tanımını kullanarak hesapladık. Fakat, kuvvet serilerinin teklik özelliğini kullanarak ve uygun bir binom açılımı ile aynı sonucu çok daha kısa yoldan da bulabiliriz. $f(z)$ fonksiyonunu önce aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} && (10.56)\\ &= \frac{1}{(z+1)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(z-1)^{\frac{1}{2}}} && (10.57)\\ &= \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}} && (10.58)\\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}} && (10.59) \end{aligned}$$

$|z| > 1$ için $\frac{1}{z} < 1$ olacağından, $\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ve $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$ çarpanları için, binom formülünü kullanarak Laurent açılımını,

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{2z}+\frac{3}{8z^2}+\frac{5}{16z^3}+...\right]\left[1-\frac{1}{2z}+\frac{3}{8z^2}-\frac{5}{16z^3}+...\right] \tag{10.60}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{2z^3}+... \tag{10.61}$$

şeklinde ve daha önceki sonucumuzla aynı olarak buluruz.

10.4 Tekil Noktaların Sınıflandırılması

Laurent serileri kullanılarak, bir fonksiyonun tekil noktaları sınıflandırılabilir.

Tanım I: Yalnız Tekil Noktası:

Bir fonksiyon z_0 noktasında analitik olmamasına rağmen, z_0'ın komşusu bütün noktalarda analitik olursa, z_0'a yalnız tekil noktası denir.

Tanım II: Esas Tekil Noktası:

Bir fonksiyonun

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{10.62}$$

olarak verilen Laurent serisinde, $n < -m < 0$ için,

$$a_n = 0$$

ve

$$a_{-m} \neq 0$$

ise, z_0 noktası m. dereceden tekil noktasıdır denir. Eğer m , ∞ olursa, z_0 noktası esas tekil noktasıdır denir.

Tanım III: Basit Tekil Noktası:

Eğer tanım II 'de $m = 1$ ise, z_0 noktası basit tekil noktasıdır denir.

Tanım IV: Tüm Fonksiyon:

Bir fonksiyon z düzleminin bütün noktalarında analitik ise, ona tüm fonksiyon denir

10.5 Rezidü Teoremi

$f(z)$ fonksiyonu, Şekil (10.9)'da gösterildiği gibi, C kapalı yolunun üzerinde ve içinde, sonlu sayıda yalnız tekil noktasının dışında analitik ise,

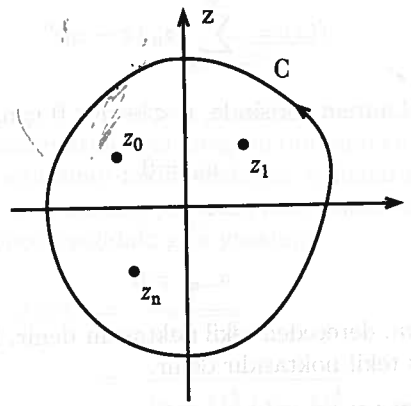
$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{N} R_n \tag{10.63}$$

integrali doğrudur. Burada, R_n, $f(z)$'nin n. yalnız tekil noktasındaki rezidüsüdür. Rezidü R_n ise, $f(z)$ fonksiyonunun z_n noktası etrafındaki Laurent açılımında, $\frac{1}{(z-z_n)}$ teriminin katsayısıdır: $R_n = (a_n)_{-1}$. Burada n indeksi n. tekil noktayı belirtmektedir.

İspat: C kapalı yolunu Şekil (10.10)'da görüldüğü gibi değiştirirsek, Cauchy-Goursat teoremi (10.1)'i kullanarak,

$$\begin{aligned} &\oint_C f(z)\,dz \\ &= \left[\sum_{i=0}^{N}\oint_{\circlearrowleft C_n} + \sum_{i=0}^{N}\oint_{\leftrightarrows} + \oint_{\circlearrowleft C'}\right] f(z)\,dz, \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10.64}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.9. **Rezidü teoremi.**

yazabiliriz. İntegralin doğru parçalarından oluşan kısmı birbirlerini götüren çiftlerden oluştuğundan sonucu etkilemez. Küçük çemberler üzerinden integraller ise, saat yönünde alınırlar ve yarıçaplarının sıfıra gittiği limitte bulunurlar. C' kapalı yolu üzerinden alınacak integral, C kapalı yolu üzerinden alınacak integrale eşit olacağından,

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{N} \oint_{\circlearrowleft C_n} f(z)\,dz \tag{10.65}$$

yazarız. $f(z)$'nin, izole tekil noktalarından birinin etrafında (örneğin z_0) Laurent açılımını düşünelim (10.31): $(z-z_0)$'ın pozitif kuvvetleri için,

$$(a_0)_n \oint_{c_0} (z-z_0)^n\,dz = 0 \qquad n \geq 0 \tag{10.66}$$

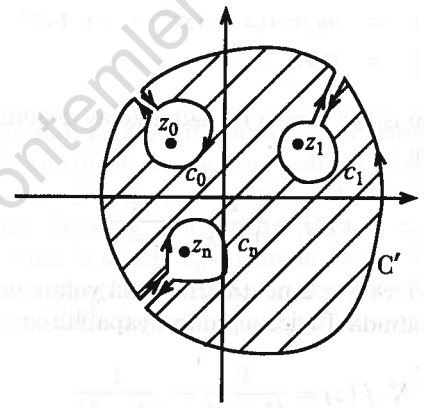
olacaktır. $(z-z_0)$'ın negatif kuvvetleri için ise,

$$(a_0)_{-n} \oint_{C_0} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = (a_0)_{-n} \oint_0^{2\pi} \frac{iR_0 e^{i\theta_0} d\theta_0}{R_0^n e^{in\theta_0}}, \quad (n \geq 1) \tag{10.67}$$

$$= \frac{i(a_0)_{-n}}{R_0^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta_0} d\theta_0, \tag{10.68}$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2,3,\ldots \\ 2\pi i (a_0)_{-1} & n = 1 \end{cases} \tag{10.69}$$

bulunur. $(a_0)_{-1} = R_0$ olduğundan, bütün yalnız tekil noktaları için



ŞEKİL 10.10. **Rezidü teoreminin ispatında kullandığımız yol.**

aynı işlemi tekrarlarsak,

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{N} \oint_{C_n} f(z)\,dz, \tag{10.70}$$

$$= 2\pi i \sum_{n=0}^{N} R_n \tag{10.71}$$

bulunacaktır.

10.6 Analitik Süreklilik

Harmonik fonksiyonlar ve haritalama konularını işlerken, analitik fonksiyonların çok ilginç ve aynı zamanda da çok yararlı özellikleri olduğunu görmüştük. Bunlardan dolayı, verilen bir fonksiyonun analitik olduğu bölgenin belirlenmesi ve mümkünse bu bölgenin dışında da tanımlanması çok önemlidir. Bu işleme de analitik sürekliliğin sağlanması denir. Polinom ve trigonometrik fonksiyonlar örneğinde olduğu gibi, bazı durumlarda reel eksen üzerinde analitik olan fonsiyonların, $x \to z$ dönüşümü ile bütün z düzleminde geçerli olan tanımları kolayca bulunur:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\,, \tag{10.72}$$

$$f(x) = \sin x, \tag{10.73}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

$x \to z$ dönüşümü ile

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n \,, \tag{10.74}$$

$$f(z) = \sin z \tag{10.75}$$

yazabiliriz. Ancak, bu iş her zaman bu kadar kolay değildir. Aşağıda verilen fonksiyonu ele alalım:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z}. \tag{10.76}$$

Bu fonksiyonun $z = 1$ ve $z = 2$ noktalarında iki yalnız tekil noktası bulunduğundan, $z = 0$ etrafında Taylor açılımını yapabiliriz:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)} + \frac{1}{(1-\frac{z}{2})} \tag{10.77}$$

yazar ve

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{10.78}$$

olarak verilen binom açılımını da kullanırsak,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) z^n \qquad |z| < 1 \tag{10.79}$$

elde ederiz. Doğal olarak bu açılım (tanım), en yakın tekil noktası olan $z = 1$'e kadar geçerlidir. Benzer şekilde, $1 < |z| < 2$ aralığında geçerli bir tanım ararsak,

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{(1-\frac{z}{2})} \tag{10.80}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \tag{10.81}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z^n}\right] \tag{10.82}$$

bulunacaktır. $|z| > 2$ bölgesi için ise,

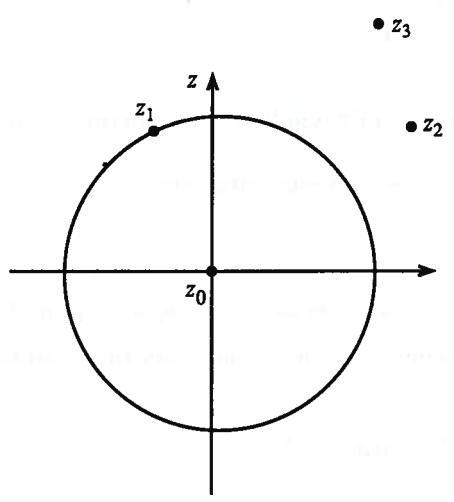
$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) - \left(\frac{2}{z}\right)\frac{1}{(1-\frac{2}{z})}, \tag{10.83}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z^n} + \frac{2^n}{z^n}\right] \tag{10.84}$$

bulunur. $f(z)$ fonksiyonunun bu üç tanımı, sırası ile $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ ve $|z| > 2$ bölgeleri için geçerlidir. Doğal olarak, bu fonksiyonun

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z}$$

gibi, bütün z- düzleminde geçerli bir tanımı varken, sınırlı bölgelerde geçerli olan (10.79), (10.82) ve (10.84) tanımlarını kullanmak pek de pratik değildir. Ancak, uygulamalarda (10.76)'da verildiği gibi bir ifade bulmak da her zaman mümkün olmaz. Diyelim ki, elimizde $(z_1, z_2, ...z_n)$ gibi sınırlı sayıda yalnız tekil noktası olan ve sadece z_0 etrafında Taylor serisi ile tanımlanmış bir fonksiyon olsun (Şekil (10.11)). Bu tanım, en yakın tekil noktası olan z_1'e kadar geçerli olacaktır. Bu durumda fonksiyonumuzu bu bölgenin dışında



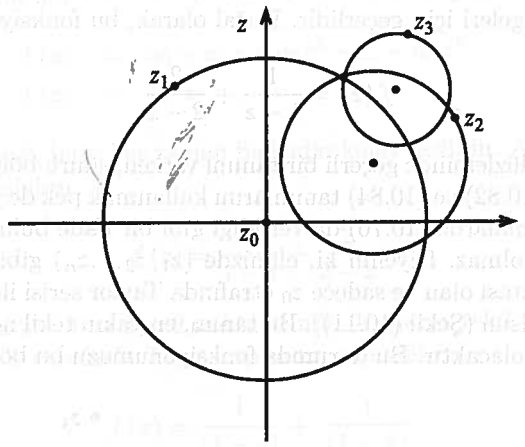
ŞEKİL 10.11. **Analitik süreklilik.**

da tanımlamanın yolu, Şekil (10.12)'de görüldüğü gibi, her biri en yakın tekil noktasına kadar geçerli olan, ardışık seri açılımları ile mümkün olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, Bu işlem sırasında fonksiyonun analitik olmadığı $(z_1, z_2, ...z_n)$ noktalarında analitik yapılmadığıdır.

10.7 Kompleks Yol İntegrali Tekniği İle Bazı Belirli İntegrallerin Alınması

Kompleks integral teoremleri ve analitik süreklilik kavramları kullanılarak, fizik ve mühendislik uygulamalarında sıkça karşımıza çıkan bazı belirli integraller rahatça alınabilir:

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.12. **Analitik sürekliliğin sağlanması.**

I. $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ gibi integraller.

Burada R,

$$R = \frac{a_1\cos\theta + a_2\sin\theta + a_3\cos^2\theta + \ldots}{b_1\cos\theta + b_2\sin\theta + b_3\cos^2\theta + b_4\sin^2\theta + \ldots} \tag{10.85}$$

şeklinde verilen kesirli bir ifadedir. Bu tip integralleri kompleks düzlemde,

$$z = e^{i\theta}: \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{10.86}$$

tanımlarını kullanarak birim çember üzerinde bir yol integrali olarak yazabiliriz: Birim çember üzerinde bir nokta,

$$z = e^{i\theta}, \quad d\theta = -i\left(\frac{dz}{z}\right) \tag{10.87}$$

olarak gösterileceğinden I integrali de

$$I = -i\oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z} \tag{10.88}$$

olarak yazılır. Artık, kompleks integral teoremleri kullanılabilecektir.

Örnek (10.4) ***Kompleks yol integrali tekniği:***

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \qquad (a > 1)$$

integralini alalım. Bu integrali (10.86)'yı kullanarak

$$I = -i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(a + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)z} \tag{10.89}$$

$$I = -2i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \tag{10.90}$$

şeklinde yazarız. Payda

$$(z-\alpha)(z-\beta)\,, \tag{10.91}$$

$$\alpha = -a + \left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ve} \tag{10.92}$$

$$\beta = -a - \left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.93}$$

şeklinde faktörlerine ayrılırsa, $a > 1$ için $|\alpha| < 1$ ve $|\beta| > 1$ olacağından, birim çember içinde sadece $z = \alpha$ noktası bulunur. Cauchy integral teoremini kullanarak da bu integralin değerini

$$I = -2i\,(2\pi i)\,\frac{1}{\alpha - \beta}, \tag{10.94}$$

$$I = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{10.95}$$

olarak buluruz.

Örnek (10.5) ***Kompleks yol integrali tekniği:***

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2l}\theta d\theta$$

integralini alalım. Bir önceki örnekte olduğu gibi, (10.86) ilişkilerini kullanarak bu integrali

$$I = \frac{(-1)^l}{2\pi}\frac{(-i)}{2^{2l}}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2l} \tag{10.96}$$

şeklinde ve birim daire üzerinde bir yol integraline dönüştürebiliriz . Bu integral ise, rezidü teoremi kullanılarak

$$I = \frac{(-1)^l}{2\pi}\frac{(-i)}{2^{2l}}2\pi i\left[\frac{1}{z}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2l}\text{'in } z = 0 \text{ noktasındaki rezidüsü}\right] \tag{10.97}$$

şeklinde alınır. Rezidüyü bulmak için binom formülünü kullanarak,

$$\frac{1}{z}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2l} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{2l}\frac{(2l)!}{(2l-k)!k!}\left(z^{2l-k}\right)\left(-\frac{1}{z}\right)^k \tag{10.98}$$

Fen ve Mühendislik Birimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

yazarız. Burada gerekli rezidü $1/z$ teriminin katsayısı olacaktır ki, bu da kolayca

$$(-1)^l \frac{(2l)!}{(l!)^2} \tag{10.99}$$

olarak bulunur. Sonuç ise,

$$I = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \tag{10.100}$$

şeklinde verilir.

II. $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)$ tipi integraller.

Burada $R(x)$:

a) Reel eksen üzerinde $R(x)$'in tekil noktası olmayan,

b) $|x| \to \infty$ limitinde en azından $\frac{1}{x^2}$ olarak sıfıra giden

ve aşağıdaki gibi iki polinom cinsinden ifade edilebilen kesirli bir fonksiyondur:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... b_m x^m} \tag{10.101}$$

Bu şartlar altında I integrali, kompleks düzlemde

$$\oint_C R(z)\, dz \tag{10.102}$$

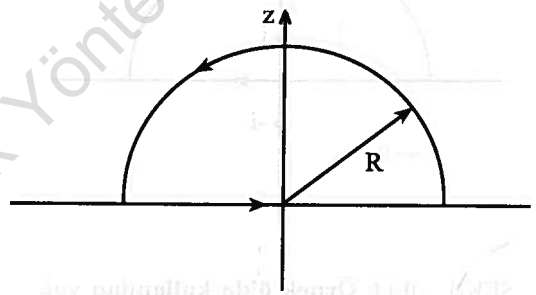
integrali aynı değeri verecektir. C yolu ise, Şekil (10.13)'de gösterideği gibi, z-düzleminde yarıçapı sonsuza giden bir yarım çemberdir. Burada $R \to \infty$ limitinde, (ii) şartından dolayı yarı çember üzerinden alınacak integral sıfıra gideceğinden, (10.102)'nin doğruluğu açıkça görülür. Bu dönüşümün avantajı, kompleks integral teoremlerini kullanmamıza olanak sağlamasıdır.

Örnek (10.6) ***Kompleks yol integrali tekniği:***

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad n = 1, 2, ... \tag{10.103}$$

integralini,

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z+i)^n (z-i)^n} \tag{10.104}$$



ŞEKİL 10.13. **II. tip integrallerde kullandığımız yol.**

olarak yazarsak, C yolu içinde kalan tek tekil noktası $z = i$ olacağından, I integrali,

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{(z+i)^n (z-i)^n} \text{'in} \quad z = i\text{'deki rezidüsü} \right] \tag{10.105}$$

olur. Rezidüyü bulmak için de

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^n} \tag{10.106}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-i)^k \tag{10.107}$$

yazar ve aradığımız A_{n-1} katsayısını,

$$A_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1} f}{dz^{n-1}} \bigg|_{z=i} \right] \tag{10.108}$$

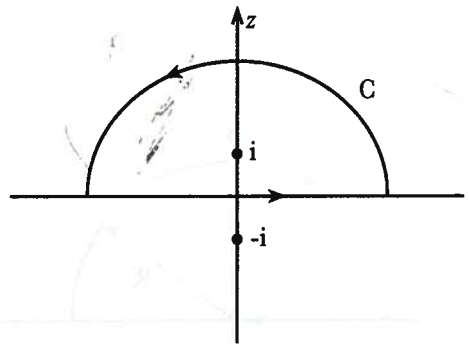
$$= \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)(n+2)...(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}} \bigg|_{z=i}$$

olarak buluruz. Bu da bize I integralinin değerini,

$$I = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)! i}{(n-1)!\,(-1)^n} \tag{10.109}$$

olarak verir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
11. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.14. **Örnek 6'da kullanılan yol.**

III. $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) e^{i\kappa x}$ tipi integraller.

Burada $R(x)$ bir önceki durumdaki gibi, kesirli bir fonksiyondur ve κ reel bir parametredir. Ayrıca:

a) Reel eksen üzerinde tekil noktası yoktur.

b) $|z| \to \infty$ limitinde θ'dan bağımsız bir şekilde, $|R(z)| \to 0$ limiti doğrudur.

Bu şartlar altında I integralini kompleks düzlemde

$$I = \oint_C R(z) e^{i\kappa z} dz \tag{10.110}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun doğru olduğunu göstermek için,

$$I_A = \lim_{R\to\infty} \oint_{\curvearrowleft} R(z) e^{i\kappa z} dz \to 0 \tag{10.111}$$

limitinin doğru olduğunu göstermemiz gerekir. Önce integral işareti altındaki terimlerin modülüslerini alarak, yukarıdaki integrale bir üst sınır koyalım:

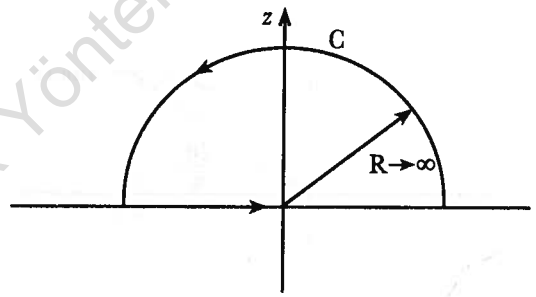
$$I_A \leq \int_0^{\pi} |R(z)| \left| e^{i\kappa(\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta)} \right| \left| \rho i e^{i\theta} \right| d\theta. \tag{10.112}$$

$R(z)$'nin $[0, 2\pi]$ aralığındaki maximum değerini

$$M(\rho) = Max\,|R(z)| \tag{10.113}$$

olarak tanımlarsak, bu ifadeyi de

$$I_A \leq \rho M(\rho) \int_0^{\pi} e^{-\kappa\rho\sin\theta} d\theta \quad , \tag{10.114}$$



ŞEKİL 10.15. **R→ ∞ limitinde C yolu.**

$$I_A \leq 2\rho M(\dot{\rho}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\kappa\rho\sin\theta} d\theta \tag{10.115}$$

şeklinde yazabiliriz. $[0, \pi/2]$ aralığında, Şekil (10.16)'da gösterilen doğru parçası her zaman $\sin\theta$ fonksiyonundan küçük değerler alacağından (10.115)'i de

$$I_A \leq 2\rho M(\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\kappa\rho\frac{\theta}{\pi}} d\theta \tag{10.116}$$

olarak yazabiliriz. Buradaki integral kolayca alınabileceğinden

$$I_A \leq 2\rho M(\rho) \frac{\pi}{2\kappa\rho} \left(1 - e^{-\kappa\rho}\right), \tag{10.117}$$

$$I_A \leq M(\rho) \frac{\pi}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa\rho}\right) \tag{10.118}$$

elde ederiz. $\rho \to \infty$ limitini aldığımızda ise,

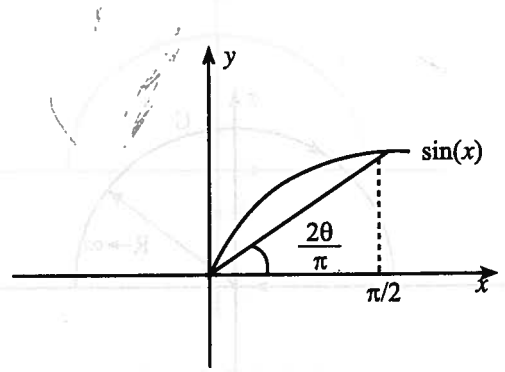
$$\lim_{\rho\to\infty} I_A \to 0$$

buluruz. Bu sonuç **Jordan teoremi** olarak da bilinir.

Örnek (10.7) ***Kompleks yol integrali tekniği:*** Fourier dönüşümleri yönteminde sıkça karşılaşılan

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx} \tag{10.119}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.16. **Üst limit hesabı.**

integralini, $g(k)$ 'nın

$$g(k) = \frac{ik}{(k^2+\mu^2)} \tag{10.120}$$

olarak verildiği durumda ele alalım:

a) $x > 0$ ise,

$$f(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \oint_C \frac{dkke^{ikx}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} \tag{10.121}$$

yazarız. Burada k artık kompleks düzlemdedir ve yolumuz içinde $k = i\mu$ tekil noktası olacaktır. Cauchy integral teoremi (10.6)'yı kullanarak da

$$f(x) = 2\pi i \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\mu}{2i\mu} e^{-\mu x} \tag{10.122}$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu x} \tag{10.123}$$

buluruz.

b) $x < 0$ için, C yolunu aşağıdan alırız ve

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \oint \frac{ke^{-ik|x|}dk}{(k-i\mu)(k+i\mu)} \tag{10.124}$$

$$= -2\pi i \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-i\mu}{-2i\mu}\right) e^{-\mu|x|}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu|x|} \tag{10.125}$$

elde ederiz.

IV. $I = \int_0^\infty dx x^{\lambda-1} R(x)$ şeklinde olan integraller.

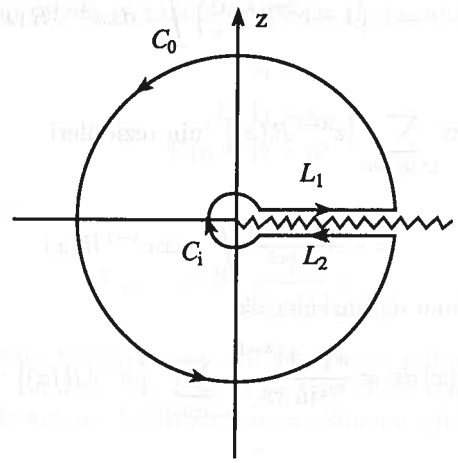
Burada λ, tamsayı olamaz ve $R(x)$ de:

$\lim_{|z|\to 0} \left|z^\lambda R(z)\right| \to 0$ ve $\lim_{|z|\to\infty} \left|z^\lambda R(z)\right| \to 0$ limitlerini sağlayan, reel eksen üzerinde ve $z = 0$ noktasında tekilliği olmayan kesirli bir fonksiyondur. Bu şartlar altında I integrali, Şekil (10.17)'de gösterilen C kapalı yolu için,

$$I = \int_0^\infty x^{\lambda-1} R(x)\, dx \tag{10.126}$$

$$= \frac{\pi(-1)^{\lambda-1}}{\sin \pi\lambda} \sum_{C \text{ içinde}} \left[z^{\lambda-1} R(z)\right] \text{'nin rezidüleri}$$

şeklinde hesaplanır.



ŞEKİL 10.17. **IV. tip integrallerde kullanılan yol.**

İspat: I integralini,

$$\oint_C z^{\lambda-1} R(z)\, dz \tag{10.127}$$

şeklinde kompleks düzlemde yazarız. C_i yolu üzerinden alınacak integral, yolun yarıçapının sıfıra gittiği durumda $R(z)$ fonksiyonunun $\lim_{|z|\to 0} \left|z^\lambda R(z)\right| \to 0$ özelliğinde dolayı sıfıra gidecektir. Benzer şekilde, C_0 yolu üzerinden alınacak integral de yarıçapın sonsuza gittiği

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

durumda $\lim_{|z|\to\infty} \left|z^{\lambda}R(z)\right| \to 0$ özelliğinde dolayı sıfıra gideceğinden,

$$\oint_C z^{\lambda-1}R(z)dz = \oint_{\to L_1} z^{\lambda-1}R(z)dz + \oint_{\leftarrow L_2} z^{\lambda-1}R(z)dz$$

yazabiliriz. Sol taraftaki integral, rezidü teoremi kullanılarak alınır. Sağ taraf ise,

$$\begin{aligned} &\oint_{\to L_1+\leftarrow L_2} z^{\lambda-1}R(z)dz \\ &= \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}R(x)\,dx \qquad (10.128) \\ &\quad + \int_{\infty}^{0} x^{(\lambda-1)}e^{2i\pi(\lambda-1)}R(x)\,dx, \\ &= \left(1-e^{2\pi i(\lambda-1)}\right)\int_0^{\infty} dx x^{\lambda-1}R(x) \qquad (10.129) \end{aligned}$$

olacağından,

$$2\pi i \sum_{C \text{ içinde}} \left[z^{\lambda-1}R(z)\right] \text{ 'nin rezidüleri}$$

$$= -\frac{2i\sin\pi\lambda}{e^{-i\pi\lambda}}\int_0^{\infty} dx x^{\lambda-1}R(x) \qquad (10.130)$$

yazabiliriz. Bunu da düzenlersek,

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}R(x)\,dx = \frac{\pi(-1)^{\lambda-1}}{\sin\pi\lambda}\sum_{C \text{ içinde}} \left[z^{\lambda-1}R(z)\right] \text{ 'nin rezidüleri} \qquad (10.131)$$

elde ederiz.

10.8 Gama ve Beta Fonksiyonları

10.8.1 Gama Fonksiyonu

Yukarıdaki integrallere bir örnek de uygulamalarda sıkça karşılaşılan gama ve beta fonksiyonlarıdır. Gama fonksiyonları bütün x değerleri için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{N!N^x}{x[x+1][x+2]...[x+N]}\right\} \qquad (10.132)$$

Ancak, $x > 0$ değerleri ile sınırlı da olsa,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1}\exp(-y)dy \qquad (10.133)$$

tanımı da çok kullanışlıdır. Bunu kısmi integral yöntemini uygulayarak,

$$\Gamma(x) = -\int_0^{\infty} d\left(e^{-y}\right)y^{x-1}, \qquad (10.134)$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\int_0^{\infty} dy e^{-y}y^{x-2} \qquad (10.135)$$

şeklinde yazarsak,

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \qquad (10.136)$$

formülünü elde ederiz ki, bu gama fonksiyonunun en temel özelliklerinden biridir. x sıfırdan büyük ve tamsayı değerler aldığı zaman bu formül bize,

$$n = 1, \qquad (10.137)$$

$$\Gamma(1) = 1, \qquad (10.138)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (10.139)$$

verecektir. Ayrıca,

$$\Gamma(x-1) = \frac{1}{(x-1)}\Gamma(x)$$

yazdığımızda gama fonksiyonunu sıfırdan küçük tamsayı değerler içinde tanımlayabiliriz. Bu ifade bize $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$ ve diğer bütün eksi tamsayılar için gama fonksiyonunun değerinin sonsuz olduğunu gösterir. Ancak, oranları sonludur:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} &= [-N][-N+1]....[-N-2][-N-1] \qquad (10.140) \\ &= [-]^{N-n}\frac{N!}{n!} \end{aligned}$$

Bazı n değerleri için Gama fonksiyonu aşağıdaki değerleri alır:

$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-1) = \pm\infty$	$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(3) = 2$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

Gama fonksiyonunun tersi olan$1/\Gamma(x)$ fonksiyonu tek değerli ve her zaman sonludur. $x \to \infty$ limiti ise,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}} \exp(x) \tag{10.141}$$

olarak verilir.

10.8.2 Beta Fonksiyonu

Gama fonksiyonunu

$$\Gamma(n+1)\Gamma(m+1) = \int_0^\infty e^{-u}u^n du \int_0^\infty e^{-v}v^m dv \tag{10.142}$$

şeklinde yazarsak ve

$$u = x^2, v = y^2 \tag{10.143}$$

dönüşümlerini uygularsak,

$$\begin{aligned} &\Gamma(n+1)\Gamma(m+1) && (10.144)\\ &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2m+1}dy\right) \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2n+1}y^{2n+1}dxdy && (10.145)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Kutupsal koordinatları kullanarak da bu ifadeyi,

$$\begin{aligned} &\Gamma(n+1)\Gamma(m+1) && (10.146)\\ &= 4\int_0^\infty dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-r^2}r^{2n+2m+2+1}\cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta \\ &= 2\int_0^\infty \left[dre^{-r^2}r^{2n+2m+2+1}\right]\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sin^{2m+1}\theta\cos^{2n+1}\theta\right]\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Sağ taraftaki birinci terim $\Gamma(m+n+2)$ olur. İkinci terim ise, $B(m+1,n+1)$ olarak verilen beta fonksiyonudur. Beta fonksiyonu,

$$B(m+1,n+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)} \tag{10.147}$$

olarak gama fonksiyonu ile bağıntılıdır. Beta fonksiyonunun bir başka tanımı ise,

$$\sin^2\theta = t \quad \text{ve} \tag{10.148}$$

$$t = \frac{x}{1-x} \tag{10.149}$$

dönüşümleri kullanılarak,

$$B(m+1,n+1) = \int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x)^{m+n+2}} \tag{10.150}$$

şeklinde veya

$$x = \frac{y}{1-y} \tag{10.151}$$

dönüşümü ile

$$B(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}[1-y]^{q-1}dy, \qquad p>0<q \tag{10.152}$$

olarak da verilir. $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ değerini hesaplamak için,

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{dx x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)} \tag{10.153}$$

integralini bulmamız gerekir. Bu ise, (10.127) formülü ile kolayca bulunur:

$$\begin{aligned} B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2}{\Gamma(1)} \\ &= \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \sqrt{\pi} && (10.154)\end{aligned}$$

Buradan da

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \tag{10.155}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \tag{10.156}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!} \tag{10.157}$$

elde ederiz.

Gama fonksiyonu ile bağıntılı ve çok kullanışlı bir başka fonksiyon ise,

$$\Psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\frac{d\Gamma(x)}{dx}, \tag{10.158}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak tanımlanır. $\Psi(x)$ fonksiyonunu

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + x^{-1} \tag{10.159}$$

şeklinde ve buradan da

$$\Psi(n+1) = \Psi(1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \tag{10.160}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\Psi(1)$'nin değeri, Euler sabiti olarak bilinen γ kullanılarak bulunur:

$$-\Psi(1) = \gamma = 0.5772157 \tag{10.161}$$

10.8.3 Gama Fonsiyonun bazı kullanışlı ilişkileri

Gama fonksiyonunun hem kullanışlı hem de ileride kesirli türev ve integralleri işleyeceğimiz kesirli matematik bölümünde işimize yarıyacak özellikleri arasında,

$$\Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)}, \tag{10.162}$$

$$\Gamma(2x) = \frac{4^x \Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}, \tag{10.163}$$

$$\Gamma(nx) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^x}{\sqrt{2\pi}}\right]^n \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(x+\frac{k}{n}) \tag{10.164}$$

ifadelerini yazabiliriz. Uygulamalarda sıkça karşılaşılan

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)} ve \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}$$

oranlarının hesaplanmasında çok yararlı olan

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} \tag{10.165}$$

oranı ise,

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} = \frac{[-]^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} S_j^{(m)} q^m \tag{10.166}$$

olarak verilir. Burada $S_j^{(m)}$:

$$S_{j+1}^{(m)} = S_j^{(m-1)} - j S_j^{(m)},\ S_0^{(0)} = 1 \text{ ve diğerleri için } S_0^{(m)} = S_j^{(0)} = 0, \tag{10.167}$$

olarak verilen birinci tip Sterling sayılarıdır. Yukarıdaki ifade binom katsayıları cinsinden

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} = \binom{j-q-1}{j} = [-]^j \binom{q}{j} \tag{10.168}$$

olarak da yazılabilir.

10.8.4 Tamamlanmamış Gama ve Beta Fonksiyonları

Beta ve Gama fonksiyonlarının her ikisininde tamamlanmamış halleri vardır. Beta fonksiyonunun x parametresine göre tamamlanmamış hali

$$B_x(p,q) = \int_0^x y^{p-1}[1-y]^{q-1} dy, \tag{10.169}$$

şeklinde verilir. Gama fonksiyonunun tamamlanmamış hali ise,

$$\gamma^*(c,x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^c x'^{(x-1)} \exp(-x') dx' \tag{10.170}$$

$$= \exp(-x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)} \tag{10.171}$$

olarak verilir. Burada $\gamma^*(c,x)$, c ve x'in tek değerli analitik bir fonksiyonudur. $\gamma^*(c,x)$ fonksiyonunun kullanışlı bağıntıları arasında,

$$\gamma^*(c-1,x) = x\gamma^*(c,x) + \frac{\exp(-x)}{\Gamma(c)}, \tag{10.172}$$

$$\gamma^*(\frac{1}{2},x) = \frac{\mathrm{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{10.173}$$

bağıntılarını verebiliriz.

10.9 Cauchy Temel Değer İntegraller

Zaman zaman reel eksen üzerinde bir veya birden fazla noktada tanımsız integrallerle karşılaşırız. Örneğin,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-a)} dx \tag{10.174}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

integrali a noktasında tanımsızdır. Ancak, sorun sadece $x = a$ noktasında olduğundan, bu integrali

$$I = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-\infty}^{a-\delta}\frac{f(x)\,dx}{(x-a)} + \int_{a+\delta}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{(x-a)}\right] = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-a)}dx \quad (10.175)$$

şeklinde yazarak tanımlı hale getirebiliriz. Buna I integralinin, **Cauchy temel değerini** almak denir ve

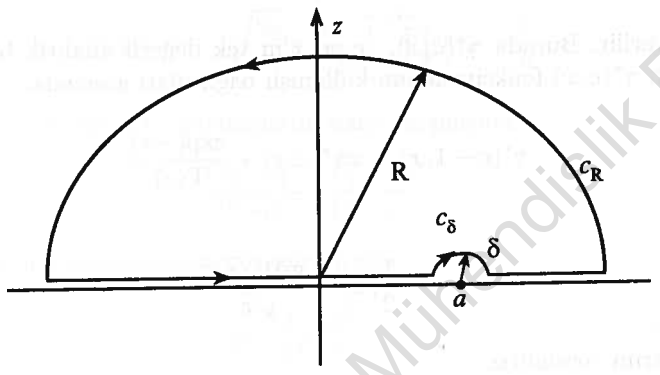
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-a)}dx \to P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-a)}dx \quad (10.176)$$

şeklinde gösterilir.

Böyle bir integralin Cauchy temel değeri, $f(z)$'nin üst yarı uzayda,

$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| \to 0$$

şartını sağladığı varsayılarak ve Şekil (10.18)'da gösterilen yol kullanılarak bulunabilir. Bu durumda,



ŞEKİL 10.18. **Cauchy temel değer integralinin yolu.**

$$\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)} = \left[\oint_{R\to\infty\curvearrowleft} + \lim_{R\to\infty}\oint_{-R}^{a-\rho} + \oint_{\delta\to 0\curvearrowright} + \lim_{R\to\infty}\oint_{a+\rho}^{R}\right]\frac{f(z)}{(z-a)}dz \quad (10.177)$$

yazabiliriz. Bu integral rezidü teoremi kullanılarak,

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)}dz = 2\pi i\sum_{y>0}[\frac{f(z)}{(z-a)}]\text{ 'nın rezidüleri} \quad (10.178)$$

şeklinde alınabilir. $f(z)$'nin C kapalı yolu içinde tekil noktasının olmadığı durumda, (10.178) ifadesinin sağ tarafı sıfır olacağından, I integralinin Cauchy temel değerini

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx = -\lim_{\delta\to 0}\oint_{\curvearrowright}\frac{f(z)}{(z-a)}dz - \lim_{R\to\infty}\oint_{\curvearrowleft}\frac{f(z)}{(z-a)}dz \quad (10.179)$$

olarak yazarız. Sağ taraftaki integrallerden ikincisi, $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| \to 0$ limitinden dolayı sıfır olacağından, ilk integrali de

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad (10.180)$$

$$dz = id\theta\rho e^{i\theta} \quad (10.181)$$

parametrelerini kullanarak alırsak, I integralinin Cauchy temel değerini

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{(x-a)} = -i\int_{\pi}^{0}d\theta f(a) \quad (10.182)$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{(x-a)} = i\pi f(a) \quad (10.183)$$

olarak buluruz. Cauchy temel değeri bulmak için bir başka yol seçeneğimiz de Şekil (10.19)'da gösterildiği gibidir. Bu durumda, yolumuz içinde tekil noktamız olacağından, $x = a$ noktasındaki rezidüyü bulmamız gerekecektir. Bu da bize,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{(x-a)} = -i\int_{\pi}^{2\pi}d\theta f(a) + 2\pi i f(a) \quad (10.184)$$

$$= -i\pi f(a) + 2\pi i f(a) \quad (10.185)$$

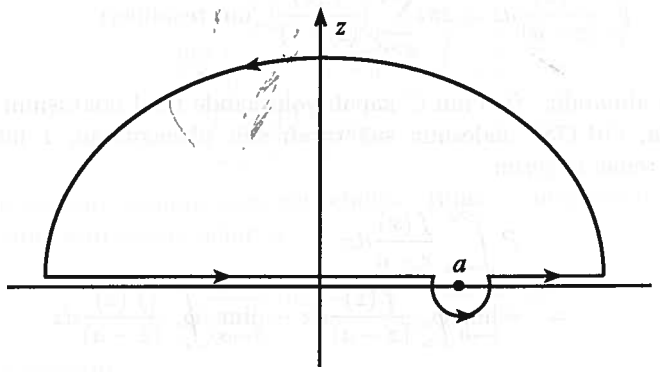
$$= i\pi f(a) \quad (10.186)$$

verecektir.

Örnek (10.8) ***Cauchy temel değer integral:*** Bazı uygulamalarda karşımıza sıkça çıkan,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x dx}{[x^2 - k^2r^2]} \quad (10.187)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.19. **Cauchy temel değer integral hesabı için bir başka yol.**

integralini alalım. Bu integrali,

$$I = I_1 + I_2,$$

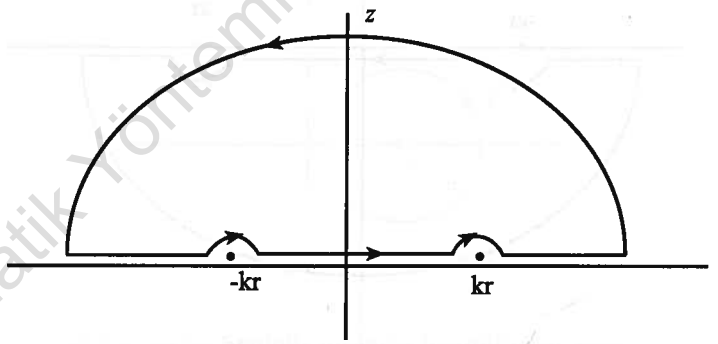
$$I_1 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}dx}{(x-kr)(x+kr)}, \tag{10.188}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}dx}{(x-kr)(x+kr)} \tag{10.189}$$

şeklinde yazar ve kompleks z-düzleminde yolumuzu Şekil (10.20)'deki gibi seçersek, I integralinin Cauchy temel değerini

$$I = \frac{1}{2i}\left\{ i\pi \left[\frac{xe^{ix}}{x+kr}\right]_{x=kr} + i\pi \left[\left[\frac{xe^{ix}}{x-kr}\right]_{x=-kr}\right]\right\} = \frac{\pi}{2}\cos kr \tag{10.190}$$

olarak buluruz. Burada I_2 integrali için Şekil (10.21)'de gösterilen yol kullanılmıştır.



ŞEKİL 10.20. **Örnek 9 'da I_1 için kullanılan yol.**

10.10 Bazı Özel Fonksiyonların Kompleks Yol İntegrali Tanımları

Daha önce, 1. Bölümde tanımladığımız Legendre polinomlarının,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{10.191}$$

olarak verdiğimiz Rodriguez formülünü ele alalım. Cauchy formülü (10.19)'u,

$$f^{(l)}(z_0) = \frac{l!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{l+1}} \tag{10.192}$$

şeklinde vermiştik. Bunu $z_0 = x$ ve $f(z) = \left(z^2-1\right)^l$ için yazarsak,

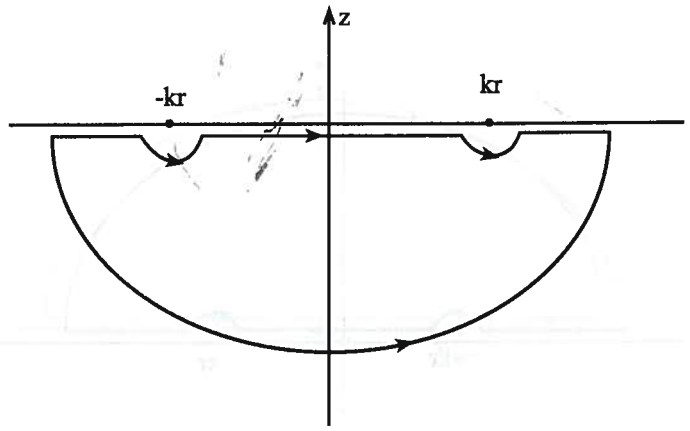
$$\left.\frac{d^l}{dz^l}\left(z^2-1\right)^l\right|_{z=x} = \frac{l!}{2\pi i}\oint \frac{\left(z'^2-1\right)^l dz'}{(z'-x)^{l+1}} \tag{10.193}$$

olacaktır. Bu da bize bize Legendre polinomlarının,

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C \frac{\left(z'^2-1\right)^l dz'}{(z'-x)^{l+1}}. \tag{10.194}$$

şeklinde verilen kompleks yol integrali tanımını verir. Legendre polinomlarının bu tanımına, Schlöfli integral formülü de denir. (10.194) formülün-

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 10.21. I_2 **integralinin yolu.**

deki integrali rezidü teoremini kullanarak alalım:

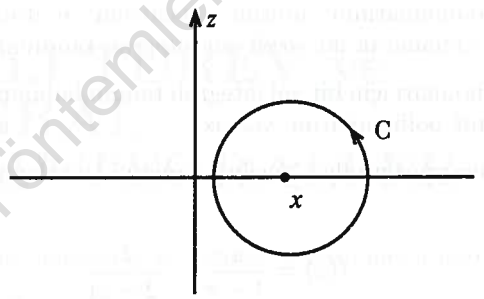
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l}\left[\left[\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\right] \text{ ifadesinin } x \text{ noktasındaki rezidüsü}\right]$$

Buradaki $\left(z^2-1\right)^l$ ifadesini de binom formülü ile açalım:

$$\begin{aligned}\left(z^2-1\right)^l &= \sum_{k=0}^{l}\frac{l!\,(-1)^k}{k!\,(l-k)!}z^{2(l-k)} \qquad (10.195)\\ &= \sum_{k=0}^{l}\frac{l!\,(-1)^k}{k!\,(l-k)!}\left[z-x+x\right]^{2l-2k}\\ &= \sum_{k=0}^{l}\frac{l!\,(-1)^k}{k!\,(l-k)!}\sum_{j=0}^{2l-2k}\frac{(2l-2k)!}{(2l-2k-j)!j!}(z-x)^j\,x^{2l-2k-j}\end{aligned}$$

$P_l(x)$ tanımındaki rezidü için, $\left[\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}\right]$ ifadesinin x etrafındaki açılımında $(z-x)^{-1}$ teriminin katsayısına ihtiyaç vardır. Bunun için de (10.196) açılımında $j=l$ teriminin katsayısını buluruz:

$$(z-x)^l \text{ 'nin katsayısı} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{l!\,(-1)^k}{k!\,(l-k)!}\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!l!}x^{l-2k} \qquad (10.196)$$



ŞEKİL 10.22. **Schlöfli integral formülünün yolu.**

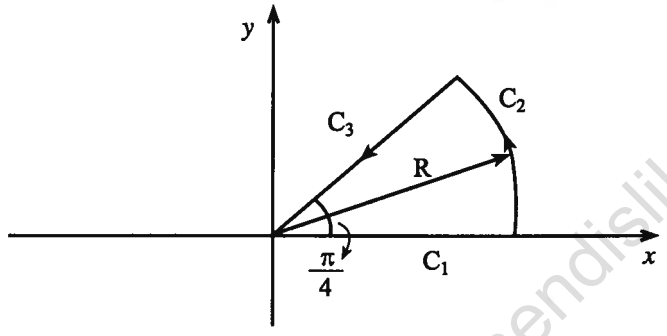
Böylece, $P_l(x)$ aşağıda verildiği gibi bulunur:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{k!\,(l-k)!}\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!}\frac{x^{l-2k}}{2^l} \qquad (10.197)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 2. baskı 2004

10.11 Problemler

1. Laguerre polinomlarının türetim fonksiyonu ve Rodriguez formülü tanımlarını kullanarak iki farklı yol integrali tanımını bulunuz.
2. Hermit polinomları için bir yol integrali tanımı bulunuz ve bu integrali alarak Hermit polinomlarını yazınız.
3. Taylor serileri yardımı ile Cauchy teoremini ispatlayınız.
4. $$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{(2-z)}$$
   fonksiyonunun, $z = 0$ noktası etrafında ve
   $$|z| < 1, \quad |z| > 2, \quad 1 < |z| < 2$$
   bölgelerinde, Laurent açılımlarını **iki** değişik yoldan bulunuz.
5. Şekil (10.23)'de gösterilen yolu kullanarak
   $$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx$$
   integralini hesaplayınız.



ŞEKİL 10.23. **Beşinci problemdeki integralin yolu.**

6. Aşağıdaki integralleri alınız:
   i) $\int_0^{2\pi} \frac{(\cos 3\theta)\, d\theta}{5 - 4\cos\theta}$ ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 4x + 5}$
   iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2(1+x^2)}$ iv) $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1) dx}{x^2+1}$
   v) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ v) $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$

11

KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRAL: DİFERİNTEGRALLER

Difüzyon denklemi maddenin korunumu prensibinden hareket edilerek,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c(\vec{r}, t) dv = - \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t).d\vec{s} \tag{11.1}$$

şeklinde yazılır. $c(\vec{r}, t)$ birim hacimdeki parçacık sayısını veren konsantrasyon, $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ise, birim yüzeyden ve birim zamanda geçen parçacık sayısıdır. Bu denklemin sol tarafı V hacmindeki parçacık sayısındaki değişimi, sağ tarafı ise, V hacmini çevreleyen S yüzeyinden birim zamanda geçen parçacık miktarını verir. Kaynak veya kayıpların bulunmadığı durumlarda her iki terim de birbirine eşit olacaktır. Gauss teoremini kullanarak yüzey integralini hacim integraline çevirirsek, difüzyon denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c(\vec{r}, t) dv + \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{J}(\vec{r}, t) dv = 0, \tag{11.2}$$

$$\iiint_V [\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}.\vec{J}(\vec{r}, t)] dv = 0 \tag{11.3}$$

V hacmi rasgele seçilebileceğinden, konsantrasyon için çözülecek diferansiyel denklemi de

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}.\vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \tag{11.4}$$

olarak elde ederiz. Ancak, bu denklem tek başına çözülemez: $c(\vec{r}, t)$ ve $\vec{J}(\vec{r}, t)$ arasında bir bağıntıya da ihtiyaç vardır. Parçacık akımı doğal olarak konsantrasyonun yüksek olduğu bölgelerden alçak olduğu bölgelere doğru olacağından, akım ve konsantrasyon gradyantı arasında alınacak

$$\vec{J} = -k\vec{\nabla} c(\vec{r}, t) \tag{11.5}$$

şeklinde doğrusal bir bağıntı pek çok durumda yeterli olacaktır. Burada k difüzyon sabitidir. Bu da bize $c(\vec{r}, t)$ için çözülecek ve Fick difüzyon denklemi olarak da bilinen denklemi verecektir:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) - k\vec{\nabla}^2 c(\vec{r}, t) = 0. \tag{11.6}$$

Kent ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Einstein, difüzyon problemlerinde konsantrasyonun aynı zamanda da bir parçacığın verilen bir noktada ve zamanda bulunma olasılığına orantılı olduğunu görür. Dolayısıyla, $P(\overrightarrow{r},t)$ ile göstereceğimiz olasılık dağılımı konsantrasyon ile aynı diferansiyel denklemi sağlayacaktır (11.6). Bu denklemin $t=0$ anında merkezde olan bir parçacık için çözümü, Gauss dağılımı olarak bilinen

$$P(\overrightarrow{r},t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{r^2}{4kt}) \tag{11.7}$$

formülü ile verilir. Bu dağılıma göre $\overrightarrow{r}$ 'nin ortalama değerini gösteren $<\overrightarrow{r}>$ sıfır olmasına karşın, parçacığın merkezden zamanla uzaklaşmasını veren $\overrightarrow{r}^2$'nin ortalama sapması ise,

$$\begin{aligned}&<\overrightarrow{r}^2>-<\overrightarrow{r}>^2\\ &=<\overrightarrow{r}^2>\\ &=\int r^2P(\overrightarrow{r},t)d^3r\\ &=6kt\end{aligned} \tag{11.8}$$

olacaktır. Burada dikkatimizi çeken

$$<\overrightarrow{r}^2>\propto t \tag{11.9}$$

ilişkisidir. Bu difüzyon denklemindeki zaman türevinin birinci dereceden olmasından kaynaklanmaktadır. Sistemdeki zaman ölçeği mesafe ölçeğinin karesi ile değişmektedir. Süre dört kat arttırılınca alınan yol sadece iki kat artmaktadır. Ancak, bazı deneylerde bu ilişkinin bozulduğu ve

$$<\overrightarrow{r}^2>\propto t^\alpha \qquad \alpha\neq 1 \tag{11.10}$$

şeklinde olduğu görülmüştür. Bunun difüzyon denklemine yansımasının ise,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}P(\overrightarrow{r},t)-k_\alpha\overrightarrow{\nabla}^2P(\overrightarrow{r},t)=0 \quad k_\alpha\neq 1 \tag{11.11}$$

şeklinde olması beklenir.

Ancak, bu anlamlı bir denklem midir? Kesirli türev olabilir mi? Olursa, kesirli integral de anlamlı mıdır? Açıkçası, türevin ve integralin geometrik yorumları olan eğim ve alan o kadar etkileyici ve doğaldır ki, kesirli türev ve integralin var olabileceği pek çok kişinin aklına bile gelmemiştir. Ancak, kesirli matematiğin tarihi Leibniz'e (1695) kadar uzanmaktadır. Bu ilginç konunun iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi gibi çok farklı konularda uygulamaları verilmiş olup, her geçen gün yeni ve ilginç uygulamaları çıkmaktadır. Ekonomi, finans, deprem bilimleri gibi alanlara uygulamaları ise, şüphesiz

çok ilginç olacaktır. Sıradan matematiğin, doğrusal olmayan ve denge durumundan uzak süreçlerin çalışılmasında karşılaşılan fraktal fonksiyonların incelenmesinde yetersiz kaldığı bilinir. Fraktal eğriler ve yüzeylerle kesirli matematik arasındaki ilişki ise, yoğun araştırılan konular arasındadır. Kesirli türev ve integraller, bazı belirli integrallerin alınması, seri toplamlarının bulunması gibi konularda da yararlı bir teknik olarak karşımıza çıkar.

Bu bölümde hala süratle gelişmekte olan kesirli matematiğin, mümkün olduğu kadar geniş kapsamlı ve genel kabul görmüş tanımları ve özelliklerini göreceğiz. Tek başına bir yıllık derse konu olabilecek derinlikte olan kesirli matematiğin, gerek matematiksel formalizmi ve gerek de değişik uygulama ve özellikleri için, Oldham ve Spaniard, Hilfer, Samko, Kilbas & Marichev ve Podlubny gibi kaynaklardan yararlanılabilir.

11.1 Türev ve İntegralin Ortak yazımı

11.1.1 Kullanılan Notasyon ve Tanımlar

Kesirli türev ve integralleri tek bir çatı altında differintegral olarak görmeden önce, tamsayı n değerleri için türev ve integralin ortak yazımını öğreneceğiz. Notasyon olarak Oldham ve Spanier'ı takip edeceğiz. Aksi ifade edilmediği takdirde n, N pozitif tamsayıları, q ve Q ise, herhangi bir sayıyı gösterecektir. Bir fonksiyonun n. türevi genelde

$$\frac{d^nf}{dx^n} \tag{11.12}$$

olarak gösterildiğinden ve integral de türevin tersi bir işlem olduğundan,

$$\frac{d^{-1}f}{d\,[x]^{-1}}=\int_0^x f(x_0)dx_0 \tag{11.13}$$

yazabiliriz. Bu notasyon ile ardışık integraller,

$$\frac{d^{-2}f}{d\,[x]^{-2}}=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}f(x_0)dx_0 \tag{11.14}$$

...

...

$$\frac{d^{-n}f}{d\,[x]^{-n}}=\int_0^x dx_{n-1}\int_0^{x_{n-1}}dx_{n-2}.....\int_0^{x_2}dx_1\int_0^{x_1}f(x_0)dx_0 \tag{11.15}$$

olarak gösterilirler. Alt sınırın sıfırdan farklı olduğu durumlarda ise,

$$\frac{d^{-1}f}{[d(x-a)]^{-1}}=\int_a^x f(x_0)dx_0 \tag{11.16}$$

Kesirler Mühendislik Bilimlerinde Matematik © 2004 II. baskı Selçuk Ş. Bayın

...

...

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \ldots\ldots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 \tag{11.17}$$

yazılacaktır. Ancak, burada

$$\frac{d^n}{[d(x-a)]^n} = \frac{d^n}{[dx]^n} \tag{11.18}$$

olmasına rağmen, integraller için

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}} \neq \frac{d^{-n}}{[dx]^{-n}} \tag{11.19}$$

olduğuna dikkat etmeliyiz. $n.$ dereceden türev için

$$f^{(n)}(x) \tag{11.20}$$

ifadesi de yaygın olarak kullanıldığından, n ardışık integral için

$$f^{(-n)} = \int_{a_n}^x dx_{n-1} \int_{a_{n-2}}^{x_{n-1}} dx_{n-2} \ldots\ldots \int_{a_2}^{x_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} f(x_0)dx_0 \tag{11.21}$$

yazımını da kullanacağız. Karışıklığa yol açmayacak durumlarda ise,

$$\begin{aligned} &\frac{d^q f(x)}{[d(x-0)]^q} \\ &= \frac{d^q f(x)}{[dx]^q} \\ &= \frac{d^q f(x)}{dx^q} \\ &= f^{(q)}(x) \end{aligned}$$

ifadeleri de kullanılacaktır. Bir diferintegralin b noktasındaki değeri ise,

$$\left.\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q}\right|_{x=b} = \frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}(b)$$

olarak gösterilecektir. Diferintegralin literatürde kullanılan başka gösterimleri de

$$\begin{aligned} &\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} \\ &= \mathbf{D}_a^q f(x) \\ &= {}_a\mathbf{D}_x^q f(x) \end{aligned}$$

şeklindedir.

11.1.2 Bir Fonksiyonun n. Türevi

Türev ve integralin ortak yazımını görmeden önce türevin bildiğimiz tanımını,

$$\frac{d^1 f}{dx^1} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \{[\delta x]^{-1}[f(x) - f(x-\delta x)]\} \tag{11.22}$$

şeklinde yazalım. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü dereceden türevleri de yazalım:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\delta x \to 0} \{[\delta x]^{-2}[f(x) - 2f(x-\delta x) + f(x-2\delta x)]\}, \tag{11.23}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \lim_{\delta x \to 0} \{[\delta x]^{-3}[f(x) - 3f(x-\delta x) + 3f(x-2\delta x) - f(x-3\delta x)]\}. \tag{11.24}$$

Burada katsayıların değişen işaretlerle binom katsayıları olduğunu görürsek, $n.$ türev içinde

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ [\delta x]^{-n} \sum_{j=0}^{n} [-]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \right\} \tag{11.25}$$

yazabiliriz. Bu ifadelerde bütün limitlerin var olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, $[\delta x]$ sıfıra sürekli olarak, yani aradaki bütün değerleri de alacak şekilde gitmektedir. İntegral ile ortak bir tanım için sınırlandırılmış bir limit işlemi gerekecektir. Bunun için $[a, x]$ aralığını N eşit parçaya bölerek,

$$\delta_N x = [x-a]/N \qquad N = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11.26}$$

yazarsak (11.25) ifadesi de

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{n} [-]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\} \tag{11.27}$$

olacaktır. $\binom{n}{j}$ olarak gösterilen binom katsayıları da $j > n$ değerleri için sıfır olacağından,

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{\delta_N x \to 0} \left\{ [\delta_N x]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-]^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\} \tag{11.28}$$

yazılır. Buradan limitin sürekli durumlarda da var olduğu anlayışı ile $n.$ dereceden türevi

$$\frac{d^n f}{[dx]^n} = \lim_{N \to \infty} \left\{ [\frac{x-a}{N}]^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} [-]^j \binom{n}{j} f(x - j\left[\frac{x-a}{N}\right]) \right\} \tag{11.29}$$

şeklinde ifade ederiz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

11.1.3 n ardışık integralin genel yazımı

Şimdi de dikkatimizi bir fonksiyonun n ardışık integraline çevirelim. Bir fonksiyonunun integrali onun altındaki alana eşit olacağından, Riemann toplamı olarak

$$\frac{d^{-1}f}{[d(x-a)]^{-1}} = \int_a^x f(x_0)dx_0 \tag{11.30}$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0}\{\delta_N x[f(x) + f(x-\delta_N x) + f(x-2\delta_N x) + ... + f(a+\delta_N x)]\} \tag{11.31}$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0}\{\delta_N x \sum_{j=0}^{N-1} f(x-j\delta_N x)\} \tag{11.32}$$

şeklinde yazılır. Daha önce olduğu gibi burada da $\delta_N x = [x-a]/N$ olarak alınmıştır. Bu yazımın ikili integrali,

$$\begin{aligned}\frac{d^{-2}f}{[d(x-a)]^{-2}} &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 \\ &= \lim_{\delta_N x \to 0}\{[\delta_N x]^2 [f(x) + 2f(x-\delta_N x) + 3f(x-2\delta_N x) + ... \\ &\quad + Nf(a+\delta_N x)]\} \qquad (11.33) \\ &= \lim_{\delta_N x \to 0}\{[\delta_N x]^2 \sum_{j=0}^{N-1} [j+1]\, f(x-j\delta_N x)\}\end{aligned}$$

şeklinde ve üçlü integrali ise,

$$\begin{aligned}\frac{d^{-3}f}{[d(x-a)]^{-3}} &= \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 \qquad (11.34) \\ &= \lim_{\delta_N x \to 0}\{[\delta_N x]^3 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[j+1]\,[j+2]}{2} f(x-j\delta_N x)\}\end{aligned}$$

olarak verilir. n ardışık integrali ise,

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = \lim_{\delta_N x \to 0}\{[\delta_N x]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x-j\delta_N x)\} \tag{11.35}$$

$$= \lim_{N \to \infty}\{\left[\frac{x-a}{N}\right]^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} f(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right])\} \tag{11.36}$$

olacaktır. Buradaki toplamda katsayılar (11.29) ifadesinden farklı olarak $\binom{j+n-1}{j}$ şeklinde gitmektedir ve bütün terimler artı işaretlidir.

11.1.4 Tamsayı Değerler için Türev ve İntegralin Ortak Yazımı

Gama fonksiyonlarının (10.168)'de verilen

$$[-]^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \tag{11.37}$$

ilişkisini kullanarak, tamsayı değerler için türev ve integrali aşağıdaki gibi tek bir formül ile ifade edebiliriz:

$$\frac{d^n f}{[d(x-a)]^n} = \lim_{N \to \infty}\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-n}}{\Gamma(-n)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} f(x-j\frac{[x-a]}{N})\}. \tag{11.38}$$

Burada n, her iki işaretten de tamsayı değerler almaktadır.

11.2 Diferintegral

11.2.1 Diferintegralin Grünwald Tanımı

Yukarıdaki formülde aslında gama fonksiyonunun bütün n değerleri için tanımlı olduğunu düşünürsek, diferintegralin Grünwald tarafından verilmiş en genel ve temel tanımı olan

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \to \infty}\left\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right])\right\} \tag{11.39}$$

yazımını buluruz. Artık q bütün değerleri alabilmektedir. Bu tanımın en büyük avantajı, verilen bir fonksiyonun diferintegralinin o fonksiyonun türevlerine veya integrallerine gerek kalmadan, sadece kendisinin aldığı değerler ile bulunabilmesidir. Bu formülde $\Gamma(-q)$, q'nun pozitif değerleri için sonsuz, ancak $\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)}$ oranı sonlu bir sayıdır.

Şimdi bu tanıma bağlı olarak n'nin pozitif tamsayı ve q'nun bütün değerleri için,

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^{n+q}f}{[d(x-a)]^{n+q}} \tag{11.40}$$

ilişkisinin doğru olduğunu gösterelim. $\delta_N x = [x-a]/N$ ilişkisini kullanarak

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \to \infty}\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f(x-j\delta_N x)\} \tag{11.41}$$

Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın
Fen ve Mühendislik Bilimleri

yazabiliriz. $a \le x' \le x-\delta_N x$ aralığını $N-1$ eşit parçaya bölersek, $(x-\delta_N x)$ noktasında $\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}$ türevini,

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}(x-\delta_N x)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-2}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}f(x-\delta_N x-j\delta_N x)\right\} \quad (11.42)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)}f(x-j\delta_N x)\right\} \quad (11.43)$$

şeklinde yazarız. Bunun da türevin tanımını kullanarak tekrar türevini alırsak,

$$\frac{d}{dx}\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{[\delta_N x]^{-1}\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}(x)-\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}(x-\delta_N x)\right]\right\} \quad (11.44)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q-1}}{\Gamma(-q)}\left[\Gamma(-q)f(x)+\sum_{j=1}^{N-1}\left\{\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}-\frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)}\right\}f(x-j\delta_N x)\right]\right\}$$

olacaktır. Gama fonksiyonları arasındaki

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}-\frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)}=\frac{\Gamma(-q)}{\Gamma(-q-1)}\frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j+1)} \quad (11.45)$$

bağıntısı ile bunu da

$$\frac{d}{dx}\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q-1}}{\Gamma(-q-1)}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j+1)}f(x-j\delta_N x)\right]\right\} \quad (11.46)$$

$$= \frac{d^{q+1}f}{[d(x-a)]^{q+1}} \quad (11.47)$$

şeklinde yazabiliriz. Genel formül ise, bunu $(n-1)$ için doğru olduğunu varsayıp n için göstererek bulunur.

11.2.2 Diferintegralin Riemann-Liouville Tanımı

Diferintegralin sıkça kullanılan bir başka tanımı ise, Cauchy formülünden yararlanılarak bulunur. Aşağıdaki integral verilmiş olsun:

$$I_n(x)=\int_a^x (x-\xi)^{n-1}f(\xi)d\xi, \quad (11.48)$$

$n>0$ ve tamsayı, a da bir sabittir.

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)}F(x,\xi)d\xi \quad (11.49)$$

$$= \int_{A(x)}^{B(x)}\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}d\xi+F(x,B(x))\frac{dB(x)}{dx}-F(x,A(x))\frac{dA(x)}{dx}$$

formülünü uygularayak I_n'nin türevini

$$\frac{dI_n}{dx}=(n-1)\int_a^x (x-\xi)^{n-2}f(\xi)d\xi+\left[(x-\xi)^{n-1}f(\xi)\right]_{\xi=x} \quad (11.50)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da bize $n>1$ için

$$\frac{dI_n}{dx}=(n-1)I_{n-1} \quad (11.51)$$

ve $n=1$ için de

$$\frac{dI_1}{dx}=f(x) \quad (11.52)$$

verecektir. (11.50) denkleminin k kez türevini alınırsa,

$$\frac{d^k I_n}{dx^k}=(n-1)(n-2)...(n-k)I_{n-k} \quad (11.53)$$

bulunur. Bu da bize

$$\frac{d^{n-1}I_n}{dx^{n-1}}=(n-1)!I_1(x) \quad (11.54)$$

veya

$$\frac{d^n I_n}{dx^n}=(n-1)!f(x) \quad (11.55)$$

formüllerini verecektir. Eğer $n\ge 1$ için $I_n(a)=0$ değerini kullanırsak, (11.54) ve (11.55) denklemlerinden $I_n(x)$'in kendinin ve $(n-1)$'e kadar olan bütün türevlerinin $x=a$ noktasında sıfır olduğunu görürüz ki, bu da bize

$$I_1(x) = \int_a^x f(x_1)dx_1 \quad (11.56)$$

$$I_2(x) = \int_a^x I_1(x_2)dx_2=\int_a^x\int_a^{x_2}f(x_1)dx_1dx_2 \quad (11.57)$$

verecektir. Genel da olarak bunu

$$I_n(x)=(n-1)!\int_a^x\int_a^{x_n}...\int_a^{x_3}\int_a^{x_2}f(x_1)dx_1dx_2...dx_{n-1}dx_n \quad (11.58)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde yazılabiliriz. Buradan da **Cauchy formülü** olarak bilinen

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2...dx_{n-1}dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{x'} (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi \tag{11.59}$$

formülünü buluruz.

Riemann-Liouville tanımına ulaşmak için (11.59) formülünde tamsayı değerler ile sınırlı n yerine her değeri alabilen q koyarsak,

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^x [x-x']^{-q-1} f(x')dx', \qquad (q<0) \tag{11.60}$$

bulunacaktır. Ancak, bu formüldeki integral sedece $q<0$ değerleri için yakınsaktır. Burada $[..]_{R-L}$ diferintegralin Riemann-Liouville yöntemi ile bulunduğunu gösterir. Daha önce verdiğimiz (11.39) tanımı ile bütün q değerleri için uyuşan sonuçlar verdiğini gösterdiğimizde R-L altyazısını sileceğiz. Önce, $q<0$ değerleri için $a \le x' \le x$ aralığında sonlu değerler alan bir $f(x)$ fonksiyonu için, her iki tanımın da aynı sonucu verdiğini göstermek için farklarını aşağıdaki gibi yazalım:

$$\Delta = \frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} - \left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} \tag{11.61}$$

(11.39) ve (11.60) tanımları kullanılarak da Δ ifadesi

$$\Delta = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}f(x-j\delta_N x)\right\} - \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^{x-a}\frac{f(x-x')}{x'^{1+q}}dx' \tag{11.62}$$

şeklini alacaktır. İkinci terimdeki integrali de Riemann toplamı olarak yazarsak,

$$\Delta = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}f(x-j\delta_N x)\right\} - \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{f(x-j\delta_N x)\delta_N x}{\Gamma(-q)[j\delta_N x]^{1+q}}\right\} \tag{11.63}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[\delta_N x]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-1} f(x-j\delta_N x)\left[\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q}\right]\right\} \tag{11.64}$$

$$= \frac{[x-a]^{-q}}{\Gamma(-q)}\lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N-1} f(\frac{Nx-jx+ja}{N})N^q\left[\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q}\right]$$

buluruz. Burada $\delta_N x = (x-a)/N$ olarak alınmıştır. Sağ taraftaki toplamı ikiye ayırıp, önce 0'dan $(j-1)$'e, sonra da j'den $(n-1)$'e olmak üzere yazarsak,

$$\Delta = \frac{[x-a]^{-q}}{\Gamma(-q)}\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{J-1} f(\frac{Nx-jx+ja}{N})N^q[\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q}]\right\} \tag{11.65}$$

$$+ \frac{[x-a]^{-q}}{\Gamma(-q)}\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=J}^{N-1} f(\frac{Nx-jx+ja}{N})\left[\frac{j}{N}\right]^{-2-q}\left[\frac{q(q+1)}{2N} + \frac{0(j^{-1})}{N}\right]\right\}$$

bulunacaktır. Birinci toplamda $q<-1$ için parantez içindeki terimler sonlu olduğundan, N^q çarpanı $N\to\infty$ limitinde bu terimin sıfıra gitmesini sağlayacaktır. Benzer şekilde $q \le -2$ için, ikinci terimde $N\to\infty$ limitinde sıfıra gidecektir. Buradan görüldüğü üzere; $a \le x' \le x$ aralığında sonlu değerler alan bir f fonksiyonu ve $q \le -2$ değerleri için, her iki tanımda aynı sonucu vermektedir:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} \qquad q \le -2. \tag{11.66}$$

Riemann-Liouville tanımını bütün q değerleri için geçerli kılmak için Grünwald (11.39) tanımında olduğu gibi (11.40) ifadesinin de sağlanması şartını koşalım. Bu durumda

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}}\right]_{R-L} \tag{11.67}$$

olacaktır. Yukarıdaki formülde verilen bir q değeri için, pozitif tamsayı değerleri alan bir n'yi, $q-n \le -2$ olacak şekilde seçer ve (11.66) sonucunu kullanırsak,

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}}\right] \tag{11.68}$$

yazabiliriz. Buradan da Grünwald tanımı ile $R-L$ tanımının bütün q değerleri için uyuştuğunu gösteren

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right]_{R-L} = \left[\frac{d^{q-n} f}{[d(x-a)]^{q-n}}\right] \tag{11.69}$$

ifadesini buluruz. Artık $R-L$ altyazısına ihtiyacımız kalmamıştır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın, 1. baskı 2004

Riemann-Liouville Tanımı:

$q < 0$ değerleri için diferintegral,

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right] = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x [x-x']^{-q-1} f(x')dx', \qquad q < 0 \qquad (11.70)$$

formülü kulanılarak, ve $q \geq 0$ değerleri için de

$$\left[\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q}\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^x [x-x']^{-(q-n)-1} f(x')dx\right] \qquad q \geq 0 \qquad (11.71)$$

formülü ile bulunacaktır. Burada n tamsayısı, $(q-n) < 0$ olacak şekilde seçilmelidir. Riemann-Liouville tanımı oldukça yaygın kullanım alanı bulmuştur. Bu yöntemde kullanılan integral (11.70) sadece $q < 0$ değerleri için yakınsaktır. $q \geq 0$ değerleri için bu problem $n > q$ şartını koşarak çözülür. Bu yöntemle bulunan diferintegral bir integralin n kez türevini içereceğinden uygulamada zorluk çıkarabilir.

11.3 Diferintegralin Diğer Tanımları

Diferintegralin Grünwald ve Riemann-Liouville tanımları en temel tanımlar olarak bilinirler ve yaygın olarak kullanılırlar. Bunlara ek olarak Cauchy integral formülü ve integral dönüşümü yöntemleri ile de diferintegral tanımlanabilir. Bu tanımlar Grünwald ve Riemann-Liouville tanımları kadar kullanışlı olmasalar da değişik tanımların mümkün olduğunu ve doğru uygulandıkları takdirde temel tanımlarla uyuştuklarını göstermeleri açısından incelemeye değerler.

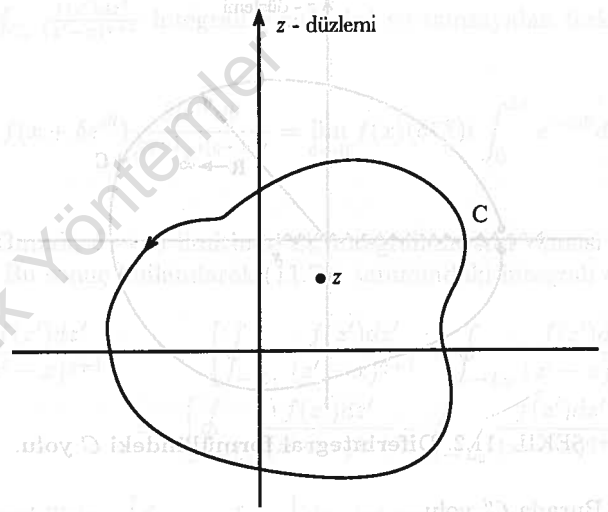
11.3.1 Cauchy İntegral Formülü Yardımı ile Diferintegral Tanımı

C yolu üzerinde ve içinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunun n. dereceden türevinin

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-z)^{n+1}} \qquad (n \geq 0 \text{ ve tamsayı}) \qquad (11.72)$$

olarak verildiğini görmüştük (10. Bölüm). Burada z', C kapalı yolu üzerinde bir noktayı, z de C içinde herhangi bir noktayı göstermektedir (Şekil (11.1)). Bu formülü z noktasını reel eksen üzerindeki bir nokta alarak, herhangi bir q değeri için

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} \qquad (11.73)$$



ŞEKİL 11.1. **Cauchy integral formülünün C yolu.**

şeklinde yazalım. Bu formül, Şekil (11.1)'de gösterilen C yolu için ve q'nun pozitif tamsayı değerleri için geçerli olacaktır. q'nun negatif tamsayı olduğu durumlarda ise, $\Gamma(q+1)$ fonksiyonu sonsuz olacağından tanımsızdır. q'nun negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için ise, diferintegral tanımı olarak kullanılabilir. Ancak, bu durumda x dal noktası olacağından kesik çizgisinin yönüne dikkat etmek gerekeceği gibi, C yolu da artık Şekil (11.1)'deki gibi olmayacaktır. Kesik çizgisini şekilde gösterildiği gibi dal noktasının solunda ve reel eksen üzerinde sonsuza kadar uzanacak şekilde seçer ve C yolunu da Şekil (11.2)'de gösterildiği gibi alırsak,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} \qquad q < 0, \neq \text{tamsayı} \qquad (11.74)$$

formülünü q'nun negatif ve tamsayıdan farklı değerleri için diferintegral tanımı olarak kullanabiliriz. Burada integral, C yolunun yarı çapının sonsuza gittiği durumda saat yönünde hesaplanacaktır.

Genelleştirilmiş Cauchy Tanımı ve Riemann-Liouville Formülü:

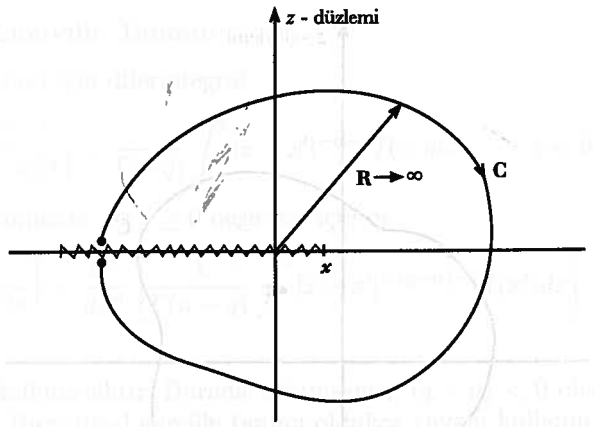
(11.74) tanımındaki integrali bu hali ile hesaplamak uygulamada kolay olmayacaktır. Ancak, Şekil (11.3)'de gösterilen C' kapalı yolunu alırsak, C' içinde ve üzerinde

$$\frac{f(z')}{(z'-x)^{q+1}} \qquad (11.75)$$

fonksiyonu analitik olacağından,

$$\oint_{C'} \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} = 0 \qquad (11.76)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

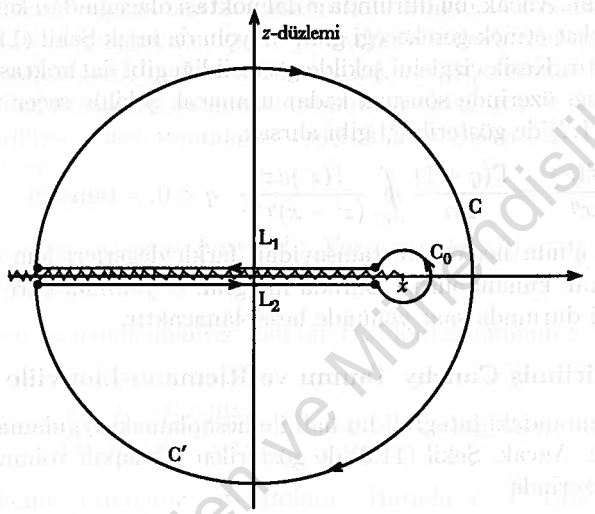


ŞEKİL 11.2. **Diferintegral formülündeki C yolu.**

yazabiliriz. Burada C' yolu

$$C'[\circlearrowleft] = C[\circlearrowleft] + C_o[\circlearrowleft] + L_1[\leftarrow] + L_2[\rightarrow] \tag{11.77}$$

parçalarından oluşmaktadır. Dikkat edilirse (11.76) integralinin değeri her iki yön için de sıfır olacaktır. Ancak, R-L tanımı ile uyuşmak için C'integrali saat yönünde alınacaktır. $C_o[\circlearrowleft]$ integrali yolun yarıçapının sıfıra gittiği



ŞEKİL 11.3. **Diferintegral formülündeki C' kapalı yolu.**

durumda hesaplanacağından, yolun üzerinde bir nokta için

$$z' - x = \delta e^{i\theta} \tag{11.78}$$

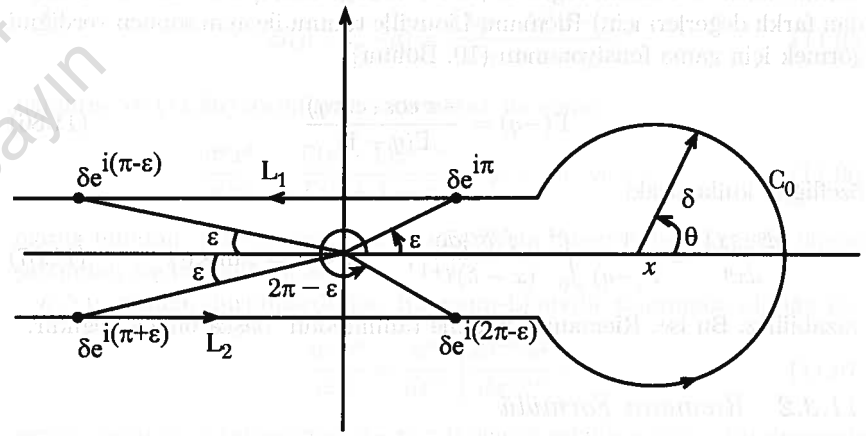
yazarsak, $\oint_{C_o} \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}}$ integrali q'nun eksi ve tamsayıdan farklı değerleri için,

$$\lim_{\delta\to o}\oint_{C_o} f(x+\delta e^{i\theta})\frac{\delta i e^{i\theta}d\theta}{\delta^{q+1}e^{i(q+1)\theta}} = \lim_{\delta\to 0} f(x)(\delta^{-q})i\int_0^{2\pi} e^{-iq\theta}d\theta \to 0 \tag{11.79}$$

olacaktır. Burada $\delta \to 0$ limitinde C_o integralinin sıfır olması için $q < 0$ alınmıştır. Bu sonuç kullanılarak (11.74) tanımındaki integrali de

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} &= -\left[\oint_{\leftarrow L_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} + \oint_{\rightarrow L_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}}\right] \\ &= \left[\oint_{\rightarrow L_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} - \oint_{\rightarrow L_2}\frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}}\right]\end{aligned} \tag{11.80}$$

şeklinde yazabiliriz. $\left[\oint_{\rightarrow L_1} - \oint_{\rightarrow L_2}\right] dz$ integrali artık kolayca hesaplanabilecektir. Buradaki integralleri önce $[-\infty, 0]$ arasında kalan bölümleri için hesaplarsak,



ŞEKİL 11.4. $\oint_{\rightarrow L_1}$, $\oint_{\rightarrow L_2}$ve $\oint_{C_o}$ **integralleri yolu.**

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{f(\delta e^{i(\pi-\varepsilon)}d\delta e^{i(\pi-\varepsilon)}}{(\delta e^{i(\pi-\epsilon)}-x)^{q+1}} - \int_{-\infty}^{0}\frac{f(\delta e^{i(\pi+\varepsilon)}d\delta e^{i(\pi+\varepsilon)}}{(\delta e^{i(\pi+\epsilon)}-x)^{q+1}}\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}(e^{i(\pi-\varepsilon)} - e^{i(\pi+\varepsilon)})\int_{-\infty}^{0}\frac{f(\delta e^{i\pi})d\delta}{(-\delta-x)^{q+1}} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}(e^{i(\pi-\varepsilon)} - e^{i(\pi+\varepsilon)})\int_{-\infty}^{0}\frac{f(\delta e^{i\pi})d\delta}{(-\delta-x)^{q+1}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{11.81}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

bulunacaktır. $\oint_C dz$ integralinde kalan kısmı da yazarsak

$$\oint_C \frac{f(z')dz'}{(z'-x)^{q+1}} \tag{11.82}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_0^x \frac{f(\delta e^{i\epsilon})e^{i\epsilon}d\delta}{(\delta-x)^{q+1}e^{i(q+1)\epsilon}} - \int_{-\infty}^0 \frac{f(\delta e^{i(2\pi-\epsilon)})e^{i(2\pi-\epsilon)}d\delta}{(\delta-x)^{q+1}e^{i(q+1)(2\pi-\epsilon)}}\right]$$

bulunur. Bunu da (11.74) tanımında önce yerine koyar ve sonra da sadeleştirirsek q'nun eksi ve tamsayıdan farklı değerleri için,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i}\left[1-e^{-i(q+1)2\pi}\right]\int_0^x \frac{f(\delta)d\delta}{(\delta-x)^{q+1}}, \tag{11.83}$$
$$= \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i}\left[2i\sin(\pi q)\right](-1)^q\int_0^x \frac{f(\delta)d\delta}{(\delta-x)^{q+1}}, \tag{11.84}$$
$$= -\frac{\Gamma(q+1)}{\pi}\left[\sin(\pi q)\right]\int_0^x \frac{f(\delta)d\delta}{(x-\delta)^{q+1}} \tag{11.85}$$

bulunacaktır. Bu diferintegralin (tanım aralığı olan q'nun eksi ve tamsayıdan farklı değerleri için) Riemann-Liouville tanımı ile aynı sonucu verdiğini görmek için gama fonsiyonunun (10. Bölüm)

$$\Gamma(-q) = \frac{-\pi\cos ec(\pi q)}{\Gamma(q+1)} \tag{11.86}$$

özelliğini kullanarak,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^x \frac{f(\delta)d\delta}{(x-\delta)^{q+1}}, \qquad q<0, \neq \text{tamsayı} \tag{11.87}$$

yazabiliriz. Bu ise, Riemann-Liouville tanımından başka birşey değildir.

11.3.2 Riemann Formülü

Taylor serisi açılımı yapılabilen fonksiyonların diferintegrallerinin alınmasında çok yararlı olacak olan,

$$f(x) = x^p \tag{11.88}$$

fonksiyonunun diferintegralini (11.85) formülünü kullanarak alalım:

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{\pi}\sin(\pi q)(-1)^q\int_0^x \frac{\delta^p\, d\delta}{(\delta-x)^{q+1}} \tag{11.89}$$

Burada,

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(q+1)}{\pi}\sin(\pi q)(-1)^q\int_0^x \frac{\delta^p\, d\delta}{x^{q+1}(\frac{\delta}{x}-1)^{q+1}} \tag{11.90}$$

yazar ve

$$\frac{\delta}{x} = s \tag{11.91}$$

dönüşümünü yaparsak,

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = -\frac{\Gamma(q+1)}{\pi}\sin(\pi q)x^{p-q}\int_0^1 \frac{s^p\, ds}{(1-s)^{q+1}} \tag{11.92}$$

olacaktır. Beta fonksiyonunun

$$B(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}[1-y]^{q-1}dy, \qquad p>0<q \tag{11.93}$$

olarak tanımlandığını hatırlarsak,

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = -\frac{\Gamma(q+1)}{\pi}\sin(\pi q)(x)^{p-q}B(p+1,-q) \tag{11.94}$$

yazabiliriz. Beta ve gama fonksiyonları arasındaki

$$B(p+1,-q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-q)}{\Gamma(p+1-q)} \tag{11.95}$$

bağıntısı ve (11.86) formülünü kullanarak da sonuç,

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p+1-q)}, \quad p>-1, \text{ ve } q<0 \tag{11.96}$$

olarak bulunur. p ve q üzerindeki sınırlar beta integralinin yakınsak olması şartından kaynaklanmaktadır.

$q\geq 0$ olduğu durumlarda ise, Riemann-Liouville tanımında olduğu gibi

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n}x^p}{dx^{q-n}}\right] \tag{11.97}$$

şartını yazar ve n tamsayısını $q-n<0$ olacak şekilde seçeriz. Bu durumda köşeli parantez içindeki diferintegrali (11.96) formülünü kullanarak bulur ve

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\Gamma(p+1)x^{p-q+n}}{\Gamma(p-q+n+1)}\right] \tag{11.98}$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}, \quad q\geq 0$$

yazarız. Burada n tamsayı değerler aldığından türev de kolayca bulunmuştur. (11.96) ve (11.98) denklemleri ile verdiğimiz sonuçları da birleştirirsek, bütün q değerleri için geçerli olan

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}, \quad p>-1 \tag{11.99}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

formülünü elde ederiz. Riemann formülü olarak da bilinen bu formül, m ve n'nin pozitif tamsayı olduğu durumlarda yazılan

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \tag{11.100}$$

formülününün, $p > -1$ şartı altında bir genellemesidir. $p \leq -1$ durumunda beta integrali yakınsak olmadığından bu formülün bütün p değerlerini kapsayan bir genellemesi henüz bulunamamıştır.

11.3.3 Diferintegralin Laplace Dönüşümü ile Tanımı

Diferintegral Laplace dönüşümü yardımı ile negatif q değerleri için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \mathcal{L}^{-1}[s^q \widetilde{f}(s)] \,, \quad q < 0 \tag{11.101}$$

Burada $\widetilde{f}(s)$, $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. Bu tanımın Riemann-Liouville tanımı ile aynı sonucu verdiğini göstermek için

$$\mathcal{L} \int_0^x f(u) g(x-u) du = \widetilde{f}(s)\widetilde{g}(s) \tag{11.102}$$

şeklinde verilen konvolusyon teoremini kullanalım (13. Bölüm). $g(x)$ fonksiyonunu

$$g(x) = \frac{1}{x^{q+1}}, \tag{11.103}$$

olarak alalım. $f(x)$ ve $g(x)$'in Laplace dönüşümleri de

$$\widetilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{dx}{x^{q+1}} \tag{11.104}$$

$$= \Gamma(-q) s^q \tag{11.105}$$

ve

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \tag{11.106}$$

şeklinde olacaktır. Bu ifadeleri konvolusyon teoreminde kullanırsak,

$$\left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L = \mathcal{L}^{-1}[s^q \widetilde{f}(s)] \,, \quad q < 0 \tag{11.107}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{q+1}}$$

buluruz. Bu ise, diferintegralin Laplace dönüşümü ile verdiğimiz (11.101) tanımının, $q < 0$ değerleri için Riemann-Liouville (11.70) tanımı ile aynı sonucu verdiğini göstermektedir:

$$\left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L = \left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_{R-L}, \quad q < 0 \tag{11.108}$$

L ve $R-L$ altyazıları diferintegralin hangi yöntemle bulunduğunu göstermektedir.

$q > 0$ değerleri için ise, Laplace dönüşümü ile diferintegral tanımı aşağıdaki gibi verilir:

$$\left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L = \mathcal{L}^{-1}\left[s^q \widetilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(0)\right], \quad q > 0 \tag{11.109}$$

veya

$$\left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L = \mathcal{L}^{-1}\left[s^q \widetilde{f}(s) - \frac{d^{q-1} f}{dx^{q-1}}(0) - \ldots - s^{n-1} \frac{d^{q-n} f}{dx^{q-n}}(0)\right]. \tag{11.110}$$

Burada, $q > 0$ ve n tamsayısı da $n-1 < q \leq n$ olacak şekilde seçilmelidir. Sağ taraftaki türevler ise, L yöntemi ile hesaplanırlar. Bu tanımın Riemann-Liouville tanımı ile aynı sonucu verdiğini göstermek için,

$$A(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{q-n+1}}, \quad q < n \tag{11.111}$$

yazalım ve konvolusyon teoremini kullanarak Laplace dönüşümünü bulalım:

$$\widetilde{A}(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma(q-n)} \int_0^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{q-n+1}}\right] \tag{11.112}$$

$$= s^{q-n} \widetilde{f}(s), \quad q-n < 0 \tag{11.113}$$

Bu bize $s^q \widetilde{f}(s) = s^n \widetilde{A}(s)$ eşitliğini verecektir. Riemann-Liouville tanımı olan (11.70-71) kullanılarak da

$$A(0) = \left[\frac{d^{(q-n)} f}{dx^{(q-n)}}(0)\right]_{R-L} \tag{11.114}$$

yazılabilir. $q-n < 0$ olduğu için, (11.108) denkleminden dolayı

$$A(0) = \left[\frac{d^{(q-n)} f}{dx^{(q-n)}}(0)\right]_L \tag{11.115}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olduğu da görülür. $A(x)$'in tanımından

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{q-n+1}}, \quad q-n<0 \\ &= \left[\frac{d^{(q-n)}f(x)}{dx^{(q-n)}}\right]_{R-L} \\ &= \left[\frac{d^{(q-n)}f(x)}{dx^{(q-n)}}\right]_{L} \end{aligned} \tag{11.116}$$

yazabiliriz. Burada Grünwald ve Riemann-Liouville tanımlarında olduğu gibi, $[..]_L$ tanımının da pozitif tamsayı n ve bütün q değerleri için (11.40)

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{d^{n+q}f(x)}{dx^{n+q}} \tag{11.117}$$

kuralını sağladığını varsayarsak,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}A(x)}{dx^{n-1}} &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\frac{d^{q-n}f(x)}{dx^{q-n}}]_L \\ &= [\frac{d^{q-1}f(x)}{dx^{q-1}}]_L \end{aligned} \tag{11.118}$$

olacaktır. Bu da bize

$$\left[\frac{d^{q-1}f(0)}{dx^{q-1}}\right]_L = \left[\frac{d^{n-1}A(0)}{dx^{n-1}}\right] \tag{11.119}$$

verir. Benzer şekilde (11.110) denklemindeki diğer terimler de bulunursa,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L &= \pounds^{-1}\left[s^n\widetilde{A}(s) - \frac{d^{n-1}A}{dx^{n-1}}(0) - ..... - s^{n-1}A(0)\right], \\ &= \pounds^{-1}\left[s^n\widetilde{A}(s) - s^{n-1}A(0) - ..... - \frac{d^{n-1}A}{dx^{n-1}}(0)\right], \\ &= \pounds^{-1}\left[\pounds\left[\frac{d^nA}{dx^n}\right]_{R-L}\right] \end{aligned} \tag{11.120}$$

olur. (11.111) denklemini kullanarak da

$$\left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_L = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{q-n+1}}\right] \tag{11.121}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{q-n+1}}, \; n>q \\ &= \left[\frac{d^q f}{dx^q}\right]_{R-L}, \quad q>0 \end{aligned} \tag{11.122}$$

yazarız ki, bu da bize $q>0$ değerleri için de her iki tanımın aynı sonucu verdiğini gösterir.

(11.111) formülünde $f(x)$ fonksiyonunun

$$\frac{d^{q-1}f}{dx^{q-1}}(0) = ... \frac{d^{q-n}f}{dx^{q-n}}(0) = 0, \qquad q>0 \tag{11.123}$$

sınır şartlarını sağladığı varsayılırsa, diferintegralin bütün q değerleri için geçerli olacak

$$\frac{d^q f}{dx^q} = \pounds^{-1}[s^q\widetilde{f}(s)] \tag{11.124}$$

tanımı bulunur. Ancak, (11.123)'de verilen sınır şartları kesirli türevler içerdiğinden yorumu ve uygulaması zor olacaktır.

11.4 Diferintegrallerin Özellikleri

Bu bölümde diferintegrallerin alınmasında ve bilinen diferintegrallerden yenilerinin türetilmesinde yardımcı olacak bazı temel özelliklerini anlatacağız.

11.4.1 Doğrusallık

Diferintegralin doğrusal olma özelliği alışılagelen biçimde

$$\frac{d^q[f_1+f_2]}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^q f_1}{[d(x-a)]^q} + \frac{d^q f_2}{[d(x-a)]^q} \tag{11.125}$$

şeklinde ifade edilir.

11.4.2 Homojen Olma özelliği

Homojen olma özelliği ise,

$$\frac{d^q(Cf)}{[d(x-a)]^q} = C\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} \qquad (C \text{ herhangi bir sabittir.}) \tag{11.126}$$

olarak verilir. Bu iki özellik diferintegralin Grünwald tanımından (11.39) kolayca görülebilir.

11.4.3 Ölçek Değişikliği

Bir fonksiyonunun alt limit a'ya göre ölçek değişikliği

$$x \to \beta(x-a)+a \tag{11.127}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak anlaşılır. Burada β sabittir ve ölçek faktörüdür. Alt limitin sıfır olduğu durumda ise,

$$x \to \beta x \tag{11.128}$$

olacaktır. Alt limitin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ölçek değişikliğinin diferintegrale etkisi

$$\frac{d^q f(\beta(x-a)+a)}{[d(\beta(x-a))]^q} = \beta^{-q} \frac{d^q f(\beta(x-a)+a)}{[d(x-a)]^q} \tag{11.129}$$

olarak verilir. Bu formülün en kullanışlı olduğu durum ise, a'nın sıfır olduğu durumlardır. Bu durumda ölçek değişikliği

$$\frac{d^q f(\beta x)}{[d(\beta x)]^q} = \beta^{-q} \frac{d^q f(\beta x)}{[dx]^q} \tag{11.130}$$

verecektir.

11.4.4 Bir Serinin Diferintegrali

Düzgün yakınsak bir serinin diferintegral operatörünün doğrusal olma özelliği kullanılarak bütün q değerleri için,

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^q f_j}{[d(x-a)]^q} \tag{11.131}$$

şeklinde terim terim diferintegrali alınabilir. Diferintegrali alınan seri de aynı aralıkta düzgün yakınsak olacaktır. İleride seri açılımı verilebilen fonksiyonların diferintegralinin alınmasında çok yararlı olacak bir formul ise,

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \sum_{j=0}^{\infty} a_i [x-a]^{p+(j/n)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\Gamma(\frac{pn+j+n}{n})}{\Gamma(\frac{pn-qn+j+n}{n})} [x-a]^{p-q+(j/n)} \tag{11.132}$$

şeklinde verilir. Burada q herhangi bir değeri alabilir, ancak $p > -1$, $a_0 \neq 0$ ve n pozitif tamsayıdır.

11.4.5 Diferintegrallerin Birleştirilmesi

Diferintegraller ile çalışırken çok dikkat edilmesi gereken özellikler arasında operatörlerin birleştirmesi ve ters operatörlerin tanımlanması gelir. Unutulmaması gereken,

$$\begin{aligned} d^q d^Q &= d^Q d^q, \\ d^q d^Q &= d^{q+Q} \text{ ve} \\ d^q f &= g \to f = d^{-q} g \end{aligned} \tag{11.133}$$

gibi işlemlerin ancak sınırlı durumlarda geçerli olduğudur. Bu işlemlerde sorunlar q ve Q 'nun kesirli değerleri ile de sınırlı değildir.

n ve N ' nin pozitif tamsayı olduğu durumlarda çoklu türev ve çoklu integralin özellikleri olarak,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{[d(x-a)]^n} \left\{ \frac{d^N f}{[d(x-a)]^N} \right\} &= \frac{d^{n+N} f}{[d(x-a)]^{n+N}} \\ &= \frac{d^N}{[d(x-a)]^N} \left\{ \frac{d^n f}{[d(x-a)]^n} \right\} \end{aligned} \tag{11.134}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}} \left\{ \frac{d^{-N} f}{[d(x-a)]^{-N}} \right\} &= \frac{d^{-n-N} f}{[d(x-a)]^{-n-N}} \\ &= \frac{d^{-N}}{[d(x-a)]^{-N}} \left\{ \frac{d^{-n} f}{[d(x-a)]^{-n}} \right\} \end{aligned} \tag{11.135}$$

ifadeleri doğrudur. Ancak,

$$\frac{d^{\pm n}}{[d(x-a)]^{\pm n}} \left\{ \frac{d^{\mp N} f}{[d(x-a)]^{\mp N}} \right\} \tag{11.136}$$

genel ifadesini bulmak istersek, sonuç her zaman

$$\frac{d^{\pm n \mp N} f}{[d(x-a)]^{\pm n \mp N}} \tag{11.137}$$

olmayacaktır.

$f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli N. türevinin var olduğunu kabul edelim ve bu N. türevin integralini alalım:

$$\int_a^x f^{(N)}(x)dx = f^{(N-1)}(x)\Big|_a^x = f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(a). \tag{11.138}$$

Bu ifadenin de integralini tekrar alırsak,

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\int_a^x f^{(N)}(x)dx \right) dx &= \int_a^x \left[f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(a) \right] dx \\ = \; & f^{(N-2)}(x) - f^{(N-2)}(a) - (x-a) f^{(N-1)}(a), \end{aligned} \tag{11.139}$$

ve aynı işlemi n defa tekrarlarsak,

$$\begin{aligned} \int_a^x \cdots \int_a^x f^{(N)}(x)(dx)^n &= f^{(N-n)}(x) - f^{(N-n)}(a) - (x-a) f^{(N-n-1)}(a) \\ & - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{\prime(N-n-2)}(a) \\ & \cdots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(N-1)}(a) \end{aligned} \tag{11.140}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

bulunacaktır. Burada, denklemin sol tarafı

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\} = \int_a^x \cdots \int_a^x f^{(N)}(x)(dx)^n \qquad (11.141)$$

olduğundan,

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\} = f^{(N-n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(N+k-n)}(a) \qquad (11.142)$$

yazabiliriz. Bu denklemde $N=0$ yazıp türevini alalım:

$$\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}} = f^{(-n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k-n)}(a), \qquad (11.143)$$

$$\frac{d}{[d(x-a)9}\left\{\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\} = f^{(1-n)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-n)}(a). \qquad (11.144)$$

Türev alma işlemi N kez tekrarlanırsa,

$$\frac{d^N}{[d(x-a)]^N}\left\{\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\} = f^{(N-n)}(x) - \sum_{k=N}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-N}}{(k-N)!}f^{(k-n)}(a) \qquad (11.145)$$

bulunacaktır. Burada, $N \geq n$ olduğu zaman alt limitin türeve katkısı olmadığı hatırlanarak

$$\frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}} = f^{(N-n)}(x) \qquad (11.146)$$

yazılmıştır. $N<n$ yani, $N-n<0$ olduğu durumda ise, (11.143) denklemini kullanarak

$$\frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}} = f^{(N-n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-N-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k+N-n)}(a) \qquad (11.147)$$

yazarız. Bu denklem, (11.146) denklemini de içermektedir. (11.145) denkleminde

$$k \to k+N \qquad (11.148)$$

değişikliğini yaparsak,

$$\frac{d^N}{[d(x-a)]^N}\left\{\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\} = f^{(N-n)}(x) - \sum_{k=0}^{n+N-1}\frac{[x-a]^k}{k!}f^{(k+N-n)}(a) \qquad (11.149)$$

bulunacaktır. Bunu da (11.147) denklemi ile karşılaştırırsak,

$$\frac{d^N}{[d(x-a)]^N}\left\{\frac{d^{-n}f}{[d(x-a)]^{-n}}\right\} = \frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}} \qquad (11.150)$$

elde edilir. Yani, önce integral ve sonra da türevin alındığı durumlarda operatörler (11.150) formülünde olduğu gibi birleştirilir.

Şimdi (11.142) denklemine geri dönelim. Sağ taraftaki toplamı

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\} = f^{(N-n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-N-1}\frac{[x-a]^k}{k!}f^{(N+k-n)}(a) - \sum_{k=n-N}^{n-1}\frac{[x-a]^k}{k!}f^{(N+k-n)}(a) \qquad (11.151)$$

şeklinde parçalı yazar ve (11.147) denklemi ile karşılaştırırsak,

$$\frac{d^{-n}}{[d(x-a)]^{-n}}\left\{\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\} = \frac{d^{N-n}f}{[d(x-a)]^{N-n}} - \sum_{k=n-N}^{n-1}\frac{[x-a]^k}{k!}f^{(N+k-n)}(a) \qquad (11.152)$$

bulunacaktır. Yani, önce türev ve sonra da integralin alındığı durumlarda (11.150) sonucundan farklı olarak, operatörler yukarıdaki gibi birleştirilmelidir.

Örnek (11.1) ***Diferantegrallerin birleştirilmesi:*** $f(x) = e^{2x}+1$ fonksiyonu için

$$\frac{d}{[dx]}\left\{\frac{d^{-3}f(x)}{[dx]^{-3}}\right\} \qquad (11.153)$$

diferintegralini hesaplayalım. Bu durumda (11.150) denklemi kullanılarak,

$$\frac{d}{[dx]}\left\{\frac{d^{-3}f(x)}{[dx]^{-3}}\right\} = \frac{d^{-2}f(x)}{[dx]^{-2}} = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \qquad (11.154)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematiksel Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d^{-3}}{[dx]^{-3}}\left\{\frac{df(x)}{[dx]}\right\} \tag{11.155}$$

diferintegrali için (11.152) formülü kullanılmalıdır. Burada $N=1$ ve $n=3$ olacağından, k sadece 2 değerini alacaktır, bu da

$$\frac{d^{-3}}{[dx]^{-3}}\left\{\frac{df(x)}{[dx]}\right\} = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \tag{11.156}$$

verir.

q ve Q 'nun herhangi bir değeri alabildiği durumlarda ise, iki diferintegral operatörünün

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q}\frac{d^Q f}{[d(x-a)]^Q} = \frac{d^{q+Q} f}{[d(x-a)]^{q+Q}} \tag{11.157}$$

şeklinde birleştirilmesi ancak,

$$f - \frac{d^{-Q}}{[d(x-a)]^{-Q}}\frac{d^Q f}{[d(x-a)]^Q} = 0 \tag{11.158}$$

şartını sağlayan f fonksiyonları için geçerlidir. (11.158) şartının sağlanmadığı durumlarda ise, diferintegral operatörlerinin birleştirilmesi

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q}\frac{d^Q f}{[d(x-a)]^Q} \tag{11.159}$$
$$= \frac{d^{q+Q} f}{[d(x-a)]^{q+Q}} - \frac{d^{q+Q}}{[d(x-a)]^{q+Q}}\left\{f - \frac{d^{-Q}}{[d(x-a)]^{-Q}}\frac{d^Q f}{[d(x-a)]^Q}\right\}$$

şeklinde yapılır. Buradan da görülüyor ki, $\frac{d^Q}{[d(x-a)]^Q}$ ve $\frac{d^{-Q}}{[d(x-a)]^{-Q}}$ operatörleri genelde birbirlerinin tersi olsalarda, bu her zaman doğru değildir. Sorun q ve Q 'nun kesirli değerleri ile de sınırlı değildir. Bu formülün çok yararlı olduğu bir durum ise, Q 'nun N gibi tamsayı değerler aldığı durumlarda, bir sonraki bölümde çıkarılışını göreceğimiz Riemann formülünün genel hali olan

$$f(x) = \frac{d^q (x-a)^p}{[d(x-a)]^q} \tag{11.160}$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)(x-a)^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}, \quad p > -1 \tag{11.161}$$

fonksiyonuna uygulamasıdır. (11.159) formülünün yardımı ile

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q}\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N} \tag{11.162}$$
$$= \frac{d^{q+N} f}{[d(x-a)]^{q+N}} - \frac{d^{q+N}}{[d(x-a)]^{q+N}}\left\{f - \frac{d^{-N}}{[d(x-a)]^{-N}}\frac{d^N f}{[d(x-a)]^N}\right\}$$
$$= \frac{d^{q+N} f}{[d(x-a)]^{q+N}} - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{[x-a]^{k-q-N} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-q-N+1)} \tag{11.163}$$

elde ederiz.

Örnek (11.2) ***Diferintegrallerin birleştirilmesi:*** Örnek olarak $a=0$, $Q=1/2$, ve $q=-1/2$ değerleri için

$$f = x^{-1/2} \tag{11.164}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$x^{-1/2} - \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= x^{-1/2} - \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)} \tag{11.165}$$
$$= x^{-1/2} \tag{11.166}$$
$$\neq 0 \tag{11.167}$$

olacağından, (11.158) şartı sağlanmayacağı için,

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}} \tag{11.168}$$
$$= \frac{d^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} - \frac{d^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\left\{x^{-1/2} - \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\left[\frac{d^{\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$

formülü kullanılmalıdır. Burada,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{11.169}$$

olacağından,

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\left\{\frac{d^{\frac{1}{2}} x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}}\right\} = 0 \tag{11.170}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olacaktır. Bu da

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}}x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}} \tag{11.171}$$

$$= \frac{d^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f}{[dx]^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} - \frac{d^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\left\{x^{-1/2} - \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{[dx]^{-\frac{1}{2}}}\left[\frac{d^{\frac{1}{2}}x^{-1/2}}{[dx]^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$

$$= x^{-1/2} - x^{-1/2} \tag{11.172}$$

$$= 0 \tag{11.173}$$

verir.

Örnek (11.3) ***Diferintegrallerin tersi:***

$$f = x \tag{11.174}$$

fonksiyonunu $Q = 2$ ve $a = 0$ değerleri için ele alalım.

$$\frac{d^2x}{[dx]^2} = 0 \tag{11.175}$$

olacağından, beklentimizin dışında olarak

$$\frac{d^{-2}}{[dx]^{-2}}\frac{d^2x}{[dx]^2} = 0 \tag{11.176}$$

bulunacaktır. Sorun, $f = x$ fonksiyonunun (11.158) bağıntısını sağlamamasından kaynaklanmaktadır.

11.4.6 Leibniz Kuralı

f ve g gibi iki fonksiyonun çarpımının diferintegrali genel bir q değeri için,

$$\frac{d^q[fg]}{[d(x-a)]^q} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{q}{j}\frac{d^{q-j}f}{[d(x-a)]^{q-j}}\frac{d^jg}{[d(x-a)]^j} \tag{11.177}$$

formülü ile hesaplanır.

11.5 Bazı Fonksiyonların Diferintegralleri

11.5.1 Sabit Bir Sayının Diferintegrali

Önce 1 sayısını ele alalım. Grünwald tanımını (11.39) doğrudan uygularsak,

$$\frac{d^q[1]}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty}\left\{[\frac{N}{x-a}]^q\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-q)}\right\} \tag{11.178}$$

olacaktır. Buradan da gama fonksiyonunun özelliklerini kullanarak,

$$\frac{d^q[1]}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty}\left\{[\frac{N}{x-a}]^q\frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}\right\} \tag{11.179}$$

$$= \frac{[x-a]^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

buluruz. Kolayca görüldüğü gibi, q'nun tamsayı değerler aldığı durumlarda bu formül beklenen sonuçları vermektedir. Herhangi bir C sabit sayısı için ise,

$$\frac{d^q[C]}{[d(x-a)]^q} = C\frac{d^q[1]}{[d(x-a)]^q} = C\frac{[x-a]^{-q}}{\Gamma(1-q)} \tag{11.180}$$

olacaktır.

11.5.2 $[x-a]$ Fonksiyonunun Diferintegrali

$(x-a)$ fonksiyonunun diferintegralini (11.39) formülünü kullanarak bulabiliriz:

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty}\{\left[\frac{N}{x-a}\right]^q\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)}[\frac{Nx-jx+ja}{N}-a]\}, \tag{11.181}$$

$$= [x-a]^{1-q}\left[\lim_{N\to\infty}\{N^q\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)}\}\right.$$

$$\left. - \lim_{N\to\infty}\{\,N^{q-1}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)}\}\right]. \tag{11.182}$$

şeklinde yazalım. Buradan gama fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak sonucu buluruz:

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = [x-a]^{1-q}\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)}+\frac{1}{\Gamma(2-q)}\right], \tag{11.183}$$

$$= \frac{[x-a]^{1-q}}{\Gamma(2-q)}. \tag{11.184}$$

Aynı diferintegrali Riemann-Liouville tanımı ile de bulmak için,

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^x\frac{[x'-a]dx'}{[x-x']^{q+1}} \tag{11.185}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

yazalım. Burada $q<0$ değerleri için $w=x-x'$ dönüşümünü yaparak,

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^{x-a}\frac{[x-a-w]dw}{w^{q+1}} \tag{11.186}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-q)}\left[\int_a^{x-a}\frac{[x-a]dw}{w^{q+1}}+\int_a^{x-a}\frac{dw}{w^q}\right] \tag{11.187}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-q)}\left[\frac{[x-a]^{1-q}}{-q}+\frac{[x-a]^{1-q}}{1-q}\right] \tag{11.188}$$

$$= \frac{[x-a]^{1-q}}{[-q][1-q]\Gamma(-q)} \tag{11.189}$$

yazarız. Buradan da

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \frac{[x-a]^{1-q}}{\Gamma(2-q)} \qquad q<0 \tag{11.190}$$

bulunacaktır.

$q\geq 0$ değerleri için ise, (11.40) formülünü kullanarak,

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n}[x-a]}{[d(x-a)]^{q-n}}\right] \tag{11.191}$$

yazar ve n'yi $q-n<0$ olacak şekilde seçersek,

$$\frac{d^{q-n}[x-a]}{[d(x-a)]^{q-n}} = \frac{[x-a]^{1-q+n}}{\Gamma(2-q+n)}, \tag{11.192}$$

olacaktır. Bunu da (11.191) formülünde kullanarak

$$\frac{d^q[x-a]}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{[x-a]^{1-q+n}}{\Gamma(2-q+n)}\right] \tag{11.193}$$

$$= \frac{\Gamma(2-q+n)}{\Gamma(2-q)}\frac{[x-a]^{1-q}}{\Gamma(2-q+n)} \tag{11.194}$$

$$= \frac{[x-a]^{1-q}}{\Gamma(2-q)} \tag{11.195}$$

buluruz. Bu sonuç artık bütün q değerleri için geçerlidir.

11.5.3 $[x-a]^p$ $(p>-1)$ *Fonksiyonunun Diferintegrali*

Burada p üzerinde, $p>-1$ olmasının dışında başkaca bir kısıtlama yoktur. Riemann-Liouville tanımı kullanılarak,

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^x\frac{[x'-a]^p dx'}{[x-x']^{q+1}}, \quad q<0 \tag{11.196}$$

yazarız. Burada da $x'-a=v$ dönüşümünü kullanırsak

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^{x-a}\frac{v^p dx'}{[x-a-v]^{q+1}} \tag{11.197}$$

olacaktır. Şimdi de $v=(x-a)u$ dönüşümünü uygularsak,

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{(x-a)^{p-q}}{\Gamma(-q)}\int_0^1 u^p(1-u)^{-q-1}, \qquad q<0 \tag{11.198}$$

olur. Buradan ise, beta fonksiyonun (10.152) tanımı ve onun gama fonksiyonu ile olan ilişkisini kullanarak,

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{[x-a]^{p-q}}{\Gamma(-q)}B(p+1,-q), \tag{11.199}$$

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{\Gamma(p+1)[x-a]^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)} \qquad q<0, \quad p>-1 \tag{11.200}$$

buluruz. Bu sonuç $q\geq 0$ değerleri içinde geçerlidir.

11.5.4 $[1-x]^p$ *Fonksiyonunun Diferintegrali*

Bütün p ve q değerleri için geçerli olacak bir formül bulmak için

$$1-x = 1-a-1(x-a) \tag{11.201}$$

yazar ve binom açınımını kullanırsak,

$$(1-x)^p = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(p-j+1)}(-1)^j(1-a)^{p-j}(x-a)^j \tag{11.202}$$

olacaktır. Bunu da (11.200) formülünüde kullanarak

$$\frac{d^q[1-x]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{(1-x)^{p-q}}{\Gamma(-q)}B_x(-q,q-p) \tag{11.203}$$

buluruz. Burada B_x tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

11.5.5 $\exp(\pm x)$ *Fonksiyonunun Diferintegrali*

Üstel fonksiyonun seri açılımını

$$\exp(\pm x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{[\pm x]^j}{\Gamma(j+1)} \tag{11.204}$$

şeklinde yazar ve (11.99) formülünü kullanırsak,

$$\frac{d^q\exp(\pm x)}{dx^q} = \frac{\exp(\pm x)}{x^q}\gamma^*(-q,\pm x) \tag{11.205}$$

elde ederiz. Burada γ^* tamamlanmamış gama fonksiyonudur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

11.5.6 $\ln(x)$ Fonksiyonunun Diferintegrali

Bütün q değerleri için $\ln(x)$ fonksiyonunun diferintegrali

$$\frac{d^q \ln(x)}{dx^q} = \frac{x^{-q}}{\Gamma(1-q)}[\ln(x) - \gamma - \psi(1-q)] \qquad (11.206)$$

olarak verilir. Burada Euler sabiti olarak bilinen γ 'nın değeri 0.5772157 ve $\psi(x)$ fonksiyonu da

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\frac{d\Gamma(x)}{dx} \qquad (11.207)$$

olarak tanımlanmıştır.

11.5.7 Sıkça Kullanılan Yarı-integral ve Yarı-türevler

Bu bölümde uygulamalarda sıkça karşılaılan bazı fonksiyonların $q = \pm\frac{1}{2}$ için diferintegrallerini vereceğiz:

f	$d^{\frac{1}{2}} f/[dx]^{\frac{1}{2}}$	$d^{-\frac{1}{2}} f/[dx]^{-\frac{1}{2}}$
C	$C/\sqrt{\pi\times}$	$2C\sqrt{x/\pi}$
$1/\sqrt{x}$	0	$\sqrt{\pi}$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}/2$	$x\sqrt{\pi}/2$
x	$2\sqrt{x/\pi}$	$\frac{4}{3}x^{3/2}\sqrt{\pi}$
$x^\mu\ (\mu > -1)$	$[\Gamma(\mu+1)/\Gamma(\mu+1/2)]x^{\mu-1/2}$	$\Gamma(\mu+1)/\Gamma(\mu+3/2)]x^{\mu+1/2}$
$\exp(x)$	$1/\sqrt{\pi x} + \exp(x)\,\mathrm{erf}(\sqrt{x})$	$\exp(x)\,\mathrm{erf}(\sqrt{x})$
$\ln x$	$\ln(4x)/\sqrt{\pi x}$	$2\sqrt{\pi/x}[\ln(4x) - 2]$

11.6 Diferintegrallerle Matematik Teknikler

11.6.1 Diferintegrallerin Laplace Dönüşümü

Bu bölümde bütün q değerleri için $\frac{d^q f}{dx^q}$ diferintegralinin Laplace dönüşümünü bulacağız. Laplace dönüşümü

$$\pounds\{\frac{d^n f}{dx^n}\} = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{d^n f}{dx^n}dx \qquad (11.208)$$

şeklinde tanımlanır. q'nun tamsayı değerler aldığı durumlarda türev ve integralin Laplace dönüşümleri,

$$\pounds\{\frac{d^n f}{dx^n}\} = s^n\pounds\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\frac{d^n f}{dx^n}(0),\ n = 1,2,3... \qquad (11.209)$$

$$\pounds\{\frac{d^{-n} f}{dx^{-n}}\} = s^{-n}\pounds\{f\},\ n = 0,1,2,..... \qquad (11.210)$$

olarak verilirler. Bu iki denklem tek bir çatı altında

$$\pounds\{\frac{d^N f}{dx^N}\} = s^N\pounds\{f\} - \sum_{k=0}^{N-1} s^k\frac{d^{N-1-k} f}{dx^{N-1-k}}(0) \qquad N = 0,\pm1,\pm2,\pm3..... \qquad (11.211)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada üst limit $N-1$ sayısından büyük herhangi bir tamsayı ile değiştirilebilir. Biz şimdi bu ifadenin q'nun bütün değerleri için geçerli olan şeklinin, aşağıdaki gibi verilebileceğini göstereceğiz:

$$\pounds\{\frac{d^q f}{dx^q}\} = s^q\pounds\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(0). \qquad (11.212)$$

Burada n, $n-1 < q \leq n$ olacak şekilde seçilecek bir tamsayıdır.

Yukarıda verilen Laplace dönüşümünü göstermek için önce $q < 0$ durumunda Riemann-Liouville tanımını yazalım:

$$\frac{d^q f}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^x \frac{f(x')dx'}{[x-x']^{q+1}}, \qquad q < 0. \qquad (11.213)$$

Laplace dönüşümü için konvolusyon teoremini,

$$\pounds\{\int_0^\infty dx' f_1(x-x')f_2(x')\} = \pounds\{f_1\}\pounds\{\ f_2\} \qquad (11.214)$$

şeklinde yazar ve $f_1(x) = \frac{1}{x^{-1-q}}$ ve $f_2(x) = f(x)$ alırsak,

$$\pounds\{\frac{d^q f}{dx^q}\} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\pounds\{x^{-1-q}\}\pounds\{\ f\} = s^q\pounds\{f\} \qquad (11.215)$$

bulunacaktır. $q < 0$ değerleri için (11.212) ifadesindeki toplam boş olacağından, bu bize (11.212) ifadesinin bütün $q < 0$ değerleri için geçerli olduğunu gösterir.

$q > 0$ değerleri için ise, Grünwald ve Riemann-Liouville tanımlarının sağladığı (11.40) şartını yazar,

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{d^{q-n} f}{dx^{q-n}} = \frac{d^q f}{dx^q} \qquad (11.216)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

ve n tamsayısını

$$n-1 < q < n \tag{11.217}$$

olacak şekilde seçeriz. Şimdi, (11.216) formülünün Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\begin{aligned}\pounds\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} &= \pounds\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d^{q-n}f}{dx^{q-n}}\right]\right\} \qquad (11.218)\\ &= s^n \pounds\left\{\frac{d^{q-n}f}{dx^{q-n}}\right\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}}\left[\frac{d^{q-n}f}{dx^{q-n}}\right](0) \quad q-n<0\end{aligned}$$

Bulunacaktır. $q-n<0$ olduğundan sağdaki ilk terim, (11.213-215) denklemlerinden $s^q\pounds\{f\}$ olarak bulunur. $n-1-k$ tamsayı değerler aldığından toplama işareti altındaki $\frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}}\left[\frac{d^{q-n}f}{dx^{q-n}}\right](0)$ ifadesi ise, $q-n<0$ şartı ve (2.216) birleştirme formulü yardımı ile $\frac{d^{q-1-k}f}{dx^{q-1-k}}(0)$ şeklinde yazılırsa,

$$\pounds\left\{\frac{d^q f}{dx^q}\right\} = s^q\pounds\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{q-1-k}f}{dx^{q-1-k}}(0), \quad 0<q\neq 1,2,3 \tag{11.219}$$

elde edilecektir. q'nun tamsayı değerler aldığı durumlar ise, (11.217) şartının yerine $n-1<q\leq n$ alınarak kolayca sağlanır.

Örnek (11.4) Isı transfer denklemi: Tek boyutta yarı sonsuz bir madde için ısı transferi denklemini yazalım:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \tag{11.220}$$

Burada K, maddenin ısı iletkenlik katsayısı, yoğunluk ve özgül ısısına bağlı bir sabittir. $T(x,t)$'de yerel ve ortam sıcaklığının farkıdır. Sınır şartları olarak da

$$T(x,0) = 0, \tag{11.221}$$
$$T(0,t) = 0 \tag{11.222}$$

alalım. (11.220) denkleminin t'ye göre Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\pounds\left\{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\} = K\pounds\left\{\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right\}, \tag{11.223}$$

$$s\widetilde{T}(x,s) - \widetilde{T}(x,o) = K\frac{\partial^2\widetilde{T}(x,s)}{\partial x^2}, \tag{11.224}$$

$$s\widetilde{T}(x,s) = K\frac{\partial^2\widetilde{T}(x,s)}{\partial x^2} \tag{11.225}$$

olacaktır. Bunun çözümü de aşağıdaki gibi hemen yazılabilir:

$$\widetilde{T}(x,s) = F(s)e^{-x\sqrt{s}} \tag{11.226}$$

$F(s)$ ise, (11.222) başlangıç şartının Laplace dönüşümü yani,

$$F(s) = \pounds\{T(0,t)\} \tag{11.227}$$

olmakla birlikte, bir çok mühendislik uygulamasında önemli olan

$$J(x,t) = -K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{11.228}$$

olarak verilen ısı akısıdır: Özellikle de

$$J(0,t) = -K\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{11.229}$$

olarak verilen yüzeydeki ısı akısıdır. Onun için (11.226) denkleminin x'e türevini alalım:

$$\frac{\partial\widetilde{T}(x,s)}{\partial x} = -\sqrt{s}F(s)e^{-x\sqrt{s}} \tag{11.230}$$

ve bu denklem ile (11.226) arasında $F(s)$ fonksiyonunu yok edelim:

$$\frac{\partial\widetilde{T}(x,s)}{\partial x} = -\sqrt{s}\widetilde{T}(x,s) \tag{11.231}$$

Şimdi (11.219) denklemine dönersek ve $n=1$ seçersek,

$$\pounds\left\{\frac{d^{1/2}T(x,t)}{dt^{1/2}}\right\} = s^{1/2}\pounds\{T(x,t)\} - \frac{d^{-1/2}T(x,0)}{dt^{-1/2}} \tag{11.232}$$

yazabiliriz. İkinci terimin sıfır olduğunu varsayarsak,

$$\begin{aligned}\pounds\left\{\frac{d^{1/2}T(x,t)}{dt^{1/2}}\right\} &= s^{1/2}\pounds\{T(x,t)\} \qquad (11.233)\\ &= s^{1/2}\widetilde{T}(x,s)\end{aligned}$$

olacaktır. Sağ tarafta (11.231) sonucunu kullanır ve ters Laplace dönüşümünü de alırsak,

$$\frac{d^{1/2}T(x,t)}{dt^{1/2}} = -\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{11.234}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

elde edilir. Bunu da ısı akısı ifadesinde kullanırsak,

$$J(0,t) = -K \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{11.235}$$

$$= K \frac{d^{1/2}T(0,t)}{dt^{1/2}} \tag{11.236}$$

bulunacaktır. Bu da aranılan ısı akısının deneysel olarak çok daha kolay ölçülebilen yüzey sıcaklık dağılımından diferintegral yardımı ile bulunabileceğini gösterir (Oldham ve Spaniard).

11.6.2 Sıradışı Diferansiyel Denklemler

Bir fonksiyonun diferintegrallerini içeren denklemlere sıradışı diferansiyel denklem deriz. doğal olarak bu tür denklemlerin de çözümleri birtakım sabitler ve integraller içerecektir. En basit sıra dışı diferansiyel denklem olarak

$$\frac{d^Q f}{dx^Q} = F(x) \tag{11.237}$$

yazabiliriz. Burada Q herhangi bir sayı, $F(x)$ bilinen bir fonksiyon, $f(x)$ ise, bulunacak olan fonksiyondur. Kolaylık olsun diye a sıfır olarak alınmıştır. Bu denklemin çözümünü kolayca

$$f(x) = \frac{d^{-Q}F}{dx^{-Q}} \tag{11.238}$$

olarak yazmak isteyebiliriz. Ancak, daha önce de gördüğümüz gibi, $\frac{d^{-Q}}{dx^{-Q}}$ ve $\frac{d^Q}{dx^Q}$ operatörleri sadece

$$f - \frac{d^{-Q}}{dx^{-Q}} \frac{d^Q f}{dx^Q} = 0 \tag{11.239}$$

şartı sağlandığında birbirlerinin tersidirler (11.158). Bundan dolayı, sıradışı diferansiyel denklemler genelde çözümü çok daha zor denklemlerdir.

Bilimin birçok dalında karşımıza çıkan

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x^n \tag{11.240}$$

tipi bir evrilme denkleminin çözümü $n = 1$ için,

$$x(t) = x_0 \exp(-\alpha t) \tag{11.241}$$

olarak üstel fonksiyon cinsinden verilir. $n \neq 1$ için çözümü ise,

$$x(t)^{1-n} = \alpha(n-1)(t-t_0) \tag{11.242}$$

olarak t'nin kuvvetlerine bağlı olacaktır. Bu denklemi

$$\frac{d^q x}{dx^q} = -\alpha x^n \tag{11.243}$$

şeklinde sıradışı bir denklem olarak yazarsak, çözümleri kuvvet bağımlılığı ile üstel fonksiyon arasında yer alan Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden,

$$x(t) = x_0 E_q[(-\alpha t)^q] \tag{11.244}$$

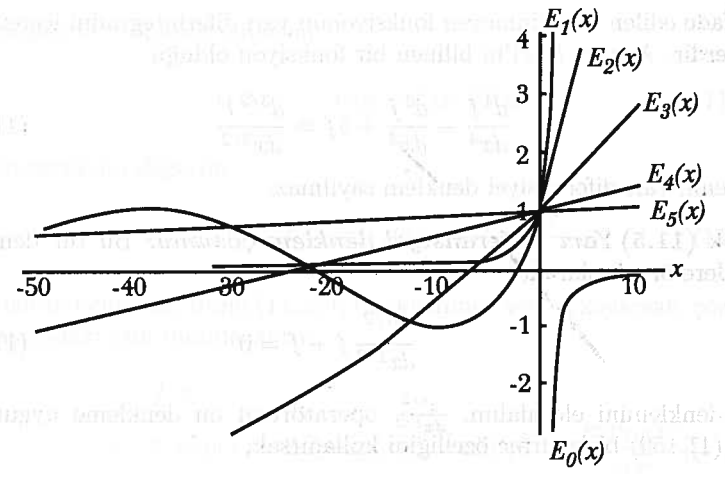
şeklinde olacaktır.

11.6.3 Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonlarıyla biyoloji, kimya, kinetik teorisi ve Brown hareketi gibi pek çok bilim dalında karşılaşılır ve

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{11.245}$$

serisi ile tanımlanırlar (Şekil (11.5)). Mittag-Leffler fonksiyonları α'nın bazı



ŞEKİL 11.5. **Mittag-Leffler fonksiyonları**

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

tamsayı değerleri için

$$\begin{aligned} E_0(x) &= \frac{1}{1-x} \\ E_1(x) &= \exp(x) \\ E_2(x) &= \cosh(\sqrt{x}) \\ E_3(x) &= \frac{1}{3}[\exp(\sqrt[3]{x}) + 2\exp(-\sqrt[3]{x}/2)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x})] \\ E_4(x) &= \frac{1}{2}[\cos(\sqrt[4]{x}) + \cosh(\sqrt[4]{x})] \end{aligned} \tag{11.246}$$

olarak verilirler. Mittag-Leffler fonksiyonunun sık kullanılan $\alpha = 1/2$ değeri için yazımı ise, hata fonksiyonu cinsinden

$$E_{1/2}(x) = \exp(x^2)[1 + \mathrm{erf}(x)], \quad x > 0 \tag{11.247}$$

olarak verilir.

11.6.4 *Yarı Diferansiyel Denklemler*

Burada uygulamalarda sıkça karşılaşılan yarı diferansiyel denklemlerden örnekler vereceğiz. Bu tür denklemler,

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + \sin(x)\frac{d^{3/2} f}{dx^{3/2}} = \exp(2x), \tag{11.248}$$

$$\frac{d^{-1/2} f}{dx^{-1/2}} - 4\frac{d^{3/2} f}{dx^{3/2}} + 5f = x \tag{11.249}$$

gibi ifade edilen ve bilinmeyen fonksiyonun yarı diferintegralini içeren denklemlerdir. Ancak, $F(x)$'in bilinen bir fonksiyon olduğu

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{d^3 f}{dx^3} + 5f = \frac{d^{3/2} F}{dx^{3/2}} \tag{11.250}$$

denklemi, yarı diferansiyel denklem sayılmaz.

Örnek (11.5) ***Yarı diferansiyel denklem çözümü:*** Bu tür denklemlere örnek olarak,

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f + f = 0 \tag{11.251}$$

denklemini ele alalım. $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ operatörünü bu denkleme uygular ve (11.159) birleştirme özelliğini kullanırsak,

$$\frac{df}{dx} - C_1 x^{-3/2} + \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f = 0 \tag{11.252}$$

olacaktır. Buradan da (11.251) denklemini tekrar kullanarak,

$$\frac{df}{dx} - f = C_1 x^{-3/2} \tag{11.253}$$

yazarız. Bu birinci dereceden sıradan bir diferansiyel denklemdir. Belli yöntemler kullanılarak çözümü

$$f(x) = C\exp(x) + C_1 \exp(x)\int_0^x \exp(-x')x^{-3/2}dx' \tag{11.254}$$

olarak elde edilir. Burada şaşırtıcı olan, çözümün iki integral sabiti ve yakınsak olmayan bir integral içermesidir. Ancak bu integralin değeri,

$$\begin{aligned} \gamma^*(c,x) &= \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)}\int_0^c x'^{x-1}\exp(-x')dx' && (11.255) \\ &= \exp(-x)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)} && (11.256) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan tamamlanmamış gama fonksiyonu ile tanımlı duruma getirilebilir. Burada $\gamma^*(c,x)$, c ve x'in tek değerli analitik bir fonksiyonudur. Burada kullanacağımız

$$\gamma^*(c-1,x) = x\gamma^*(c,x) + \frac{\exp(-x)}{\Gamma(c)} \tag{11.257}$$

bağıntısı ve

$$\gamma^*(\frac{1}{2},x) = \frac{\mathrm{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{11.258}$$

değeri ile yakınsak olmayan

$$I = \int_0^x \exp(-x')x^{-3/2}dx \tag{11.259}$$

integralinin değerini

$$I = -2\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\sqrt{x}) - 2\frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} \tag{11.260}$$

olarak belirleriz. Bunu (11.254) denkleminde yerine koyarsak, çözümde aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$\begin{aligned} & f(x) \\ &= C\exp(x) - 2C_1\exp(x)[\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\sqrt{x}) + \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}] && (11.261) \\ &= C\exp(x) - 2C_1\sqrt{\pi}\exp(x)\ \mathrm{erf}(\sqrt{x}) - \frac{2C_1}{\sqrt{x}} && (11.262) \end{aligned}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Bu çözümün hala iki integral sabiti içermektedir. (11.251) denkleminin sağlandığını görmek için, önce yarı diferintegralini alalım:

$$\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}} = \frac{C}{\sqrt{\pi x}} + C\exp(x)\ \mathrm{erf}(\sqrt{x}) - 2C_1\sqrt{\pi}\exp(x).$$

Bunu da (11.251) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{C}{\sqrt{\pi x}} + C\exp(x)\ \mathrm{erf}(\sqrt{x}) - 2C_1\sqrt{\pi}\exp(x) \quad (11.263)$$
$$= \frac{2C_1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{\pi}C_1\exp(x)\ \mathrm{erf}(\sqrt{x}) - C\exp(x)$$

bulunacaktır. Bu da bize C ve C_1 arasında

$$\frac{C}{\sqrt{\pi}} = 2C_1 \quad (11.264)$$

bağıntısını verir. Sonuç olarak da tek bir integrasyon sabiti içeren çözümü buluruz:

$$f(x) = C[\exp(x)\ (1 - \mathrm{erf}(\sqrt{x})) - 1/\sqrt{\pi x}]. \quad (11.265)$$

11.6.5 *Belirli İntegrallerin Alınmasında Diferintegrallerin Kullanımı*

Daha önce kompleks analiz teknikleri kullanarak bazı belirli integrallerin nasıl alınabileceğini görmüştük. Bu konuda diferintegrallerden de yararlanabiliriz. x^q fonksiyonunun diferintegralini Riemann-Liouville tanımı (11.70-71) ve

$$x' = x - x\lambda \quad (11.266)$$

dönüşümü ile yazarsak,

$$\frac{d^q x^q}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^1 \frac{[1-\lambda]^q d\lambda}{\lambda^{q+1}} \quad (11.267)$$
$$= \Gamma(q+1)$$

buluruz. Burada

$$t = -\ln(\lambda) \quad (11.268)$$

olarak bir dönüşüm daha yaparsak,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{[\exp(t)-1]^{-q}} \quad (11.269)$$
$$= \Gamma(-q)\Gamma(q+1)$$
$$= \pi\csc(q\pi)$$

buluruz ki, bu sonucun başka yöntemlerle elde edilmesi oldukça zordur.

Riemann-Liouville tanımında (11.266) dönüşümünü herhangi bir fonksiyon için yaparsak,

$$\int_0^{x-a} f(x-x\lambda)d(\lambda^{-q}) = \Gamma(1-q)x^q\frac{d^q f}{dx^q}, \qquad q<0 \quad (11.270)$$

elde ederiz. Ayrıca, $\lambda^{-q} \to t$ ve $-1/q \to p$ değişimlerini de yaparak (p pozitiftir ancak, tamsayı olmak zorunda değildir) bazı belirli integrallerin alınmasında çok yararlı olan,

$$\int_0^{x^{1/p}} f(x-xt^p)dt = \Gamma(\frac{p+1}{p})x^{-1/p}\frac{d^{-1/p}f}{dx^{-1/p}} \quad (11.271)$$

formülünü buluruz. Özel bir durum olarak bu formülde $x=1$ seçilirse,

$$\int_0^{x^{1/p}} f(1-t^p)dt = \Gamma(\frac{p+1}{p})\frac{d^{-1/p}f}{dx^{-1/p}}|_{x=1} \quad (11.272)$$

bulunacaktır.

Örnek (11.6) ***Diferintegraller ve belirli integrallerin hesaplanması:*** Diferintegral yöntemini kullanarak

$$\int_0^1 \exp(1-t^{3/2})dt \quad (11.273)$$

integralini hesaplayalım. (11.253) formülünü kullanarak,

$$\int_0^1 \exp(1-t^{2/3})dt = \Gamma(\frac{5}{2})\frac{d^{-3/2}e^x}{dx^{-3/2}}|_{x=1}$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}[\exp(x)\,\mathrm{erf}(\sqrt{x}) - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}]_{x=1}$$
$$= 1.5451 \quad (11.274)$$

buluruz.

1972 yılında Osler diferintegraller yardımı ile bazı belirli integralleri almamızda yardımcı olabilecek Leibniz kuralının (11.177),

$$\frac{d^q[fg]}{dx^q} = \int_{-\infty}^{\infty}\binom{q}{\lambda+\gamma}\frac{d^{q-\gamma-\lambda}f}{dx^{q-\gamma-\lambda}}\frac{d^{\gamma+\lambda}g}{dx^{\gamma+\lambda}}d\lambda \quad (11.275)$$

şeklinde verilen integral halini vermiştir. Burada γ herhangi bir sayıdır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (11.7) ***Diferintegraller ve belirli integrallerin hesaplanması:***

Yukarıdaki formülde $f = x^p$, $g = x^P$, $\gamma = 0$ seçersek,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)\Gamma(P+1)d\lambda}{\Gamma(q-\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(p-q+\lambda+1)\Gamma(P-\lambda+1)} \qquad (11.276)$$

$$= \frac{\Gamma(p+P+1)}{\Gamma(p+P-q+1)}$$

buluruz. Burada da $P = 0$ ve $p - q + 1 = 1$ seçersek,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\lambda)d\lambda}{\lambda\Gamma(\lambda+1)\Gamma(q+1-\lambda)} = \frac{\pi}{\Gamma(q+1)} \qquad (11.277)$$

elde ederiz.

11.6.6 Diferintegrallerin Serilerin Toplamlarının Bulunmasında Kullanımı

1970 yılında Osler tarafından verilen ve Leibniz kuralının seri şekli olan

$$\frac{d^q[u(x)v(x)]}{dx^q} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{q}{n+\gamma} \frac{d^{q-n-\gamma}u}{dx^{q-n-\gamma}} \frac{d^{\gamma+n}v}{dx^{\gamma+n}} \qquad (11.278)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\gamma-n+1)\Gamma(\gamma+n+1)} \frac{d^{q-\gamma-k}u}{dx^{q-\gamma-k}} \frac{d^{\gamma+k}v}{dx^{\gamma+k}}$$

formülü ise, bazı serilerin toplamlarını bulmada çok yararlıdır. Burada γ herhangi bir sayılır.

Örnek (11.8) ***Diferintegraller yardımı ile seri toplamlarının hesabı:***
Yukarıdaki formülde $u = x^p$, $v = x^P$, $\gamma = 0$ seçersek,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)\Gamma(P+1)}{\Gamma(q-k+1)\Gamma(k+1)\Gamma(p-q+k+1)\Gamma(P-k+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+P+1)}{\Gamma(p+P-q+1)} \qquad (11.279)$$

buluruz.

11.6.7 Özel Fonksiyonların Diferintegraller ile İfadeleri

Osler 1970 yılında (11.278) formülü yardımı ile hipergeometric fonksiyonlar ile bazı özel fonksiyonların da diferintegral olarak ifadelerini verir:

$$(Hipergeometrik\ Fonksiyon) :$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \frac{d^{\beta-\gamma}}{dx^{\beta-\gamma}} \left(\frac{x^{\beta-1}}{(1-x)^{\alpha}}\right),$$

$$(Konfluent\ Hipergeometrik\ Fonksiyon) :$$

$$M(\alpha,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-\gamma}}{dx^{\alpha-\gamma}}(e^x x^{\alpha-1}),$$

$$(Bessel\ Fonksiyonu) :$$

$$J_\nu(x) = \frac{x^{-\nu}}{2^\nu\sqrt{\pi}} \frac{d^{-\nu-1/2}}{d(x^2)^{-\nu-1/2}} \left(\frac{\cos x}{x}\right),$$

$$(Legendre\ Fonksiyonu) :$$

$$P_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)2^\nu} \frac{d^\nu}{d(1-x)^\nu}(1-x^2)^\nu,$$

$$(Tamamlanmamış\ gama\ Fonksiyonu) :$$

$$\gamma^*(\alpha,x) = \Gamma(\alpha)e^{-\alpha} \frac{d^{-\alpha}e^x}{dx^{-\alpha}}.$$

11.7 Diferintegrallerin Fen ve Mühendislikte Uygulamaları

11.7.1 Sürekli Zamanda Gelişigüzel Dolaşım- CTRW

Difüzyon denkleminin maddenin korunumu prensibinden hareket edilerek

$$\frac{\partial c(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{J}(\vec{r},t) \qquad (11.280)$$

şeklinde verildiğini görmüştük. Burada $\vec{J}(\vec{r},t)$ akım, $c(\vec{r},t)$ ise, konsantrasyondur. Akım doğal olarak konsantrasyonun değişimi ile bağıntılı olacağından ilk yaklaşım olarak,

$$\vec{J} = -k\vec{\nabla}c \qquad (k[\frac{L}{T^2}] \text{ difüzyon sabitidir.}) \qquad (11.281)$$

alabiliriz. Bu durumda (11.280) denklemi de

$$\frac{\partial c(\vec{r},t)}{\partial t} = k\vec{\nabla}^2 c(\vec{r},t) \qquad (11.282)$$

olacaktır. Einstein maddenin moleküler yapısını kanıtlamak için, sıvı içinde askıda duran parçacıkların Brown hareketi olarak bilinen gelişigüzel hareketlerini inceler. Bu hareketler sıvı moleküllerinin gelişi güzel çarpmaları sonucu

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

oluşmaktadır. Difüzyon olayı ise, bir çok parçacığın aynı anda Brown hareketinde bulunması olduğundan, $c(\overrightarrow{r},t)$'yi dağılan toplam parçacık sayısına bölersek,

$$P(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{N}c(\overrightarrow{r},t)$$

olarak göstereceğimiz ve tek bir parcacığın $\overrightarrow{r}$ noktasında ve t anında bulunma olasılığını veren $P(\overrightarrow{r},t)$ bulunur. Dolayısı ile $P(\overrightarrow{r},t)$, konsantrasyon ile aynı denklemi sağlayacaktır:

$$\frac{\partial P(\overrightarrow{r},t)}{\partial t} = k\overrightarrow{\nabla}^2 P(\overrightarrow{r},t). \tag{11.283}$$

Başlangıçta merkeze yerleştirilmiş bir parçacık için d-boyutta (11.283) denkleminin çözümü

$$P(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{d/2}}\exp(-\frac{r^2}{4kt}) \tag{11.284}$$

olarak bulunur. Parçacığın gelişigüzel hareketinde ortalama yol

$$< \overrightarrow{r}(t) >= \int \overrightarrow{r}P(\overrightarrow{r},t)d\overrightarrow{r} = 0 \tag{11.285}$$

olmasına rağmen, yolun karesinin ortalaması

$$< r^2(t) >= \int r^2 P(\overrightarrow{r},t)d\overrightarrow{r} = 2kdt \tag{11.286}$$

olacaktır. Bu denklemde ilginç olan sistemin ölçeğinin,

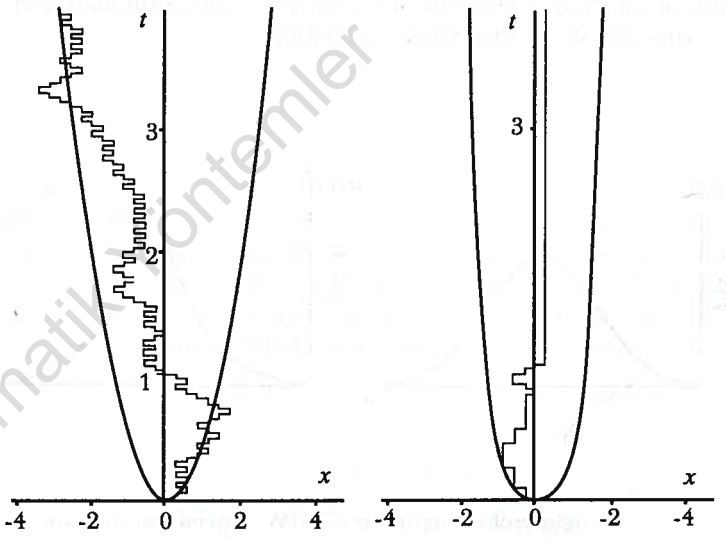
$$< r^2 > \propto t \tag{11.287}$$

şeklinde olduğudur. Parçacığın zamanla merkezden itibaren katettiği yolun kök değeri ise,

$$\sqrt{< r^2 >} \propto t^{1/2} \tag{11.288}$$

olacaktır. Şekil (11.6)'da Einstein gelişigüzel dolaşımda veya Brown hareketinde zamana bağlı olarak $< r^2 >$ gösterilmektedir. Burada parçacık her yönden simetrik olarak gelişigüzel çarpmalara maruz kalmasına rağmen, zamanla (11.288) bağıntısı ile merkezden uzaklaşmaktadır.

Einstein teorisinde adımlar belli aralıklar ile atılmaktadır. Son zamanlarda bu varsayım değiştirilerek sürekli zamanda gelişigüzel dolaşım (continuous time random walk: CTRW) olarak bilinen teoriler ortaya atılmıştır. Bu teorilerde adımlar belli aralıklar yerine $\Psi(t)$ ile gösterilen ve zamanda bekleme dağılımı olarak bilinen bir dağılıma göre atılmaktadır. Bu dağılım,



ŞEKİL 11.6. **Gelişigüzel dolaşım ve CTRW**

sistemdeki engelleri, gecikmeleri ve tuzakları içereceğinden bir anlamda sistemin hafızasının gelişigüzel dolaşıma etkisi olarak düşünülebilir. Sistemin ortalama bekleme süresini veren

$$\tau = \int t\Psi(t)dt \tag{11.289}$$

integrali sonlu olursa, CTRW teorisinde (11.283) denklemi, difüzyon sabiti $a^2/2\tau$ olarak alınarak kullanılır. Ancak, averaj bekleme süresi ıraksak olursa, durum dramatik olarak değişir. Örneğin:

$$\Psi(t) \propto \frac{1}{(1+t/\tau)^{1+\alpha}} \qquad o < \alpha < 1 \tag{11.290}$$

gibi bir zamanda bekleme dağılımı alırsak,

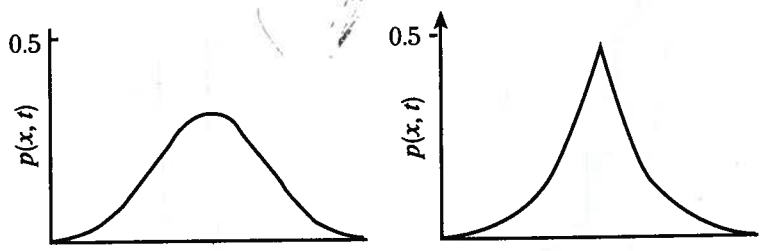
$$< r^2 > \propto t^{\alpha} \tag{11.291}$$

olacaktır. Burada zamanla alınan yol, $\alpha < 1$ için difüzyon altı (subdiffusion) olarak bilinir ve Einstein teorisindekinden daha az yol kat edilir. $\alpha > 1$ hali ise, süper difüzyon durumu olarak bilinir ve daha çok yol alınır. Difüzyon altı durumlarda, Şekil (11.6)'da görüldüğü gibi adımlar arası süre değiştiği gibi, sütten ağızı yanan yoğurdu üfleyerek yer örneği, bazı adımlardan önce sistem uzun süre bekleyebilmektedir. Bu yüzden CRTW teorilerinin finans konularında ve deprem biliminde ilginç uygulamaları beklenmelidir. $\alpha = 1/2$ değeri için alınan yolun kök değeri

$$\sqrt{< r^2 >} \propto t^{1/4} \tag{11.292}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olmakta ve $P(\overrightarrow{r},t)$ fonksiyonu da Şekil (11.7)'de görüldüğü gibi Gauss eğrisi yerine kızılay çadırı şeklinde olmaktadır.



11.7. **Gelişigüzel dolaşım ve CTRW teorisinde olasılık dağılımı.**

Kesirli türevlerin difüzyon teorisinde kullanımı ise, CRTW teorisi ile çalışılan sıradışı difüzyon olaylarının aynı zamanda da (11.283) denklemi-nin,

$$\frac{\partial^{1+\alpha}P(\overrightarrow{r},t)}{[\partial(t)]^{1+\alpha}} = k_\alpha \overrightarrow{\nabla}^2 P(\overrightarrow{r},t),\ \alpha \text{ herhangi bir reel sayı} \qquad (11.293)$$

şeklinde ifade edilen diferintegralli hali ile çalışılabilmesidir. Bu yaklaşımın bir başka avantajı da çözümü bilinen basit durumların kolayca sıradışı durumlara uyarlanabilmesidir.

11.7.2 Kesirli Fokker-Planck Denklemleri

Standart difüzyon denkleminde parçacıklar moleküllerin birbirinden bağımsız ve rasgele çarpmaları sonucu hareket ederler. Ancak, çoğu zaman sistem üzerinde $f(\overrightarrow{r},t)$ gibi öngörülebilen bir dış kuvvet de vardır. Bunun da akıma etkisi,

$$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r},t) = -k\overrightarrow{\nabla}P(\overrightarrow{r},t) + \mu f(\overrightarrow{r},t)P(\overrightarrow{r},t) \qquad (11.294)$$

olarak ifade edilir. Bu kuvvetin etkisi ile difüzyon denklemi Fokker-Planck denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial P(\overrightarrow{r},t)}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla}.(k\overrightarrow{\nabla}P(\overrightarrow{r},t) - \mu f(\overrightarrow{r},t)P(\overrightarrow{r},t)) \qquad (11.295)$$

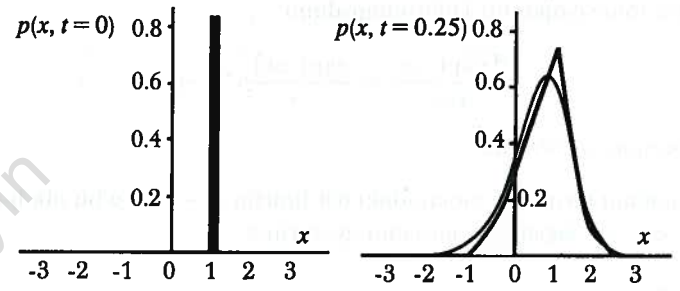
şeklini alır.

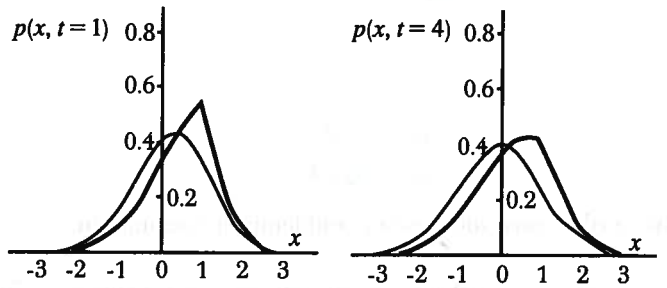
$U = \frac{1}{2}bx^2$ gibi bir harmonik salınıcı potansiyelinin etkisi altındaki bir difüzyon olayını incelersek, $t = 0$ anında belli bir noktada yoğunlaşmış olan

parçacıkların zamana göre dağılımı Şekil (11.8)'de açık renkle gösterildiği gibi olacaktır. Aynı olayı Fokker-Planck denklemini

$$\frac{\partial^{1+\alpha}P(\overrightarrow{r},t)}{[\partial(t)]^{1+\alpha}} = \overrightarrow{\nabla}.(k\overrightarrow{\nabla}P(\overrightarrow{r},t) - \mu f(\overrightarrow{r},t)P(\overrightarrow{r},t)) \qquad (11.296)$$

şeklinde zamana göre diferintegral operatörü cinsinden yazar ve $\alpha = 1/2$ için çözersek, Şekil (11.8)'de koyu renkle gösterilen dağılımı buluruz. Her iki durumda da dağılım zamanla Gauss dağılımına dönüşecektir. Normal difüzyonda dağılım her zaman Gauss eğrisidir, ancak $\alpha = 1/2$ durumunda denge haline ulaşması uzun zaman alacağı gibi, başlangıçtaki dağılım Gauss eğrisinden çok farklı olup, CTRW özelliği taşımaktadır (Sokolov I.M., Klafter J. & Blumen A (2002))





ŞEKİL 11.8. **Fokker-Planck denkleminin çözümü**

Süper difüzyon olarak bilinen $\alpha > 1$ durumunun yanında, Fokker-Plank denkleminde diferintegrallerin kullanılması sadece zamana göre türevle sınırlı değildir. Uzay ve zamanda birbirlerinden çok uzak noktaları ve bölgeleri ilişkilendiren Levy süreçleri ve kaotik difüzyon ile yakından ilgili olarak, konuma bağlı türevlerin de diferintegralle değiştirilmesi üzerinde yoğun çalışılan problemler arasındadır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

11.8 Problemler

1. Aşağıda verilen diferintegralinin bütün q değerleri için geçerli olduğunu gösteriniz:

$$\frac{d^q[x-a]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{\Gamma(p+1)[x-a]^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)} \qquad p > -1.$$

2.

$$\frac{d^q[1-x]^p}{[d(x-a)]^q} = \frac{(1-x)^{p-q}}{\Gamma(-q)} B_x(-q, q-p)$$

olarak verdiğimiz (11.203) formülünü çıkarınız.

3. Üstel fonksiyonunun Diferintegralinin

$$\frac{d^q \exp(\pm x)}{dx^q} = \frac{\exp(\pm x)}{x^q}\gamma^*(-q, \pm x)$$

olduğunu gösteriniz.

4. Aşağıdaki formülde toplamdaki üst limitin $(q-1)$'den büyük herhangi bir sayı ile değiştirilebileceğini gösteriniz:

$$\pounds\{\frac{d^q f}{dx^q}\} = s^q \pounds\{f\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^k \frac{d^{q-1-k} f}{dx^{q-1-k}}(0) \qquad q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3..... .$$

5.

$$\frac{df}{dx} + \frac{d^{1/2} f}{dx^{1/2}} - 2f = 0$$

olarak verilen yarı diferansiyel denkleminin çözümünün,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{C}{3}(2\exp(4x)\,\mathrm{erf}\,c(2\sqrt{x}) + \exp(x)\,\mathrm{erf}\,c(-\sqrt{x})), \\ \mathrm{erf}\,c(x) &= 1 - \mathrm{erf}(x) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıda verilen integrali diferintegral tekniği ile alınız:

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{1-t^2})dt = 0.69123$$

12

SONSUZ SERİLER

Fizik ve mühendislik uygulamalarında zaman zaman fiziksel veya matematiksel özelliklerin sonsuz seriler olarak karşımıza çıktıklarını görürüz. Bazen de diferansiyel veya integral denklemleri ancak seriler yaklaşımı ile çözmek mümkün olur. Seriler ile çalışırken bir serinin yakınsak olup olmaması kadar, toplamının da ne olduğu bizim için önemlidir. Bu bölümde önce verilen bir serinin yakınsaklığının nasıl kontrol edileceğini ve yakınsak ise, analitik olarak toplamının nasıl bulunacağını göreceğiz. Bazı uygulamalarda çok yararlı olan asimtotik seriler konusuna değineceğimiz gibi, serilerle yakından ilgili olan sonsuz çarpımlar konusu da işlenecektir. Ayrıca, bazen fizikte karşılaşılan ıraksak serilerden renormalizasyon yöntemi ile nasıl sonlu ve anlamlı sonuçların çıkarılabileceğini göreceğiz.

12.1 Bir Serinin Yakınsaklığı

Genel terimi a_n olan bir sonsuz seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ..., \tag{12.1}$$

şeklinde yazılır. Bu serinin ilk N teriminin toplamına serinin N. kısmi toplamı denir. Bu serinin N. kısmi toplamının bir limiti var ise, yani

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \right) \to S \tag{12.2}$$

ise, seri yakınsaktır. Bu limite de serinin toplamı denir ve kısaca

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{12.3}$$

şeklinde yazılır. Yakınsak olmayan bir seri ıraksaktır. Yakınsak olan bir seri için her zaman

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to 0 \tag{12.4}$$

şartı doğrudur. Fakat bu şartı sağlayan her seri yakınsak değildir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (12.1) ***Harmonik seri:*** Harmonik seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

olarak verilir. Genel terimi $n \to \infty$ limitinde sıfıra gitmesine rağmen ıraksaktır.

12.2 Mutlak Yakınsak Seriler

Bir serinin terimlerinin mutlak değerleri alınarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{12.5}$$

şeklinde kurulmuş seri yakınsak ise, serinin mutlak yakınsak olduğu söylenir. Mutlak yakınsak olan bir serinin kendisi de yakınsaktır ama bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Eğer bir serinin kendisi yakınsak, fakat mutlak yakınsak değilse, o seriye şartlı yakınsaktır denir.

Örnek (12.2) ***Şartlı yakınsak seriler:***

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \tag{12.6}$$

toplamı $\ln 2$ olan yakınsak bir seridir. Ancak, mutlak yakınsak olmadığından buna şartlı yakınsak bir seri denir.

12.3 Yakınsaklık Testleri

Verilen bir serinin yakınsak olup olmadığı aşağıda verilen testler kullanılarak belirlenebilir. Bu testler zorluk sırasına göre verilmiş olup pratikte en çok kullanılanlardır. Önerilen yöntem ise, işe en basit test ile başlamak, eğer sonuç alınamazsa sırası ile daha gelişmiş testler uygulamaktır. Aşağıdaki testler, aksi belirtilmedikçe, mutlak değerler alındığından veya pozitif terimlerden oluşan seriler düşünüldüğünden mutlak yakınsaklığı kontrol ederler.

12.3.1 Karşılaştırma Testi:

Genel terimleri a_n ve b_n olan iki seri verilmiş olsun. Eğer her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq |b_n|$ ise ve $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ yakınsaksa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

Örnek (12.3) ***Karşılaştırma testi:*** Genel terimi $a_n = n^{-p}$ *ve* $p = 0.999$ ile verilen bir seriyi ele alalım. Karşılaştırmak için genel terimi $b_n = n^{-1}$ olan harmonik seriyi kullanırsak, $n \geq 1$ için $n^{-1} < n^{-0.999}$ olacağından ve harmonik seri ıraksak olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ serisi de ıraksaktır.

12.3.2 Oran Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde, her $n \geq 1$ için $a_n \neq 0$ olsun. Aşağıda verilen,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \tag{12.7}$$

limitinde $r < 1$ olursa seri yakınsak, $r > 1$ için ıraksaktır. $r = 1$ için ise, bu test sonuç vermez.

12.3.3 Cauchy Kök Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \tag{12.8}$$

limiti bulunursa, $l < 1$ değerleri için seri yakınsak, $l > 1$ değerleri için ise ıraksaktır. $l = 1$ için bu test sonuç vermez.

12.3.4 İntegral Testi:

Genel terimi $a_n = f(n)$ olan pozitif terimli bir seri verilmiş olsun. $n > 1$ için $f(n)$ sürekli ve monoton azalan $(f(n+1) < f(n))$ bir fonksiyon ise, $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ integrali sonlu bir sayı olursa seri yakınsak, sonsuz olursa ıraksaktır.

İspat

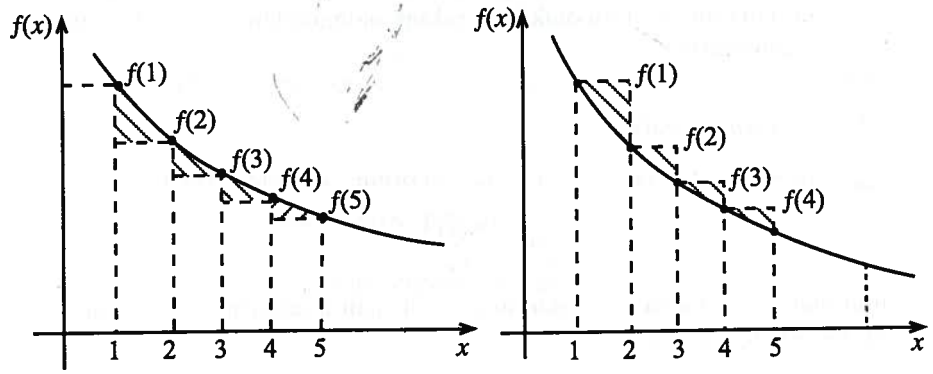
Şekil (1.1)'den de görülebileceği gibi, verilen bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin değerini alttan ve üstten aşağıdaki gibi sınırlayabiliriz:

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{12.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{N} f(x)\,dx + a_1. \tag{12.10}$$

Bunlardan da anlaşılabileceği gibi, $N \to \infty$ limitinde $\int_1^N f(x)\,dx$ integrali sonlu bir değer alırsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsak olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 12.1. **Bir serinin alttan ve üstten sınırlandırılması.**

Örnek (12.4) ***İntegral testi:***

$$\xi(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... \qquad (12.11)$$

şeklinde verilen Riemann Zeta fonksiyonunu ele alalım. Oran testini kullanarak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}, \sim 1 - \frac{s}{n} + ...\text{(binom açılımı)} \qquad (12.12)$$

yazabiliriz.Yukarıdaki denklemde $n \to \infty$ limitinde $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ olacağından, oran testi bu serinin yakınsak olup olmadığını söyleyemez. Ancak, integral testini kullanırsak

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s>1 \Rightarrow \textit{seri yakınsak} \\ \infty & s<1 \Rightarrow \textit{seri ıraksak} \end{cases} \qquad (12.13)$$

sonucuna varırız.

12.3.5 Raabe Testi:

Pozitif terimli bir seri verilmiş olsun ($a_n > 0$). Aşağıdaki;

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = m$$

limitini bulduktan sonra, $m > 1$ değerleri için seri yakınsak, $m < 1$ değerleri için ise, ıraksaktır. $m = 1$ için Raabe testi sonuç vermez.

Örnek (12.5) ***Raabe testi:*** $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ serisi için oran testi bir sonuç vermez. Fakat, Raabe testini kullanılırsak,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2 > 1, \qquad (12.14)$$

limitinden serinin yakınsak olduğu görülür.

Raabe testi şöyle de ifade edilebilir: N , n'den bağımsız verilen bir pozitif tam sayı olsun. Bütün $n \geq N$ değerleri için $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq P > 1$ olursa seri yakınsak, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ ise, ıraksaktır.

Örnek (12.6) ***Raabe testi:*** Raabe testinin ikinci formu $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu belirler. Bütün n değerleri için $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = 1$ olduğundan harmonik seri ıraksaktır.

Bu testlerden biri kullanılarak serilerin ıraksak veya yakınsak olduğuna karar verilemiyorsa bazı bilinen teoremler de kullanılabilir.

12.3.6 Cauchy Teoremi :

Pozitif azalan terimlerden oluşan $(a_n \geq a_{n+1} \geq ... \geq 0)$ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ serisi verilmiş olsun. Bu durumda,

$$ca_c + c^2 a_{c^2} + c^3 a_{c^3} + ... \quad (c \text{ tamsayı}) \qquad (12.15)$$

serisi de yukarıdaki seri ile birlikte ıraksak veya yakınsaktır.

Örnek (12.7) ***Cauchy teoremi:*** $\alpha \geq 0$ için,

$$\frac{1}{2\ln^\alpha 2} + \frac{1}{3\ln^\alpha 3} + \frac{1}{4\ln^\alpha 4} + ... = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^\alpha n}$$

serisinin yakınsaklığı Cauchy teoremi kullanılarak belirlenebilir. c'nin değerini 2 olarak seçersek, $2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ...$ serisinin genel terimi

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{2^k \ln^\alpha 2^k} = (\frac{1}{\ln^\alpha 2})\frac{1}{k^\alpha}$$

olacağından ve $\frac{1}{\ln^\alpha 2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ serisi $\alpha > 1$ için yakınsak olduğundan, verilen seri de $\alpha > 1$ için yakınsaktır. $\alpha \leq 1$ için iki seri de ıraksaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

12.3.7 Gauss Testi ve Legendre Serisi :

Genel görünümü

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1] \tag{12.16}$$

şeklinde olan Legendre serilerinin her ikisinde de tekrarlama bağıntısı

$$a_{n+2} = a_n \frac{(n-l)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} \tag{12.17}$$

olarak verilir. $|x| \neq 1$ olduğunda, oran testi ile genel terimi $u_n = a_{2n}x^{2n}$ olan serisinin yakınsaklık testi aşağıdaki gibi kolayca yapılabilir (Diğer seri de aynı şekilde incelenir.):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{2n+1}x^{2n+1}}{a_{2n}x^{2n}} = \frac{(2n-l)(2n+l+1)x^2}{(2n+1)(2n+2)} \tag{12.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x^2. \tag{12.19}$$

Buradan $x \in (-1,1)$ aralığında serinin yakınsak olduğu görülür. Ancak, $x = \pm 1$ noktalarında oran testi ile sonuç alamayız. Bu noktalarda Legendre serisinin yakınsak olup olmadığına karar vermek için daha gelişmiş bir test olan ve aşağıda verilen Gauss testini kullanabiliriz:

Gauss testi: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ pozitif terimli bir seri ise ve $n \geq N$ (N verilen sabit bir değer) için,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq 1 + \frac{\mu}{n} + 0\left(\frac{1}{n^i}\right) \quad i > 0 \tag{12.20}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa (Burada $0\left(\frac{1}{n^i}\right)$'nin anlamı: Verilen bir $f(n)$ fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty}\{f(n)/\frac{1}{n^i}\}$ sonlu bir sayıdır.), bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi, $\mu > 1$ için yakınsak, $\mu \leq 1$ için ise, ıraksak olacaktır.

Örnek (12.8) ***Legendre serisi:*** Legendre serilerinin $x = \pm 1$ noktalarındaki yakınsaklığını Gauss testi ile inceleyelim: Hesaplanması gereken oran aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-l)(2n+l+1)} = \frac{4n^2+6n+2}{4n^2+2n-l(l+1)},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq 1 + \frac{1}{n} + \frac{l(l+1)(1+n)}{[4n^2+2n-l(l+1)]n}.$$

Bu orandaki son fonksiyonun $O(\frac{1}{n^2})$ olduğu, aşağıdaki limit hesaplanarak rahatça görülebilir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(l+1)(1+n)}{[4n^2+2n-l(l+1)]n} / (\frac{1}{n^2}) = \frac{l(l+1)}{4}. \tag{12.21}$$

Sonuç beklendiği gibi sonlu bir sayıdır. $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ifadesinde $\mu = 1$ olduğundan, $x = \pm 1$ noktalarındaLegendre serileri ıraksaktır.

Örnek (12.9) ***Chebychev serisi:*** Chebychev denklemini

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0, \tag{12.22}$$

şeklinde alarak, $x \in [-1,1]$ aralığında sonlu olan çözümlerini Frobenius seriler yöntemi ile bulalım . Aşağıdaki seri çözümü ve türevlerini;

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}, \\ y' &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha) x^{k+\alpha-1}, \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1) x^{k+\alpha-2}, \end{aligned} \tag{12.23}$$

Chebychev denkleminde yerlerine koyarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)x^{k+\alpha} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} = 0 \tag{12.24}$$

bulunacaktır. Kısa bir düzenlemeden sonra, önce,

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}\left[n^2 - (k+\alpha)^2\right] = 0 \tag{12.25}$$

Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın
Fen ve Mühendislik

denklemine ve sonra da

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+a_1\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)x^{k+\alpha}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)x^{k+\alpha}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+\alpha}\left[n^2-(k+\alpha)^2\right]=0 \qquad (12.26)$$

denklemine ulaşırız. Burada x'in en küçük kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitleyerek indis denklemini buluruz:

$$a_0\alpha(\alpha-1)=0. \qquad (12.27)$$

Diğer terimlerin de katsayılarını sıfıra eşitlersek,

$$a_1\alpha(\alpha+1)=0 \qquad (12.28)$$

ve Tekrarlama bağıntısı olarak da

$$a_{k+2}=\frac{(k+\alpha)^2-n^2}{(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)}a_k, \qquad k=0,1,2,\ldots \quad , \qquad (12.29)$$

bulunacaktır. İndis denkleminde $a_0\neq 0$ alınırsa kökleri de $\alpha=0$ veya $\alpha=1$ olacaktır. α' yı sıfır olarak seçersek, tekrarlama bağıntısı,

$$a_{k+2}=\frac{k^2-n^2}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (12.30)$$

olacağından sonuç da aşağıdaki gibi bulunur:

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{n^2}{2}x^2-\frac{n^2\left(2^2-n^2\right)}{4\cdot 3\cdot 2}x^4-\ldots\right) \qquad (12.31)$$

$$+a_1\left(x+\frac{(1-n)^2}{3\cdot 2}x^3+\frac{(3-n)^2\left(1-n^2\right)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}x^5+\ldots\right). \qquad (12.32)$$

Bu çözüm indis denkleminin ikinci kökünün de çözümünü içermektedir. Esas problemimiz ise, elde ettiğimiz bu serilerin yakınsak olup

olmadıklarını araştırmaktır. En basitinden oran testi ile başlarsak ve $x\neq\pm1$ için genel terimi $u_k=a_{2k}x^{2k}$ olan seriyi ele alırsak,

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right|=\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right|x^2 \quad , \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right|x^2=x^2 \qquad (12.33)$$

buluruz. Dolayısıyla, oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığında serimiz yakınsaktır. Fakat, oran testi $x=\pm1$ noktalarında serilerin yakınsaklığı konusunda bir şey söyleyemez. Bunun için daha gelişmiş bir test olan Raabe testini kullanabiliriz. Raabe testini uygulamak için

$$\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{u_k}{u_{k+1}}-1\right].$$

limitini hesaplamak gerekir ki; bu da

$$\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}-1\right]=\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k)^2-n^2}-1\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{6k+2+n^2}{(2k)^2-n^2}\right]=\frac{3}{2}>1 \qquad (12.34)$$

olarak bulunur. Böylece, oran testinin karar veremediği bu durumda Raabe testi serinin yakınsak olduğunu gösterir. Bu da bize Legendre serilerinin aksine, Chebychev polinomları için n değerlerinin tamsayı olarak alınmasını, Chebychev serilerinin sınır noktalarında sonlu olma şartının dışında bir şart olarak karşımıza çıkarır. Genel terimi $u_k=a_{2k+1}x^{2k+1}$olan seri için de aynı tartışma geçerlidir.

12.3.8 Değişken Seriler

Bütün n değerleri için $a_n>0$ olursa, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ serisine değişken seri denir. Değişken bir seride yeterince büyük n değerleri için a_n monoton olarak azalıyor veya sabit kalıyorsa ve

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

ise, seri yakınsaktır (Leibniz kuralı).

Örnek (12.10) ***Leibniz kuralı:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

serisinde $n\to\infty$ limitinde $\frac{1}{n}\to0$ olduğundan bu seri şartlı yakınsaktır denir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın II. baskı 2004

12.4 Seriler ile Cebir

Serilerde mutlak yakınsaklığın, belirlenmesi çok önemlidir. Çünkü ancak mutlak yakınsak serilerle cebirsel işlemleri (toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi) bir sorun çıkmadan yapabiliriz:

1. Mutlak yakınsak bir serinin toplamı, serinin terimlerinin toplanış sırasından bağımsızdır.
2. İki mutlak yakınsak seri çarpılabilir. Çarpım serisi de mutlak yakınsaktır. Çarpım serisinin limiti ise, tek tek serilerin limitleri çarpımı olacaktır.

Son derece doğal gelen bu özellikler şartlı yakınsak seriler için söylenemez ve ezbere uygulanırlarsa da yalnış sonuçlara yol açabilirler.

Örnek (12.11) ***Şartlı yakınsak seriler:*** Aşağıdaki değişken seri şartlı yakınsaktır:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\\ &= 1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})-\ldots\\ &= 1-0.167-0.05-\ldots\,. \end{aligned} \tag{12.35}$$

Buradan da görüldüğü gibi bu serinin toplamı birden küçüktür. Fakat toplanış sırasını,

$$\begin{aligned}&(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})-(\frac{1}{2})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15})-(\frac{1}{4})\\ &+(\frac{1}{17}+\ldots\frac{1}{25})-(\frac{1}{6})+(\frac{1}{27}+\ldots\frac{1}{35})-(\frac{1}{8})+\ldots,\end{aligned} \tag{12.36}$$

şeklinde değiştirirsek ve her parantezi tek bir terim gibi düşünürsek, kısmi toplamlar için aşağıdaki sayıları elde ederiz:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1.5333 \;, & s_2 &= 1.0333,\\ s_3 &= 1.5218 \;, & s_4 &= 1.2818,\\ s_5 &= 1.5143 \;, & s_6 &= 1.3476, \;\ldots\ldots\ldots\\ s_7 &= 1.5103 \;, & s_8 &= 1.3853,\\ s_9 &= 1.5078 \;, & s_{10} &= 1.4078, \end{aligned} \tag{12.37}$$

Bu kısmi toplamların n sayısına karşı bir grafiği çizilirse, değişken harmonik serinin bu sırada toplanmasının 3/2 sayısına yakınsadığı açıkça görülür. Yapılan işlem ise, son derece mantıklı görünen, toplanan terimlerin sırasını değiştirmekten ibarettir. Seriye ne bir ekleme yapılmış, ne de birşey çıkarılmıştır. Önce pozitif terimler kısmi toplam

3/2'ye eşit veya ondan biraz büyük olana kadar alınmış, sonra da kısmi toplam 3/2'nin altına düşene kadar negatif terimler eklenmiştir. Toplanan terim sayısı sonsuza gittikçe başlangıçtaki serinin bütün terimleri alınmış olacaktır. Bu değişken harmonik serinin kısmi toplamlar kümesi ise, 3/2'ye yakınsaktır.

Şartlı yakınsak bir seri terimlerinin uygun bir toplama sırası ile herhangi bir değere yakınsatılabilir ve hatta ıraksatılabilir. Bu ifade bazen Riemann teoremi olarak da bilinir. Bu sebeple şartlı yakınsak serilerle işlem yaparken çok dikkatli olunması gerektir.

12.4.1 Çift Toplamlı Serilerde Sıranın Değiştirilmesi

Çift toplamlı mutlak yakınsak bir seriyi genelde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\,. \tag{12.38}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu serinin toplama sırasını

$$n=q\geq 0,\ \text{ve}\ m=p-q\geq 0 \tag{12.39}$$

olacak şekilde yeni q ve p değişkenleri belirleyerek yapabiliriz. Bu durumda seri toplamları,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} a_{q,p-q} \tag{12.40}$$

olacaktır. Bu iki çift toplamı da açık olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} &a_{00}+a_{10}+a_{20}+\ldots\\ &+a_{01}+a_{11}+a_{21}+\ldots\\ &+a_{02}+a_{12}+a_{22}+\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12.41}$$

$$=$$

$$\begin{aligned} &a_{00}\\ &+a_{01}+a_{10}\\ &+a_{02}+a_{11}+a_{20}\\ &+a_{03}+a_{12}+a_{21}+a_{30}\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

buluruz. Diğer bir toplama sırası değişimi ise,

$$n = s \geq 0, \text{ ve } m = r - 2s \geq 0 \ (s \leq \frac{r}{2}) \tag{12.42}$$

olacak şekilde r sayıları belirlenerek

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[\frac{r}{2}]} a_{s,r-2s} \\ &= a_{00} + a_{01} + a_{02} + +a_{10} + a_{03} + a_{11} + ... \end{aligned} \tag{12.43}$$

şeklinde elde edilir.

12.5 Fonksiyon Serileri

Sonsuz seri kavramını terimlerin bir değişkene bağlı fonksiyonlar olmaları durumuna da genişletebiliriz. Bu durumda $u_n = u_n(x)$ olacağından, kısmi toplam da x'in fonksiyonu olacaktır:

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \\ &= s_N(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) \ . \end{aligned} \tag{12.44}$$

Eğer, $N \to \infty$ limitinde kısmi toplam da $s(x)$'e giderse,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} s_n(x) &= s(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) &= s(x) \end{aligned} \tag{12.45}$$

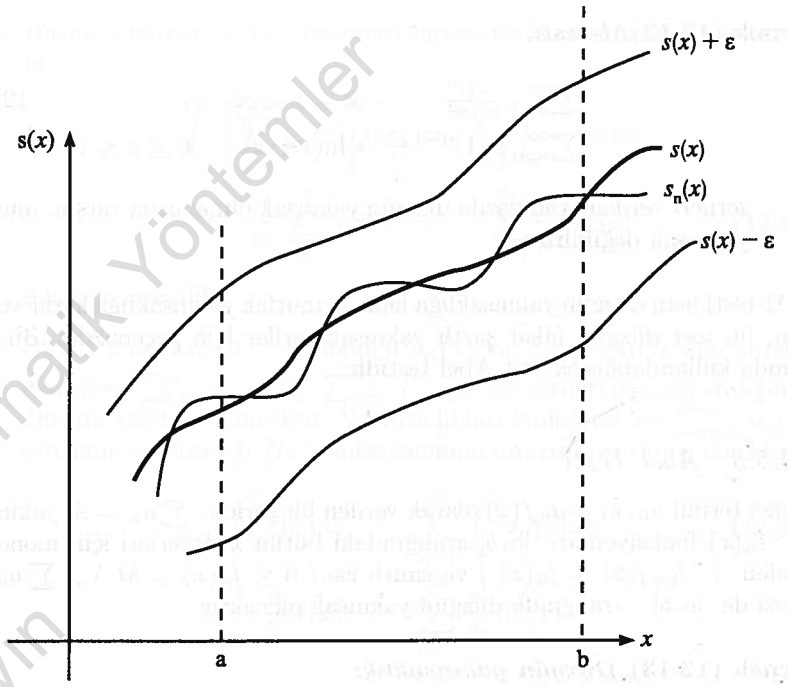
yazılabilecektir. Şimdiye kadar kısmi toplamın sadece n tam sayısına bağımlı olduğu durumlarla ilgilendik. Fakat şimdi $n \to \infty$ limitinde x bağımlılığı bazı sorunlar yaratacaktır. Burada gerek duyduğumuz anahtar kavram düzgün yakınsaklıktır.

12.5.1 Düzgün Yakınsaklık

Seçilmiş herhangi bir küçük $\varepsilon > 0$ değeri için, $[a, b]$ aralığında x değişkeninden bağımsız bir N sayısı varsa ve

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \tag{12.46}$$

şartı tüm $n \geq N$ için geçerli oluyorsa, genel terimi $u_n(x)$ olan bu seri $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır denir. Bu aynı zamanda da şu anlama



ŞEKİL 12.2. **Mutlak yakınsaklık kavramı çok önemlidir.**

gelmektedir: Düzgün yakınsak bir seri için verilen her küçük ϵ değerine karşı, her zaman sonlu öyle bir N sayısı bulabiliriz ki, sonsuz serinin kalan kısmı olan

$$\left| \sum_{i=1+N}^{\infty} u_i(x) \right|$$

ifadesi, verilen aralıkta bütün x değerleri için, ϵ değerinden daima daha küçük kalır. Düzgün yakınsaklığı Şekil (12. 2)'de olduğu gibi bir grafik ile de gösterebiliriz.

12.5.2 Weierstrass M-Testi

Düzgün yakınsaklık için en yaygın kullanılan test Weierstrass M, veya kısaca M-testidir. $[a, b]$ aralığındaki bütün x değerleri için $M_i \geq |u_i(x)|$ olacak şekilde M_i sayılarından oluşan bir $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ serisi bulabilirsek ve $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ serisi yakınsak ise, fonksiyon serimiz $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ de $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olacaktır. Bu testte $u_i(x)$'lerin mutlak değeri alındığından, M-testi aynı zamanda da mutlak yakınsaklığı kontrol eder. Ama bilinmelidir ki, mutlak yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık bağımsız kavramlardır. Bunlardan biri diğerini gerektirmez.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (12.12) *M-testi:*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \qquad -\infty < x < \infty \quad ve \\ &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \qquad 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{12.47}$$

serileri verilen aralıklarda düzgün yakınsak olmalarına karşın, mutlak yakınsak değildirler.

M-testi hem düzgün yakınsaklığa hem de mutlak yakınsaklığa karar verdiği için, bu test düzgün fakat şartlı yakınsak seriler için geçersizdir. Bu durumda kullanılabilecek test Abel testidir.

12.5.3 Abel Testi

Genel terimi $u_n(x) = a_n f(x)$ olarak verilen bir seride, $\sum a_n = A$ yakınsak ve $f_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığındaki bütün x değerleri için monoton azalan ($f_{n+1}(x) \le f_n(x)$) ve sınırlı ise ($0 \le f_n(x) \le M$) , $\sum u_n(x)$ serisi de $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsak olacaktır.

Örnek (12.13) ***Düzgün yakınsaklık:***

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n &= 1, \qquad 0 \le x < 1 \\ &= 0, \qquad x = 1 \end{aligned} \tag{12.48}$$

serisi mutlak yakınsak, ancak $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Düzgün yakınsaklık tanımından, herhangi bir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{12.49}$$

serisinin, süreksizliğinin bulunacağı aralıklarda düzgün yakınsak olamayacağı kolayca görülebilir.

12.5.4 Düzgün Yakınsak Olan Serilerin Özellikleri

1. Bütün n'ler için $u_n(x)$ terimleri sürekli olurlarsa,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{12.50}$$

seri toplamı da sürekli olacaktır.

2. Bütün n'ler için $u_n(x)$ terimleri sürekli ise, serinin integral ve türevi de

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx, \\ \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \end{aligned} \tag{12.51}$$

şeklinde alınabilir.

3. Bütün n'ler için $[a,b]$ aralığında $u_n(x)$ ve $\frac{d}{dx}u_n(x)$ terimleri sürekli olurlarsa, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}u_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ serileri de $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsak olacaktır. Yakınsadıkları fonksiyon ise, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ serisinin yakınsadığı $f(x)$ fonksiyonunun integrali ve türevi olacaktır:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx, \\ \frac{d}{dx}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x). \end{aligned} \tag{12.52}$$

12.6 Taylor Serileri

Bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin pozitif kuvvetleri cinsinden sonsuz bir seriye veya sonlu bir seri, artı kalan bir terim cinsinden ifadesine Taylor serisi denir. $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli n'inci türevinin var olduğunu kabul edelim ve bu n. türevin integralini alalım:

$$\int_a^x f^{(n)}(x)dx = f^{(n-1)}(x)\Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a). \tag{12.53}$$

Bu ifadenin de integralini,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \left(\int_a^x f^{(n)}(x)dx\right) dx = \int_a^x \left[f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)\right] dx \\ &= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a) \end{aligned} \tag{12.54}$$

şeklinde alırsak ve aynı işlemi n kez tekrarlarsak,

$$\begin{aligned} \int_a^x \ldots \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^n &= f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \\ &\quad - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \\ &\quad \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \end{aligned} \tag{12.55}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

denklemini buluruz. Bu denklemi de $f(x)$ için çözersek,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^x ... \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^n \quad (12.56)$$

elde ederiz . Burada,

$$R_n = \int_a^x ... \int_a^x f^{(n)}(x)(dx)^n \quad (12.57)$$

kalan ifadesidir. Bu terim aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad a \leq \xi \leq x. \quad (12.58)$$

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \quad (12.59)$$

limiti de doğru olursa, $f(x)$ fonksiyonu a noktası civarında sonsuz bir seri olarak yazılmış olur:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a). \quad (12.60)$$

12.6.1 Maclaurin Teoremi

Taylor serisinde $a = 0$ alınırsa, elde edilen seri açılımına Maclaurin serisi denir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (12.61)$$

12.6.2 Binom Teoremi

Taylor serisini

$$f(x) = (1+x)^m \quad (12.62)$$

fonksiyonu için (m negatif olabilir ve tam sayı olmayabilir) $x = 0$ civarında yazarsak,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + R_n, \quad (12.63)$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!}(1+\xi)^{m-n}m(m-1)...(m-n+1) \quad (12.64)$$

elde ederiz. Burada $0 \leq \xi < x$ 'dir. $n > m$ için, $\xi = 0$' da $(1+\xi)^{m-n}$ fonksiyonu maximum olacağından, R_n kalan terimi için de

$$R_n \leq \frac{x^n}{n!}m(m-1)...(m-n+1) \quad (12.65)$$

şeklinde bir üst limit verebiliriz.Yukarıdaki denklemden de görüleceği üzere, $0 \leq x < 1$ aralığı için, $n \to \infty$ limitinde $R_n \to 0$ olacaktır. Buradan da

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}x^n \quad (12.66)$$

olarak verilen binom serisi elde edilir. Bu serinin yakınsak olduğu bölge kolayca $-1 < x < 1$ aralığına genişletilebilir.

Örnek (12.14) ***Relativistik kinetik enerji:*** Matematikte en çok kullanılan formüller arasında yer alan binom açılımının ilginç bir uygulaması, Einstein tarafından relativistik bir parçacığın kinetik enerjisinin hesaplanmasında verilmiştir. v hızı ile hareket eden bir parçacığın toplam enerjisi

$$E = mc^2 \quad (12.67)$$

olarak verilir. Burada m, v hızı ile hareket eden bir parçacığın kütlesidir ve durgun kütlesi olan m_0 cinsinden,

$$m = \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} \quad (12.68)$$

şeklinde ifade edilir. Doğal olarak, relativistik kinetik enerji toplam enerjiden hareketsiz haldeki enerji (m_0c^2) çıkartılarak,

$$K.E. = mc^2 - m_0c^2 \quad (12.69)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Bu formülü $v < c$ durumunda binom formülünden yararlanarak açarsak,

$$K.E. = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2(\frac{v^2}{c^2}) + \frac{5}{16}m_0v^2(\frac{v^2}{c^2})^2 + ... - m_0c^2, \quad (12.70)$$

yazar ve bunu da sadeleştirirsek,

$$K.E. = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2(\frac{v^2}{c^2}) + \frac{5}{16}m_0v^2(\frac{v^2}{c^2})^2 + ... \quad (12.71)$$

buluruz. $v << c$ olarak verilen klasik fizik limitinde ise, kinetik enerji beklendiği gibi

$$K.E. \simeq \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (12.72)$$

olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

12.6.3 Birden Fazla Bağımsız Değişkene Bağlı Taylor Serileri

Elimizdeki $f(x,y)$ fonksiyonu x ve y gibi iki bağımsız değişkene bağlı ise, Taylor serisi aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-b)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \qquad (12.73)$$

$$+ \frac{1}{3!}[(x-a)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$+3(x-a)(y-b)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + (y-b)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bu denklemde bütün türevler (a,b) noktasında hesaplanmalıdır. m bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun Taylor serisi de aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x_1,x_2,\ldots..x_m) = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}(x_j - x_{j0})\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^n f(x_1,x_2,\ldots..x_m)\right\}_{x_{10},x_{20},\ldots..x_{m0}} \qquad (12.74)$$

12.7 Kuvvet Serileri

Genel olarak bir x değişkeninin kuvvetlerini içeren ve genel terimi $u(x) = a_n x^n$ olan serilere kuvvet serileri denir:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (12.75)$$

Buradaki a_n katsayıları, x 'ten bağımsız sayılardır. Oran testini uygularsak,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| \qquad (12.76)$$

buluruz ve $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$ ise, kuvvet serisinin yakınsak olması şartı

$$|x| < R \Longrightarrow -R < x < R$$

şeklinde olacaktır. Burada R'ye yakınsaklık yarıçapı denir. $\frac{|x|}{R} = 1$ için oran testi başarısız olduğundan, yakınsaklık aralığının son noktalarının ayrıca incelenmesi gerekir.

Örnek (12.15) ***Kuvvet serileri:***

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

kuvvet serisi için $R = 1$ dir. Böylece seri $-1 < x < 1$ aralığı için yakınsaktır. Ama aralığın son noktaları olan $x = 1$ için seri ıraksak ve $x = -1$ için yakınsaktır.

Örnek (12.16) ***Kuvvet serileri:*** Yakınsaklık yarıçapı sıfır da olabilir:

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

serisi için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$ 'dir. $\lim_{n\to\infty}(n+1) = \frac{1}{R} \to \infty$ olacağından $R = 0$ sonucu çıkar. Seri sadece $x = 0$ değeri için yakınsaktır.

Örnek (12.17) ***Kuvvet serileri:***

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

kuvvet serisi için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ olacağından, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{R}$ limitinden de $R = \infty$ bulunur. Bu seri ise, bütün sonlu x değerleri için yakınsaktır.

12.7.1 Kuvvet Serilerinin Düzgün ve Mutlak Yakınsaklıkları

$-R < x < R$ için kuvvet serimizin yakınsak olduğunu farzedelim. Böylece herhangi bir alt aralıkta da seri düzgün ve mutlak yakınsak olacaktır.

$$-S \le x \le S \quad \text{burada} \quad 0 < S < R. \qquad (12.77)$$

M-testinde $M_i = |a_i|\,S^i$ alarak bu özelliği kolayca gösterebiliriz.

12.7.2 Süreklilik

Kuvvet serilerinde her terim $(u_n(x) = a_n x^n)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan ve $-S \le x \le S$ için $f(x) = \sum a_n x^n$ serisi de düzgün yakınsak olacağından, düzgün yakınsaklık aralığında $f(x)$ fonksiyonu da sürekli olacaktır. Fourier serilerinde $u_n(x)$ fonksiyonlarının sürekli olmasına karşın, testere dişi şeklinde süreksiz fonksiyonların da açıldığı hatırlanırsa bu önemli bir özelliktir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

12.7.3 Türev ve İntegral

Düzgün yakınsaklık aralığında bir kuvvet serisinin istenildiği kadar türevi ve integrali alınabilir. Türev ve integral almakla serinin yakınsaklık yarıçapı değişmez.

12.7.4 Teklik Teoremi

Bir fonksiyonun iki farklı kuvvet serisi ile sıfır noktasını içeren ve yakınsaklık aralıklarının kesiştiği bölgede gösterildiğini düşünelim:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rrightarrow -R_a < x < R_a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rrightarrow -R_b < x < R_b. \end{aligned} \tag{12.78}$$

Bu durumda bütün n'ler için $b_n = a_n$ olacaktır. Yani bu iki kuvvet serisi aynı seridir.

İspat: Hipoteze göre denklem (12.78) 'i kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rrightarrow -R < x < R$$

yazabiliriz. Burada R, R_a ve R_b 'den küçüğüne eşittir. $x = 0$ alırsak $a_0 = b_0$ bulunur. Kuvvet serisinin istenildiği kadar türevi alınabildiğinden, ilk türev $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n x^{n-1}$ verecektir. Yine $x = 0$ aldığımızda $a_1 = b_1$ bulunur. Benzer şekilde devam edilip n'inci türev alınır ve $x = 0$ yazılırsa, bütün n değerleri için $a_n = b_n$ olduğu görülür.

12.7.5 Kuvvet Serilerinin Tersinmesi

$(y - y_0)$ fonksiyonunun $(x - x_0)$ kuvvet serisi açılımının,

$$y - y_0 = a_0(x - x_0) + a_1(x - x_0)^2 + ... \tag{12.79}$$

$$y - y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{12.80}$$

şeklinde verildiğini düşünelim. Bazı durumlarda bu serinin

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \tag{12.81}$$

şeklinde ifadesi gerekebilir. Bunun için (12.81) serisinde (12.80) serisini yerine koyup, denklemin her iki tarafındaki $(x - x_0)$'ın eşit kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1 a_3), \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^7}(5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12.82}$$

buluruz. Bu katsayıların kapalı bir ifadesi rezidü teoremi yardımı ile

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{t}{w(t)}\right)^n\right]_{t=0} \tag{12.83}$$

şeklinde bulunabilir.

12.8 Serilerin Toplamlarının Bulunması

Verilen bir serinin yakınsak olduğuna karar verdikten sonra uygulamalarda gerek duyacağımız en önemli özellik, o serinin toplamı olacaktır. Bu bölümde bunun için kullanılabilecek bazı teknikler anlatılmaktadır. Bu teknikler kesin sonucu bulmakta kullanılabileceği gibi, yakınsak bir seriyi daha hızlı yakınsayan başka bir seriye dönüştürmek için de kullanılabilir. Önce, kuantum alan teorisinde kuantum boşluk enerjisi ve Green fonksiyonu hesaplarında oldukça yaygın bir şekilde kullanılan, Euler-Maclaurin toplama formülünün Bernoulli polinomlarının yardımı ile çıkarılışını göreceğiz. Sonra da kompleks analiz yöntemi kullanılarak bazı serilerin toplamlarının nasıl bulunabileceğini inceleyeceğiz. 11. Bölümde gördüğümüz diferintegraller de seri toplamlarının bulunmasında yararlıdır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

12.8.1 *Bernoulli Polinomları ve Özellikleri*

Euler-Maclaurin toplama formülünün çıkarılışında türetici fonksiyonu,

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{s=0}^{\infty} B_s(x)\frac{t^s}{s!} \quad |t| < 2\pi \tag{12.84}$$

olarak tanımlanan ve $B_s(x)$ olarak gösterilen Bernoulli polinomlarından yararlanılır. Bunların ilk yedi tanesi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{llll} B_0(x) = & 1 & B_1(x) = & x-\frac{1}{2} \\ B_2(x) = & x^2-x+\frac{1}{6} & B_3(x) = & x(x-\frac{1}{2})(x-1) \\ B_4(x) = & x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30} & B_5(x) = & x(x-\frac{1}{2})(x-1)(x^2-x-\frac{1}{3}) \\ B_6(x) = & x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42} & \ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{12.85}$$

Bernoulli polinomlarının $x = 0$ noktasındaki değerleri olan

$$B_s = B_s(0) \tag{12.86}$$

ise, Bernoulli sayıları olarak bilinirler. Bunlardan ilk dokuz tanesi de

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\tfrac{1}{2} \quad B_2 = \tfrac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}$$

$$B_5 = 0 \quad B_6 = \tfrac{1}{42} \quad B_7 = 0 \quad B_8 = -\tfrac{1}{30} \quad B_9 = 0 \quad \ldots. \tag{12.87}$$

olarak verilir. Bernoulli polinomlarının bazı önemli özellikleri şöyle sıralanabilir:

1.

$$B_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} B_{s-j}x^j. \tag{12.88}$$

2.

$$B_s'(x) = sB_{s-1}(x)\,; \quad \int_0^1 B_s(x)\,dx = 0 \quad (s \geq 1)\,. \tag{12.89}$$

3.

$$B_s(1-x) = (-1)^s B_s(x)\,. \tag{12.90}$$

Burada $B_s(1-x)$, $(1-x)$ 'in fonksiyonudur.

4.

$$\sum_{j=1}^{n} j^s = \frac{1}{(s+1)}\{B_{s+1}(n+1) - B_{s+1}\} \quad (s \geq 1)\,. \tag{12.91}$$

5.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{2s}} = (-1)^{s-1}(2\pi)^{2s}\frac{B_{2s}}{2(2s)!} \quad (s \geq 1)\,. \tag{12.92}$$

6.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2s-1}}{e^{2\pi x}-1}dx = (-1)^{s-1}\frac{B_{2s}}{4s} \quad (s \geq 1)\,. \tag{12.93}$$

7. $s \geq 1$ olduğunda ve $[0,1]$ aralığında, $B_{2s+1}(x)$ fonksiyonlarının sıfırları sadece 0, $\frac{1}{2}$ ve 1 noktalarındadır. Aynı aralıkta $(B_{2s}(x) - B_{2s})$ ifadesinin sıfırları ise, sadece 0 ve 1 noktalarındadır. Aynı zamanda,

$$|B_{2s}(x)| \leq |B_{2s}| \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{12.94}$$

eşitsizliği doğrudur.

8. Sürekli ve periyodu 1 olan Bernoulli periyodik fonksiyonları,

$$P_s(x) = B_s(x - [x]) \tag{12.95}$$

olarak tanır. Burada $[x]$, $(x-1, x]$ aralığındaki tamsayı anlamına gelmektedir. $P_s(x)$,

$$P_s'(x) = sP_{s-1}(x) \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

$$P_s(1) = (-1)^s P_s(0) \quad s = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

ilişkilerini sağlar.

12.8.2 *Euler-Maclaurin Toplama Formülü*

Bu bölümde ilk hedefimiz Bernoulli polinomlarının özelliklerini kullanarak,

$$\int_0^1 f(x)dx \tag{12.96}$$

integralini hesaplamaktır. Polinomlardan ilki,

$$B_0(x) = 1 \tag{12.97}$$

şeklinde verilen sabit bir fonksiyon olduğundan bu integrali

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)dx \tag{12.98}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde de yazabiliriz. Şimdi de polinomların

$$B_1'(x) = B_0(x) = 1 \tag{12.99}$$

şeklinde verilen ikinci özelliğini kullanarak, (12. 98) denklemini

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)dx \tag{12.100}$$

olarak yazalım. Bu ifadenin de kısmi integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(x)dx = f(x)B_1(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx, \tag{12.101}$$

$$= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx \tag{12.102}$$

buluruz. Bu sonuçta $B_1(1) = \frac{1}{2}$ ve $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ değerleri kullanılmıştır. Bernoulli polinomlarının gene aynı özelliğini kullanarak,

$$B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x) \tag{12.103}$$

yazar ve yukarıdaki denklemde yerine koyar ve tekrar kısmi integral alırsak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2!}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0)] \\ &+\frac{1}{2!}\int_0^1 f''(x)B_2(x)dx\end{aligned} \tag{12.104}$$

denklemi bulunacaktır. Bernoulli polinomlarının tanımından da görüleceği gibi,

$$\begin{aligned}B_{2n}(1) = \quad B_{2n}(0) = B_{2n} \qquad n = 0, 1, 2, ..., \\ B_{2n+1}(1) = \quad B_{2n+1}(0) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, ...,\end{aligned} \tag{12.105}$$

değerlerini kullanarak ve aynı şekilde kısmi integral almaya devam ederek,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right] \\ &+\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 f^{(2q)}(x)B_{2q}(x)dx\end{aligned} \tag{12.106}$$

denklemini buluruz. Yukarıdaki denkleme Euler-Maclaurin integral formülü denir ve $f(x)$ fonksiyonunun gerekli bütün türevlerinin var olduğu düşünülür. q birden büyük bir sayıdır.

Bu denklemi kullanarak integral sınırlarının 1'den 2'ye değiştirilmesinin formülde nasıl bir değişiklik yaptığına bakalım:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 f(y+1)dy \tag{12.107}$$

yazar ve yukarıdaki işlemleri tekrarlarsak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(y+1)dy &= \frac{1}{2}[f(2) + f(1)] \\ &-\sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(2) - f^{(2p-1)}(1)\right] \\ &+\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 f^{(2q)}(y+1)B_{2q}(y - [y])dy\end{aligned} \tag{12.108}$$

denklemini buluruz. Burada da

$$y + 1 = x \tag{12.109}$$

dönüşümünü yaparsak,

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(y+1)dy \\ &= \frac{1}{2}[f(2) + f(1)] \\ &-\sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(2) - f^{(2p-1)}(1)\right] \\ &+\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 f^{(2q)}(x)P_{2q}(x-1)dx\end{aligned} \tag{12.110, 12.111}$$

formülü bulunur. Benzer şekilde $[2, 3]$ aralığı için de bir formül hemen yazılabilir:

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)dx &= \frac{1}{2}[f(3) + f(2)] \\ &-\sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(3) - f^{(2p-1)}(2)\right] \\ &+\frac{1}{(2q)!}\int_2^3 f^{(2q)}(x)P_{2q}(x-2)dx.\end{aligned} \tag{12.112}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Bu şekilde diğer aralıklar için de formüller benzetme ile yazılabilir. $[0, n]$ aralığında ise, integral aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... + \int_{n-1}^n f(x)dx. \qquad (12.113)$$

Sağ taraftaki integrallerin yerlerine yukarıda bulduğumuz formülleri yazarsak,

$$\begin{aligned}\int_0^n f(x)dx &= \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + ... + \frac{1}{2}f(n) \qquad (12.114)\\ &\quad -\sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right]\\ &\quad +\frac{1}{(2q)!}\int_0^n f^{(2q)}(x)P_{2q}(x)dx\end{aligned}$$

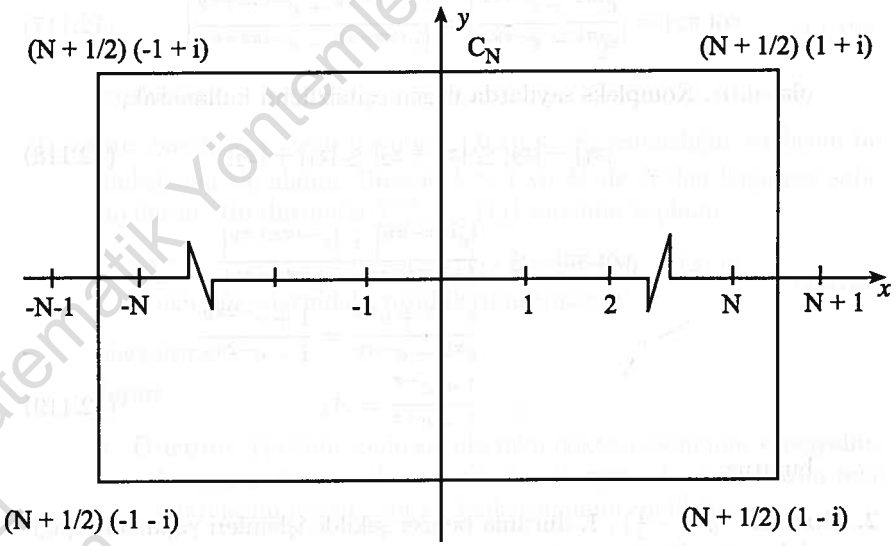
elde ederiz. Burada P_{2q} fonksiyonlarının periyotlarının 1 olması kullanılmıştır. Bu denklemi biraz düzenlersek,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} f(j) &= \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}\left[f(0) + f(n)\right]\\ &\quad +\sum_{p=1}^{q-1}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right] \qquad (12.115)\\ &\quad +\frac{B_{2q}}{(2q)!}\left[f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(0)\right] - \frac{1}{(2q)!}\int_0^n f^{(2q)}(x)P_{2q}(x)dx\end{aligned}$$

olacaktır. Denklemin sağ tarafındaki son iki terim aynı integral altında toplanırsa, Euler-Maclaurin toplama formülü de son şeklini,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} f(j) &= \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}\left[f(0) + f(n)\right]\\ &\quad +\sum_{p=1}^{q-1}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right] \qquad (12.116)\\ &\quad +\int_0^n \frac{\left[B_{2q} - B_{2q}(x - [x])\right]}{(2q)!}f^{(2q)}(x)dx\end{aligned}$$

olarak alır. Burada $f(x)$fonksiyonun sürekli ve gerekli bütün türevlerinin var olduğu kabul edilmiştir. Bu formül çok kullanışlı olup değişik amaçlar için kullanılabilir. q sonlu bir sayı olarak seçildiğinde verilen bir serinin



ŞEKİL 12.3. **Kompleks yol integrali kullanılarak seri toplamları bulunabilir.**

(sonlu veya sonsuz) toplamını integral artı bir takım düzeltme terimleri olarak yazmak mümkün olur. Uygulamalarda (örneğin kristal enerjisi hesaplarında) integral terimi süreklilik limitine karşı gelir. q'nun sonsuz olduğu durumlarda ise, eldeki seriyi çok daha hızlı yakınsayan bir başka seriye dönüştürmek için de kullanılır.

12.8.3 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Kullanılarak Serilerin Toplanması

Uygulamalarda karşımıza çıkacak bazı serilerin toplamları, kompleks fonksiyonlar teorisi kullanılarak da bulunabilir. Önce kompleks düzlemde C_N gibi bir dörtgen alalım ve köşe noktaları Şekil (12. 3)'de gösterildiği gibi olsun.

Ön Teorem: İlk olarak ispatlayacağımız özellik, C_N üzerinde $|\cot \pi z| < A$ olduğudur. Burada A, N'den bağımsız bir sabittir. C_N 'in $y > \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ ve $y < -\frac{1}{2}$ bölgelerinde bulunan kısımlarını ayrı ayrı düşünerek, ispatı üç adımda yapacağız:

1. Durum: $(y > \frac{1}{2})$: Kompleks bir sayı $z = x + iy$ şeklinde gösterilirse ve

Ken ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$y > \frac{1}{2}$ olduğu düşünülürse,

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| = \left|\frac{e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + \pi y}}{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}\right| \tag{12.117}$$

olacaktır. Kompleks sayılarda üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{12.118}$$

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &\leq \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{|e^{-i\pi x + \pi y}| - |e^{i\pi x - \pi y}|} \\ &\leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \\ &\leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1 \end{aligned} \tag{12.119}$$

buluruz.

2. Durum: $(y < -\frac{1}{2})$: 1. duruma benzer şekilde işlemleri yaparsak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &\leq \frac{|e^{i\pi x - \pi y}| + |e^{-i\pi x + \pi y}|}{|e^{i\pi x - \pi y}| - |e^{-i\pi x + \pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \\ &\leq \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1 \end{aligned} \tag{12.120}$$

3. Durum: $(-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2})$: $y \in [0, 1/2]$ aralığında ve C_N yolu üzerinde bir nokta, $z = N + \frac{1}{2} + iy$ olarak gösterilirse,

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left|\cot \pi \left(N + \frac{1}{2} + iy\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| \\ &= |\tanh \pi y| \leq \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) = A_2 \end{aligned} \tag{12.121}$$

olduğu kolayca görülür. Bunun simetriği olan $y \in [-1/2, 0]$ aralığında da C_N üzerinde bir nokta $z = -N - \frac{1}{2} + iy$ olarak gösterileceğinden

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| &= \left|\cot \pi \left(-N - \frac{1}{2} + iy\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\pi y\right)\right| \\ &= |\tanh \pi y| \leq \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) = A_2 \end{aligned} \tag{12.122}$$

bulunacaktır.

Böylece A_1 ve A_2 den büyüğünü seçerek ona A dersek, C_N üzerinde $|\cot \pi z| < A$ eşitsizliğini ispatlamış oluruz. Burada A'nın her üç halde

de N'den bağımsız olduğu görülmektedir. Aslında $A_2 < A_1$ olduğundan,

$$|\cot \pi z| \leq A_1 = \cot \frac{\pi}{2} \tag{12.123}$$

yazılabilir.

Teorem: Şimdi, C_N yolu boyunca $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonu ele alalım. Burada $k > 1$ ve M de N'den bağımsız sabit sayılardır. Bu durumda $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)$ serisinin toplamı,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) = -\{\pi \cot \pi z f(z) \text{ fonksiyonun, } f(z)\text{'in tekil noktalarındaki rezidülerinin toplamı}\} \tag{12.124}$$

olacaktır.

İspat:

1. Durum: $f(z)$'nin sonlu sayıda tekil noktası olduğunu varsayalım. N sayısını öyle seçelim ki, C_N kapalı eğrisi $f(z)$'nin bütün tekil noktalarını içersin. $\cot \pi z$ fonksiyonunun tekillikleri

$$z = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...$$

noktalarında olacağından, $\pi \cot \pi z f(z)$ fonksiyonunun bu noktalardaki rezidüleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\lim_{z \to n} (z - n) \pi \cot \pi z f(z) = \lim_{z \to n} \pi \frac{(z - n) f(z) \cos \pi z}{\sin z\pi} = f(n). \tag{12.125}$$

Bu sonucu elde etmek için L'Hospital kuralı kullanılır ve $f(z)$ fonksiyonun $z = n$ noktasında bir tekilliği olmadığı kabul edilir. Aksi taktirde verilen seri ıraksaktır. Kompleks analizden rezidü teoremini bir hatırlayalım. $F(z)$ kompleks fonksiyonu, C kapalı eğrisi üzerinde ve içinde sonlu sayıda m tane yalnız tekil noktaları dışında analitik ise, C eğrisi boyunca alınan kompleks yol integrali bu fonksiyonun tekil noktalarındaki rezidülerinin toplamının $2\pi i$ katına eşit olacaktır:

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{m} R_n. \tag{12.126}$$

$F(z)$ fonksiyonunun z_0 gibi bir yalnız tekil noktasındaki rezidüsü, bu fonksiyonun z_0 tekilliği etrafında açılmış Laurent serisinde $(z - z_0)^{-1}$ teriminin katsayısıdır. Yani,

$$F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j (z - z_0)^j \tag{12.127}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
11. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

açılımında $R_0 = A_{-1}$ olarak bulunur. Denklem (12.126)'da verilen rezidü teoremini kullanarak, $\pi \cot \pi z f(z)$ fonksiyonunun C_N kapalı eğrisi boyunca kompleks yol integrali

$$\oint_C \pi \cot \pi z f(z) dz = \sum_{n=-N}^{N} f(z) + S \tag{12.128}$$

olarak yazılır. Burada S sonlu sayıdaki $f(z)$ fonksiyonunun tekilliklerinde $\pi \cot \pi z f(z)$ fonksiyonunun rezidüleridir. Sol taraftaki integrale bir üst limit koyarsak,

$$\left| \oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz \right| \leq \oint_{C_N} \pi \left| \cot \pi z \right| |f(z)| \, |dz|$$

eşitsizliğini buluruz. Buradan da $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$ özelliğinden dolayı,

$$\left| \oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz \right| \leq \frac{\pi A M}{N^k} (8N + 4) \tag{12.129}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ifade de $(8N + 4)$ integral yolunun boyudur. $N \to \infty$ limitini aldığımızda C_N kapalı eğrisi boyunca olan kompleks integralin değerinin

$$\lim_{N \to \infty} \oint_{C_N} \pi \cot \pi \xi f(\xi) d\xi = 0 \tag{12.130}$$

olduğunu görürüz. Sonuç olarak da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -S \tag{12.131}$$

elde edilir.

2. Durum: Eğer $f(z)$sonsuz tane tekillik noktasına sahip ise, sonuç uygun bir limit durumu düşünülerek benzer şekilde elde edilir.

Örnek (12.18) ***Kompleks sayılar ve seri toplamı:*** Kuantum alan teorisinde bazı Green fonksiyonu hesaplarında karşımıza çıkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \quad , a > 0 \tag{12.132}$$

serisinin toplamını bulalım. $f(n) = \frac{1}{n^2+a^2}$ fonksiyonunun $n = \pm ia$ noktalarında iki tane tekilliği vardır ve istenen özellikleri sağlamaktadır. $\frac{\pi \cot \pi n}{n^2+a^2}$'nin $n = ia$ noktasındaki rezidüsü,

$$\lim_{n \to ia} (n - ia) \frac{\pi \cot \pi n}{(n + ia)(n - ia)} = \frac{\pi \cot \pi ia}{2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth \pi a \tag{12.133}$$

olarak bulunur. Buna benzer şekilde $n = -ia$ noktasındaki rezidüsü de $-\frac{\pi}{2a} \coth \pi a$ 'dır. Böylece sonuç basit olarak,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \tag{12.134}$$

şeklinde verilir. Bu sonucu elde ettikten sonra, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ serisini hesaplamak kolaydır ve sonuç

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \, , \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} &= \frac{\pi}{a} \coth \pi a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{\pi}{2a} \coth \pi a + \frac{1}{2a^2}, \end{aligned} \tag{12.135}$$

olarak belirlenir.

12.9 Asimtotik Seriler

Asimtotik seriler fizikte sıkça karşımıza çıkarlar. Genellikle sayısal hesaplarda bazı fonksiyonların duyarlı olarak değerlerinin bulunmasında kullanılırlar. Aşağıda genel olarak $I_1(x)$ ve $I_2(x)$ olarak tanımladığımız fonksiyonlar, hesaplanmalarında asimtotik serilerin kullanıldığı tipik fonksiyonlardır:

$$I_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-u} f(u) du, \tag{12.136}$$

$$I_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} f(\frac{u}{x}) du. \tag{12.137}$$

Astrofizikte Maxwell-Boltzman dağılımına uyan gazlarla ilgili hesaplarda sıkça rastlanan ve

$$I(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p} du = \Gamma(1 - p, x) \qquad (x, p > 0) \tag{12.138}$$

şeklinde verilen gama fonksiyonunu ele alalım ve x'in büyük olduğu değerler için $I(x, p)$'yi hesaplayalım. İki kere kısmi integral alarak işe başlarsak, önce

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
11. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$I(x,p) = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-1}du \tag{12.139}$$

denklemini ve sonra da

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-2}du \tag{12.140}$$

denklemini buluruz. Kısmi intergral almaya devam edersek,

$$I(x,p) = e^{-x}\{\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - .....$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!x^{p+n-1}}\} \tag{12.141}$$

$$+(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-u}du,$$

serisini elde ederiz. Bu oldukça ilginç bir seridir: Oran testini uygularsak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(p+n)!}{(P+n-1)!}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p+n}{x} \to \infty \tag{12.142}$$

buluruz. Bu bize x'in bütün sonlu değerleri için bu serinin ıraksak olduğunu gösterir.

Bu seriyi $I(x,p)$ fonksiyonunun tanımlanmasında başarısız olarak rafa kaldırmadan önce, $I(x,p)$ fonksiyonu ile yukarıdaki serinin n'inci kısmi toplamı arasındaki farkın mutlak değerini bulalım:

$$|I(x,p) - S_n(x,p)| \leq (-1)^{n+1}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-n-1}du = R_n(x,p). \tag{12.143}$$

Yukarıdaki integrali $u = v + x$ dönüşümünü kullanarak,

$$\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-u-1}du = e^{-x}\int_0^\infty e^{-v}(v+x)^{-p-n-1}dv \text{ ve} \tag{12.144}$$

$$\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-u-1}du = \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}\int_0^\infty e^{-v}(1+\frac{v}{x})^{-p-n-1}dv \tag{12.145}$$

şeklinde yazarsak, yukarıdaki integralin x'in büyük olduğu değerler için

$$\int_0^\infty e^{-v}(1+\frac{v}{x})^{-p-n-1}dv \to 1 \tag{12.146}$$

olduğunu buluruz. Kalan terim olan R_n ise,

$$R_n = |I(x,p) - S_n(x,p)| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!}\frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} \tag{12.147}$$

olur. Bu da bize x'in yeterince büyük değerleri için S_n ifadesinin, $I(x,p)$ fonksiyonu yeterince duyarlı bir şekilde hesaplamak için kullanılabileceğini gösterir. Doğal olarak hesaplanacak olan kısmi toplamın R_n değeri, arzu edilen duyarlılığa bağlı olacaktır. Bu yüzden de bu tür serilere **asimtotik** veya bazen de **yarı yakınsak seriler** denir.

12.10 Fizikte Iraksak Seriler

Buraya kadar verilen bir serinin yakınsak olup olmadığını nasıl kontrol edeceğimizi ve eğer seri yakınsak ise, toplamını nasıl bulacağımızı gösterdik. Kuantum alan teorisinde zaman zaman enerji, yük, kütle gibi fiziksel büyüklüklerin ıraksak seriler olarak karşımıza çıktıklarını görürüz. Doğal olarak doğada sonlu değerler aldığını bildiğimiz bu özelliklerin sonsuz çıkmaları, teorimizdeki bir takım patalojilerden kaynaklanmaktadır. Geleceğin daha gelişmiş teorilerinde bu sorunun ortadan kalkması beklenir. Ancak, mevcut teoriler içinde bile bir takım yöntemlerle bu sonsuz ifadelerden sonlu ve deneylerle çok yüksek düzeylerde uyuşan değerler elde etmek mümkündür. Bunun için yapılan işlemin ilk ayağını ıraksak serinin içindeki sonsuz olan kısmın ayrılması ve sınıflandırılması teşkil eder ki, buna **regülarizasyon** denir. İşlemin ikinci ayağı ise, fiziksel bir argümanla sonsuz olan kısımların ayıklanması veya atılmasıdır. Bunun da adı **renormalizasyondur.** Bir teorinin renormalize edilebilmesi çok önemli bir özelliktir. Kuantum elektrodinamiği renormalize edilebilen bir teoridir. Gravitasyon ise, sonsuz sayıda sonsuz değerler alan ifadeler içerdiğinden renormalize edilemez. 1999 Nobel Fizik ödülü Gerardus't Hooft ve Martinus Veltman'a, Salam ve Weinberg'in birleştirilmiş elektromanyetik ve zayıf etkileşmeler (elektroweak) teorisinin renormalize edilebildiğini gösterdiklerinden dolayı verilmiştir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

12.10.1 *Casimir Etkisi ve Renormalizasyon*

Tek boyutta iki plaka arasında kütlesiz skalar alanın, periyodik sınır şartları ile kuantum boşluk enerjisini hesaplayalım. Plakalar arasındaki mesafe L olarak alınırsa özfrekanslar,

$$\omega_n = \frac{2\pi c\hbar}{L} \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{12.148}$$

olarak verilir. Plakalar arasındaki kuantum boşluk enerjisi ise,

$$\overline{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \tag{12.149}$$

$$= \frac{\pi c\hbar}{L}\sum_{n=0}^{\infty} n \tag{12.150}$$

şeklinde ifade edilen bir ıraksak seridir. Bu seriyi regülarize etmek için $e^{-\alpha\omega_n}$ gibi bir test fonsiyonu ile çarparsak,

$$\overline{E}_0 = \frac{\pi c\hbar}{L}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{2\pi cn}{L}\alpha} \tag{12.151}$$

şeklini alır ve toplamı da kolayca (Buradan itibaren ħ=c=1 olarak alıcağız.)

$$\overline{E}_0 = \frac{2\pi}{L} e^{-2\pi\alpha/L}[1 - e^{-2\pi\alpha/L}]^{-2} \tag{12.152}$$

olarak bulunur. Burada $e^{-\alpha n}$ ıraksak serimizi yakınsak hale getirmek için kullandığımız bir test fonksiyonu, α ise, renormalizasyon parametresidir. Test fonksiyonunu seçerken dikkat etmemiz gereken, (12.150) serisinin ıraksamasına sebep olan yüksek frekansların bir şekilde bastırılma ihtiyacıdır. Doğal olarak sonuç test fonksiyonunun etkisinin ortadan kalktığı durumda, bir başka deyişle $\alpha \to 0$ limitinde bulunacaktır. Daha gelişmiş yöntemler sonucun test fonksiyonunun inceliklerine bağlı olmadığını göstermiştir.

(12.152) ifadesini α parametresi cinsinden açarsak,

$$\overline{E}_0 = \frac{L}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{6L} + (\alpha\text{'nin positif kuvvetleri}) \tag{12.153}$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi $\alpha \to 0$ limitinde boşluk enerjisi hala sonsuzdur. Ancak, kullandığımız test fonksiyonu bize boşluk enerjisi içindeki sonsuz olan kısmı,

$$\frac{L}{2\pi\alpha^2} \tag{12.154}$$

şeklinde açık olarak yazabilmemizi sağlamıştır. İkinci terim ise, sonlu bir sayıdır.

Plakaların olmadığı boş bir uzayda özfrekans dağılımı sürekli olacağından, boşluk enerjisi

$$\widetilde{E}_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \omega d\omega \tag{12.155}$$

şeklinde bir integral olarak verilecektir. Iraksak olan bu integrali aynı test fonksiyonu ile düzenlersek (regüle) edersek,

$$\widetilde{E}_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \omega e^{-\alpha\omega} d\omega \tag{12.156}$$

$$= \frac{L}{2\pi\alpha^2} \tag{12.157}$$

elde ederiz. Bu ise, tek boyutta plakalar arasındaki boşluk enerjisi hesabında karşımıza çıkan sonsuz ifadenin aynıdır. Hiç bir şeyin olmadığı uzayda boşluk enerjisini sıfır olarak almak en mantıklı ve deneyimlerimizle en uyumlu seçim olacağından, plakaların arasındaki **renormalize edilmiş** boşluk enerjisini, $\overline{E}_0$ değerinden $\widetilde{E}_0$ değerini çıkartarak ve $\alpha \to 0$ limitini alarak,

$$E_0 = \lim_{\alpha\to 0}[\overline{E}_0 - \widetilde{E}_0], \tag{12.158}$$

şeklinde tanımlarız. Bu ise, bize E_0 değerini

$$E_0 = \lim_{\alpha\to 0}[\frac{L}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{6L} + (\alpha\text{'nın positif kuvvetleri}) - \frac{L}{2\pi\alpha^2}\ ],$$

$$E_0 = -\frac{\pi}{6L} \tag{12.159}$$

olarak verir. Burada eksi işareti plakaların birbirilerini çektiklerini göstermektedir.

Bu yöntem, üzerlerinde yük bulunmayan ve aralarında L mesafesi bulunan iki sonsuz iletken plakanın arasındaki elektromanyetik boşluk enerjisini bulmak için kullanılırsa, enerji yoğunluğu

$$\rho_0 = -\frac{1}{1440L} \tag{12.160}$$

olarak bulunur ve plakaların birbirilerini çektiği sonucu tekrar ortaya çıkar.

Kuantum fiziğinin bu çok ilginç ve bir o kadar da şaşırtıcı sonucu Casimir etkisi olarak bilinir. Casimir etkisi daha gelişmiş yöntemlerle, test fonksiyonundan bağımsız ve kovariant olarak da doğrulanmış olup, değişik geometrilerde plakalar ve eğik uzay-zamanlar için de hesaplanmıştır. Casimir etkisi deneysel olarak kanıtlanmış olup, fizikte boşluk kavramımızda köklü değişiklikler yapacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 2004 II. baskı

Bu hesaplarda unutulmaması gereken; renormalizasyonun teorimizdeki patolojiyi tam olarak ortadan kaldırmadığıdır. Plakaların olmadığı durumda boşluk enerjisi hala sonsuzdur. Gravitasyonun ihmal edildiği durumlarda sadece enerji farklarının anlamlı olduğunu hatırlarsak, Renormalizasyon bize hiç bir şeyin olmadığı bir uzayda kuantum boşluk enerjisini sıfır olarak tanımlayarak, diğer durumların enerjilerini ona göre hesaplama olanağını vermiştir.

12.10.2 Casimir Etkisi ve MEMS

İki yüksüz metal plaka arasındaki Casimir kuvveti normalde çok küçüktür ve A/d^4 gibi davranır. Yüzey alanı $1cm^2$ ve aralarındaki mesafe $1\mu m$ olan iki plaka arasındaki kuvvet $10^{-7}N$ civarında olup, kabaca bir su damlasının ağırlığı kadardır. Aradaki mesafe tipik bir atomun 100 katı olan $1nm$'ye indirilirse, bu etki $1atm$ basıncına çıkar. Son zamanlarda kısaca MEMS (Micro electromechanical systems) olarak bilinen mikro elektromekanik sistemlerde Casimir etkisi önemli yer tutmaktadır. Bu sistemler, mikro ve mikroaltı ölçeklerde üretilen silikon çipler içine yerleştirilmiş, hareketli mekanik parçalardır. Bunlar mikro soğutucular, sensörler, tahrik mekanizmaları, ve anahtarlar olabilir. Bu tip devrelere günlük hayatımızdan bir örnek, arabalardaki hava yastıklarının basınç sensörleridir. MEMS devrelerinin üretiminde Casimir etkisi bazen yüzeyler arasında yapışma gibi istenmeyen etkiler oluşturabileceği gibi, gerektiğinde dönme, itme, salınma gibi mekanik etkiler üretmek içinde kullanılır (Milton).

12.11 Sonsuz Çarpımlar

Sonsuz çarpımlar matematiksel fizikte zaman zaman karşımıza çıkarlar. Bir çok bilinen fonksiyon sonsuz çarpım olarak yazılabildiği gibi, bazı transandental, yani iki tamsayının kesri olarak ifade edilemeyen sayıların hesaplanmasında da kullanılırlar. f_n gibi pozitif terimlerden oluşan bir N. kısmi çarpım,

$$P_N = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 ... f_N = \prod_{n=1}^{N} f_n \tag{12.161}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer,

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} f_n \to P \tag{12.162}$$

limiti var ise, sonsuz çarpım yakınsaktır denir ve

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} f_n \tag{12.163}$$

yazılır. $\lim_{n\to\infty} f_n > 1$ ise, sonsuz çarpım ıraksaktır veya tersi doğru ise, sıfıra yakınsar. Eğer $0 < \lim_{n\to\infty} f_n < 1$ ise, sonsuz çarpımı

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{12.164}$$

olarak yazmak yakınsaklık ve ıraksaklığa karar verme açısından daha uygundur. Bu durumda $n \to \infty$ limitinde $a_n \to 0$ olması yakınsaklık için gereklidir, fakat yeterli değildir. Bir başka deyişle, $a_n \to 0$ olan bir sonsuz çarpım ıraksak olabilir fakat yakınsak olan her çarpım için mutlaka $a_n \to 0$ şartı sağlanır. Yakınsak bir sonsuz çarpım ile sonsuz seriler arasındaki ilişki sonsuz çarpımın doğal logaritması alınarak gösterilebilir.

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) \tag{12.165}$$

Teorem: $0 \le a_n < 1$ ise, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ve $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ sonsuz çarpımları,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi ile beraber yakınsak veya ıraksaktır.

İspat:

$$e^{a_n} = 1 + a_n + \frac{a_n^2}{2!} + ... \tag{12.166}$$

olduğundan $1 + a_n \le e^{a_n}$ yazılabilir. Böylece,

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) \le \prod_{n=1}^{N} e^{a_n} = e^{\{\sum_{n=1}^{N} a_n\}} = e^{S_N} \tag{12.167}$$

eşitliği kurulabilir. $N \to \infty$ limiti alınırsa,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \le e^{\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\}} \tag{12.168}$$

olacağından sonsuz çarpım için bir üst sınır bulunur. Bir alt sınır bulmak için kısmi çarpımı

$$P_N = 1 + \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j + ... \tag{12.169}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde açık olarak yazdığımızda, $a_i \geq 0$ verildiğinden,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{12.170}$$

olacaktır. Sonuç olarak, sonsuz çarpım için alt ve üst sınır $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine bağlı olacağından, bu serinin yakınsaklığı sonsuz çarpımında yakınsak olması sonucunu doğuracaktır. $\Pi_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ için ispat benzer şekilde yapılır.

12.11.1 Sin, Cos ve Gama Fonksiyonları

n. dereceden n reel kökü olan bir polinom aşağıdaki gibi sonlu bir çarpım şeklinde yazılabilir:

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i). \tag{12.171}$$

Böylece sonsuz tane kökü olan bir fonksiyon da sonsuz çarpım olarak ifade edilebilir. sin ve cos fonksiyonlarının sonsuz çarpım olarak ifadeleri de kompleks analiz yöntemi kullanılarak bulunabilir.

z-düzleminde $z = a_n$ $(0 < |a_1| < |a_1| < ...)$ gibi basit tekil noktaları olan bir fonksiyon,

$$F(z) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\{\frac{1}{(z-a_n)} + \frac{1}{a_n}\} \tag{12.172}$$

olarak ifade edilebilir. Bu netice Mittag-Lefler teoremi olarak da bilinir. Burada b_n bu fonksiyonun a_n noktasındaki rezidüsüdür. Daha önce z-düzleminin bütün noktalarında analitik olan bir fonksiyona tüm fonksiyon dendiğini görmüştük. Böyle bir fonksiyonun f'/f olarak verilen logaritmik türevinin tekil noktaları olacağından, Laurent seri açılımı olacaktır. Eğer $f(z)$ tüm fonksiyonunun $z = a_n$ noktası basit sıfır noktası ise,

$$f(z) = (z-a_n)g(z) \tag{12.173}$$

olarak yazılabilir. Burada $g(z)$, $g(z) \neq g(a_n)$ olan analitik bir fonksiyondur. (12.173) formülünü kullanarak

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{(z-a_n)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{12.174}$$

yazabiliriz. a_n noktası f'/f fonksiyonunun basit tekil noktası olduğundan (12.172) formülünde $b_n = 1$ alarak

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{(z-a_n)} + \frac{1}{a_n}\} \tag{12.175}$$

yazarız. Bunun da integralini alırsak,

$$\ln\frac{f(z)}{f(0)} = z\frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(z-a_n) - \ln(-a_n) + \frac{z}{a_n}\right] \tag{12.176}$$

bulunur. Bu ise,

$$f(z) = f(0)\exp\left[z\frac{f'(0)}{f(0)}\right]\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})\exp(\frac{z}{a_n}) \tag{12.177}$$

genel ifadesini verecektir. Bu sonucu *sin* ve *cos* fonksiyonlarına uyarlar ve reel değerler için $z = x$ alırsak,

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}) \tag{12.178}$$

ve

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}) \tag{12.179}$$

bulunacaktır. Bu çarpımlar bütün sonlu x değerleri için yakınsaktır. $\sin x$ için $a_n = \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ olacağından $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{x^2}{\pi^2}\zeta(2) \\ &= \frac{x^2}{6}\end{aligned} \tag{12.180}$$

sin ifadesinde $x = \frac{\pi}{2}$ alırsak,

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(2n)^2}) \\ &= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2})\end{aligned} \tag{12.181}$$

olacağından, $\frac{\pi}{2}$ için Walli'in ünlü sonsuz çarpım ifadesi de

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right) \\ &= \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\end{aligned} \tag{12.182}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde elde edilir. Sonsuz çarpımların diğer bir kullanımı da Γ fonksiyonunun

$$\Gamma(x) = \left[xe^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{r}) e^{-\frac{x}{r}} \right]^{-1} \tag{12.183}$$

şeklindeki gösterimidir. Burada γ Euler-Mascheroni sabitidir ve

$$\gamma = 0.577216.... \tag{12.184}$$

olarak verilir. (12.183) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(-x) &= -\left[xe^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{r}) e^{-\frac{x}{r}} xe^{-\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{r}) e^{\frac{x}{r}} \right]^{-1} \quad (12.185) \\ &= \left[x^2 \prod_{r=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{r^2}) \right]^{-1} \quad (12.186) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu ise,

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x} \tag{12.187}$$

şeklinde yazılabilir.

12.12 Problemler

1. (12.153) denklemini Euler-Maclaurin toplama formülünü kullanarak yazınız.
2. Üç boyuttaki bir küre üzerinde kütlesiz konformal skalar alanın Casimir enerjisini hesaplayınız.
3. $\sum_{n=0}^{50} n^3$ serisinin toplamını hesap makinası kullanmadan binde bir duyarlığında bulunuz. Kaç terim topladınız?
4. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını kontrol ediniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp(-n^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n)^2}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^4}.$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
3. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

13

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

Fizik ve mühendislik uygulamalarda sık sık

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)\kappa(\alpha, t)dt \tag{13.1}$$

şeklinde verilen integrallerle karşılaşırız. Burada $g(\alpha)$, $\kappa(\alpha, t)$ çekirdeğine göre $f(t)$ fonksiyonunun integral dönüşümü olarak tanımlanır. İntegral dönüşümler kısmi veya sıradan diferansiyel denklemlerin çözümlerinden, belirli integrallerin hesaplanmasına kadar geniş bir yelpazede uygulama alanı bulurlar. En çok karşılaşılan integral dönüşümlerinden biri Fourier dönüşümüdür:

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt \tag{13.2}$$

Fourier cos ve sin dönüşümleri ise,

$$g(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\alpha t)dt, \tag{13.3}$$

$$g(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\alpha t)dt \tag{13.4}$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu dönüşümlerdeki çekirdekler dalgaların tanımlanmasında kullanıldığından, Fourier dönüşümleri genellikle dalgalarla ilgili konularda karşımıza çıkarlar. X-ışınlarının atomlardan saçılması buna tipik bir örnektir. Saçılan dalgaların genliğinin Fourier dönüşümünden, atomların elektron dağılımları elde edilir.

13.1 Diğer Sık Karşılaşılan Dönüşümler

$e^{-\alpha t}$, $tJ_n(\alpha t)$ veya $t^{\alpha - t}$ çekirdeklerinin kullanımı ile kurulan dönüşümler diğer sık karşılaşılan dönüşümlerdir. Bunlardan,

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}dt \tag{13.5}$$

şeklinde verilen Laplace dönüşümüdür ve sıradan diferansiyel denklem sistemlerini cebirsel denklem sistemlerine dönüştürmekte çok yararlıdır. Hankel veya Fourier-Bessel dönüşümü ise,

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t) t J_n(\alpha t) dt \tag{13.6}$$

olarak verilir ve silindirik koordinatlarda potansiyel enerji hesaplarında karşımıza çıkar. Mellin dönüşümü ise,

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t) t^{\alpha - t} dt \tag{13.7}$$

şeklindedir.

Bu dönüşümlerin hepsinin ortak özelliği doğrusal olmalarıdır.Yani,

$$g_1(\alpha) = \int_a^b f_1(t)\kappa(\alpha,t)dt \quad \text{ve} \quad g_2(\alpha) = \int_a^b f_2(t)\kappa(\alpha,t)dt \tag{13.8}$$

dönüşümleri var olursa,

$$g_1(\alpha) + g_2(\alpha) = \int_a^b [f_1(t) + f_2(t)]\,\kappa(\alpha,t)dt \quad \text{ve} \tag{13.9}$$

$$cg_1(\alpha) = \int_a^b [c\ f_1(t)]\kappa(\alpha,t)dt$$

ifadeleri de doğru olacaktır. Burada c sabit bir sayıdır. Genel bir integral dönüşümü operatör olarak,

$$g(\alpha) = \pounds f(t) \tag{13.10}$$

şeklinde de gösterilebilir. Ters dönüşüm ise,

$$f(t) = \pounds^{-1} g(\alpha) \tag{13.11}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\pounds$ operatörü

$$\pounds = \int_a^b dt\kappa(\alpha,t) \tag{13.12}$$

olarak tanımlanır ve integral dönüşümü bulunacak olan fonksiyon üzerine etki ettirilir. Genel olarak uygulamalarda bir dönüşümün ters dönüşümünü bulmak esas problemi oluşturur.

13.2 Fourier İntegralinin Çıkarılması

13.2.1 Fourier Serisi

Fourier serileri $[0, 2\pi]$ ve $[-L, L]$ gibi sınırlandırılmış veya $(-\infty, \infty)$ aralığında periyodik bir fonksiyonun gösteriminde çok yararlıdır. Ancak, şu

anda bizim problemimiz $(-\infty, \infty)$ aralığında periyodik olmayan bir fonksiyonun gösteriminin nasıl yapılacağıdır. Fiziksel olarak bu verilen bir dalga paketini sin ve *cos* dalgalarıyla ifade etmeye eşdeğerdir. $f(x)$, $[-L, L]$ aralığında Fourier serisine açılabilme şartlarını sağlayan bir fonksiyon ise,

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{13.13}$$

şeklinde gösterilir. Fourier katsayıları olan a_n ve b_n

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \tag{13.14}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \tag{13.15}$$

formüllerinden rahatlıkla hesaplanır. a_n ve b_n katsayılarını Fourier serisinde yerlerine yazarsak ve

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \tag{13.16}$$

eşitliğini kullanırsak,

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{L}(t-x)\right]dt \tag{13.17}$$

denklemini elde ederiz. Şimdi bu ifadenin süreklilik limitini $(L \to \infty)$alalım. Bu limitte $[-L, L]$ aralığı $(-\infty, \infty)$ olacaktır. Trigonometrik Fourier serisinde $\omega = \frac{n\pi}{L}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ olduğundan, iki komşu özfrekans arasındaki fark

$$\Delta\,\omega = \frac{\pi}{L} \tag{13.18}$$

şeklinde olacaktır. Bunu kullanarak da yukarıdaki denklem

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\,\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt \tag{13.19}$$

şeklini alır. Bu ifadenin $L \to \infty$ limitini alırsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\,\omega \to \int_0^\infty d\omega \tag{13.20}$$

olacağından Fourier integrali de

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt \tag{13.21}$$

Ten ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde elde edilir. Bu ifade de $L \to \infty$ olurken,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \tag{13.22}$$

integralinin var olduğu ve sonlu bir değer aldığı varsayılmıştır. Bir fonksiyonun Fourier integralinin alınabilmesi için, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ integralinin yakınsak olması yeterlidir.

Fourier integrali üstel fonksiyon cinsinden de yazılabilir. $\sin\omega(t-x)$ fonksiyonu ω değişkenine göre tek fonksiyon olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)dt = 0 \tag{13.23}$$

yazabiliriz. $\cos\omega(t-x)$ fonksiyonu da ω değişkenine göre çift fonksiyon olacağından, Fourier integralindeki ω integralinin aralığı da $(-\infty,\infty)$ alınabilir:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt. \tag{13.24}$$

Buradan da denklem (13.23)'ü i sayısı ile çarpıp denklem (13.24) ile toplarsak, Fourier integralinin üstel şekli,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{13.25}$$

olarak elde edilir. Burada ω herhangi bir matematiksel değişkendir. Ancak, dalgalarla ilgili problemlerde frekansa karşı gelir. Bundan dolayı, Fourier integralini herhangi bir sinyalin (sonlu veya sonsuz) sin tipi dalgalar cinsinden ifadesi olarak yorumlayabiliriz.

13.2.2 Dirac-Delta Fonksiyonu İlişkisi

Fourier integralini

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}d\omega\right\}dt \tag{13.26}$$

şeklinde yazarsak, kıvrık parantez içindeki integralin

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}d\omega \tag{13.27}$$

şeklinde verilen Dirac-delta fonksiyonu olduğu görülür. Dirac-delta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tanıma sahiptir:

$$\delta(x-a) = 0 \qquad x \neq a,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1, \tag{13.28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a).$$

Burada $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olduğu farzedililir.

13.3 Fourier Dönüşümü ve Ters Fourier Dönüşümü

Fourier integral teoremini (13.25)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{i\omega t'}dt'\right]$$

şeklinde yazarak, $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{13.29}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Dolayısı ile Fourier ters dönüşümünün de

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{13.30}$$

olacağı açıktır.

13.3.1 Fourier Sin ve Cos Dönüşümleri

$f(t)$ fonksiyonunu çift fonksiyon olarak alalım. Bu durumda

$$f(-x) = f(x) \tag{13.31}$$

olacağından Fourier integralinde

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \tag{13.32}$$

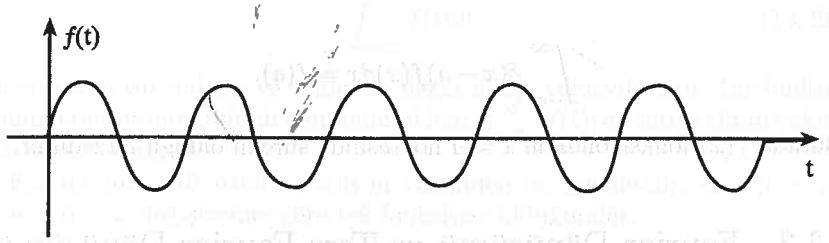
yazarsak,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right)dt \tag{13.33}$$

olacaktır. Burada ise, $\sin\omega t$ 'nin t'ye göre tek fonksiyon olduğunu düşünürsek,

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(t)\cos\omega t dt \tag{13.34}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 13.1. **N=5 için dalga treni.**

şeklinde verilen Fourier cos dönüşümünü elde ederiz. Ters dönüşümü de

$$f_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_c(\omega) \cos \omega t d\omega \tag{13.35}$$

olarak benzer şekilde elde edilir. Eğer $f(x)$ tek fonksiyon olursa,

$$f(-x) = -f(x) \tag{13.36}$$

olacağından Fourier integralinden,

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(t) \sin \omega t dt \tag{13.37}$$

şeklinde Fourier sin dönüşümü ve benzer şekilde de

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_s(x) \sin \omega x d\omega \tag{13.38}$$

olarak ters Fourier sin dönüşümü elde edilir.

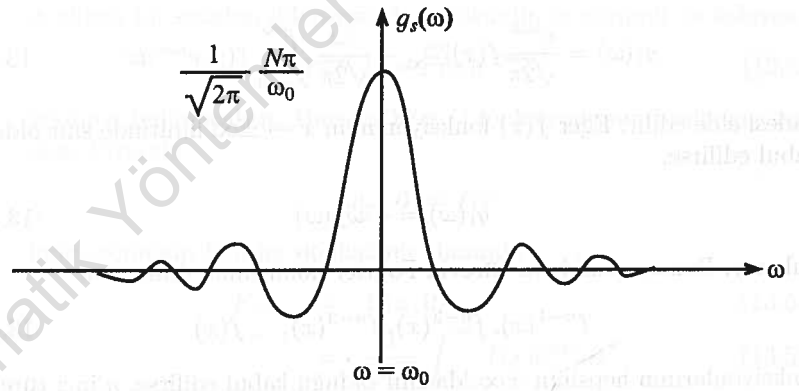
Örnek (13.1) ***Sonlu bir dalga treninin Fourier analizi:*** Sonlu bir dalga treninin Fourier dönüşümünü bulalım. Sonlu bir dalga treni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_o t & |t| < \frac{N\pi}{\omega_o} \\ 0 & |t| > \frac{N\pi}{\omega_o} \end{cases} \tag{13.39}$$

N=5 için grafiği de Şekil (13.1)'de gösterildiği gibidir.

Burada $f(t)$ tek fonksiyondur. Bu nedenle Fourier sin dönüşümünü

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin(\omega_o - \omega)\frac{N\pi}{\omega_o}}{2(\omega_o - \omega)} - \frac{\sin(\omega_o + \omega)\frac{N\pi}{\omega_o}}{2(\omega_o + \omega)} \right] \tag{13.40}$$



ŞEKİL 13.2. $g_s(\omega)$ **fonksiyonu.**

olarak elde ederiz. ω_o ve $\omega \sim \omega_o$ için sadece ilk terim önemli olacağından $g_s(\omega)$ fonksiyonu Şekil (13. 2)'de olduğu gibi verilir.
Bu tek bir yarık için kırınım deseni genlik eğrisidir. Bunun sıfırları

$$\frac{\omega_o - \omega}{\omega_o} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \pm\frac{1}{N} \pm \frac{2}{N}, vs \tag{13.41}$$

noktalarındadır. Merkezi maksimum dışındaki katkılar küçük olduğundan, Sinyalimizi oluşturan dalgaların frekans dağılımının tatmin edici bir tanımı için,

$$\Delta\omega = \frac{\omega_o}{N} \tag{13.42}$$

aralığındaki frekansları almak yeterlidir. Görülüyor ki, uzun bir dalga treni için frekans dağılımı dar olacaktır. Kısa bir sinyal için ise, frekans dağılım genişliği artacaktır.

13.3.2 Türevin Fourier Dönüşümü

Bu kısımda Fourier dönüşümlerinin kısmi ve sıradan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kulanımına hazırlık olarak, türevlerin Fourier dönüşümlerinin nasıl bulunacağını göreceğiz. Önce $\frac{df(x)}{dx}$ türevinin Fourier dönüşümüne bakarsak,

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx \tag{13.43}$$

olduğunu görürüz. Burada kısmi integrasyon yöntemiyle integral alınırsa,

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \qquad (13.44)$$

ifadesi elde edilir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x \to \pm\infty$ limitinde sıfır olduğu kabul edilirse,

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega) \qquad (13.45)$$

bulunur. Benzer şekilde n. türevin Fourier dönüşümü alınırsa ve

$$f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), f^{n-3}(x), ..., f(x) \qquad (13.46)$$

fonksiyonlarının hepsinin $\pm\infty$ 'da sıfır olduğu kabul edilirse, n'inci türevin Fourier dönüşümü de

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega) \qquad (13.47)$$

olarak elde edilir.

Örnek (13.2) ***Fourier dönüşümü ve kısmi diferansiyel denklemler:*** İntegral dönüşümleri kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılabilir. Sonsuz uzunlukta bir telin serbest olarak titreşimini göz önüne alalım. Bu telin üzerinde serbest hareket eden salınımların hareketini belirleyen ve

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (13.48)$$

olarak verilen dalga denklemidir. Burada $y(x,t)$, telin x noktasında ve t zamanında denge noktasından sapmasını vermektedir. Yukarıdaki denklemi çözebilmek için önce bir başlangıç şartı verilmelidir. Telin $t = 0$ zamanındaki şeklini

$$y(x,0) = f(x) \qquad (13.49)$$

olarak alalım. Dalga denkleminin Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} e^{i\alpha x} dx, \qquad (13.50)$$

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha,t) = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 Y(\alpha,t)}{dt^2} \qquad (13.51)$$

buluruz. Burada $Y(\alpha,t)$, $y(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre Fourier dönüşümüdür ve

$$Y(\alpha,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x,t) e^{i\alpha x} dx. \qquad (13.52)$$

olarak verilir. Buradan görüldüğü gibi, $Y(a,t)$ için çözülmesi gereken denklem bir sıradan diferansiyel denklemdir ve çözümü de kolayca,

$$Y(\alpha,t) = F(\alpha) e^{\pm iv\alpha t} \qquad (13.53)$$

şeklinde bulunacaktır. Burada $Y(\alpha,t)$ fonksiyonunun başlangıç şartı olan $F(\alpha)$ da

$$y(x,0) = f(x)$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümü alınarak,

$$F(\alpha) = Y(\alpha,0) \qquad (13.54)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \qquad (13.55)$$

olarak bulunur. Doğal olarak bizim için anlaşılması ve fiziksel olarak yorumlaması kolay olan $y(x,t)$ fonksiyonudur. Bunun için $Y(a,t)$ fonksiyonunun ters dönüşümünü alırsak,

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha,t) e^{-i\alpha x} d\alpha, \qquad (13.56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)} d\alpha$$

buluruz. Bu son ifade $F(\alpha)$'nın ters Fourier dönüşümünü almak anlamına geldiğinden, genel çözüm de

$$y(x,t) = f(x \mp vt) \qquad (13.57)$$

şeklinde verilir. Bu çözüm bize başlangıçtaki şeklini koruyarak v hızı ile sağa veya sola doğru hareket eden dalgaları vermektedir.

13.3.3 Konvolusyon Teoremi

$f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyon verilsin ve bunların Fourier dönüşümleri $F(t)$ ve $G(t)$ olsun. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolusyonu

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy \qquad (13.58)$$

olarak tanımlanır. Fourier dönüşümünün tanımını kullanarak sağ tarafı

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-it(x-y)} dt dy,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-itx} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ity} dy,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-itx} dt, \qquad (13.59)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

şeklinde, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının dönüşümlerinin çarpımının ters dönüşümü olarak ifade ederiz. Bu da iki fonksiyonun konvolusyonundan başka bir şey değildir. $x = 0$ özel durumunda ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(-y)dy \tag{13.60}$$

eşitliği elde edilir.

13.3.4 Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Fourier dönüşüm operatörünü $\Im$ olarak tanımlarsak, $f(x)$'in Fourier dönüşümü

$$F(k) = \Im\{f(x)\} \tag{13.61}$$

şeklinde gösterilir. $f(x)$'in Fourier dönüşümünün var olması için yeterli şart, $f(x)$ fonsiyonunun mutlak değerinin integrali alınabilir olmasıdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx. \tag{13.62}$$

13.3.5 Üç Boyutta Fourier Dönüşümü

Daha önce tek boyutta yazdığımız Fourier dönüşümü 3-boyut için de yazılabilir:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x f(\vec{x}) e^{i\vec{k}.\vec{x}}. \tag{13.63}$$

Ters dönüşümü ise,

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \phi(\vec{k}) e^{-i\vec{k}.\vec{x}}. \tag{13.64}$$

olacaktır. Buradan da 3 boyutta Dirac fonksiyonu,

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{x}')} \tag{13.65}$$

olarak elde edilir. Bu formüller kolayca n-boyuta da uyarlanabilir.

13.4 Fourier Dönüşümü ile İlgili Bazı Teoremler:

Parseval Teoremi I

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{13.66}$$

Parseval Teoremi II

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx. \tag{13.67}$$

İspat: Bu teoremleri ispatlamak için $g(x)$ fonksiyonunun dönüşümünde $k \to -k$ dönüşümünü yapalım:

$$G(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx. \tag{13.68}$$

(13.68) integralini $F(k)$ ile çarpıp,$(-\infty, \infty)$aralığında k değişkeni üzerinden integralini alırsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx \tag{13.69}$$

olacaktır. İntegral sırasının değiştirilebilmesi için yeterli şart

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx \tag{13.70}$$

integrallerinin var olmasıdır. Bunların var olduğunu düşünerek integral sırasını değiştirirsek,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)dke^{-ikx} \tag{13.71}$$

elde edilir. Sağ taraftaki $F(k)$'nın ters Fourier dönüşümünün varlığını kabul edersek ikinci Parseval teoremi ispatlanmış olur. Eğer (13.71) eşitliğinde

$$f(x) = g(x) \tag{13.72}$$

alırsak ve

$$G(-k) = G(k)^* \tag{13.73}$$

olduğunu hatırlarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(k)|^2\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx \tag{13.74}$$

şeklinde birinci Parseval teoremi ispatlanır. Bu ispattan da görülüyor ki, ters Fourier dönüşümünün noktasal olarak geçerliliği de gerekli değildir. Örneğin;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)dke^{-ikx} \tag{13.75}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

integralinin değeri ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \tag{13.76}$$

integralinin değeri etkilenmedikçe bazı yalnız tekil noktalarda $f(x)$ fonksiyonunun değerinden farklı olabilir.

Örnek (13.3) ***Tek boyutta difüzyon problemi:*** Su ile dolu uzun bir boru içinde x_o noktasına M gm ağırlığında bir parça tuz konulmuş olsun. Tuzun konsantrasyonunu zamana ve konuma bağlı olarak bulalım. Problemi basitleştirmek için sonsuz uzunlukta bir boru düşünelim. Boru dar olduğundan, tuz yoğunluğunun boru kesiti boyunca olan değişimini de yok sayabiliriz. Böylece yoğunluk,

$$\rho = \rho(x,t)\ gm/cm^3 \tag{13.77}$$

şeklinde bir fonksiyon olur. Bu problemdeki tuz yoğunluğu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{13.78}$$

şeklinde verilen difüzyon kısmi diferansiyel denklemini sağlayacaktır. Başlangıç şartımız ise, $t = 0$ anında yoğunluk x_o noktası hariç her yerde sıfır olacağından,

$$\rho(x,0) = \left(\frac{M}{A}\right)\delta(x - x_o)\,. \tag{13.79}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün zamanlar için

$$\lim_{x\to\pm\infty} \rho(x,t) = \rho(\pm\infty,t) = 0 \tag{13.80}$$

şartı, toplam tuz miktarının korunumunu verir. Bu problemin sınır şartları titreşen tel problemine benzemekle birlikte, temel farkı $\rho(x,t)$ fonksiyonunun sonsuz aralığın uç notalarında sıfır olmasıdır. Bunun anlamı da Fourier serisinden çok Fourier dönüşümü ile ifade edilen bir çözümün varlığıdır. Toplam tuz miktarı sabit olacağından

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)Adx = m \tag{13.81}$$

yazabiliriz. Bu Fourier dönüşümünün varlığı için yeterli şarttır. Kısmi diferansiyel denklem olan difüzyon denkleminin Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\frac{dR(k,t)}{dt} = -Dk^2R(k,t) \tag{13.82}$$

şeklinde verilen bir sıradan diferansiyel denklem elde ederiz. Burada $R(k,t)$ fonksiyonu, boru boyunca yoğunluğun ifadesi olan $\rho(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre Fourier dönüşümüdür. $R(k,t)$ için başlangıç şartı da $\rho(x,t)$'nin başlangıç şartının Fourier dönüşümü alınarak,

$$R(k,0) = \Im\left\{\left(\frac{M}{A}\right)\delta(x - x_o)\right\} = \frac{M}{A}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx_o} \tag{13.83}$$

şeklinde bulunur. (13.82) denkleminin çözümü ise,

$$R(k,t) = R(k,0)e^{-Dk^2t} \tag{13.84}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak da $\rho(x,t)$'yi bulmak için,

$$R(k,t) = \frac{M}{A\sqrt{2\pi}}e^{ikx_o}e^{-Dk^2t} \tag{13.85}$$

fonksiyonunun ters dönüşümünü alır ve aşağıdaki düzenlemeleri yaparsak,

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_o}e^{-Dk^2t}e^{-ikx}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2t-ik(x-x_o)}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k^2+ik\frac{(x-x_o)}{Dt})}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt\left(k^2+ik\frac{(x-x_o)}{Dt}-\left(\frac{(x-x_o)}{2Dt}\right)^2+\left(\frac{(x-x_o)}{2Dt}\right)^2\right)}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k+\frac{i(x-x_o)}{2Dt})^2}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k+\frac{i(x-x_o)}{2Dt})^2}dk \\
&= \frac{M}{A2\pi}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dtu^2}du \\
&= \frac{M}{A2\pi}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}}\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \quad \text{ve}
\end{aligned} \tag{13.86}$$

$$\rho(x,t) = \frac{M}{A}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}} \tag{13.87}$$

bulunacaktır. Dikkat edilirse bu çözüm difüzyon denklemini sağlar ve $t \to 0$ limiti de olması gerektiği gibi,

$$\lim_{t\to 0} \rho(x,t) = \left(\frac{M}{A}\right)\delta(x - x_o) \tag{13.88}$$

olarak bulunur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

13.5 Temel Laplace Dönüşümleri

$F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} f(s) &= \pounds\{F(t)\} \\ &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}F(t)dt \qquad (13.89) \\ &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt. \quad s>0 \text{ ve reel} \end{aligned}$$

Bu dönüşümün yapılabilmesi için,

$$\int_0^\infty F(t)dt \qquad (13.90)$$

integralinin yakınsak olmasına ihtiyaç yoktur. Örneğin: $F(t)$ büyük t değerleri için üstel olarak ıraksayabilir. Ama, yeteri kadar büyük t değerleri için, yani $t > t_o$ için,

$$\left|e^{-s_o t}F(t)\right| \le M \qquad (13.91)$$

olacak şekilde bir s_o sabiti ve pozitif bir M sabiti var ise, bu fonksiyonun $s > s_o$ için bir Laplace dönüşümü olacaktır. Bir karşı örnek olarak,

$$F(t) = e^{t^2} \qquad (13.92)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için (13.91) şartını sağlayacak tarzda s_o ve M sabitleri bulunamayacağından, Laplace dönüşümünün olmadığını söyleriz. $t \to 0$ limitinde ise, $F(t)$ fonksiyonun yeterince güçlü bir tekilliği varsa Laplace dönüşümü olmayabilir:

$$\pounds\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt \qquad (13.93)$$

dönüşümü $n \le -1$ için merkezde, yani $t = 0$ noktasında ıraksaktır. $s > 0$ ve $n > -1$ için Laplace dönüşümleri ise,

$$\pounds\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (13.94)$$

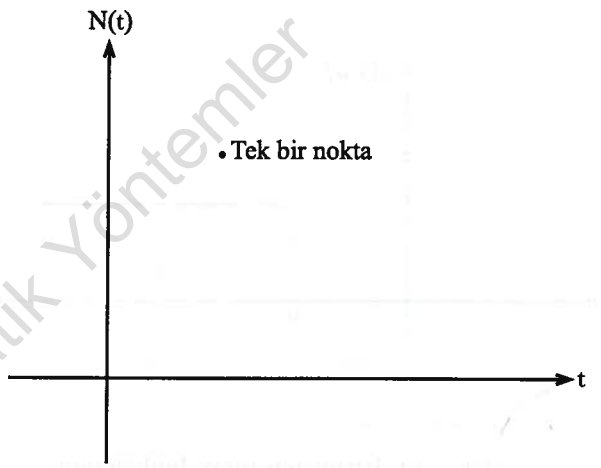
olarak bulunur.

13.6 Ters Laplace Dönüşümleri

Verilmiş bir $F(t)$ fonksiyonu, Laplace dönüşümünün olması için gereken şartları sağlıyorsa,

$$f(s) = \pounds\{F(t)\} \qquad (13.95)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 13.3. **Boş fonksiyon.**

yazılır. $f(s)$'in ters dönüşümü, ters dönüşüm operatörü $\pounds^{-1}$ ile

$$\pounds^{-1}\{f(s)\} = F(t) \qquad (13.96)$$

şeklinde gösterilir. Ama bu ters dönüşüm aslında tek değildir: $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ gibi iki fonksiyon aynı Laplace dönüşümüne sahip olabilirler. Bu durumda

$$F_1(t) - F_2(t) = N(t) \qquad (13.97)$$

ifadesindeki $N(t)$ fonksiyonu, bütün t_o değerleri için

$$\int_0^{t_o} N(t)dt = 0 \qquad (13.98)$$

integralini sağlayan bir boş fonksiyon olmalıdır. Bu Lerch teoremi olarak da bilinir. (13.97) ifadesindeki $N(t)$'yi fizikçiler ve mühendisler pratikte sıfır olarak alarak ters dönüşümün tek olmasını sağlarlar. Şekil (13.3)'de boş fonksiyonuna bir örnek görülmektedir.

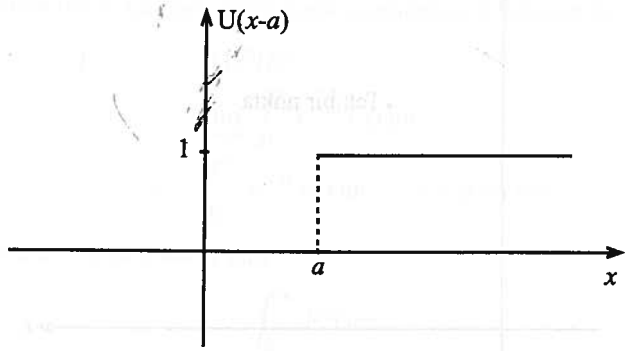
Birim basamak Fonksiyonu ise,

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \qquad (13.99)$$

şeklinde tanımlanır ve Şekil (13.4)'deki gibi verilir.

Bir çok süreksiz fonksiyonu birim basamak fonksiyonu cinsinden ifade etmek mümkündür. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\pounds\{U(t-a)\} = \tfrac{e^{-as}}{s} \quad s>0 \qquad (13.100)$$



ŞEKİL 13.4. **Birim basamak fonksiyonu.**

olarak verilir. Ters dönüşümün tekliğinden kolayca,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = U(t-a) \tag{13.101}$$

yazılır. $F(t)$ ve $G(t)$ gibi Laplace dönüşümü alınabilir iki fonksiyon için,

$$\mathcal{L}\{aF(t)+bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\} \tag{13.102}$$

yazılabileceğinden $\mathcal{L}$ operatörü doğrusal bir operatördür. Burada a ve b iki sabit sayıdır.

13.6.1 Bazı Temel Laplace Dönüşümleri

1. $F(t) = 1$ için Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \tfrac{1}{s} \quad s > 0 \tag{13.103}$$

olarak verilir.

2. $F(t) = e^{kt}$, $t > 0$ için,

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{kt}e^{-st}dt = \tfrac{1}{s-k} \quad s > k \tag{13.104}$$

olur.

3.

$$\cosh kt = \frac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right),$$

$$\sinh kt = \frac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right)$$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri, $\mathcal{L}$ operatörünün doğrusal olma özelliği kullanılarak ve $s > k$ için,

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2-k^2} \tag{13.105}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2} \tag{13.106}$$

şeklinde bulunurlar.

4.

$$\cos kt = \cosh ikt \quad \text{ve} \quad \sin kt = -i\sinh kt$$

ifadelerini kullanarak da *cos* ve *sin* fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini $s > 0$ için buluruz:

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} \tag{13.107}$$

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}. \tag{13.108}$$

13.6.2 Laplace Dönüşümlerinde Özel Teoremler

Ters Laplace dönüşümlerinin bulunmasında aşağıda verilen teoremler çok yararlıdır:

Teorem I: İlk öteleme teoremi.

Eğer bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{13.109}$$

ise, $e^{at}f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \tag{13.110}$$

olarak bulunur.

İspat:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt. \tag{13.111}$$

Teorem II: İkinci öteleme teoremi.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ve $U(t-a)$ birim basamak fonksiyonu ise,

$$\mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{13.112}$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = U(t-a)f(t-a) \tag{13.113}$$

ters dönüşümü de geçerlidir.

İspat: Birim basamak fonksiyonu

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \tag{13.114}$$

şeklinde tanımlandığından,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}U(t-a)f(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \end{aligned} \tag{13.115}$$

olacaktır. İntegral değişkeni t'yi $v = t-a$ olarak değiştirirsek, son integrali

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)dv \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv \\ &= e^{-as}F(s) \end{aligned} \tag{13.116}$$

şeklinde buluruz.

Teorem III: Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise, o zaman

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{13.117}$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(\frac{s}{a})\right\} = af(at) \tag{13.118}$$

olur.

İspat: Laplace dönüşümü tanımını kullanarak

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt \tag{13.119}$$

yazılır. İntegral de $v = at$ dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s\frac{v}{a}}f(v)dv \\ &= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \end{aligned} \tag{13.120}$$

bulunur.

Teorem IV: Verilen bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ ise, $t^n f(t)$ fonksiyonunun dönüşümü

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{dt^n} = (-1)^nF^{(n)}(s) \tag{13.121}$$

şeklinde kolayca bulunur. Burada $n = 0, 1, 2, 3...$ şeklinde tamsayılardır. Benzer şekilde $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise, ters dönüşüm

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \tag{13.122}$$

olarak elde edilir.

İspat: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olduğundan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{13.123}$$

yazılır. Her iki tarafın da s parametresine göre türevini alırsak,

$$\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -F'(s) \tag{13.124}$$

buluruz. Türev almaya aynı şekilde devam edersek,

$$\int_0^\infty e^{-st}t^2f(t)dt = F''(s),$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^3f(t)dt = -F'''(s)$$

ve böylece n'inci türev de

$$\int_0^\infty e^{-st}t^nf(t)dt = (-1)^nF^{(n)}(s)$$

olarak sonucu verecektir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

Teorem V: Periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümü.

Eğer $f(t)$, $p > 0$ periyotlu bir fonksiyon ise, yani; $f(t+p) = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sp}}$$

olacaktır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, && (13.125)\\
&= \int_0^p e^{-st} f(t)dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)dt \\
&\quad + \int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t)dt + ..., && (13.126)\\
&= \int_0^p e^{-st} f(t)dt + \int_0^p e^{-s(v+p)} f(v+p)dv \\
&\quad + \int_0^p e^{-s(v+2p)} f(v+2p)dv + ... \ . && (13.127)
\end{aligned}$$

v bir integral değişkeni olduğundan, v'yi t ile değiştirip, $f(t)$'nin periyodik olma özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt && (13.128)\\
&= \int_0^p e^{-st} f(t)dt + e^{-sp} \int_0^p e^{-st} f(t)dt \\
&\quad + e^{-s2p} \int_0^p e^{-st} f(t)dt + ... && (13.129)\\
&= \left(1 + e^{-sp} + e^{-s2p} + e^{-s3p} + ...\right) \int_0^p e^{-st} f(t)dt && (13.130)\\
&= \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sp}} \quad s > 0 && (13.131)
\end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanır.

Teorem VI: Bir integralin Laplace dönüşümü.

$f(t)$'nin Laplace dönüşümü $F(s)$ ise,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (13.132)$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du \qquad (13.133)$$

şeklinde ters dönüşüm bulunur.

İspat: $G(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$G(t) = \int_0^t f(u)du. \qquad (13.134)$$

Bu durumda $G'(t) = f(t)$, $G(0) = 0$ olur ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G'(t)\} &= s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0), && (13.135)\\
&= s\mathcal{L}\{G(t)\} && (13.136)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (13.137)$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

Teorem VII: $\lim_{t\to\to 0} \frac{f(t)}{t}$ mevcut ise ve $f(t)$'nin Laplace dönüşümü $F(s)$ ise, o zaman

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \qquad (13.138)$$

bulunur.

İspat: $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ yazarsak $f(t) = tg(t)$ olacağından,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} && (13.139)\\
&= \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\} = -\frac{dG(s)}{ds} && (13.140)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada Teorem VI kullanılır. Böylece,

$$G(s) = -\int_c^s F(u)du \qquad (13.141)$$

integraline erişilir. Fakat, burada $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ olduğundan c sonsuz olmalıdır. Buradan da

$$G(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \qquad (13.142)$$

şeklinde ispat sonuçlanır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Teorem VIII: Konvolusyon teoremi.

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırası ile $F(s)$ ve $G(s)$ ise,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s) \tag{13.143}$$

bulunur. Benzer şekilde, eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du \tag{13.144}$$

bulunur. Yukarıda tanımlanan bu integrale $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolusyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir:

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \tag{13.145}$$

Bu tanımdan görülüyor ki; konvolusyon değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahip bir işlemdir.

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, \\ f * (g+h) &= f * g + f * h, \\ f * (g * h) &= (f * g) * h. \end{aligned} \tag{13.146}$$

İspat: Önce aşağıdaki dönüşümlerin konvolusyonunu oluşturalım:

$$F(s)G(s) = \left[\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right]\left[\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv\right] \tag{13.147}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(v+u)}g(v)f(u)dudv. \tag{13.148}$$

$v = t - u$ dönüşümü ile

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st}g(t-u)f(u)dudt \tag{13.149}$$

$$= \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left[\int_{u=0}^t g(t-u)f(u)du\right]dt \tag{13.150}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} \tag{13.151}$$

yazabiliriz. Burada $t = u + v$ dönüşümü ile uv düzleminden ut düzlemine geçilmiştir.

Örnek (13.4) ***Laplace ters dönüşümlerine örnekler:***

1. Laplace dönüşümü $\frac{se^{-2s}}{s^2+16}$ olan fonksiyonu bulalım:

   $\mathcal{L}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$ olduğundan Teorem II'yi kullanırsak,

   $$\mathcal{L}\{U(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{13.152}$$

   ve

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s\right\} = U(t-a)f(t-a) \tag{13.153}$$

   olacağından,

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{s}{s^2+16}\right\} = U(t-2)\cos 4(t-2) \tag{13.154}$$

   $$= \begin{cases} 0 & t<2 \\ \cos 4(t-2) & t>2 \end{cases} \tag{13.155}$$

   bulunur.

2. Laplace dönüşümü $\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$ olan fonksiyonu bulmak için,

   $$F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right) \tag{13.156}$$

   yazalım. Böylece,

   $$F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} \tag{13.157}$$

   bulunur. Teorem IV kullanılırsa ve

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{13.158}$$

   ise,

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \tag{13.159}$$

   olacağından,

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{F'(s)\right\} = -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} \tag{13.160}$$

   $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right\} \tag{13.161}$$

   $$= \frac{1-e^{-t}}{t} \tag{13.162}$$

   buluruz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın II. baskı 2004

3. Laplace dönüşümü $\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$ olan fonksiyon ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}}{\sqrt{\pi}} \tag{13.163}$$

olduğundan, Teorem VI kullanılarak,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du, \tag{13.164}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \int_0^t \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}}{\sqrt{\pi}}du, \tag{13.165}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2}dv \tag{13.166}$$

yazılır ve $u = v^2$ dönüşümü yapılarak bulunur. Bu da çok bilinen $\text{erf}(\sqrt{t})$ fonksiyonunun yarısıdır:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \frac{\text{erf}(\sqrt{t})}{2}. \tag{13.167}$$

13.6.3 $\mathcal{L}^{-1}$'in Elde Edilme Yolları

Ters Laplace dönüşümlerinin elde edilmesinde en çok kullanılan yöntem basit kesirler yöntemidir. Karşımıza zaman zaman Laplace dönüşüm fonksiyonu

$$F(s) = g(s)/h(s) \tag{13.168}$$

şeklinde çıkar. Burada $g(s)$ ve $h(s)$ ortak çarpanları olmayan polinomlardır. $g(s)$'in derecesi de $h(s)$'in derecesinden küçüktür.

$h(s)$ 'in çarpanlarının hepsi doğrusal ve birbirinden ayrı ise, $f(s)$

$$f(s) = \frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2} + ... + \frac{c_n}{s-a_n} \tag{13.169}$$

şeklinde yazılabilir. Burada c_i sabitleri s'den bağımsız sabitlerdir. Köklerden herhangi biri m katlı olursa, $f(s)$ ifadesi

$$f(s) = \frac{c_{1,m}}{(s-a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(s-a_1)^{m-1}} + ... + \frac{c_{1,1}}{s-a_1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{c_i}{s-a_i} \tag{13.170}$$

biçiminde yazılır.

Çarpanlardan biri (s^2+ps+q) gibi ikinci dereceden ise, bu çarpanın payı iki sabit kullanılarak,

$$\frac{as+b}{(s^2+ps+q)} \tag{13.171}$$

şeklinde yazılır. Basit kesirlerdeki bu katsayıların hesaplanmasında bir çok yol vardır. Örneğin, ilk halde verilen c_i katsayıları

$$\lim_{s\to a_i}(s-a_i)f(s) = c_i \tag{13.172}$$

limiti ile bulunabilir.

Örnek (13.5)*Basit kesirler yöntemi:* Laplace dönüşümü

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2+k^2)} \tag{13.173}$$

şeklinde verilen fonksiyonu basit kesirlere ayırma yöntemini kullanarak bulalım. $f(s)$ fonksiyonunu,

$$f(s) = \frac{c}{s} + \frac{as+b}{s^2+k^2} \tag{13.174}$$

olarak yazar ve iki ifadeyi eşitleriz:

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}. \tag{13.175}$$

Bu eşitlik bütün s değerleri için doğru olduğundan,

$$\begin{aligned} c+a=0 &\quad : \quad s^2\text{'nin katsayıları} \\ b=0 &\quad : \quad s\text{'nin katsayıları} \\ ck^2=k^2 &\quad : \quad s^0\text{'nin katsayıları} \end{aligned} \tag{13.176}$$

denklemlerinin çözümünden katsayıları

$$c=1 \quad b=0 \quad a=-1 \tag{13.177}$$

olarak buluruz. Buradan da

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2} \tag{13.178}$$

yazılır ve ters Laplace dönüşümü de

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = 1-\cos kt \tag{13.179}$$

şeklinde kolayca bulunur.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (13.6) ***İntegral dönüşümler ve belirli integraller:*** İntegral dönüşümler belirli integrallerin alınmasında da kullanılır.

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx \tag{13.180}$$

şeklinde verilen bir integrali Laplace dönüşüm tekniği ile hesaplayalım. Önce bu integralin Laplace dönüşümünü,

$$\begin{aligned}\pounds\left\{\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dxdt \qquad (13.181)\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-st}\sin txdt\right]dx\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Burada köşeli parantez içindeki ifade $\sin tx$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olacaktır. Bu da bize

$$\begin{aligned}\pounds\left\{\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx\right\} &= \int_0^\infty \frac{1}{s^2+x^2}dx \qquad (13.182)\\ &= \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right)\Big|_0^\infty \qquad (13.183)\\ &= \frac{\pi}{2s} \qquad (13.184)\end{aligned}$$

verir. Buradan ters dönüşüm hemen bulunur ve integralimizde

$$F(t)=\frac{\pi}{2},\quad t>0 \tag{13.185}$$

olarak hesaplanır.

13.7 Türevin Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümlerinin temel uygulamalarından biri de diferansiyel denklemlerin daha basit denklemlere dönüştürülmesidir. Özellikle sabit katsayılı sıradan diferansiyel denklem sistemleri, cebirsel doğrusal denklem sistemlerine dönüştürülebilir. Birinci türevin Laplace dönüşümünü aşağıdaki gibi bulalım:

$$\begin{aligned}\pounds\{F'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{dF(t)}{dt}dt \qquad (13.186)\\ &= e^{-st}F(t)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (13.187)\\ &= s\pounds\{F(t)\}-F(0). \qquad (13.188)\end{aligned}$$

Tam olarak belirtmek gerekirse $F(0)=F(+0)$ ve $\frac{dF(t)}{dt}$ ise, $0\le t<\infty$ aralığında en azından parçalı süreklidir. Benzer şekilde devam edilirse, daha yüksek derecelerden türevlerin dönüşümleri de

$$\begin{aligned}\pounds\left\{F^{(2)}(t)\right\} &= s^2\pounds\{F(t)\}-sF(+0)-F'(+0), \qquad (13.189)\\ \pounds\left\{F^{(n)}(t)\right\} &= s^n\pounds\{F(t)\}-s^{n-1}F(+0)-s^{n-2}F'(+0)-\\ &\quad \ldots - F^{(n-1)}(+0) \qquad (13.190)\end{aligned}$$

olarak bulunurlar.

Örnek (13.7) ***Laplace dönüşümleri ve diferansiyel denklemler:*** Harmonik salınıcının

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}+kX(t)=0 \tag{13.191}$$

olarak verilen hareket denklemini,

$$X(0)=X_0, X'(0)=0 \tag{13.192}$$

başlangıç şartlarıyla sağlayan fonksiyonu bulalım. Bu denklemin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\begin{aligned}m\pounds\left\{\frac{d^2X(t)}{dt^2}\right\}+k\pounds\{X(t)\} &= 0\\ ms^2x(s)-msX_0+kx(s) &= 0\\ x(s) &= X_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad (13.193)\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ olarak alınmıştır. Bu bize çözümün Laplace dönüşümünü verir. Buradan da ters dönüşüm alınarak çözüm

$$\pounds^{-1}\left\{X_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\}=X_0\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\}=X_0\cos\omega_0 t \tag{13.194}$$

şeklinde elde edilir.

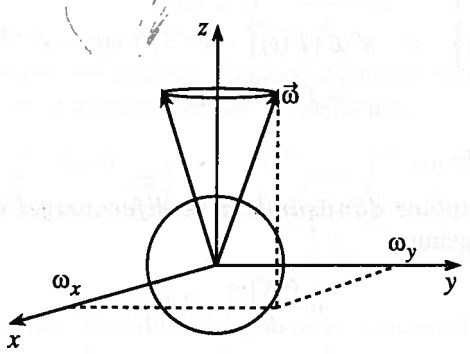
Örnek (13.8) ***Dünyanın serbest dönme hareketi:*** Dünyanın serbest dönme hareketi için Euler denklemleri

$$\begin{cases} dX/dt=-aY\\ dY/dt=aX\end{cases} \tag{13.195}$$

şeklinde bir sıradan diferansiyel denklem sistemidir. Burada

$$a=\left[\frac{I_z-I_x}{I_z}\right]\omega_z \tag{13.196}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 13.5. **Dünyanın serbest dönme hareketi.**

ve

$$X = \omega_x,\ Y = \omega_y \tag{13.197}$$

olarak tanımlanmışlardır.

I_z, z-ekseni etrafındaki eylemsizlik momentidir. Aynı zamanda simetriden dolayı $I_x = I_y$ olarak alınmıştır. Bu denklem sisteminin Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned} sx(s) - X(0) &= -ay(s) \\ sy(s) - Y(0) &= ax(s) \end{aligned} \tag{13.198}$$

şeklinde verilen bir cebirsel denklem sistemidir. $x(s)$ için çözülürse,

$$x(s) = X(0)\frac{s}{s^2+a^2} - Y(0)\frac{a}{s^2+a^2} \tag{13.199}$$

bulunacaktır. Ters dönüşümü de alınarak çözüm

$$X(t) = X(0)\cos at - Y(0)\sin at \tag{13.200}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde de $Y(t)$ çözümü

$$Y(t) = X(0)\sin at + Y(0)\cos at \tag{13.201}$$

olarak bulunur.

Örnek (13.9) ***Sönümlü yay problemi:***

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0 \tag{13.202}$$

diferansiyel denklemini, $X(0) = X_0$ ve $X'(0) = 0$ başlangıç şartlarında çözelim. Yukarıdaki denklemin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$m\left[s^2x(s) - sX_0\right] + b\left[sx(s) - X_0\right] + kx(s) = 0, \tag{13.203}$$

$$x(s) = X_0\frac{ms+b}{ms^2+bs+k} \tag{13.204}$$

elde ederiz. Paydayı tam kare olarak yazarsak,

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \tag{13.205}$$

olur. Eğer sürtünme küçük ise, $b^2 < 4km$ olacağından son terim pozitiftir, buna ω_1^2 dersek,

$$\begin{aligned} x(s) &= X_0\frac{s+\frac{b}{m}}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\omega_1^2} \\ x(s) &= X_0\frac{s+\frac{b}{2m}+\frac{b}{2m}}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\omega_1^2} \\ x(s) &= X_0\frac{s+\frac{b}{2m}}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\omega_1^2} + X_0\frac{b}{2m\omega_1}\frac{\omega_1}{\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\omega_1^2} \end{aligned} \tag{13.206}$$

olarak çözümün Laplace dönüşümünü elde ederiz. Bunun da ters dönüşümü alınırsa, verilen başlangıç şartlarını sağlayan çözüm

$$X(t) = X_0e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\left[\cos\omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t\right] \tag{13.207}$$

şeklinde bulunmuş olur.

13.7.1 Bir Dönüşümün Türevi

Verilen bir $F(t)$ fonksiyonu, en azından parçalı sürekli olduğu zaman ve s parametresi $e^{-st}F(t)$ fonksiyonunun büyük s değerleri için, üstel olarak yakınsak olacak şekilde seçilirse,

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{13.208}$$

Fen ve Mühendislik Birimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

integrali düzgün yakınsaktır ve integral işareti altında s'ye göre türevi alınabilir. Böylece,

$$f^{(1)}(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st}F(t)dt \tag{13.209}$$

$$= \mathcal{L}\{-tF(t)\} \tag{13.210}$$

bulunur. Benzer şekilde türev işlemi n kez tekrarlanırsa,

$$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n F(t)\} \tag{13.211}$$

bulunacaktır.

Örnek (13.10) te^{kt} ***fonksiyonu:***

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt = \frac{1}{s-k} \quad (s>k) \tag{13.212}$$

verilmiş ise, s'ye göre türev alınarak te^{kt} fonksiyonunun dönüşümü

$$\mathcal{L}\{te^{kt}\} = \frac{1}{(s-k)^2} \quad (s>k) \tag{13.213}$$

olarak kolayca bulunur.

Örnek (13.11) ***Elektromanyetik Dalga Denklemi:*** x doğrultusunda,

$$E = E_x \text{ veya } E_y$$

olarak ilerleyen enine bir dalga aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemi sağlar:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{13.214}$$

Başlangıç şartlarının,

$$E(x,0) = 0 \quad ve \quad \left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{13.215}$$

şeklinde verildiği durumda bu denklemi çözelim. (13. 214) denkemin t'ye göre Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\} - \frac{s^2}{v^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\} + \frac{s}{v^2}E(x,0) + \frac{1}{v^2}\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{13.216}$$

buluruz. Başlangıç şartlarını kullanarak da bu denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\} = \frac{s^2}{v^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\} \tag{13.217}$$

şeklini alır ki, bu $\mathcal{L}\{E(x,t)\}$ için sıradan bir diferansiyel denklemdir ve çözümü de kolayca

$$\mathcal{L}\{E(x,t)\} = c_1 e^{-\left(\frac{s}{v}\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{s}{v}\right)x} \tag{13.218}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1 ve c_2, x 'ten bağımsız fakat s'ye bağlı sabitlerdir. $x \to \infty$ için dalga sonlu olması gerektiğinden $c_2 = 0$ alınmalıdır. Eğer $E(0,t) = F(t)$ olarak verilmiş ise,

$$\mathcal{L}\{E(0,t)\} = c_1 = f(s) \tag{13.219}$$

olacaktır. Böylece verilen sınır ve başlangıç şartlarında çözümün Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{E(x,t)\} = e^{-\left(\frac{s}{v}\right)x} f(s) \tag{13.220}$$

olarak bulunur. Teorem II 'yi kullanırsak ters dönüşümü dolayısı ile çözümü hemen yazabiliriz:

$$E(x,t) = \begin{cases} F(t-\frac{x}{v}) & t \geq \frac{x}{v} \\ 0 & t < \frac{x}{v} \end{cases} \tag{13.221}$$

Bu çözüm x doğrultusunda şekli bozulmadan yayılan bir dalga paketini gösterir. $x > vt$ olan bölgeye dalga henüz gelmemiştir.

Örnek (13.12) ***Bessel denklemi:*** Laplace dönüşümleri için ilginç bir uygulama da

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0 \tag{13.222}$$

şeklinde verilen Bessel denklemidir. Bu denklemi x'e bölersek,

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \tag{13.223}$$

bulunur. Buradan da

$$y(0) = 1 \tag{13.224}$$

şartını sağlayan düzgün bir çözümü Laplace dönüşüm tekniği ile bulabiliriz. Denklem (13.223)'den $y'(+0) = 0$ olduğu, (13.224) şartını kullanarak kolayca görülür. Bilinmeyen fonksiyon $y(x)$'in $f(s)$ şeklinde bir dönüşümünün var olduğunu varsayarsak,

$$\mathcal{L}\{y(x)\} = f(s), \quad \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = y(x) \tag{13.225}$$

yazabiliriz. (12.223) denkleminin Laplace dönüşümü de

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2 f(s) - s\right] + sf(s) - 1 - \frac{d}{ds}f(s) = 0,$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

$$(s^2+1)f'(s)+sf(s)=0,$$

$$\frac{df}{f}=-\frac{s}{s^2+1}ds \tag{13.226}$$

denklemini sağlayacaktır. İntegral alınarak da $f(s)$ fonksiyonu

$$\ln\frac{f(s)}{c} = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1), \tag{13.227}$$

$$f(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \tag{13.228}$$

şeklinde belirlenir. $f(s)$ fonksiyonunun binom açılımını yaparsak,

$$f(s) = \frac{c}{s\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}, \tag{13.229}$$

$$= \frac{c}{s}\left[1-\frac{1}{2s^2}+\frac{1.3}{2^2 2! s^4}-\ldots \right.$$

$$\left. \ldots+\frac{(-1)^n(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 s^{2n}}+\ldots\right] \tag{13.230}$$

bulur ve ters Laplace dönüşümünü de terim terim alabiliriz. Bu da bize çözümü

$$y(x)=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{\left(2^n n!\right)^2} \tag{13.231}$$

olarak verir. Burada $y(0)=1$ şartı kullanılarak $c=1$ olarak belirlenebilir. Bessel denkleminden bulduğumuz çözüm Bessel fonksiyonlarından $J_o(x)$'e karşı gelir. Böylece,

$$\mathcal{L}\left\{J_o(x)\right\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \tag{13.232}$$

dönüşümünü belirlemiş oluruz. Genel olarak ise,

$$\mathcal{L}\left\{J_n(ax)\right\}=\frac{a^n\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \tag{13.233}$$

dönüşümü gösterilebilir. Bu örnekten görüldüğü gibi, Laplace dönüşümleri doğrusal fakat değişken katsayıları olan diferansiyel denklemlerde de kullanılabilir. Ancak, işe yarayacaklarına dair bir garanti verilemez.

Örnek (13.13) $y^4+2y''+y=\sin t$ ***denklemi:***

$$y(0)=1,\ y'(0)=-2,\ y''(0)=3,\ y'''(0)=0$$

olarak verilen sınır şartlarında,

$$y^4+2y''+y=\sin t \tag{13.234}$$

denklemini çözelim. Denklemin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\frac{1}{s^2+1} = \left[s^4Y-s^3(1)-s^2(-2)-s(3)-0\right]$$

$$+2\left[s^2Y-s(1)-(-2)\right]+Y, \tag{13.235}$$

$$\left(s^4+2s^2+1\right)Y=\frac{1}{s^2+1}+s^3-2s^2+5s-4 \tag{13.236}$$

olur. Buradan da $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{1}{\left(s^2+1\right)^3}+\frac{s^3-2s^2+5s-4}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(s^2+1\right)^3}+\frac{\left(s^3+s\right)-2\left(s^2+1\right)+4s-2}{\left(s^2+1\right)^2} \tag{13.237}$$

$$= \frac{1}{\left(s^2+1\right)^3}+\frac{s}{\left(s^2+1\right)}-\frac{2}{\left(s^2+1\right)}+\frac{4s-2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

şeklinde elde edilir. Ters dönüşüm için teoremleri kullanarak,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^3}\right\} = \frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{t^2}{8}\sin t \tag{13.238}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-2}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} = 2t\sin t-\sin t+t\cos t \tag{13.239}$$

yazar ve çözümü de

$$y(t)=\left(1+\frac{5}{8}t\right)\cos t-\left(\frac{21}{8}-2t+\frac{t^2}{8}\right)\sin t \tag{13.240}$$

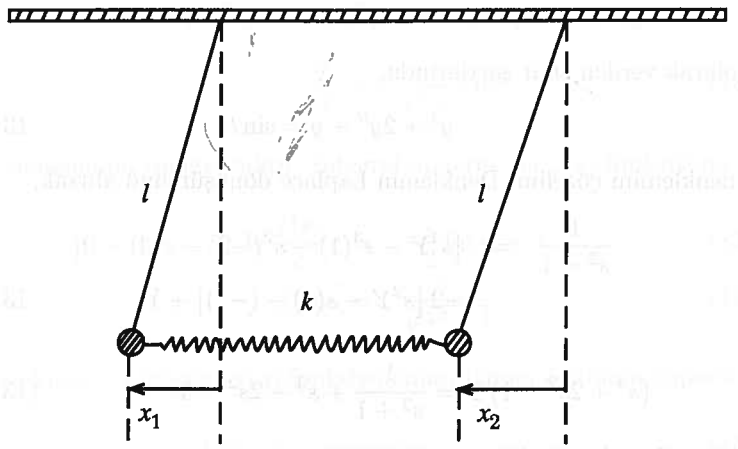
şeklinde buluruz.

Örnek (13.14) ***Birbirleri ile etkileşen iki sarkaç:*** Şekil (13.6)'da gösterildiği gibi birbirine bir yay ile bağlanmış iki sarkacın küçük salınımlarını inceleyelim:

Başlangıç şartları olarak $t=0$ anında

$$x_1(0)=x_2(0)=0,\quad \dot{x}_1\big|_0=v,\quad \dot{x}_2\big|_0=0 \tag{13.241}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 13.6. **Birbirine bir yayla bağlı iki sarkaçın salınımı**

alalım. Bu sistem için Newton denklemleri

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1), \tag{13.242}$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 + k(x_1 - x_2) \tag{13.243}$$

olacaktır. x_1 ve x_2'nin Laplace dönüşümlerini

$$\mathcal{L}\{x_i(t)\} = F_i(s) \tag{13.244}$$

olarak yazar ve her iki denkleminde Laplace dönüşümünü alırsak,

$$m(s^2F_1 - v) = -\frac{mg}{l}F_1 + k(F_2 - F_1), \tag{13.245}$$

$$ms^2F_2 = -\frac{mg}{l}F_2 + k(F_1 - F_2) \tag{13.246}$$

buluruz. Bu iki cebirsel denklem artık kolayca çözülerek

$$F_1(s) = \frac{v}{2}\left[(s^2 + g/l + 2k/m)^{-1} + (s^2 + g/l)^{-1}\right] \tag{13.247}$$

bulunacaktır. Bunun da Laplace ters dönüşümü alınarak $x_1(t)$ için çözüm,

$$x_1(t) = \frac{v}{2}\left[\frac{\sin\sqrt{(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m})}t}{\sqrt{(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m})}} + \frac{\sin\sqrt{(\frac{g}{l})}t}{\sqrt{(\frac{g}{l})}}\right] \tag{13.248}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde de $x_2(t)$ çözümü elde edilir. Burada $\sqrt{(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m})}$ ve $\sqrt{(\frac{g}{l})}$ sistemin normal modlarının frekanslarıdır.

13.7.2 n-Boyutta Laplace Dönüşümü

İki boyutta Laplace dönüşümü

$$F(u,v) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)e^{-ux-vy}dxdy \tag{13.249}$$

olarak tanımlanır. Bu tanım kolayca n-boyuta

$$F(u_1, u_2, ...u_n) \tag{13.250}$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty ..... \int_0^\infty f(x_1, x_2, ...x_n)e^{-u_1x_1 - u_2x_2 - ..... - u_nx_n}dx_1dx_2.....dx_n$$

olarak uyarlanır.

13.8 Laplace ve Fourier Dönüşümleri Arasındaki Bağıntı

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx \tag{13.251}$$

olarak tanımlamıştık. Şimdi de $f(x)$ fonksiyonunu kullanarak,

$$f_+(x) = \left\{ \begin{array}{cc} f(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{array} \right\} \tag{13.252}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyonun Fourier dönüşümü

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)e^{ikx}dx \tag{13.253}$$

olacağından, Laplace ve Fourier dönüşümleri arasında,

$$F(p) = \sqrt{2\pi}F_+(ip) \tag{13.254}$$

bağıntısı olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 2004 II. baskı

13.9 Mellin Dönüşümleri

Sıkça kullanılan bir başka integral dönüşümü ise,

$$F_m(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{13.255}$$

olarak verilen Mellin dönüşümüdür. $\exp(-x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü 10. Bölümde ayrıntılı olarak gördüğümüz $\Gamma(s)$, yani gama fonksiyonudur. Mellin dönüşümünde

$$x = e^z \tag{13.256}$$

yazarsak,

$$F_m(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^z)e^{sz}dz \tag{13.257}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{sz}dz, \quad (\ g(z) = f(e^z)) \tag{13.258}$$

olur. Bunu da

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{ikz}dz \tag{13.259}$$

ile kıyaslarsak, Fourier ve Mellin dönüşümleri arasında

$$F_m(s) = \sqrt{2\pi}G(-is) \tag{13.260}$$

bağıntısını buluruz. Artık Fourier dönüşümleri için verdiğimiz özellikleri, Mellin dönüşümlerine de uyarlayabiliriz.

13.10 Problemler

1.
$$f(\vec{x}) = (\frac{2}{\pi a^2})^{3/4}e^{-r^2/a^2} \qquad (|\vec{x}| = r)$$
olarak ifade edilen Gauss olasılık dağılımının, Fourier dönüşümününde gene bir Gauss dağılımı olduğunu gösteriniz.

2. Aşağıda verilen denkleminin,
$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega_o t & |t| < \frac{N\pi}{\omega_o} \\ 0 & |t| > \frac{N\pi}{\omega_o} \end{cases}$$
ters Fourier dönüşümünün
$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(\omega_o - \omega)\frac{N\pi}{\omega_o}}{2(\omega_o - \omega)} - \frac{\sin(\omega_o + \omega)\frac{N\pi}{\omega_o}}{2(\omega_o + \omega)}\right]$$
olduğunu gösteriniz.

3.
$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t},$$
$$y(0) = 2,\ y'(0) = -1$$
şeklinde verilen homojen olmayan sıradan bir diferansiyel denklemin çözümünü, Laplace dönüşüm tekniğini kullanarak bulunuz.

4. Aşağıda verilen diferansiyel denklem sistemini:
$$2x(t) - y(t) - y'(t) = 4(1 - \exp(t)),$$
$$2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3\exp(-2t)),$$
$x(0) = y(0) = 0$ sınır şartları ile çözünüz.

5. Yarı sonsuz uzunlukta ve yüzeyi yalıtılmış bir çubuğun bir ucunun,
$$T(t, 0) = T_0$$
olarak sabit bir sıcaklıkta tutulduğunu varsayalım. Diğer sınır şartlarını da
$$T(0, x) = 0 \quad \text{ve} \quad T(t, \infty) = 0$$
olarak alalım. Bu şartlar altındaki çubuğun sıcaklığını,
$$\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} = k\frac{\partial T(t,x)}{\partial t}$$
olarak verilen ısı transfer denklemini çözerek bulunuz. Burada k sıfırdan büyük bir katsayı olup, çubuğun fiziksel özelliklerine bağlıdır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

6. $t = 0$ anında akımın sıfır olduğu bir RL devresi için

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

denklemini çözerek $I(t)$ akımını bulunuz. Burada E akım doğuran kuvvet olup, L,R ve E sabittir.

7. Aşağıda verilen diferansiyel denklem sisteminin $x(0) = 2$,ve $y(0)$ sınır şartlarında çözümünü Laplace dönüşümü yöntemi ile bulunuz:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + y &= 3e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} + x &= 0 \end{aligned}$$

8. Aşağıda verilen integrali Fourier sin dönüşümü ile gösteriniz:

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^3 \sin sx}{s^4+4} ds.$$

9. Aşağıda verilen integrali Fourier cos dönüşümü ile gösteriniz:

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^2+2}{s^4+4}\cos sx ds.$$

10. Yarı sonsuz bir tel x-ekseninin $x \geq 0$ yönünde merkezden başlayarak uzatılmış olsun. $t = 0$ anında tel $y(x,0) = f(x)$ olarak bırakılsın. Burada $y(x,t)$ telin x-eksenine dik yöndeki sapmasını vermektedir ve tel üzerinde dalgalar $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ denklemini sağlamaktadır. Aşağıdaki formülü çıkarınız:

$$y(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sat \sin st \int_0^\infty f(\xi)\sin s\xi d\xi ds.$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematiksel Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

14

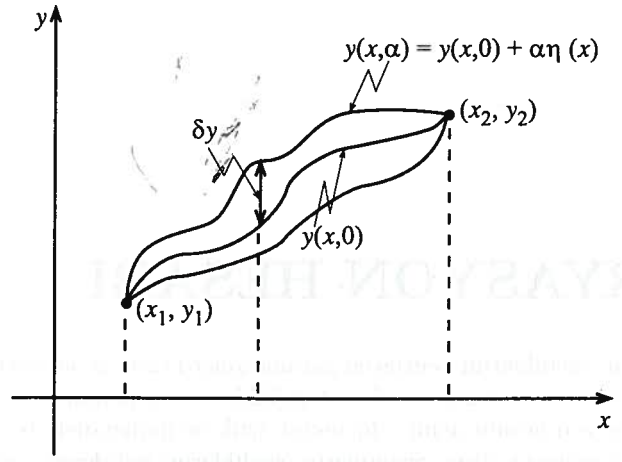
VARYASYON HESABI

Bir sistemin özelliklerini belirleyen parametrelerde küçük değişiklikler yapıldığında, sistemin bütününde olan değişiklikleri çalışmamızı sağlayan yönteme varyasyon hesabı denir. Bu teknik fizik ve mühendislikte çok değişik alanlarda karşımıza çıkar. Sistemlerin özelliklerini belirleyen parametreler; mesafe, yük, sıcaklık gibi basit değişkenler olabileceği gibi, fonksiyonlar ve genelde tensörler de olabilir.

Genelde doğada sistemler toplam enerjilerini minimum yapacak yönde hareket eder veya evrilirler. Bu özellik sistemlerin üzerinde etkili olan kuvvetleri anlamamızda yardımcı olduğu gibi, denge durumlarının kararlı olup olmadıklarını belirlememizde de çok yararlıdır. Örneğin, elekromanyetik teoride iletkenler arasındaki kuvveti bulmak için, mesafede yapılacak küçük değişikliklerde sistemin enerjisinin nasıl değişeceğine bakarız. Mesafe arttığında enerji de artıyora, sistem bu değişikliğe karşı koymaya çalışacağından iletkenler arasındaki kuvvet de çekim kuvveti olacaktır sonucuna varırız.

Klasik fizikte Newton teorisinden sonra Lagrange tarafından yeni bir yaklaşım geliştirilir. Burada parçacıkların iki nokta arasındaki yolları, aksiyon denilen bir integralin konum ve hıza göre varyasyonunu sıfır veya ekstremum yapan fonksiyonlar olarak bulunur. Bu yaklaşım klasik fiziğin çok parçacıklı sistemler ile süreklilik gösteren sistemlere uygulanmasını mümkün kıldığı gibi, kuantum fiziği ve alan teorilerine geçişte de adeta bir şart olarak karşımıza çıkar.

Einstein gravitasyon teorisinde merkezi bir yer tutan jeodezik hesapları, iki nokta arasındaki en kısa yolun bulunmasıdır ve varyasyon hesabının bir başka yaygın kullanım alanıdır. Varyasyon hesaplarının çok kullanışlı olduğu bir başka alan ise, Sturm-Liouville sistemlerinin tam olarak çözülemedikleri durumlarda özfonksiyon ve özdeğerlerin yaklaşık olarak bulunmasıdır. Kısaca, varyasyon tekniği fen bilimlerinde herhangi birşeyin birtakım parametrelere göre nasıl değiştiğini çalışmamızı sağlayan çok yönlü ve kullanışlı bir yöntemdir. Ekonomi, finans, sosyoloji gibi bilim dalları da matematikle tanıştıkça ilk kullanacakları yöntemler arasında varyasyon gelecektir. Bu bölümde önce değişik türden varyasyon hesaplarını ve sonra da varyasyon tekniği ile özdeğer ve özfonksiyonların nasıl yaklaşık olarak bulunabileceğini göreceğiz.



ŞEKİL 14.1. **Varyasyon hesaplarında bulmaya çalıştığımız yol etrafında sapmalar ve bunların J integraline etkisi hesaplanır.**

14.1 Bir Bağımlı ve Bir Bağımsız Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı

Bu tür varyasyon hesapları genelde,

$$J\left[y\left(x\right)\right] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, y_x, x\right) dx \tag{14.1}$$

şeklinde verilmiş bir integralin değerini ekstremum (maksimum veya minimum) yapan $y(x)$ fonksiyonunun bulunmasını içerir. İntegral altındaki f ; y , y'nin türevi y_x ve x değişkenlerine bağlı bilinen bir fonksiyondur. İntegralin kendisi olan J ise, bulunması istenen $y(x)$ fonsiyonuna bağlı olduğundan fonksiyonel olarak adlandırılır ve

$$J\left[y\left(x\right)\right] \tag{14.2}$$

şeklinde yazılır. Bu problemin amacı Şekil (14.1)'de gösterildiği gibi, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen bir çok muhtemel $y(x)$ fonksiyonundan, $J\left[y\left(x\right)\right]$ değerini ekstremum yapanın bulunmasıdır. Çoğu uygulamalarda aranılan ekstremum, minimum olacaktır.

Şekil (14.1)'de iki olası yol gösterilmiştir. Aslında sonsuz tane böyle yol vardır. Verilen herhangi bir x noktasında bunlardan bir tanesi ile, gerçek yol arasındaki farka y'nin varyasyonu denir ve δy ile gösterilir.Bu varyasyon doğal olarak x'e bağlı olacağından, $\eta(x)$ ile gösterilir. Varyasyonun büyüklüğünü α gibi küçük bir skalar parametre ile belirtirsek, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2)

noktaları arasındaki rastgele bir fonksiyonu,

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x) + 0(\alpha^2) \tag{14.3}$$

şeklinde parametrelendirebiliriz. $y(x, \alpha = 0)$ ise, J integralini ekstremum yapan (aranılan) fonksiyondur. Bu fonksiyona göre varyasyon ise,

$$\delta y = y(x,\alpha) - y(x,0) = \alpha\eta(x) \tag{14.4}$$

olacaktır. Bu tanımla J integrali de α parametresine bağlı olarak

$$J\left(\alpha\right) = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x,\alpha), y_x(x,\alpha), x\right] dx \tag{14.5}$$

şeklinde yazılır. Artık bu fonksiyonelin ekstremum değeri, matematikteki gibi α parametresine göre,

$$\left.\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{14.6}$$

şartı ile bulunur. Varyasyon hesabının birinci şartı uç noktalarda varyasyonun

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{14.7}$$

şeklinde sıfır olmasıdır. İkinci şartı ise, $\eta(x)$ fonksiyonun türevlenebilir bir fonksiyon olmasıdır. Böylece, J'nin α'ya göre türevi

$$\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial \alpha}\right] dx \tag{14.8}$$

olarak bulunur. (14.3) numaralı denklemi kullanarak

$$\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad \frac{\partial y_x(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx} \tag{14.9}$$

yazarsak, denklem (14.8),

$$\frac{\partial J\left(\alpha\right)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{d\eta(x)}{dx}\right] dx \tag{14.10}$$

şeklini alacaktır. İntegraldeki ikinci ifadeyi kısmi integralini alarak hesaplarsak,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{d\eta(x)}{dx} dx = \left.\frac{\partial f}{\partial y_x}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) dx \tag{14.11}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

olacaktır. Uç noktalarda varyasyon sıfır olacağından, ilk teriminin sonuca katkısı olmaz ve $J(\alpha)$'nın ekstremum olması şartı da

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\eta(x)dx=0 \tag{14.12}$$

şeklini alır. $\eta(x)$ varyasyonu rasgele seçilebileceğinden, bu denklemin bütün $\eta(x)$'lar için sağlanması ancak parantez içindeki ifadenin sıfır olması ile mümkündür. Bu da bize Euler denklemi olarak bilinen,

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}=0 \tag{14.13}$$

denklemini verir. Varyasyon hesabı sonuç olarak, $J[y(x)]$ fonksiyonelini ekstremum yapan fonksiyonun sağladığı ikinci dereceden bir diferansiyel denklem vermiştir.

Euler denkleminin çok kullanışlı bir başka yazımını bulmak için, $f(y,y_x,x)$ fonksiyonunun toplam türevini alalım:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y_x+\frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{dy_x}{dx}+\frac{\partial f}{\partial x} \tag{14.14}$$

Bu denklemde Euler (14.13) denklemini kullanarak

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} \tag{14.15}$$

yazar, ve bunu da (14.14) denkleminde yerine koyarsak,

$$\frac{df}{dx}=y_x\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}+\frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{dy_x}{dx}+\frac{\partial f}{\partial x} \tag{14.16}$$

olacaktır. Bu ise,

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left[f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right]=0 \tag{14.17}$$

şeklinde Euler denkleminin değişik bir yazımıdır. Bu denklemin avantajı, $f(y,y_x,x)$ fonksiyonun açık olarak x'e bağlı olmadığı durumlardadır. Bu durumda f 'nin x'e göre kısmi türevi sıfır olacağından, (14.17) denkleminin birinci integrali kolayca alınır ve çözülmesi gereken denklem de birinci dereceden bir diferansiyel denkleme indirgenir:

$$f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}=\text{sabit}. \tag{14.18}$$

14.1.1 Euler Denkleminin Uygulamaları

Örnek (14.1) ***İki nokta arasındaki en kısa yol:*** xy düzleminde iki nokta arasındaki en kısa yolu bulmak için, xy düzleminde sonsuz küçük mesafe elemanını (Pisagor teoremini)

$$ds=\left[(dy)^2+(dx)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14.19}$$

$$=dx\left[1+y_x^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14.20}$$

şeklinde yazalım. Sonlu bir mesafeyi belirlemek için yukarıdaki ifadenin,

$$J=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}ds, \tag{14.21}$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\left[1+y_x^2\right]^{\frac{1}{2}}dx \tag{14.22}$$

şeklinde integralini alırız. Bu integrali ekstremum yapan $y(x)$ eğrileri için de

$$f(y,y_x,x)=\left[1+y_x^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonunu kullanarak yazacağımız Euler denklemini çözmemiz gerekir. $f(y,y_x,x)$, x değişkenine açık olarak bağlı olmadığından Euler denkleminin ikinci şekli olan (14.18)'yı kullanarak,

$$\frac{1}{\left[1+y_x^2\right]^{\frac{1}{2}}}=c \tag{14.23}$$

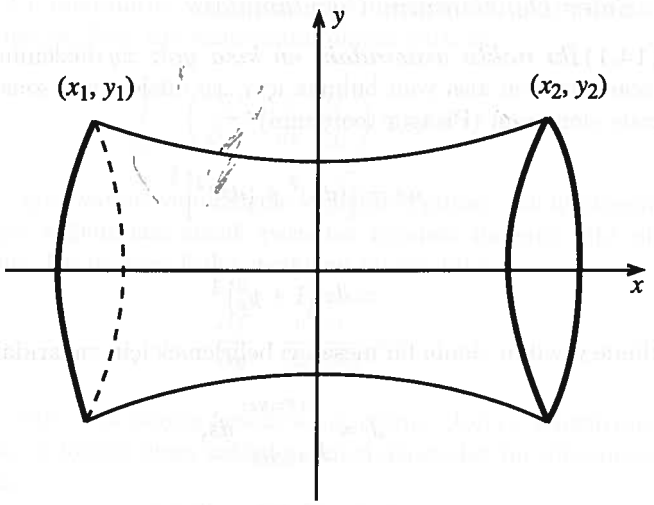
yazarız. Burada c sabit bir sayıdır. Birinci dereceden olan bu denklem kolayca çözülür ve bize xy düzleminde bir doğru denklemini verir:

$$y(x)=ax+b. \tag{14.24}$$

Buradaki a ve b sabitleri, doğrunun belirlenen uç noktalardan geçmesi şartı kullanılarak bulunabilir. Herhangi bir uzay üzerinde iki nokta arasındaki en kısa yola jeodezik denir. Einstein gravitasyon teorisinde eğik uzay-zamanlarda jeodezikler benzer şekilde bulunurlar ve teoride anahtar rol oynarlar.

Örnek (14.2) ***Sabun köpüğü problemi:*** Serbest uzayda aralarındaki mesafe $2x_0$ olan iki çember arasındaki sabun köpüğü yüzeyini bulalım. Çemberler Şekil (14.2)'de gösterilen (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktalarından geçmektedir. Burada aradığımız (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktaları arasında

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 14.2. **Uzayda iki çember arasında sabun köpüğü yüzeyi.**

bir $y(x)$ eğrisidir. Bu eğri x ekseni etrafında döndürüldüğünde ortaya çıkacak yüzey, sabun köpüğünün şeklini verecektir. Sabun köpüğünün enerjisi yüzey alanına orantılı olacağından ve denge durumunda da enerji minimum olacağından, aradığımız eğri de alanı minimum yapan olacaktır.

Şekil (14.2)'den görüldüğü gibi sonsuz küçük yüzey alan elemanı,

$$dA = 2\pi y ds \tag{14.25}$$

$$= 2\pi y \left[1 + y_x^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \tag{14.26}$$

şeklinde yazılır. Sabun köpüğünün yüzey alanı da aşağıda verilen integral olacaktır:

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \left[1 + y_x^2\right]^{\frac{1}{2}} dx. \tag{14.27}$$

2π çarpanını göz önüne almadan, varyasyon probleminde $f(y, y_x, x)$ fonksiyonunu

$$f(y, y_x, x) = y \left[1 + y_x^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14.28}$$

olarak belirleriz. f açık olarak x'e bağlı olmadığından Euler denkleminin (14.17) yazımını kullanarak,

$$\frac{y}{\left[1 + y_x^2\right]^{\frac{1}{2}}} = c_1 \tag{14.29}$$

yazarız. Burada c_1 bir sabittir. Her iki tarafın da karesini alırsak,

$$\frac{y^2}{[1 + y_x^2]} = c_1^2 \tag{14.30}$$

olacaktır. Buradan da

$$(y_x)^{-1} = \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}, \quad c_1^2 \leq y_{\min}^2 \tag{14.31}$$

denklemine erişiriz. Bu denklemin integralini alarak

$$x = c_1 \cosh^{-1} \frac{y}{c_1} + c_2 \tag{14.32}$$

ve buradan da $y(x)$ fonksiyonunu elde ederiz:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \tag{14.33}$$

Buradaki c_1, c_2 sabitleri eğrinin (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçmesi şartı kullanılarak belirlenir. Problemin simetrisinden dolayı c_2 sıfır olacaktır. Çemberler arasındaki mesafe $2x_0$ olarak alınırsa, c_1 için

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{2c_1}\right) \tag{14.34}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin iki çözümü vardır. $c_1 = 0.2350$ çözümü, "derin eğri" çözümü ve $c_1 = 0.8483$ çözümü de "düz eğri" çözümü olarak bilinir. Hangisinin doğru çözüm olduğuna karar vermek için her ikisi içinde yüzey alanını bulmamız gerekir. Denklem (14.26) ve (14.29)'u kullanarak yüzey alanını

$$A = \frac{4\pi}{c_1} \int_0^{x_0} y^2 dx \tag{14.35}$$

şeklinde yazarız. Çözüm fonksiyonu (14.33)'ü burada yerine koyarak alanı buluruz:

$$A = \pi c_1^2 \left[\sinh\left(\frac{2x_0}{c_1}\right) + \frac{2x_0}{c_1}\right] \tag{14.36}$$

$x_0 = \frac{1}{2}$ değeri için bulduğumuz

$$c_1 = 0.2350 \tag{14.37}$$

ve

$$c_1 = 0.8483 \tag{14.38}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

değerleri için alanı sırası ile hesaplarsak,

$$A = 6.8456 \tag{14.39}$$

ve

$$A = 5.9917 \tag{14.40}$$

bulunacaktır. Bu da bize doğru c_1 değeri olarak 0.8483 'ü verir. Çemberler arasındaki mesafe arttırılırsa, doğal olarak kritik bir noktadan sonra ($x_0 \geq 1$) köpük yırtılacaktır. Örnek olarak $x_0 = 1$ alırsak,

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{c_1}\right) \tag{14.41}$$

denkleminin reel çözümü yoktur. Bu x_0 değeri için çemberler arasında dengede bir sabun köpüğü olamaz.

14.2 Birden Fazla Bağımlı Değişken Durumu

Denklem (14. 1) de tanımlanan varyasyon hesabındaki f fonksiyonunun

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x), ... \tag{14.42}$$

gibi, birden fazla bağımlı değişkene ve x gibi bir bağımsız değişkene bağlı olduğu durumu ele alalım. Bu durumda J fonksiyoneli,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y_1(x), y_2(x), ..., y_{1x}(x), y_{2x}(x), ..., x\right] dx \tag{14.43}$$

şeklinde olur. Bölüm (14.1)'de gördüğümüz gibi J integralini ekstremum yapan $y_i(x, 0)$ yollarından sapmaları,

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha\eta_i(x) + 0(\alpha^2), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{14.44}$$

şeklinde küçük α parametresi cinsinden yazabiliriz. Burada η_i fonksiyonları birbirlerinden bağımsızdır. Bu durumda da uç noktalarda değişim,

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0 \tag{14.45}$$

şeklinde sıfır olarak alınır. (14.43)'ün α ya göre türevini alıp, $\alpha = 0$ değeri için yazarsak,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}}\frac{d\eta_i(x)}{dx}\right) dx = 0 \tag{14.46}$$

integralini elde ederiz. İkinci terimin kısmi integralini alıp, uç noktalarda $\eta_i(x)$ fonksiyonlarının sıfır olması şartını da kullanarak, (14.46) integralini

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{ix}}\right) \eta_i(x) dx = 0 \tag{14.47}$$

şeklinde yazarız. $\eta_i(x)$ fonksiyonları keyfi ve birbirlerinden bağımsız olduklarından, integralin sıfır olması için parantez içindeki toplamın her bir i değeri için sıfır olması gerekir. Bu da bize,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{ix}} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{14.48}$$

denklemlerini verir. Burada $y_{ix} = \partial y_i/\partial x$ olarak gösterilmiştir.

Sonuç olarak, J integralini ekstremum yapma şartı Euler denklemleri sistemine indirgenmiş olur. Denklem (14.48)'in en önemli uygulamalarından biri, klasik mekaniğin Lagrange formülasyonudur. Burada f, sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin farkı olarak tanımlanan Lagrange fonksiyonudur.

14.3 Birden Fazla Bağımsız Değişken Durumu

Bazı problemlerde integrali alınan f fonksiyonu, bilinmeyen bir $u(x, y, z)$ fonksiyonuna ve üç boyutlu problemlerde olacağı gibi de üç bağımsız değişkene bağlı olabilir. Bu durumda ekstremumu bulunmak istenen fonksiyonel de

$$J = \int\int\int f\left[u, u_x, u_y, u_z, x, y, z\right] dxdydz \tag{14.49}$$

şeklinde üç katlı bir integral olacaktır. Burada u_x, x'e göre kısmi türevi göstermektedir. Buradaki problem,

$$\delta J = \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{14.50}$$

şartını sağlayacak bir $u(x, y, z)$ fonksiyonunun belirlenmesidir. $u(x, y, z, \alpha = 0)$'ı aradığımız fonksiyon olarak düşünürsek, herhangi bir fonksiyon için

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z, \alpha = 0) + \alpha\eta(x, y, z) \tag{14.51}$$

yazabiliriz. Buradaki sapma fonksiyonu olan $\eta(x, y, z)$ türevlenebilir olmalıdır. Denklem (14.49)'un α'ya göre türevini alıp, $\alpha = 0$ yazar ve $\frac{\partial f}{\partial u_x}\eta_x$ gibi terimlerin de η fonksiyonunun sınırlarda sıfır olduğunu hatırlayarak

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik © 2004 II. baskı Selçuk Ş. Bayın

kısmi integrallerini alırsak, J'nin varyasyonunun sıfır olması şartını da aşağıdaki gibi yazarız:

$$\delta J = \int\int\int \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \eta(x,y,z) dxdydz = 0. \tag{14.52}$$

$\eta(x,y,z)$ varyasyonu keyfi olacağından, parantez içindeki terim sıfır olmalıdır. Bu da üç bağımsız değişken için Euler denklemini,

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z} = 0 \tag{14.53}$$

olarak verir. n bağımsız değişkenin olduğu durumlara bu denklem kolayca

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial(\partial u/\partial x_i)} \right] = 0 \tag{14.54}$$

şeklinde genelleştirilir.

Örnek (14.3)Laplace denklemi ve elektrostatik enerji: Bilindiği gibi elektrostatik alanın enerji yoğunluğu

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tag{14.55}$$

formülü ile belirlenir. Burada E elektrostatik alan vektörünün büyüklüğüdür ve

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{14.56}$$

şeklinde bir potansiyelden türetildiğinden,

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 \tag{14.57}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi verilen bir hacimdeki enerji miktarının minimum olma şartını araştıralım. Bu durumda $\frac{1}{2}\varepsilon$ gözardı edilerek fonksiyonel,

$$J = \int\int\int \left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 dxdydz \tag{14.58}$$

şeklinde üç katlı bir integral olarak yazılır. Burada,

$$\left(\vec{\nabla}\Phi\right)^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 \tag{14.59}$$

şeklindedir. Böylece Euler denklemindeki f ,

$$f\left[\Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, x, y, z\right] = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 \tag{14.60}$$

olacaktır. Bunun için Euler denklemi (14.53) yazılırsa,

$$-2\left(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}\right) = 0$$

veya Laplace denklemi,

$$\vec{\nabla}^2\Phi(x,y,z) = 0 \tag{14.61}$$

elde edilir. Daha ayrıntılı bir inceleme ise, ekstremumun aslında minimum olduğunu göstericektir.

14.4 Birden Fazla Bağımlı ve Bağımsız Değişken Durumu

Genelleştirilmiş durumda f fonksiyonu,

$$f = f\left[p(x,y,z), p_x, p_y, p_z, q(x,y,z), q_x, q_y, q_z, r(x,y,z), r_x, r_y, r_z\right] \tag{14.62}$$

şeklinde 3 bağımlı ve 3 bağımsız değişkene bağlı olursa, önceki durumlara benzer şekilde komşu fonksiyonları parametrelendirerek:

$$\begin{aligned} p(x,y,z;\alpha) &= p(x,y,z,\alpha=0) + \alpha\xi(x,y,z) + 0(\alpha^2), \\ q(x,y,z;\alpha) &= q(x,y,z,\alpha=0) + \alpha\xi(x,y,z) + 0(\alpha^2), \\ r(x,y,z;\alpha) &= r(x,y,z,\alpha=0) + \alpha\xi(x,y,z) + 0(\alpha^2) \end{aligned} \tag{14.63}$$

yazarız. $J = \int\int\int f dxdydz$ fonksiyonelinin ekstremum olma şartını da

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \tag{14.64}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q_z} = 0, \tag{14.65}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial r_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial r_z} = 0 \tag{14.66}$$

şeklinde buluruz. Burada p, q ve r fonksiyonları için olmak üzere 3 Euler denklemi verilmiştir. $p, q, r, ...$ yerine daha çok sayıda fonksiyon için y_i ve çok sayıda bağımsız değişken için $x, y, z, ...$ yerine x_j notasyonunu kullanırsak, Euler denklemleri

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial y_{ij}} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., \tag{14.67}$$

şeklinde bulunurlar. Burada y_{ij},

$$y_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \tag{14.68}$$

olarak tanımlanmıştır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

14.5 Yüksek Mertebeden Türev İçeren Varyasyon Problemleri

Mühendislikte bazı problemler

$$J[y(x)] = \int_a^b F\left(x, y, y^{(1)}, ..., y^{(n)}\right) dx \tag{14.69}$$

biçiminde bir fonksiyonelin extremumunu bulmaya indirgenir. Burada $y^{(i)} = \frac{\partial^i y}{\partial x^i}$ olarak tanımlanmıştır. Bağımsız değişken x'in değişim aralığı $[a, b]$ kapalı aralığıdır. $y(x)$ üzerindeki sınır şartları ise,

$$\begin{aligned} &y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)} \\ &y(b) = y_1, \quad y'(b) = y'_1, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(b) = y_1^{(n-1)} \end{aligned} \tag{14.70}$$

şeklinde verilir. (14.69) fonksiyonelini ekstremum yapan ve (14.70) sınır şartlarını sağlayan $y(x)$ eğrisinin

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0 \tag{14.71}$$

diferansiyel denklemini sağlaması gerektiği önceki durumlardaki gibi gösterilebilir. Bu denklem Euler-Poisson denklemi olarak da bilinir.

Örnek (14.4) ***Elastik bir çubuğun şekil değişikliği:*** Esneklik teorisinde, homojen ve elastik bir çubuğun uç noktalarının yerden aynı yükseklikte sabitlendiğini düşünelim. Amacımız çubuğun orta hattının çökme profilini belirlemektir. Bu bir köprü modeli olabileceği gibi bir binanın herhangi bir kirişi olarak da düşünülebilir. Şekil(14.3)'de gösterildiği gibi çubuğun uç noktaları $(-l, 0)$ ve $(0, -l)$ noktaları olsun.

Çubuğun potansiyel enerjisini E ile gösterirsek, formülünü de esneklik teorisinden

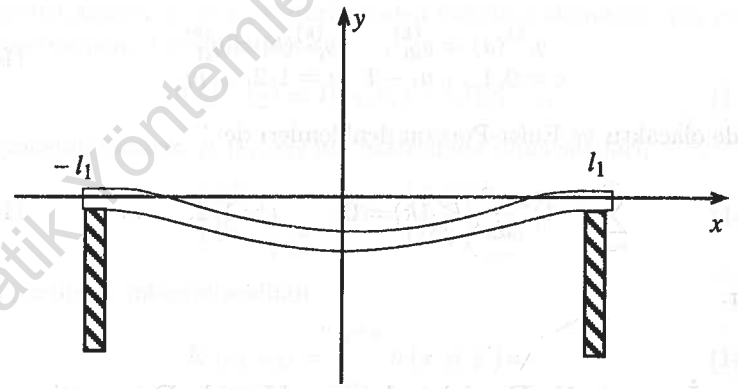
$$E = \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2}\mu \frac{(y'')^2}{(1+y'^2)} + \rho y\sqrt{1+y'^2}\right] dx \tag{14.72}$$

şeklinde alırız. μ ve ρ sabitleri çubuğun fiziksel özelliklerini belirleyen parametrelerdir. Deformasyonun (şekil değişikliğinin) küçük olduğu durumlarda

$$1 + y'^2 \approx 1 \tag{14.73}$$

yazabiliriz. Bu durumda enerji formülü de

$$E = \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2}(y'')^2 + \rho y\right] dx \tag{14.74}$$



ŞEKİL 14.3. **Bir çubuğun veya kirişin şekli.**

olacaktır. Dengeli bir sistem için toplam enerjinin minimum olması gerekeceğinden, $y(l) = y(-l) = 0$ sınır şartları ile enerji integralini minimize etmeliyiz. Bundan dolayı,

$$F(x, y, y', y'') = \frac{1}{2}\mu y'' + \rho y \tag{14.75}$$

integrandı için Euler-Poisson denklemini kullanarak,

$$\mu y^{(4)} + \rho = 0 \tag{14.76}$$

buluruz. Bu diferansiyel denkleminin çözümü ise,

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta - \frac{\rho}{24\mu}x^4 \tag{14.77}$$

olarak belirlenir. Sınır şartları kullanılarak da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sabitleri bulunursa, sonuç

$$y = \frac{\rho}{24\mu}\left[-x^4 + 2l^2x^2 - l^4\right] \tag{14.78}$$

olacaktır.

Denklem (14.69)'da tanımlanan varyasyon problemi,

$$\begin{aligned} I(y_1, ..., y_m, x) \quad = \quad & \int F(x, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n_1)}, \\ & y_2, y'_2, ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y'_m, ..., y_m^{(n_m)})dx \end{aligned} \tag{14.79}$$

Fen ve Mühendislik Kitaplarında Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 S. Bayın, Selçuk Ş. Bayın

şeklinde birden fazla bilinmeyen fonksiyon için de genelleştirilebilir. Bu durumda sınır şartları,

$$\begin{array}{ll} y_i^{(k)}(a) = y_{i0}^{(k)}, & y_i^{(k)}(b) = y_{i1}^{(k)} \\ k = 0, 1, ..., n_i - 1 & i = 1, 2, ..., m \end{array} \tag{14.80}$$

şeklinde olacaktır ve Euler-Poisson denklemleri de

$$\sum_{k=0}^{n_i} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y_i}(k) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{14.81}$$

olurlar.

14.6 İzometrik Problemler ve Kısıtlı Durumlar

Bazen uygulamalarda

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\, dx \tag{14.82}$$

fonksiyonelini ekstremize eden $y(x)$ fonksiyonunu ararken,

$$J = \int_{x_A}^{x_B} g(x, y, y')\, dx \tag{14.83}$$

şeklinde verilmiş bir kısıtı da sağlamamız gerekir. $y(x_A) = y_A$ ve $y(x_B) = y_B$ sınır şartlarını sağlayan $y(x)$ fonksiyonunun sağlayacağı diferansiyel denklemini bulmak için, bütün aday fonksiyonları $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ olarak $\varepsilon_1$ve ε_2 cinsinden iki parametre ile gösterelim. Bu fonksiyonlar aynı zamanda:

i) Bütün $\varepsilon_1$ve ε_2 parametleri için

$$\bar{y}(x_A, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_A \quad , \quad \bar{y}(x_B, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_B,$$

sınır şartlarını sağlasın.

ii) $\bar{y}(x, 0, 0) = y(x)$ aranılan fonksiyon olsun

iii) $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ fonksiyonları bütün değişkenlere göre ikinci dereceye kadar sürekli türevleri olan fonksiyonlar olsun. Bu fonksiyonlar (14.82) ve (14.83) integrallerinde kullanılırsa,

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx, \tag{14.84}$$

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} g(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx \tag{14.85}$$

gibi ε_1 ve ε_2 parametrelerine bağlı integraller elde edilir. $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$'yi $\varepsilon_1$ve ε_2 parametrelerine göre ekstremize ederken $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$'nin sabit bir değer alması gerektiğinden, ε_1 ve ε_2 birbirilerinden bağımsız olamazlar. Bu yüzden Lagrange çarpanı λ'yı kullanarak,

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \tag{14.86}$$

fonksiyonelini yazarız. $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$'nin ekstremum olma şartları,

$$\left[\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right]_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \varepsilon_1=0}} = 0 = \left[\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right]_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \varepsilon_1=0}} \tag{14.87}$$

olarak yazılır ve integral şeklinde

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} h(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx \tag{14.88}$$

olarak verilir. h fonksiyonuda

$$h = f + \lambda g \tag{14.89}$$

olarak tanımlanır. Parametrelere göre türev alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa ve sınır şartları da kullanılırsa,

$$\left[\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_j}\right] = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial h}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial \bar{y}'}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_j} dx, \quad j = 1, 2 \tag{14.90}$$

olacaktır. $\eta_j(x) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_j}\right)_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \varepsilon_1=0}}$ alınırsa ve (14.87) şartları da uygulanırsa

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y'}\right] \eta_j(x)\, dx = 0, \qquad j = 1, 2 \tag{14.91}$$

bulunacaktır. η_j varyasyonları keyfi olarak seçilebildiklerinden sonuç olarak da

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y'} = 0 \tag{14.92}$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümünden çıkacak iki keyfi sabit ve bir Lagrange çarpanı λ,

$$y_1 = y_1(x_A) \quad \text{ve} \quad y_1(x) = y_1(x_B)$$

olarak verilen sınır şartlarından ve J 'in sabit bir değer alması şartından bulunur.

Eğer $J_1, ...J_m$ gibi m tane kısıt şartımız olursa, yukarıdaki denklemler kolayca genelleştirilebilir. Bu durumda,

$$h = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \tag{14.93}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

denkleminde m tane Lagrange çarpanımız olacaktır. Kısıt integralleri de

$$J_i = \int_{x_A}^{x_B} g_i(x, y, y')\, dx = \text{sabit} \tag{14.94}$$

şeklindedir. Böylece (14.93) denkleminde m tane belirlenecek λ_i Lagrange çarpanı vardır.

n tane bağımlı değişken durumunda ise, Euler denklemi

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y_i'} = 0, \qquad i = 1, ..., n \tag{14.95}$$

şeklinde bir denklem sistemine dönüşür. Burada h fonksiyonu (14.93) denklemi ile verilir.

Örnek (14.5) ***Sabit uzunlukta bir eğri içinde kalan maksimun alan:*** Çevresi L sabit değerinde ve iç alanı maksimum olan kapalı bir eğrinin ne olduğunu bulalım. Bu kapalı eğrinin parametrik denkleminin $x(t)$ ve $y(t)$ ile verildiğini düşünürsek, alan

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} (xy' - x'y)\, dt \tag{14.96}$$

formülü ile gösterilecektir. Çevresi ise, sabit L değerinde olacağından kısıt denklemi de aşağıdaki gibi olur:

$$L = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt \tag{14.97}$$

Bu durumda t bağımsız değişken olacaktır. x ve y olarak da iki bağımlı değişkenimiz bulunmaktadır. Tek kısıt denklemimiz (13.97) olduğundan tek Lagrange çarpanı ile h fonksiyonu,

$$h = \frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{14.98}$$

şeklinde oluşturulur. Euler denklemleri de aşağıdaki gibi yazılırlar:
x için:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial x'} &= 0, \\ \frac{1}{2}y' - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= 0, \\ y' - \frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{14.99}$$

ve benzer şekilde de y için:

$$x' + \frac{d}{dt}\left(\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) = 0 \tag{14.100}$$

elde ederiz. Bu denklem sisteminin (14.99 – 14.100) birinci integrali kolayca alınarak,

$$y - \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = y_0, \tag{14.101}$$

$$x + \lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x_0 \tag{14.102}$$

bulunur. Bunların çözümleri de

$$y - y_0 = \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \tag{14.103}$$

$$x - x_0 = -\lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \tag{14.104}$$

olur. Bu iki ifadeyi birleştirirsek, aranılan kapalı eğrinin

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2 \tag{14.105}$$

şeklinde çapı λ olan ve (x_0, y_0) merkezli bir çember olduğu görülür. Çemberin çevresi L olduğundan Lagrange çarpanı

$$\lambda = \frac{L}{2\pi} \tag{14.106}$$

olacaktır.

Örnek (14.6) ***Sabit uzunlukta bir telin şekli:*** Boyu L sabit değerinde ve uç noktalarından tutturulmuş olarak serbest halde asılmış bir telin şeklini bulalım. Telin potansiyel enerjisi ağırlığından dolayı

$$I = \rho g \int_A^B y\, ds = \rho g \int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{14.107}$$

şeklinde verilir. Boyunun sabit olduğunu veren kısıt integrali ise,

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{14.108}$$

olarak yazılır. Kolaylık için $\lambda = -\rho g y_0$ biçiminde bir Lagrange çarpanı kullanarak h fonksiyonunu

$$h = \rho g\,(y - y_0)\sqrt{1 + y'^2} \tag{14.109}$$

şeklinde belirleriz. Burada g yerçekimi ivmesi, ρ'da ipin yoğunluğudur. Bağımlı değişkeni

$$y \to \eta = y - y_0 \tag{14.110}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde değiştirirsek, h fonksiyonu

$$h = \rho g \eta(x) \sqrt{1 + \eta(x)'^2} \tag{14.111}$$

şeklini alır. Bunun için de Euler denklemlerinin çözümü

$$y = y_0 + b \cosh\left(\frac{x - x_0}{b}\right) \tag{14.112}$$

bulunur. Telin boyunun L olması ve uç noktalarının (x_A, y_A) ve (x_B, y_B) olması şartlarından y_0 (Lagrange çarpanı), x_0 ve b sabitleri belirlenir.

14.7 Özdeğer Problemi ve Varyasyon Tekniği

Varyasyon hesabının bize bilinmeyen fonksiyon yerine onun için çözülecek bir diferansiyel denklem verdiğini gördük. Acaba, verilen bir diferansiyel denklem de her zaman bir varyasyon probleminin sonucu olarak yazılabilirmi? İlginçtir, fizik ve mühendislikte karşılaştığımız pek çok diferansiyel denklem ki, bunların çoğu hareket denklemidir, bir varyasyon probleminin sonucu olarak da elde edilebilir. Örneğin: V hacmi içinde ve verilen sınır değerleri ile

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \tag{14.113}$$

şeklinde yazılan Laplace denklemini çözmek,

$$I\left[\phi\left(\vec{x}\right)\right] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \phi)^2 \, d^3x \tag{14.114}$$

fonksiyonelini verilen sınır şartlarında minimize etmekle eşdeğerdir.

Çok daha genel bir örnek ise, ilk bölümlerde gördüğümüz bütün özel fonksiyonları kapsayan ve

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] - q(x)u(x) + \lambda\rho(x)u(x) = 0, \quad x \in (a,b) \tag{14.115}$$

şeklinde verilen Sturm-Liouville tipi denklemlerdir. Bu durumda ekstremize edilmesi gereken fonksiyonel,

$$I\left[u\left(x\right)\right] = \int_a^b \left[pu'^2 + \left(q - \lambda\rho\right)u^2\right] dx \tag{14.116}$$

şeklindedir. λ özdeğerinin başlangıçta bilinmediğini hatırlarsak, bu Sturm-Liouville fonksiyoneli için kullanışlı bir şekil değildir. Bunun yerine,

$$I\left[u\left(x\right)\right] = \int_a^b \left[pu'^2 + qu^2\right] dx \tag{14.117}$$

fonsiyoneli ve

$$J\left[u\left(x\right)\right] = \int_a^b \rho u^2 dx = sabit \tag{14.118}$$

kısıt şartı kullanılır. Bu durumda özdeğerler, varyasyon problemine belirlenmesi gereken Lagrange çarpanları olarak girerler. (14.118) kısıt şartı ise, $u(x)$ için aynı zamanda normalizasyon şartı da olduğundan varyasyon problemi,

$$K\left[u\left(x\right)\right] = \frac{I\left[u\left(x\right)\right]}{J\left[u\left(x\right)\right]} \tag{14.119}$$

fonksiyonelinin minimizasyonuna eşdeğerdir. Belirtmek gerekirse, Sturm-Liouville deklemini $u(x)$ ile çarpıp a'dan b'ye integralini yazar ve kısmi integralini alırsak, $K\left[u\left(x\right)\right]$ fonksiyonelinin minimum değerlerinin, özdeğerlere yani, λ'ya eşit olduğunu görürüz. Bir Sturm-Liouville denkleminde (Morse & Feshbach bölüm 6.3):

i) Bir en küçük özdeğer vardır.

ii) $n \to \infty$ olurken $\lambda_n \to \infty$ olacaktır.

iii) Daha kesin olarak, $n \to \infty$ olurken $\lambda_n \sim n^2$ ile orantılıdır.

Dolayısı ile (14.116) fonksiyonelinin minimum değerleri, $\lambda_n$özdeğerlerini verecektir. Böylece, (i) özelliğinden fonksiyonelimizin mutlak minimumu en küçük özdeğer olan λ_0'ı verecektir. Bu en küçük özdeğerin hesabı için kullanışlı bir yoldur.

En küçük özdeğeri tahmin etmek için önce yaklaşık bir $u(x)$ fonksiyonu seçmemiz gerekir. Buna deneme fonksiyonu da denir. Bu yaklaşık fonksiyonun bilmediğimiz ama var olan gerçek öz fonksiyonlar olan $u_i(x)$ cinsinden genel Fourier açılımını yaparsak,

$$u = u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... \tag{14.120}$$

elde ederiz. Burada $c_1, c_2, ...$ katsayıları deneme fonksiyonumuzun gerçek özfonksiyona yakınlığı oranında küçük sayılar olacaktır. (14.116) fonksiyonelini deneme fonksiyonumuzu kullanarak hesaplamak için önce,

$$\int_a^b \left[p\left(u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + ...\right)^2 + q\left(u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + ...\right)^2\right] dx \tag{14.121}$$

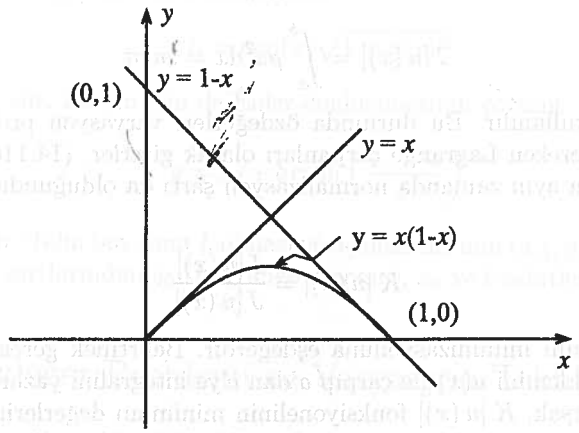
integralini bulmamız gerekir. $\{u_i\}$ özfonksiyonları seti daha önce gördüğümüz gibi tüm ve birbirilerine dik bir set oluştururlar. Normlandıklarını da varsayarsak, aralarındaki

$$\int_a^b \left[pu_i'^2 + qu_i^2\right] dx = \lambda_i \tag{14.122}$$

ve

$$\int_a^b \left[pu_i'u_j' + qu_iu_j\right] dx = 0 \quad (i \neq j) \tag{14.123}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bay



ŞEKİL 14.4. **Sin(πx) yerine yaklaşık olarak $x(1-x)$ kullanabiliriz.**

ilişkilerini kullanarak,

$$K\left[u\left(x\right)\right]=\frac{\int_a^b\left[pu'^2+qu^2\right]dx}{\int_a^b\rho u^2dx} \tag{14.124}$$

fonksiyonelini

$$K\left[u\left(x\right)\right]\simeq\frac{\lambda_0+c_1^2\lambda_1+c_2^2\lambda_2+...}{1+c_1^2+c_2^2+...} \tag{14.125}$$

şeklinde buluruz. $c_1, c_2, ...$ katsayılarının deneme fonksiyonumuzun gerçek özfonksiyona yakınlığı oranında küçük değerler alacağını düşünürsek,

$$K\simeq\lambda_0+c_1^2\left(\lambda_1-\lambda_0\right)+c_2^2\left(\lambda_2-\lambda_0\right)+... \tag{14.126}$$

ifadesi bize yaklaşık olarak en küçük özdeğeri verecektir. Burada önemli olan, deneme fonksiyonunun gerçek özfonksiyona yakınlığı birinci dereceden olursa, en küçük özdeğer tahminimiz $c_1^2, c_2^2, ...$gibi gittiğinden gerçek özdeğere ikinci dereceden yakın olacağıdır. Bu özellik Hylleraas-Undheim teoremi olarak da bilinir. Gerçek özdeğerler monoton artan değerler alacağından bu ifade aynı zamanda da bize en küçük özdeğer için bir üst sınır verecektir.

Örnek (14.7) ***En küçük özdeğerin bulunması:***

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0 \tag{14.127}$$

denkleminin en küçük özdeğerini, $u(0)=0$ ve $u(1)=0$ sınır şartlarını göz önüne alarak yaklaşık olarak bulalım. Bunun için Şekil (14.4)'deki gibi,

$$u=x(1-x) \tag{14.128}$$

şeklinde bir deneme fonksiyonu kullanırsak,

$$\lambda_0\leq\frac{\int_0^1u'^2dx}{\int_a^bu^2dx}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}=10 \tag{14.129}$$

buluruz. Bu da gerçek özdeğer olan π^2'ye yakın bir değerdir. Daha yakın bir değeri ise, deneme fonksiyonunu

$$u=x(1-x)(1+c_1x+...) \tag{14.130}$$

şeklinde geliştirip, c_i parametrelerini K 'yı minimum yapacak biçimde bularak elde edebiliriz. Bu yöntemin verimli çalışabilmesi için iyi bir deneme fonksiyonu:

i) Sınır şartlarını sağlamalıdır.
ii) Genel yapısı itibarı ile gerçek özfonksiyona benzemelidir.
iii) Analitik sonuçlar elde etmek için yeterince basit olmalıdır.

Örnek (14.8) ***Davul zarının titreşimleri:*** Küresel koordinatlarda ve iki boyutta

$$\overrightarrow{\nabla}^2u+k^2u=0,\quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2} \tag{14.131}$$

şeklinde verilmiş olan dalga denklemini ele alalım. Bu denklem yarıçapı a olan bir davulun yüzeyindeki dalgaları temsil ediyor olabilir. Sınır şartı olarak $u(a)=0$ alırsak, en küçük özdeğer için deneme fonksiyonunu

$$u=1-\frac{r}{a} \tag{14.132}$$

olarak seçebiliriz. Bu durumda en küçük özdeğer olan k_0^2 için bir üst limit,

$$k_0^2\leq\frac{\int\left(\overrightarrow{\nabla}u\right)^2dxdy}{\int u^2dxdy} \tag{14.133}$$

eşitsizliğinden

$$k_0^2\leq\frac{\pi}{\pi a^2/6}=\frac{6}{a^2} \tag{14.134}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak bulunur. Gerçek değeri ise,

$$k_0^2 = \frac{5.78}{a^2}$$

olarak verilir.

Örnek (14.9) ***Schrödinger denklemi ve harmonik salınıcı problemi:*** Şimdi de Shrödinger denklemini ele alalım. Bu denklemin türeticisi olan fonksiyonel

$$\frac{\psi \cdot H\psi}{\psi \cdot \psi} \tag{14.135}$$

olarak verilir. Bu fonksiyonelin minimize edilmesinden Shrödinger denklemi elde edilir. Kuantum mekaniğinde harmonik salınıcının en küçük enerjisini (temel durum enerjisini) bulmak istersek, zamandan bağımsız Schrödinger denklemini

$$H\Psi = -\frac{d^2\Psi}{dx^2} + x^2\Psi = E\Psi \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{14.136}$$

şeklinde yazar ve deneme fonksiyonunu da deneyimlerimizden yararlanarak

$$\Psi = (1 + \alpha x^2)e^{-x^2} \tag{14.137}$$

şeklinde seçebiliriz. (14.135) fonksiyoneli bize temel durum enerjisi için bir üst limit verecektir:

$$E_0 \leq \frac{\Psi \cdot H\Psi}{\Psi \cdot \Psi} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{8} + \frac{43\alpha^2}{64}}{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{16}}. \tag{14.138}$$

Bu ifadenin minimumu da

$$23\alpha^2 + 56\alpha - 48 = 0 \tag{14.139}$$

denkleminin çözümü ile belirlenir ve

$$\alpha = 0.6718 \tag{14.140}$$

olarak bulunur. Bu da temel durum enerjisi için bir üst sınırı

$$E_0 \leq 1.034$$

olarak verecektir. Gerçek değer ise 1.0'dır.

Daha üst seviyelerdeki özdeğerlerin hesabı için aynı yöntem kullanılabilir. Ancak, seçilen deneme fonksiyonunu daha düşük özdeğerlere karşı gelen özfonksiyonlara dik olmalıdır veya öyle seçilmelidir.

14.8 Rayleigh-Ritz Yöntemi

Bu yöntemde amaç verilen bir diferansiyel denklemin belli sınır şartlarını sağlayan çözümünün yaklaşık olarak bulunmasıdır. Önce çözümü uygun fonksiyonlar yardımı ile yaklaşık olarak,

$$y(x) \simeq \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + ... + c_n\phi_n(x) \tag{14.141}$$

şeklinde ifade edelim. Burada c_1, c_2, ...,.c_n belirlenmesi gereken sabitlerdir. $\phi_k(x)$ fonksiyonları, c'lerin herhangi bir seçimi için, belirlenen sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler. Genellikle $\phi_0(x)$, x'in tanım aralığının uç noktalarındaki sınır şartlarını sağlayacak şekilde ve $\phi_1, ..., \phi_n$ fonksiyonları da her iki uçta sıfır olacak şekilde seçilirler.

Örnek (14.10) ***İki nokta arasında sabitlenmiş bir telin şekli:*** $(0,0)$ ve (l,h) noktaları arasında sabitlenmiş bir tele, y-ekseni doğrultusunda doğrusal olarak,

$$p(x) = -q\frac{x}{l} \tag{14.142}$$

şeklinde değişen bir yük uygulayalım. Telin şeklini bulmak için çözmemiz gereken varyasyon problemi,

$$\delta \int_0^l \left(\frac{1}{2}Fy'^2 + q\frac{x}{l}y\right) dx = 0 \tag{14.143}$$

olacaktır. Sınır şartları ise,

$$y(0) = 0, \quad y(l) = h \tag{14.144}$$

şeklinde verilmiştir. Şimdi Rayleigh-Ritz yönteminde ifade ettiğimiz gibi, $\phi_0(x)$'i tanım aralığının uç noktalarındaki sınır şartlarını sağlayacak tarzda ve $\phi_1, ..., \phi_n$ fonksiyonlarını da her iki uçta sıfır olacak şekilde aşağıdaki gibi seçelim:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{h}{l}x, \\ \phi_1 &= x(x-l), \\ \phi_2 &= x^2(x-l), \\ &\vdots \\ \phi_n &= x^n(x-l). \end{aligned} \tag{14.145}$$

Bu durumda $y(x)$'in yaklaşık ifadesi,

$$y(x) = \frac{h}{l}x + x(x-l)\left(c_1 + c_2x + ... + c_nx^{n-1}\right) \tag{14.146}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olacaktır. Hesapların kolaylığı için $n = 1$ seçersek,

$$y(x) \simeq \frac{h}{l}x + x(x-l)c_1 \tag{14.147}$$

olur ve bu yaklaşık çözümü varyasyonel integralde yerine yazarsak,

$$\delta\left[\int_0^l \left(\frac{1}{2}F\left[\frac{h}{l} + (2x-l)c_1\right]^2 + q\frac{x}{l}\left[\frac{h}{l}x + x(x-l)c_1\right]\right)dx\right] = 0,$$

$$\delta\left[\frac{1}{2}F\left(\frac{h^2}{l} + \frac{1}{3}l^3c_1^2\right) + q\left(\frac{1}{3}hl - \frac{1}{l^2}c_1l^3\right)\right] = 0, \tag{14.148}$$

$$\frac{1}{3}Fl^3c_1\delta c_1 - \frac{1}{12}ql^3\delta c_1 = 0, \tag{14.149}$$

$$\frac{1}{3}Fl^3\left(c_1 - \frac{q}{4F}\right)\delta c_1 = 0 \tag{14.150}$$

bulunacaktır. c_1'in varyasyonu olan δc_1keyfi değerler alabildiğinden, parantez içindeki ifadeyi sıfıra eşitlersek,

$$c_1 = \frac{q}{4F} \tag{14.151}$$

bulunur. Sonuç olarak da yaklaşık çözümümüz

$$y(x) \simeq \frac{h}{l}x + \frac{q}{4F}x(x-l) \tag{14.152}$$

olacaktır. (14.143)'de verilen varyasyon probleminden ortaya çıkacak Euler denklemi,

$$Fy'' - \frac{qx}{l} = 0 \tag{14.153}$$

olacaktır. Bunun da verilen sınır şartları altındaki tam çözümü

$$y(x) = \frac{h}{l}x + \frac{q}{6Fl}x(x^2 - l^2) \tag{14.154}$$

olarak bulunur.

Örnek (14.11): Rayleigh- Ritz Yöntemi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = -x \tag{14.155}$$

diferansiyel denkleminin $y(0) = 0$ ve $y(1) = 0$ sınır şartları altındaki çözümünü Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak bulalım. Buna karşılık gelen varyasyon problemi,

$$\int_0^1 (y'' + xy + x)\,\delta y dx = 0 \tag{14.156}$$

olarak yazılabilir. Yaklaşık çözüm burada

$$y(x) \cong x(1-x)\left(c_1 + c_2x + ...\right) \tag{14.157}$$

şeklinde seçilir ve yukarıda yerine konursa,

$$0 = \int_0^1 \left[\left(-2 + x^2 - x^3\right)c_1 + \left(2 - 6x + x^3 - x^4\right)c_2 + ... + x\right]$$
$$\cdot\left[\delta c_1\left(x - x^2\right) + \delta c_2\left(x^2 - x^3\right) + ...\right]dx \tag{14.158}$$

bulunur. Bir terimli yaklaşık çözümümüz,

$$y^{(1)} = c_1x(1-x), \quad c_1 = \frac{5}{19} \tag{14.159}$$

olurken, iki terimli yaklaşık çözüm de

$$y^{(2)} = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x), \quad c_1 = 0.177,\ c_2 = 0.173 \tag{14.160}$$

olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

14.9 Problemler

1. Yüksek dereceden türev içeren varyasyon problemleri için uç noktalarda varyasyonun sıfır olduğunu düşünerek,

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0$$

denklemini çıkarınız.

2.

$$y''(x) = -\lambda y(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

şeklinde verilen bir Sturm-Liouville sisteminin birinci ve ikinci dereceden duyarlı özdeğerlerini bulunuz ve tam olarak bulunmuş özdeğerler ile kıyaslayınız.

3. Aşağıda,

$$\delta \int \pounds d\overrightarrow{x} dt = 0, \quad \pounds(\overrightarrow{x}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\Phi}^2 - \left|\overrightarrow{\nabla}\Phi\right|^2 - m^2\Phi^2)$$

olarak verilmiş varyasyon probleminde

$$\Phi(\overrightarrow{x}, t)$$

skalar alanının sağladığı hareket denklemini bulunuz.

4. $\Psi(\overrightarrow{x}, t)$ ve $\Psi^*(\overrightarrow{x}, t)$ fonksiyonlarını bağımsız alanlar olarak alarak,

$$\pounds = \frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}\Psi.\overrightarrow{\nabla}\Psi^* + V\Psi\Psi^* - \frac{i\hbar}{2}(\Psi\dot{\Psi} - \Psi\dot{\Psi}^*)$$

Lagrange yoğunluğunun, Schrödinger denklemini

$$H\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 + V)\Psi = i\hbar\Psi$$

ve onun kompleks eşleniğini verdiğini gösteriniz. $\dot{\Psi} = \partial\Psi/\partial t$ olarak gösterilmiştir.

5. Örnek 10'daki problemi $n = 2$ için çözünüz.

6. Örnek 10'daki tam çözümün

$$y(x) = \frac{h}{l}x + \frac{q}{6Fl}x(x^2 - l^2)$$

olduğunu gösteriniz ve bulduğunuz yaklaşık çözümle karşılaştırınız.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

15

İNTEGRAL DENKLEMLER

Uygulamalarda zaman zaman karşımıza bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemler çıkar. Bu tür denklemlere integral denklemler denir. Genelde karşılaştığımız diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Bir fonksiyonun türevi, o fonksiyonun verilen bir nokta ve yakınında aldığı değerler kullanılarak bulunacağından, diferansiyel denklemler yerel denklemlerdir. Doğa yasalarının ifadesinde diferansiyel denklemler çok başarılı olmuşlardır. Bundan da yakın çevremizi inceleyerek, evrenin tamamında geçerli olacağını düşündüğümüz doğa yasalarının bulunabileceği sonucunu çıkarabiliriz. Belki de bu Einstein'ın "Doğanın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır." sözünün altında yatan gerçektir. İntegral denklemler ise, bütün uzay üzerinden integraller içereceğinden global denklemlerdir. Bu da zaten bilinmeyen fonksiyonun bir noktadaki değerinin, o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. Bunun içindir ki, integral denklemler genelde çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.

Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği de tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir: Sınır şartları da onlarla beraber verilmelidir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. Ek şartlara ne gerek vardır, ne de koşulabilirler. Sınır şartları uzayın bütününde olanların yakınımıza etkilerinin dolaylı yoldan denklemlerimize dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında bir ilişki olması da doğaldır. Bu bölümde göreceğimiz gibi, diferansiyel denklemler temelde integral denklem olarak da yazılabilirler. Green fonksiyonlarını tartışırken, bazı temel fizik yasalarının integral denklem olarak yazımlarını da göreceğiz. Ancak, İntegral denklemler her zaman diferansiyel denklemlere dönüştürülemeyebilir. Kısaca, doğa yasalarını ifade etme açısından diferansiyel denklemler mi? integral denklemler mi? daha uygundur sorusu, Einstein'ın da bir zamanlar ilgilendiği araştırmaya değer problemler arasındadır.

15.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

Doğrusal integral denklemler Fredholm ve Volterra olmak üzere genelde iki sınıfa ayrılırlar. Fredholm tipi denklemler

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \kappa(x, \xi)y(\xi)d\xi \qquad (15.1)$$

şeklinde verilirler. Burada $\alpha(x)$, $F(x)$ ve $\kappa(x,\xi)$ bilinen fonksiyonlar, λ, a ve b ise, bilinen sabitlerdir. $\kappa(x,\xi)$'ye çekirdek fonksiyonu denir ve Green fonksiyonları ile yakından ilgilidir. $y(x)$ ise, bulunması arzu edilen fonksiyondur. Fredholm tipi denklemlerde integralin üst limiti sabit olmazsa Volterra tipi denklemleri elde ederiz ki, bunlar da

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^x \kappa(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{15.2}$$

şeklinde verilirler. Volterra tipi denklemler aralarında

$\alpha \neq 0$ için I. tip
$\alpha = 1$ için II. tip
$\alpha = \alpha(x)$ için III. tip

olarak sınıflandırılır. $F(x)$'in sıfır olduğu durumlarda integral denklem homojendir denir. İntegral denklemler iki veya daha yüksek boyutlarda da tanımlanabilir. Örneğin: İki boyutta

$$\alpha(x,y)\omega(x,y) = F(x,y) + \lambda \int\int_R \kappa(x,y;\xi,\eta)\omega(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{15.3}$$

şeklinde yazılabilirler. Genelde integral denklemler bir problemin tam tanımını ifade ederler. İlave şartlara ne gerek vardır ne de koşulabilirler. Hatırlanacağı üzere, bir problemi tam olarak tanımlayabilmeleri için diferansiyel denklemlerin sınır şartları ile birlikte verilmeleri gerekir.

15.2 İntegral ve Diferansiyel Denklemler

Bazı integral denklemler diferansiyel denklemlerden türetilebilirler. Bu ilişkiyi görmek için, önce

$$I_n(x) = \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi, \tag{15.4}$$

şeklinde verilmiş bir integrali ele alalım. Burada $n > 0$ ve tamsayı, a ise, bir sabittir. $I_n(x)$'in türevini

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,\xi)d\xi \tag{15.5}$$
$$= \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}d\xi + F(x,B(x))\frac{dB(x)}{dx} - F(x,A(x))\frac{dA(x)}{dx}.$$

formülünü kullanarak alırsak,

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1)\int_a^x (x-\xi)^{n-2} f(\xi)d\xi + \left[(x-\xi)^{n-1} f(\xi)\right]_{\xi=x} \tag{15.6}$$

olacaktır. Bu da bize $n > 1$ için

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1)I_{n-1} \tag{15.7}$$

ve $n = 1$ için de

$$\frac{dI_1}{dx} = f(x) \tag{15.8}$$

verir. $I_n(x)$'in k kez türevini alırsak,

$$\frac{d^k I_n}{dx^k} = (n-1)(n-2)...(n-k)I_{n-k} \tag{15.9}$$

bulunacağından

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} = (n-1)!I_1(x) \tag{15.10}$$

veya

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)!f(x) \tag{15.11}$$

yazabiliriz. Eğer $n \geq 1$ için $I_n(a) = 0$ ilişkisini kullanırsak, (15.10) ve (15.11) denklemlerinden $I_n(x)$'in kendisinin ve $(n-1)$'e kadar olan bütün türevlerinin $x = a$ 'da sıfır olduğunu görürüz ki, bu da bize

$$I_1(x) = \int_a^x f(x_1)dx_1 \tag{15.12}$$

$$I_2(x) = \int_a^x I_1(x_2)dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2 \tag{15.13}$$

verecektir. Genel olarak da bunu

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} ... \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2...dx_{n-1}dx_n \tag{15.14}$$

şeklinde yazılabiliriz. Buradan da ileride işimize çok yarayacak olan ve Cauchy formülü olarak da bilinen formülü buluruz:

$$\int_a^x \int_a^{x_n} ... \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2...dx_{n-1}dx_n$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi \tag{15.15}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

15.3 Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = f(x). \tag{15.16}$$

Sınır şartları da $y(a) = y_0$ ve $y'(a) = y'_0$ şeklinde verilmiş olsun. Bu diferansiyel denkleminin integralini alırsak,

$$\begin{aligned} y'(x) - y'_0 &= -\int_a^x A(x_1)y'(x_1)dx_1 - \int_a^x B(x_1)y(x_1)dx_1 \\ &\quad + \int_a^x f(x_1)dx_1 \end{aligned} \tag{15.17}$$

olacaktır. Bunu da $y'(x)$ için çözüp,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -A(x)y(x) - \int_a^x [B(x_1) - A'(x_1)]\, y(x_1)dx_1 \\ &\quad + \int_a^x f(x_1)dx_1 + A(a)y_0 + y'_0 \end{aligned} \tag{15.18}$$

yazar ve tekrar integralini alırsak,

$$\begin{aligned} y(x) - y_0 &= -\int_a^x A(x_1)y(x_1)dx_1 \\ &\quad - \int_a^x \int_a^{x_2} [B(x_1) - A'(x_1)]\, y(x_1)dx_1dx_2 \\ &\quad + \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1dx_2 \\ &\quad + [A(a)y_0 + y'_0]\,(x-a) \end{aligned} \tag{15.19}$$

elde ederiz. Daha önce bulduğumuz (15.15) denklemini de kullanarak bunu

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_a^x \{A(\xi) + (x-\xi)\,[B(\xi) - A'(\xi)]\}\, y(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_a^x (x-\xi)f(\xi)d\xi + [A(a)y_0 + y'_0]\,(x-a) + y_0 \end{aligned} \tag{15.20}$$

veya

$$y(x) = \int_a^x \kappa(x,\xi)y(\xi)d\xi + F(x) \tag{15.21}$$

şeklinde yazabiliriz ki, burada $\kappa(x,\xi)$ ve $F(x)$

$$\begin{aligned} \kappa(x,\xi) &= (x-\xi)\,[B(\xi) - A'(\xi)] - A(\xi) \\ F(x) &= \int_a^x (x-\xi)f(\xi)d\xi + [A(a)y_0 + y'_0]\,(x-a) + y_0 \end{aligned} \tag{15.22}$$

şeklinde verilirler. Bu integral denklem ikinci dereceden bir Volterra denklemidir. Görüldüğü gibi (15.22) integral denklemi, (15.16) diferansiyel denklemi artı sınır şartlarına eşdeğerdir.

Örnek (15.1) ***Diferansiyel denklemler ve integral denklemler:*** Aşağıda verilen diferansiyel denklem ve sınır şartlarını ele alalım:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = f(x),$$

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{15.23}$$

(15.15) formülü kullanılarak bu sistem,

$$y(x) = \lambda \int_0^x (\xi - x)y(\xi)d\xi + 1 - \int_0^x (\xi - x)f(\xi)d\xi. \tag{15.24}$$

integral denklemine dönüşür:

Örnek (15.2) ***Diferansiyel denklemler ve integral denklemler:*** Bu sefer de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0 \tag{15.25}$$

diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını ele alalım. Bu denklemin $(0,x)$ aralığında integralini alırsak,

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda \int_0^x y(\xi)d\xi + C \tag{15.26}$$

buluruz. Burada C bir integral sabitidir ve $y'(0)$ değerini gösterir. İkinci bir integral alma işlemi bize

$$y(x) = \lambda \int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + Cx \tag{15.27}$$

verir ki, burada $y(0) = 0$ sınır şartı dikkate alınmıştır. C değeri ise, ikinci sınır şartını sağlayacak şekilde belirlenmelidir. Bu da bize,

$$\frac{\lambda}{l} \int_0^l (l-\xi)y(\xi)d\xi = C \tag{15.28}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

verir ve sonuç da

$$y(x) = -\lambda \int_0^x (x-\xi) y(\xi) d\xi + \frac{x\lambda}{l} \int_0^l (l-\xi) y(\xi) d\xi \qquad (15.29)$$

veya

$$y(x) = \lambda \int_0^x \frac{\xi}{l}(l-x) y(\xi) d\xi + \lambda \int_x^l \frac{x}{l}(l-\xi) y(\xi) d\xi \qquad (15.30)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem ise,

$$y(x) = \lambda \int_0^l \kappa(x,\xi) y(\xi) d\xi \qquad (15.31)$$

şeklinde yazılırsa çekirdek fonksiyonu

$$\kappa(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{l}(l-x) & \xi < x \\ \frac{x}{l}(l-\xi) & \xi > x \end{cases} \qquad (15.32)$$

şeklinde olacaktır. Bu da ikinci sınıf, homojen bir Fredholm denklemidir.

15.4 İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

Bir önceki bölümde bazı diferansiyel denklemlerin integral denklemlere nasıl dönüştürüldüğünü görmüştük. Volterra denklemleri de bazen integral denklemlere dönüştürülebilir. Aşağıdaki gibi verilmiş bir integral denklemi ele alalım:

$$y(x) = x + \int_0^x xty(t)dt. \qquad (15.33)$$

Bunu,

$$f(x) = \int_0^x ty(t)dt \qquad (15.34)$$

tanımı ile

$$y(x) = x + xf(x) \qquad (15.35)$$

şeklinde yazalım. $f(x)$'in türevini alır ve (15.35)'i kullanırsak, aşağıdaki diferansiyel denklem bulunacaktır:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= xy(x), \\ &= x[x + xf(x)]. \end{aligned} \qquad (15.36)$$

Bu diferansiyel denklemi $f(x)$ için çözersek,

$$f(x) = -1 + C\exp(x^3/3) \qquad (15.37)$$

bulunacaktır ki, bu da bize (15.35) kullanılarak çözümü

$$y(x) = Cx\exp(x^3/3) \qquad (15.38)$$

şeklinde verir. C sabiti ise, çözümü (15.33) denkleminde yerine koyarak $C = 1$ olarak bulunur.

15.5 İntegral Denklemlerin Çözümleri

İntegral denklemlerin çözümlerini bulmada yararlanabileceğimiz pek çok yöntem vardır. Bunlardan en çok kullanınanlarını aşağıdaki bölümde göreceğiz.

15.5.1 Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi: Neumann Serileri

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds \qquad (15.39)$$

şeklinde verilmiş bir Fredholm denklemini ele alalım. Neumann serisini başlatmak için ilk terimi

$$f_0(x) = g(x) \qquad (15.40)$$

olarak alalım. Bunu yukarıdaki denklemde çözüm olarak alıp sağ tarafta yerine koyarsak,

$$f_1(x) = g(x) + \int_a^b K(x,s) f_0(s) ds \qquad (15.41)$$

buluruz. Bu yöntemle bulacağımız çözümleri (15.39) denkleminde tekrar tekrar kullanarak,

$$f_0(x) = g(x) \qquad (15.42)$$

$$f_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f_0(s) ds \qquad (15.43)$$

$$f_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f_1(s) ds \qquad (15.44)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f_n(s) ds \qquad (15.45)$$

olarak verilen Neumann serisini oluştururuz. Burada,

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 \, dxds = B^2 \qquad (B > 0) \qquad (15.46)$$

olarak alırsak ve C , $[a,b]$ aralığında

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 \, ds \leq C \qquad (15.47)$$

eşitsizliğini sağlayan bir sabit ise, ve $|\lambda| < \frac{1}{B}$ olursa,

$$\{f_i\} = f_0, f_1, f_2, \ldots\ldots f_n, \ldots \to f(x) \qquad (15.48)$$

dizisi $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve $f(x)$ fonksiyonu (15.39) denkleminin tek çözümüdür.

Örnek (15.3) ***Neumann serileri:***

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t-x) f(t) dt \qquad (15.49)$$

denklemini çözmek için $f_0(x) = x$ alırsak, Neumann serisini

$$f_1(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t-x) t dt \qquad (15.50)$$

$$= x + \frac{1}{3} \qquad (15.51)$$

$$f_2(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t-x)(t+\frac{1}{3}) dt \qquad (15.52)$$

$$= x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} \qquad (15.53)$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2} \qquad (15.54)$$

$$f_{2n}(x) = x + \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s-1}}{3^s} - x \sum_{s=1}^{n} \frac{(-)^{s-1}}{3^s} \qquad (15.55)$$

olarak buluruz. $n \to \infty$ limitinde ise, zeta fonksiyonu tanımı ile çözüm

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \qquad (15.56)$$

olarak bulunur. Bu çözüm (15.49) denkleminde yerine koyarak kontrol edilebilir ve genelde de edilmelidir.

15.5.2 Neumann serisinde Hata Hesabı

Neumann serisini n. terimde keserek yapacağımız hata,

$$|f(x) - f_n(x)| < D\sqrt{C} \frac{B^n |\lambda|^{n+1}}{1 - B|\lambda|} \; , \; D = \sqrt{\int_a^b |g^2(x)| \, dx} \qquad (15.57)$$

olacaktır.

Örnek (15.4) ***Neumann serilerinde hata hesabı:***

$$f(x) = 1 + 0.1 \int_0^1 K(x,s) f(s) ds \qquad (15.58)$$

$$K(x,s) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq s \\ s & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

denkleminde,

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}, \; C = \frac{1}{3}, \; D = 1, \; \lambda = 0.1 \qquad (15.59)$$

olduğundan, (15.46-48) denklemlerinden Neumann serisinin yakınsak olduğu kolayca görülür. $f_0(x) = 1$ alarak da Neumann serisininin ilk üç terimini

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= 1 + (1/10)x - (1/20)x^2 \\ f_2(x) &= 1 + (31/300)x - (1/20)x^2 - (1/600)x^3 + (1/2400)x^4 \end{aligned} \qquad (15.60)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde buluruz. Çözümü

$$f(x) = f_2(x) \tag{15.61}$$

olarak aldığımızda yapacağımız hata,

$$1.\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{(1/6)(0.1)^3}{1-(0.1/\sqrt{6})} = 0.0001 \tag{15.62}$$

değerinden az olacaktır.

15.5.3 Ayrılabilir Çekirdek Fonksiyonları Durumunda Çözüm

Çekirdek fonksiyonunun

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x)N_j(t), \qquad (n \text{ sonlu bir sayı}) \tag{15.63}$$

şeklinde ayrılabilir veya dejenere olduğu durumlarda integral denklemin çözümü bir doğrusal denklem sistemi çözümüne indirgenebilir. Fredholm denklemini (15.63) çekirdeği ile

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{n} M_j(x)[\int_a^b N_j(t)y(t)dt] \tag{15.64}$$

şeklinde yazarız. Köşeli parantez içindeki integralin değerini

$$\int_a^b N_j(t)y(t)dt = c_j \tag{15.65}$$

olarak tanımlarsak, (15.64) denklemi

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x) \tag{15.66}$$

olacaktır. c_j sabitleri bulunduktan sonra da bu denklem bize $y(x)$ çözümünü verir. c_j sayılarını bulmak için (15.66) denklemini $N_i(t)$ ile çarpar ve integralini alırsak,

$$c_i = b_i + \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j \tag{15.67}$$

buluruz. Burada

$$b_i = \int_a^b N_i(x)f(x)dx \tag{15.68}$$

$$a_{ij} = \int_a^b N_i(x)M_j(x)dx \tag{15.69}$$

olacaktır. Bunu da matris denklemi olarak yazarsak,

$$\mathbf{b} = \mathbf{c}-\lambda\mathbf{A}\mathbf{c}, \qquad (\mathbf{A} = a_{ij}) \tag{15.70}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})\mathbf{c} \tag{15.71}$$

olur. Bu ise,

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 - \lambda a_{13}c_3 - \ldots\ldots - \lambda a_{1n}c_n = b_1\\
&-\lambda a_{21}c_1 + (1-\lambda a_{22})c_2 - \lambda a_{23}c_3 - \ldots\ldots - \lambda a_{2n}c_n = b_2\\
&\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\\
&-\lambda a_{n1}c_1 - \lambda a_{n2}c_2 - \lambda a_{n3}c_3 - \ldots\ldots + (1-\lambda a_{nn})c_n = b_n
\end{aligned} \tag{15.72}$$

şeklinde n c_i sayısı için çözülmek üzere n doğrusal denklem sistemi verir. Fredholm denkleminin homojen ($f(x) = 0$) olduğu durumlarda $b_i = 0$ olacağından, çözüm için

$$\det[\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A}] = 0 \tag{15.73}$$

olmalıdır. Bu denklemin çözümleri ise, λ_i özdeğerlerini verecektir. Bulunacak özdeğerler ise, (15.72) denkleminde kullanılarak c_i değerleri bulunur.

Örnek (15.5) ***Ayrılabilir çekirdek fonksiyonları:***

$$y(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(t+x)y(t)dt \tag{15.74}$$

şeklinde homojen bir Fredholm denklemini ele alalım. Burada,

$$\begin{aligned}
M_1(x) &= 1 \quad M_2(x) = x\\
N_1(t) &= t \quad N_2(t) = 1
\end{aligned} \tag{15.75}$$

ve $\mathbf{A}$ matrisi de,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.76}$$

olacaktır. (15.73) denklemi ise,

$$\det\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2\lambda}{3} \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15.77}$$

olacağından, özdeğerler

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{15.78}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak bulunurlar. Bunları (15.72) denkleminde yerlerine koyarsak, c_1 ve c_2 için

$$c_1 \mp \frac{c_2}{\sqrt{3}} = 0 \tag{15.79}$$

bağıntısını buluruz. Doğrusal cebirde özdeğer problemlerinde olduğu gibi burada da sadece c_1/c_2 oranı belirlenebilir. c_1 değerini 1 olarak alırsak, (15.74) denkleminin çözümleri de

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3}x), \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{15.80}$$

$$y_2(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3}x) \qquad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{15.81}$$

olacaktır. (15.72) denkleminin homojen olmadığı durumlarda ise, çözüm bilinen lineer cebir yöntemleri ile bulunacaktır. İntegral denklemler ile özdeğer problemi konusuna sonraki bölümde tekrar değineceğiz.

15.5.4 *İntegral Denklemlerin İntegral Dönüşümleri ile Çözümü*

Bazı durumlarda integral dönüşümleri yardımı ile integral altındaki bilinmeyen fonksiyon serbest bırakılıp çözüm elde edilebilir.

Fourier Dönüşümü yöntemi:

Çekirdeğin $(x-t)$'nin fonksiyonu olduğu ve integralin limitlerinin $-\infty$ ve $+\infty$ olduğu durumlarda, Fourier dönüşümünden yararlanılabilir.

Örnek (15.6) ***Fourier dönüşümü yöntemi:***

$$y(x) = \phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)dt \tag{15.82}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin Fourier dönüşümünü alır ve konvolusyon teoremini kullanırsak,

$$\widetilde{y}(k) = \widetilde{\phi}(k) + \lambda \widetilde{K}(k)\widetilde{y}(k) \tag{15.83}$$

buluruz. Burada, $\widetilde{\ }$ işareti,

$$\widetilde{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{ikx}dx \tag{15.84}$$

denkleminde olduğu gibi Fourier dönüşümünü temsil etmektedir. (15.83) denklemini $\widetilde{y}(k)$ için çözersek,

$$\widetilde{y}(k) = \frac{\widetilde{\phi}(k)}{1-\lambda\widetilde{K}(k)} \tag{15.85}$$

bulunacaktır. Bunun da ters Fourier dönüşümü alınarak çözüm,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{\phi}(k)e^{-ikx}dk}{1-\lambda\widetilde{K}(k)} \tag{15.86}$$

şeklinde verilen bir belirli integral cinsinden ifade edilir.

Laplace dönüşümü yöntemi:

Laplace dönüşümü yöntemi çekirdek fonksiyonunun $(x-t)$'nin fonksiyonu ve integralin limitlerinin 0 ve x arasında olduğu durumlarda, konvolusyon teoremi yardımı ile uygulanır.

Örnek (15.7) ***Laplace dönüşümü yöntemi:***

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(u)\sin(x-u)du \tag{15.87}$$

olarak verilen bir integral denklemini Laplace dönüşümü yöntemi ile çözelim. Her iki tarafın da Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\pounds\left[y(x)\right] = \pounds\left[1\right] + \pounds\left[\int_0^x y(u)\sin(x-u)du\right] \tag{15.88}$$

olacaktır.

$$F(s)G(s) = \pounds\left[\int_0^x f(u)g(x-u)du\right] \tag{15.89}$$

Şeklinde verilen konvolusyon teoremi kullanılarak, çözümün Laplace dönüşümü bulunur:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{Y(s)}{s^2+1}, \tag{15.90}$$

$$Y(s) = \frac{1+s^2}{s^3}. \tag{15.91}$$

Bunun da ters Laplace dönüşümü alınırsa, çözüm fonksiyonu

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \tag{15.92}$$

olarak elde edilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

15.6 İntegral Denklemler ve Özdeğer Problemi (Hilbert-Schmidt Teorisi)

15.6.1 Özdeğerlerin Reel Olması

İkinci türden Fredholm denklemi ile

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{15.93}$$

şeklinde bir özdeğer problemi tanımlayalım. λ_i özdeğeri için bu denklem

$$y_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x,t)y_i(t)dt \tag{15.94}$$

olacaktır. Aynı şekilde bu denklemi λ_j için yazıp, kompleks eşleniğini alalım:

$$y_j^*(x) = \lambda_j^* \int_a^b K^*(x,t)y_j^*(t)dt. \tag{15.95}$$

(15.94) denklemini $\lambda_j^* y_j^*(x)$ ile (15.95) denklemini de $\lambda_i y_i(x)$ ile çarpar ve x üzerinden $[a,b]$ aralığında integrallerini alırsak,

$$\lambda_j^* \int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = \lambda_i\lambda_j^* \int_a^b \int_a^b K(x,t)y_j^*(x)y_i(t)dtdx \tag{15.96}$$

$$\lambda_i \int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = \lambda_i\lambda_j^* \int_a^b \int_a^b K^*(x,t)y_j^*(t)y_i(x)dtdx \tag{15.97}$$

denklemlerini buluruz. Çekirdek fonksiyonu

$$K^*(x,t) = K(t,x) \tag{15.98}$$

şartını sağlarsa, (15.97) nolu denklem,

$$\lambda_i \int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = \lambda_i\lambda_j^* \int_a^b \int_a^b K(t,x)y_j^*(t)y_i(x)dtdx \tag{15.99}$$

olacaktır. (15.96) ve (15.99) denklemlerinin farkını alırsak

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = 0 \tag{15.100}$$

elde edilecektir. (15.98) şartını sağlayan çekirdek fonksiyonlarına Hermit çekirdekler denir. (15.99) denkleminde $i \neq j$ alırsak,

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) \int_a^b |y_i(x)|^2 dx = 0 \tag{15.101}$$

olacaktır. Buradan da $\int_a^b |y_i(x)|^2 dx \neq 0$ olacağından, Hermit Çekirdeklerin özdeğerlerinin reel olması sonucunu çıkarırız.

15.6.2 Özfonksiyonların Dik Olması

$i \neq j$ olduğu durumlarda ise,

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = 0 \tag{15.102}$$

olacağından farklı (nondegenerate) özdeğerler için,

$$\int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = 0 \quad (\lambda_j \neq \lambda_i) \tag{15.103}$$

olacaktır. Özdeğerlerin aynı (degenerate) olması durumunda ise, lineer cebirden Gram-Schmidt yöntemi ile her zaman

$$\int_a^b y_j^*(x)y_i(x)dx = 0 \quad (i \neq j) \tag{15.104}$$

yapılabilecektir.

Özet: Hermit çekirdekler için (15.93) denklemi Sturm-Liouville teorisindeki diferansiyel operatörler gibi bir özdeğer problemi tanımlar. Özdeğerler reel sayılar olup, özfonksiyonlar dik bir set oluşturur. Diklik şartı da normlamadan sonra

$$\int_a^b y_i^*(x)y_i(x)dx = \delta_{ij} \tag{15.105}$$

olarak verilir.

15.6.3 Özfonksiyonların Tam Olması

Hermit çekirdeklerin bu özelliğini ispat oldukça teknik bir konu olup, bizim için önemli olan herhangi bir iyi davranışlı (en azından parçalı sürekli) $F(x)$ fonksiyonunun $\{y_m(x)\}$ seti cinsinden,

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) \tag{15.106}$$

şeklinde sonsuz seri olarak ifade edilebilmesidir. Teknik olarak bu sonuç,

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \left[F(x) - \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x)\right] dx \to 0 \tag{15.107}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde ifade edilir. a_m katsayıları ise, $\{y_m(x)\}$ setinin dik olma özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\, y_m^*(x)\, dx &= \sum_n \int_a^b a_n y_n(x)\ y_m^*(x)\, dx \\ &= \sum_n a_n \int_a^b y_n(x)\, y_m^*(x)\, dx \\ &= \sum_n a_n \delta_{nm} \\ &= a_m\end{aligned} \tag{15.108}$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç (15.106) ifadesinde tekrar kullanılırsa,

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b F(x')\, y_m^*(x')\, y_m(x)\, dx', \tag{15.109}$$

$$= \int_a^b F(x') \left[\sum_{m=0}^{\infty} y_m^*(x')\, y_m(x)\right] dx' \tag{15.110}$$

yazabiliriz. Buradan da $\{y_m(x)\}$ setinin tam olması şartının,

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m^*(x')\, y_m(x) = \delta(x - x') \tag{15.111}$$

şeklinde de ifade edildiğini görürüz.

15.7 Hermit Olmayan Çekirdekler için Özdeğer Problemi

Eğer (15.93) denkleminde çekirdek fonksiyonu Hermit olmamasına rağmen,

$$y_i(x) = \lambda_i \int_a^b \left[\overline{K}(x,t) w(t)\right] y_i(t) dt \tag{15.112}$$

şeklinde yazılabiliyorsa ve

$$\overline{K}(x,t) = \overline{K}^*(t,x) \tag{15.113}$$

şartı sağlanıyorsa, (15.112) denkleminde her iki tarafı $\sqrt{w(x)}$ ile çarpıp,

$$\sqrt{w(x)} y(x) = \psi(x) \tag{15.114}$$

dönüşümünü yaparak,

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b \left[\overline{K}(x,t)\sqrt{w(x)w(t)}\right] \psi_i(t) dt \tag{15.115}$$

yazarız. Artık, bu denklemdeki çekirdek $\left[\overline{K}(x,t)\sqrt{w(x)w(t)}\right]$ Hermit olacaktır. (15.115) denkleminin çözümünden elde edilecek özfonksiyonlar da

$$\int_a^b w(x)\psi_i^*(x)\psi_i(x)dx = \delta_{ij} \tag{15.116}$$

bağıntısı ile $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre dik olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

15.8 Problemler

1. Aşağıdaki integral denklemi çözünüz:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)du.$$

2.

$$y''(x) - y(x) = 0,$$
$$y(0) = 0 \text{ ve } y'(0) = 1,$$

şeklinde tanımlanmış bir problemin aşağıda verilen integral denkleme dönüştürülebileceğini gösteriniz:

$$y(x) = x + \int_0^x (x-1)y(x')dx'.$$

3. Aşağıda verilen diferansiyel denklem problemini integral denklem olarak yazınız:

$$y''(x) - y(x) = 0,$$
$$y(1) = 0 \text{ ve } y(-1) = 1.$$

4. Neumann serilerini kullanarak aşağıdaki denklemi çözünüz:

$$y(x) = x + \int_0^x (x'-x)y(x')dx'$$

5. Aşağıdaki probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-x')y(x')dx'$$

6. Aşağıda verilen denklemin çözümünün $y(x) = \cosh\lambda x$ olduğunu üç değişik yoldan: Diferansiyel denkleme dönüştürerek, Neumann serileri ile ve integral dönüşüm yöntemi ile gösteriniz:

$$y(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x-x')y(x')dx'.$$

7. Aşağıda verilen denkleminin çözümünün $y(x) = 3x/(3-\lambda)$ olduğunu değişik yollardan gösteriniz:

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xx'y(x')dx'.$$

16

GREEN FONKSİYONLARI

Green fonksiyonları çok değişik uygulama alanları olan ilginç matematiksel yapılardır. Diferansiyel denklemleri integral denklemlere dönüştürmekte kullanıldıkları gibi, kısmi veya sıradan diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmada da değişkenlerin ayrılması, seriler ve integral dönüşümleri gibi tekniklere güçlü bir alternatif oluştururlar. Kuantum alan teorisinde propagatör yorumu ile Feynman diyagramlarına geçişte çok önemli bir rol oynarlar. Yol integrali yaklaşımı ile de modern pertürbasyon teorisinin başlangıç noktasıdırlar. Özetle, Green fonksiyonları tek başına bir kitaba konu olacak derinlikte uygulama ve özelliklere sahiptir.

16.1 Zamandan Bağımsız Green Fonksiyonları

16.1.1 Tek Boyutta Green Fonksiyonları

Aşağıda $\pounds$ operatörü cinsinden verilmiş ve $[a,b]$ aralığında tanımlanmış olan bir diferansiyel denklemi ele alalım:

$$\pounds y(x) + \phi(x) = 0. \tag{16.1}$$

Burada $\pounds$,

$$\pounds = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) \tag{16.2}$$

şeklinde verilen Sturm-Liouville operatörüdür ve $p(x)$ ile $q(x)$ fonksiyonları da süreklidir. (16.1) denklemine ek olarak da

$$\left|\alpha y(x) + \beta\frac{dy(x)}{dx}\right|_{\substack{x=a,\\ x=b}} = 0 \tag{16.3}$$

şeklinde verilen homojen sınır şartlarını alalım. α ve β ise, sabit sayılardır. $\phi(x)$ fonksiyonu sadece x'e bağlı bir fonksiyon olabileceği gibi, açık olarak $y(x)$'e de bağlı olabilir. Dolayısı ile genelde

$$\phi(x, y(x)) \tag{16.4}$$

şeklinde yazılır. Şimdi, verilen bir ξ için, $x < \xi$ olduğu zaman $G_1(x)$ ve $x > \xi$ olduğu zaman da $G_2(x)$ olan bir $G(x)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon aynı zamanda da aşağıdaki şartları sağlasın:

Yeni ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

i) $G_1(x)$ ve $G_2(x)$ fonksiyonları kendi tanım aralıklarında

$$\pounds G\ (x) = 0 \tag{16.5}$$

denklemini sağlasınlar:

$$\pounds G_1(x) = 0, \quad x < \xi$$

$$\pounds G_2(x) = 0, \quad x > \xi \tag{16.6}$$

ii) $G_1(x)$, $x = a$ noktasındaki ve $G_2(x)$ de $x = b$ noktasındaki homojen sınır şartını sağlasın.

iii) $x = \xi$ noktasında $G(x)$ sürekli olsun:

$$G_2(\xi) = G_1(\xi) \tag{16.7}$$

iv) $x = \xi$ noktasında $G(x)$'in türevinin, $-\frac{1}{p(\xi)}$ kadar bir süreksizliği olsun:

$$G_2'(\xi) - G_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{16.8}$$

Burada (a, b) aralığında $p(x)$'in sıfırdan farklı olduğu varsayılmıştır. Dolayısı ile $G(x)$ fonksiyonunun türevindeki süreksizlik sonlu miktardadır.

Böyle bir $G(x)$ fonksiyonu bulunabilirse, birazdan göstereceğiz ki; (16.1-16.3) denklemleri ile tanımlanan diferansiyel denklem problemi, aşağıdaki integral denklem ile aynıdır:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\phi(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{16.9}$$

Burada, $G(x, \xi)$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir. Green fonksiyonunun bulunması, $\phi(x, y(\xi))$ fonksiyonunun $y(x)$'e açık olarak bağlı olmadığı durumlarda diferansiyel denklem sisteminin çözümüne eşdeğerdir. Eğer $\phi(x, y(\xi))$ fonksiyonu $y(x)$'e açık olarak bağlı olursa, (16.9) denklemi de diferansiyel denklem sisteminin integral denklemine dönüştürülmüş şekli olacaktır. (16.9) denkleminin doğru olduğunu görmeden önce böyle bir fonksiyonun nasıl inşa edileceğini görelim.

16.1.2 Green Fonksiyonunun Bulunması

$y = u(x)$, $\pounds y = 0$ denkleminin $x = a$ noktasındaki sınır şartını sağlayan işe yarar (nontrivial) bir çözümü olsun. Benzer şekilde $y = v(x)$, $\pounds y = 0$ denkleminin $x = b$ noktasındaki sınır şartını sağlayan bir başka işe yarar çözümü olsun. $G(x)$'i,

$$G(x) = \begin{cases} c_1 u(x) & x < \xi \\ c_2 v(x) & x > \xi \end{cases} \tag{16.10}$$

olarak tanımlarsak, (i) ve (ii) şartlarını kolayca sağlayabiliriz. (iii) ve (iv) nolu şartlar ise, bize c_1 ve c_2'nin değerlerinin bulunmasında yardımcı olurlar. (iii) şartı bize

$$c_2 v(\xi) - c_1 u(\xi) = 0 \tag{16.11}$$

denklemini verirken, (iv) şartı da

$$c_2 v'(\xi) - c_1 u'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{16.12}$$

denklemini verecektir. Bu iki denklemin tek bir çözümü olması şartı ise,

$$W[u, v] = \begin{vmatrix} u(\xi) & v(\xi) \\ u'(\xi) & v'(\xi) \end{vmatrix} = u(\xi)\, v'(\xi) - v(\xi)\, u'(\xi) \neq 0 \tag{16.13}$$

olarak verilir. Burada $W[u, v]$, $u(x)$ ve $v(x)$ çözümlerinin Wronski determinantı olarak bilinir. $u(x)$ ve $v(x)$ çözümleri doğrusal olarak bağımsız ise, $W[u, v]$ da sıfırdan farklı olacaktır. Abel formülüne göre bu determinantın değeri $\frac{A}{p(\xi)}$ olarak verilir. A ise, ξ'den bağımsız bir sabittir. (16.11 ve 16.12) denklemlerini c_1 ve c_2 için çözersek,

$$c_1 = -\frac{v(\xi)}{A}, \quad \text{ve} \quad c_2 = -\frac{u(\xi)}{A} \tag{16.14}$$

bulunacaktır. Green fonksiyonu da

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{A} u(x)\, v(\xi) & x < \xi \\ -\frac{1}{A} u(\xi)\, v(x) & x > \xi \end{cases} \tag{16.15}$$

şeklinde olur. Şimdi de bu Green fonksiyonunu kullanarak yazılacak olan

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\phi(\xi)d\xi \tag{16.16}$$

denkleminin, (16.1) ve (16.3) ile verilen diferansiyel denklem problemine eşdeğer olduğunu gösterelim. Öncelikle (16.16) denklemini açık olarak yazalım:

$$y(x) = -\frac{1}{A}\left[\int_a^x v(x)\, u(\xi)\, \phi(\xi)d\xi + \int_x^b v(\xi)\, u(x)\, \phi(\xi)d\xi\right]. \tag{16.17}$$

Bunun birinci ve ikinci dereceden türevleri ise,

$$y'(x) = -\frac{1}{A}\left[\int_a^x v'(x)\, u(\xi)\, \phi(\xi)d\xi + \int_x^b v(\xi)\, u'(x)\, \phi(\xi)d\xi\right] \tag{16.18}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$y''(x) = -\frac{1}{A}\left[\int_a^x v''(x)\,u(\xi)\,\phi(\xi)d\xi + \int_x^b v(\xi)\,u''(x)\,\phi(\xi)d\xi\right] - \frac{1}{A}\left[v'(x)\,u(x) - v(x)\,u'(x)\right]\phi(x) \tag{16.19}$$

olacaktır. Bu türevleri de

$$\pounds y(x) = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) \tag{16.20}$$

ifadesinde yerlerine koyarsak,

$$\pounds y(x) = -\frac{1}{A}\left\{\int_a^x [\pounds v(x)]\,u(\xi)\,\phi(\xi)d\xi + \int_x^b v(\xi)\,[\pounds u(x)]\,\phi(\xi)d\xi\right\} - \frac{1}{A}\left[p(x)\,\frac{A}{p(x)}\phi(x)\right] \tag{16.21}$$

elde ederiz. Buradan da $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları,

$$\pounds u(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \pounds v(x) = 0 \tag{16.22}$$

denklemlerini sağladıklarından, göstermek istediğimiz

$$\pounds y(x) = -\phi(x)$$

ifadesini buluruz. (16.17) denkleminde $y(x)$'in gerekli sınır şartlarını sağladığını göstermek için,

$$y(a) = -\frac{1}{A}u(a)\int_a^b v(\xi)\,\phi(\xi)d\xi, \tag{16.23}$$

$$y'(a) = -\frac{1}{A}u'(a)\int_a^b v(\xi)\,\phi(\xi)d\xi \tag{16.24}$$

ve

$$y(b) = -\frac{1}{A}v(b)\int_a^b u(\xi)\,\phi(\xi)d\xi, \tag{16.25}$$

$$y'(b) = -\frac{1}{A}v'(b)\int_a^b u(\xi)\,\phi(\xi)d\xi \tag{16.26}$$

ifadelerini yazarsak, $y(x)$'in a noktasında $u(x)$ ve b noktasında da $v(x)$ ile aynı sınır şartını sağladığını görürüz. Özel olarak (16.1) denkleminde $\phi(x)$'i

$$\phi(x) = \lambda r(x)y(x) - f(x) \tag{16.27}$$

şeklinde yazarsak,

$$\pounds y(x) + \lambda r(x)y(x) = f(x) \tag{16.28}$$

denkleminin verilen homojen sınır şartları ile

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)r(\xi)\,y(\xi)\,d\xi - \int_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi \tag{16.29}$$

şeklinde bir integral denkleme eşdeğer olduğunu görürüz. (16.16) ifadesinde $y(x)$ üzerine $\pounds$ operatörü ile etki edersek,

$$\pounds y(x) = \int_a^b [\pounds G(x,\xi)]\,\phi(\xi)\,d\xi \tag{16.30}$$

bulunacaktır. Bu bize

$$-\phi(x) = \int_a^b [\pounds G(x,\xi)]\,\phi(\xi)\,d\xi \tag{16.31}$$

verir ki, buradan da Green fonksiyonunun ilginç bir özelliği olan

$$\pounds G(x,\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{16.32}$$

çıkar. Bilindiği üzere, $\delta(x-\xi)$ Dirac-delta fonksiyonudur.

16.1.3 Tek Boyutta Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu

Tek boyutta Helmholtz denklemi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_0^2 y = 0, \tag{16.33}$$

şeklinde yazılır. k bir sabittir ve sınır şartları da aşağıdaki gibi olsun:

$$y(0) = 0, \qquad y(L) = 0. \tag{16.34}$$

Bu denklemin $(0,x)$ aralığında integralini alırsak,

$$\frac{dy}{dx} = -k_0^2\int_0^x y(\xi)d\xi + C \tag{16.35}$$

bulunacaktır. Burada C bir integral sabitidir ve $y'(0)$ değerini gösterir. İkinci bir integral alma işlemi bize

$$y(x) = k_0^2\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + Cx \tag{16.36}$$

verir ki, burada $y(0) = 0$ sınır şartı dikkate alınmıştır. C değeri ise, ikinci sınır şartını sağlayacak şekilde belirlenir. Bu da bize,

$$\frac{k_0^2}{L}\int_0^L (l-\xi)y(\xi)d\xi = C \tag{16.37}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

verir ve sonuç da

$$y(x) = -k_0^2 \int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + \frac{xk_0^2}{L}\int_0^L (l-\xi)y(\xi)d\xi \tag{16.38}$$

veya

$$y(x) = k_0^2 \int_0^x \frac{\xi}{L}(L-x)y(\xi)d\xi + k_0^2 \int_x^L \frac{x}{L}(L-\xi)y(\xi)d\xi \tag{16.39}$$

şeklinde bir integral denklem olarak ifade edilir. Bu denklem de

$$y(x) = \int_0^L \kappa(x,\xi)[k^2 y(\xi)]d\xi \tag{16.40}$$

şeklinde yazılırsa, çekirdek fonksiyonu olan $\kappa(x,\xi)$ bulunacaktır:

$$\kappa(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x}{L}(L-\xi) & x < \xi \\ \frac{\xi}{L}(L-x) & x > \xi \end{cases} . \tag{16.41}$$

Şimdi de bu sonucu $\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ operatörü için yazacağımız,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_0^2 y = 0 \tag{16.42}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem, artı $y(0) = y(L) = 0$ sınır şartları ile eşdeğer olan

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi)k_0^2 y(\xi)d\xi \tag{16.43}$$

denklemi ile karşılaştıralım. Görüldüğü gibi, verilen sınır şartlarında Green fonksiyonu çekirdek fonksiyonu ile aynı olacaktır:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x}{L}(L-\xi) & x < \xi \\ \frac{\xi}{L}(L-x) & x > \xi \end{cases} . \tag{16.44}$$

Bu Green fonksiyonu, aslında aynı sınır şartlarında olmak kaydı ile

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \phi(x,y) = 0 \tag{16.45}$$

denklemini de herhangi bir $\phi(x,y)$ fonksiyonu için,

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi)\phi(\xi, y(\xi))d\xi \tag{16.46}$$

şeklinde yazmamıza olanak sağlayacaktır. Farklı sınır şartları için, örneğin; $y(0) = y'(L) = 0$, yeni bir Green fonksiyonu bulmak gerekecektir.

Örnek (16.1) ***$\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ için Green fonksiyonu:*** $\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ operatörü için, $y(0) = y(L) = 0$ sınır şartlarında Green fonksiyonunu yukarıda bulduk. Genelde dalga problemlerinde karşımıza aynı sınır şartlarında ve

$$\pounds y(x) + \lambda r(x)y(x) = f(x) \tag{16.47}$$

şeklinde bir denklem çıkar. Bu durumda problem aynı Green fonksiyonu kullanılarak,

$$y(x) = \lambda \int_0^L G(x,\xi)r(\xi)\,y(\xi)\,d\xi - \int_0^L G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{16.48}$$

şeklinde bir integral denkleme dönüşecektir.

16.1.4 *Homojen Olmayan Sınır Şartları için Green Fonksiyonu*

Verilen sınır şartlarının homojen olmaması durumunda, homojen sınır şartları için bulacağımız Green fonksiyonu için daha önce (16.9) olarak yazdığımız çözümü,

$$y(x) = P(x) + \int_a^b G(x,\xi)\phi(\xi)\,d\xi \tag{16.49}$$

şeklinde değiştiririz. Burada $y(x)$,

$$\pounds y(x) + \phi(x) = 0 \tag{16.50}$$

denklemini homojen olmayan sınır şartlarında sağlayacaktır. Daha önce Green fonksiyonu ile Dirac-delta fonksiyonu arasındaki (16.32)'de verdiğimiz ilişkiyi kullanarak, $P(x)$'in sağlayacağı denklemi de

$$\pounds\,[P(x)] + \int_a^b \pounds G(x,\xi)\phi(\xi)\,d\xi + \phi(x) = 0, \tag{16.51}$$

$$\pounds P(x) + \phi(x) - \phi(x) = 0, \tag{16.52}$$

$$\pounds P(x) = 0 \tag{16.53}$$

olarak buluruz. (16.49) denkleminde ikinci terim homojen sınır şartlarını sağladığından, (16.53) denkleminin çözümü homojen olmayan sınır şartlarını sağlamalıdır. $P(x)$'in varlığı, $G(x,\xi)$'in varlığı ile garanti altındadır. Bu yöntemin daha önce gösterdiğimiz yöntem ile özdeşliği,

$$\bar{y}(x) = y(x) - P(x) \tag{16.54}$$

şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlanarak da gösterilebilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (16.2) ***Homojen olmayan sınır şartları:*** Şimdi de

$$y'' + xy = 1 \tag{16.55}$$

denklemini,

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(l) &= 1 \end{aligned} \tag{16.56}$$

olarak verilen ve homojen olmayan sınır şartları ile çözelim. Daha önce $\frac{d^2}{dx^2}$ operatörü ve homojen sınır şartları için Green fonksiyonunu bulmuştuk. $P(x)$ ise,

$$\frac{d^2}{dx^2}P(x) = 0 \tag{16.57}$$

denklemini ve

$$P(0) = 0, \quad P(l) = 1 \tag{16.58}$$

sınır şartlarını sağlamalıdır. Bu denklemin çözümü ise,

$$P(x) = \frac{x}{l} \tag{16.59}$$

olarak bulunur. $\phi(x)$ fonksiyonunu

$$\phi(x) = xy(x) - 1 \tag{16.60}$$

olarak alırsak, (16.55)'de verilen diferansiyel denklem

$$y(x) = \frac{x}{l} + \int_0^l G(x,\xi)\left[\xi y(\xi) - 1\right] d\xi \tag{16.61}$$

şeklinde bir integral denkleme dönüşecektir.

Örnek (16.3) ***Green fonksiyonu:***

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(\lambda x^2 - 1\right) y = 0 \tag{16.62}$$

denklemini,

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0 \tag{16.63}$$

sınır şartları ile ele alalım. Bu diferansiyel denklemi

$$\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{x}\right] + \lambda xy = 0, \tag{16.64}$$

şeklinde yazarsak, (16.1) denklemindeki £ operatörü

$$£ = \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - \frac{1}{x}, \tag{16.65}$$

$$p(x) = x,\ \ q(x) = -\frac{1}{x},\ \ r(x) = x \tag{16.66}$$

olacaktır.

$$£y = 0 \tag{16.67}$$

denkleminin genel çözümü ise,

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} \tag{16.68}$$

olarak kolayca bulunur. Bu çözüm kullanılarak,

$$y(0) = 0 \tag{16.69}$$

sınır şartını sağlayan çözüm,

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x), \\ u(x) &= x \end{aligned} \tag{16.70}$$

olarak bulunur.

$$y(1) = 0 \tag{16.71}$$

sınır şartını sağlayan çözüm ise,

$$v(x) = \frac{1}{x} - x \tag{16.72}$$

olarak elde edilir. u ve v çözümleri için Wronski determinantını hesaplarsak,

$$W\left[u,v\right] = u\left(x\right)v'\left(x\right) - v\left(x\right)u'\left(x\right) \tag{16.73}$$

$$W\left[u,v\right] = -\frac{2}{p(x)}$$

$$W\left[u,v\right] = -\frac{2}{x} \tag{16.74}$$

buluruz ki, bu da bize A sabitini -2 olarak verir. Bu sonuçları kullanarak Green fonksiyonunu,

$$G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{2\xi}\left(1-\xi^2\right) & x < \xi \\ \\ \frac{\xi}{2x}\left(1-x^2\right) & x > \xi \end{array} \right\} \tag{16.75}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde elde ederiz. Bu Green fonksiyonu kullanılarak da denklem (16.62 ve 16.63)'de verilen diferansiyel denklem artı sınır şartlarına eşdeğer olan,

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)\xi y(\xi)d\xi \tag{16.76}$$

integral denklemini elde ederiz. Hatırlanacağı üzere, bu örnekte ele aldığımız diferansiyel denklem Bessel denklemidir ve λ'nın

$$J_1\left(\sqrt{\lambda_n}\right) = 0 \tag{16.77}$$

şeklinde verilen karakteristik denklemi sağlayan değerlerinin dışında, başka işe yarar çözümleri yoktur. Bu durumda çözümler

$$y(x) = CJ_1\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) \tag{16.78}$$

olarak verilir. Burada C bir sabittir. Aynı çözümler (16.76) integral denklemi için de geçerlidir.

Bu noktada dikkat edilmesi gereken, (16.64) denkleminin

$$\left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\right] + \left(-\frac{y}{x} + \lambda xy\right) = 0 \tag{16.79}$$

şeklinde de yazılabileceğidir. Bu durumda $\pounds$ operatörünü,

$$\pounds = \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) \tag{16.80}$$

ve $\phi(x)$ fonksiyonu da $\left(-\frac{y}{x} + \lambda xy\right)$ olarak alırız. Bu şekilde bulunacak çözüm (16.76) denkleminde verdiğimiz çözümden farklı bir çözüm olacaktır. $\pounds$ operatörünün tanımında yaşayabileceğimiz bu belirsizlik, genelde başlangıç noktamız bir fizik problemi olacağından sorun olmaz. Çünkü, $\pounds$ operatörü çoğu uygulamalarda enerji, momentum vs. gibi fiziksel özellikleri temsil edecektir. $\pounds$ operatörünün ikinci tanımı (16.80) ile bulunacak olan çözüm ise, matematik olarak doğru olmakla birlikte nasıl bir fizik problemine karşı geldiği belli değildir.

16.1.5 Özdeğer Problemleri ve Green Fonksiyonları

Verilen sınır şartları ile

$$\pounds y(x) = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{16.81}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. $\pounds$ operatörü,

$$\pounds = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x) \tag{16.82}$$

şeklinde bir Sturm-Liouville operatörü olsun. Daha önce de gördüğümüz gibi, aynı sınır şartlarında $\pounds$ operatörünün

$$\pounds\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \tag{16.83}$$

denklemi ile tanımlanan λ_n özdeğerleri ve $\phi_n(x)$ özfonksiyonları olacaktır. Bu özfonksiyonlar,

$$\int \phi_n^*(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm} \tag{16.84}$$

şeklinde verilen diklik şartını ve

$$\sum_n \phi_n^*(x)\phi_n(x')dx = \delta(x - x') \tag{16.85}$$

tamlık ilişkisini sağlarlar. Bunların sonucu olarak da $x \in [a,b]$ aralığında verilen $y(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarını $\{\phi_n(x)\}$ seti cinsinden,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_n^\infty \alpha_n\phi_n(x), \\ f(x) &= \sum_n^\infty \beta_n\phi_n(x) \end{aligned} \tag{16.86}$$

şeklinde seri açılımlarını yazabiliriz. Burada α_n ve β_n katsayıları,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_a^b \phi_n^*(x)y(x)dx, \\ \beta_n &= \int_a^b \phi_n^*(x)f(x)dx \end{aligned} \tag{16.87}$$

olarak verilirler. $\pounds$ operatörünü $y(x)$ üzerine etki ettirirsek,

$$\begin{aligned} \pounds y(x) &= \pounds\sum_n^\infty \alpha_n\phi_n(x) \\ &= \sum_n^\infty \alpha_n\pounds\phi_n(x) \end{aligned} \tag{16.88}$$

bulunur. (16.83) Özdeğer denklemi ve (16.86) denklemlerini kullanarak,

$$\pounds y(x) = f(x) \tag{16.89}$$

denklemini de

$$\sum_n^\infty \left[\alpha_n\lambda_n - \beta_n\right]\phi_n(x) = 0 \tag{16.90}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 1. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

şeklinde yazabiliriz. $\{\phi_n\}$ birbirinden bağımsız ve dik fonksiyonlar seti olduğundan, bu ifadenin de sıfır olması ancak ϕ_n'in katsayılarının tek tek sıfır olmaları ile mümkündür. Bu da bize,

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{\lambda_n} \tag{16.91}$$

verecektir. Bunu kullanarak da $y(x)$ fonksiyonunu

$$y(x) = \sum_n^\infty \frac{\beta_n}{\lambda_n}\phi_n(x) \tag{16.92}$$

şeklinde yazar ve β_n'in de (16.87) denkleminde verilen tanımını kullanarak,

$$y(x) = \int \sum_n^\infty \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x)}{\lambda_n} f(x')dx' \tag{16.93}$$

elde ederiz. Bunu da

$$y(x) = \int G(x,x')f(x')dx' \tag{16.94}$$

denklemi ile karşılaştırırsak, Green fonksiyonunu

$$G(x,x') = \sum_n^\infty \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x)}{\lambda_n} \tag{16.95}$$

şeklinde buluruz. Çoğu zaman karşımıza

$$\pounds y(x) - \lambda y(x) = f(x) \tag{16.96}$$

şeklinde verilen denklemler çıkar. Bu durumda (16.94) denklemini sağlayan $G(x,x')$,

$$G(x,x') = \sum_n^\infty \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \tag{16.97}$$

olarak verilecektir. Not: Burada tanımladığımız Green fonksiyonu önceki tanımımızın eksi işaretlisidir (16.48).

Örnek (16.4) ***Özfonksiyonlar ve*** $\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ ***için Green fonksiyonu:*** $\pounds = \frac{d^2}{dx^2}$ operatörünü ele alalım, buna karşı gelen özdeğer denklemi

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + k_n^2\phi_n = 0 \tag{16.98}$$

şeklinde yazılabilir. Burada tanım aralığımız $[0, L]$ olarak verilmiştir. Sınır şartları olarak da

$$\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0 \tag{16.99}$$

alırsak, özfonksiyonları ve özdeğerleri

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x), \tag{16.100}$$

$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{16.101}$$

olacaktır. Bunları kullanarak da Green fonksiyonu kolayca

$$G(x,x') = -\frac{2L}{\pi^2}\sum_n^\infty \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)}{n^2} \tag{16.102}$$

şeklinde yazılır.

16.1.6 *Helmholtz Denkleminin Green fonksiyonu ve Özfonksiyonlar*

Şimdi, homojen olmayan

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + k_0^2 y(x) = f(x)$$

denklemine, $y(0) = y(L) = 0$ sınır şartları ile yaklaşırsak, (16.96-97) denklemleri ile Green fonksiyonu

$$G(x,x') = -\frac{2}{L}\sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x'}{k_n^2 + k_0^2} \tag{16.103}$$

olacağından, çözümü de

$$y(x) = \int G(x,x')f(x')dx' \tag{16.104}$$

şeklinde olacaktır. $f(x)$ fonksiyonu dalga hareketindeki kaynak veya kayıpları ifade etmektedir.

Daha önce,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_0^2 y = 0 \quad ; \quad y(0) = y(L) = 0 \tag{16.105}$$

denklemi için bulduğumuz

$$y(x) = -k_0^2\int_0^x (x - x')\,y(x')dx' + k_0^2\frac{x}{L}\int_0^L (L - x')\,y(x')dx' \tag{16.106}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2004 II. baskı Selçuk Ş. Bayın

ifadesini, birim adım fonksiyonunu kullanarak,

$$y(x) = -k_0^2 \int_0^L (x - x')\,\theta(x - x')\,y(x')dx' + k_0^2 \frac{x}{L} \int_0^L (L - x')\,y(x')dx' \tag{16.107}$$

şeklinde ve daha sonra da

$$y(x) = \int_0^L \left[-k_0^2 (x - x')\,\theta(x - x') + k_0^2 \frac{x}{L}(L - x')\right] y(x')dx' \tag{16.108}$$

olarak yazabiliriz ki, bu da bize Green fonksiyonu olarak

$$G(x, x') = -k_0^2 \left[(x - x')\,\theta(x - x') - \frac{x}{L}(L - x')\right] \tag{16.109}$$

ifadesini verecektir. Bulduğumuz Green fonksiyonunu trigonometrik Fourier serisine açarsak, daha önce bulduğumuz (16.103) ile aynı olduğu kolayca görülür.

16.1.7 Green Fonksiyonu ve Dirac-Delta Fonksiyonu

Green fonksiyonlarına değişik bir bakış açısı da onların üzerine £ operatörü ile etki ederek görülebilir:

$$\pounds G(x, x') = \pounds \sum_n \frac{\phi_n^*(x')\phi_n(x)}{\lambda_n}. \tag{16.110}$$

£ doğrusal bir operatör olduğundan ve x üzerine etki ettiğinden,

$$\pounds G(x, x') = \sum_n \frac{\phi_n^*(x')\pounds\phi_n(x)}{\lambda_n} \tag{16.111}$$

yazabiliriz. $\pounds\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$ denklemini kullanarak da

$$\pounds G(x, x') = \sum_n \phi_n^*(x')\phi_n(x) \equiv I(x, x') \tag{16.112}$$

buluruz. $I(x, x')$ kullanılarak her hangi bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}\int I(x, x')f(x')dx' &= \sum_n \phi_n(x) \int \phi_n^*(x')f(x')dx' \\ &= \sum_n \phi_n(x)\,(\phi_n, f)\end{aligned} \tag{16.113}$$

yazabiliriz. Bu denklemin sağ tarafı, $\{\phi_n\}$ dik ve tam bir fonksiyon seti olduğundan, $f(x)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Fourier açılımından başka birşey değildir. Bu da

$$\int I(x, x')f(x')dx' = f(x) \tag{16.114}$$

şeklinde yazılırsa, $I(x, x')$ fonksiyonun Dirac-delta fonksiyonu olduğu görülür:

$$I(x, x') = \pounds G(x, x') = \delta(x - x'). \tag{16.115}$$

Özet: (16.3) sınır şartları ve £ Sturm-Liouville operatörü (16.2) ile

$$\pounds y(x) = f(x, y)$$

olarak tanımlanmış bir diferansiyel denklem problemi, Green fonksiyonu yardımı ile

$$y(x) = \int G(x, x')f(x', y(x'))dx'$$

şeklinde bir integral denklem olarak da yazılabilir. Green fonksiyonu olan $G(x, x')$, aşağıda verilen diferansiyel denklemi aynı sınır şartlarında sağlayacaktır:

$$\pounds G(x, x') = \delta(x - x').$$

16.1.8 Süreklilik Limitinde Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu

Şimdi bir önceki örnekteki $\frac{d^2}{dx^2}$ operatörünü süreklilik limitinde yani,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k_0^2 y = f(x), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{16.116}$$

şeklinde ele alalım. Burada özdeğerler sürekli olarak değişeceğinden, $y(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının açılımları da Fourier dönüşümü olarak alınır:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' g(k') e^{ik'x}, \tag{16.117}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \eta(k') e^{ik'x}. \tag{16.118}$$

Bunların Fourier-ters dönüşümleri de

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'}, \tag{16.119}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$\eta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' y(x') e^{-ikx'} \tag{16.120}$$

olacaktır. Bunları (16.116) denkleminde kullanarak

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \left\{ \left[-k'^2 + k_0^2 \right] \eta(k') - g(k') \right\} e^{ik'x} = 0 \tag{16.121}$$

yazılırsa, bize

$$\eta(k') = -\frac{g(k')}{(k'^2 - k_0^2)} \tag{16.122}$$

denklemini verecektir. Bunu da (16.118) denkleminde yerine koyarak,

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{g(k')}{(k'^2 - k_0^2)} e^{ik'x} \tag{16.123}$$

buluruz. Burada da $g(k')$ fonksiyonu açık olarak yazılırsa

$$y(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' - k_0)(k' + k_0)} \tag{16.124}$$

olacağından, Green fonksiyonu da

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\, G(x, x')$$

tanımı kullanarak,

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' - k_0)(k' + k_0)} \tag{16.125}$$

şeklinde bulunur. Buradan kolayca görülür ki, Green fonksiyonu

$$\pounds G(x, x') = \delta(x - x') \tag{16.126}$$

denklemini sağlamaktadır. (16.125) denklemindeki integral, $k' = \pm k_0$ değerlerinde tanımsızdır. Fakat onu Cauchy temel değerini kullanarak,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{(x - \alpha)} = i\pi f(\alpha) \tag{16.127}$$

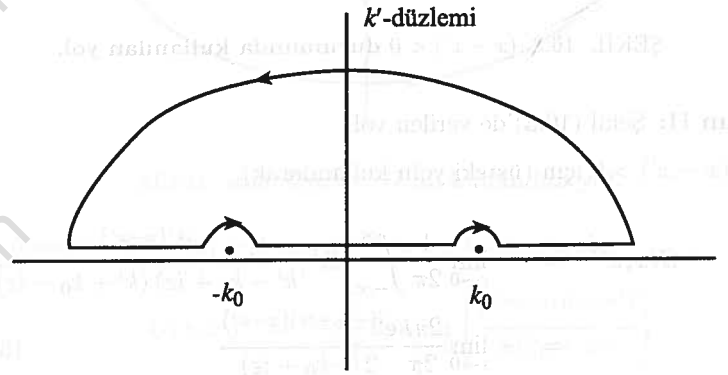
şeklinde tanımlı hale getirebileceğimiz gibi, kompleks uzayda değişik yollar kullanarak da alabiliriz. Bütün bu olasılıklar bize bir Green fonksiyonu kolleksiyonu verecektir. Hangisinin kullanılacağına ise, elimizdeki fizik problemine ve sınır şartlarına bakarak karar verilir

Örnek (16.5) ***Süreklilik limitinde Helmholtz denklemi:*** Şimdi, Helmholtz denklemi için (16.125)'de integral olarak verilen Green fonksiyonunu Cauchy temel değerini ve kompleks integral tekniklerini kullanarak bulalım:

Durum 1: Şekil (16.1) ve (16.2)'deki yolları kullanarak,

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' - k_0)(k' + k_0)} \tag{16.128}$$

integralini alabiliriz.



ŞEKİL 16.1. $(x - x') > 0$ **durumunda kullanılan yol.**

$(x - x') > 0$ için Şekil (16.1) kullanılarak,

$$\begin{aligned} G(x, x') &= -\frac{i\pi}{2\pi} \left[\frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0} - \frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0} \right] \\ &= \frac{1}{2k_0} \sin k_0 (x - x') \end{aligned} \tag{16.129}$$

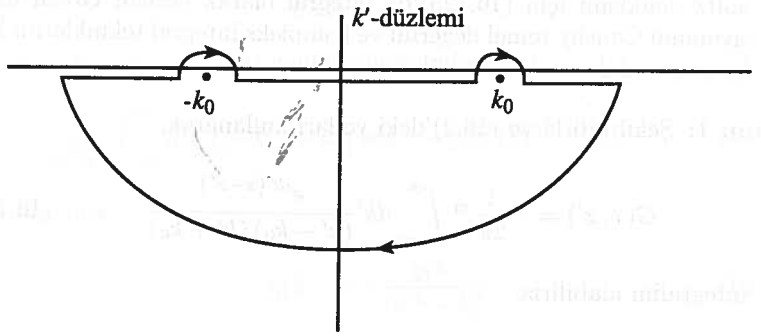
bulunur.

$(x - x') < 0$ için ise, Şekil (16.2)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} G(x, x') &= -\frac{1}{2k_0} \sin k_0 (x - x') \\ &= \frac{1}{2k_0} \sin k_0 (x' - x) \end{aligned} \tag{16.130}$$

buluruz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 16.2. $(x-x')<0$ **durumunda kullanılan yol.**

Durum II: Şekil (16.3)'de verilen yol,

$(x-x')>0$ için (üsteki yolu kullanılarak),

$$G(x,x') = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk'\frac{e^{ik'(x-x')}}{(k'-k_0+i\varepsilon)(k'+k_0-i\varepsilon)}$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi i}{2\pi}\frac{e^{i(-k_0+i\varepsilon)(x-x')}}{2(-k_0+i\varepsilon)} \qquad (16.131)$$
$$= -\frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0 i} \qquad (16.132)$$

verecektir. Benzer şekilde de $(x-x')<0$ için (alttaki yol kullanılarak),

$$G(x,x') = \frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0 i} \qquad (16.133)$$

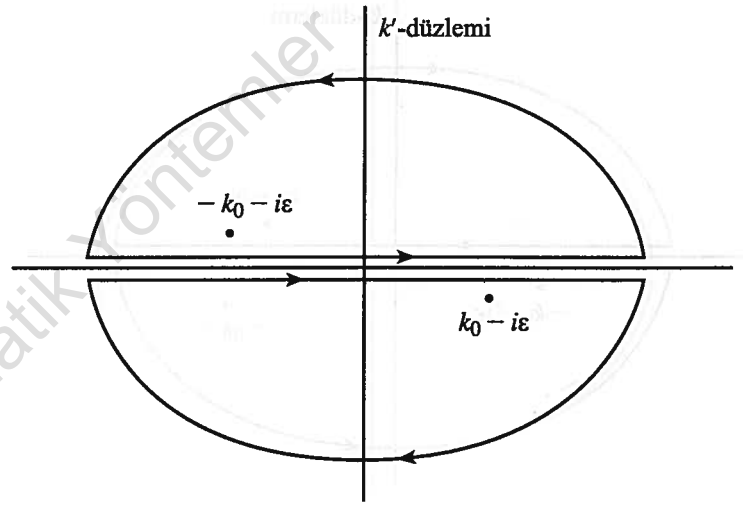
bulunur. Sonuç da

$$G(x,x') = -\frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0 i}\theta(x-x') + \frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0 i}\theta(x'-x) \qquad (16.134)$$

şeklinde özetlenebilir.

Durum III: Şekil (16.4)'de verilen yol için ise,

$$G(x,x') = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk'\frac{e^{ik'(x-x')}}{(k'-k_0-i\varepsilon)(k'+k_0+i\varepsilon)} \qquad (16.135)$$



ŞEKİL 16.3. **Durum II'de kullanılan yol.**

olacaktır. $(x-x')>0$ için (üstteki yol kullanılarak),

$$G(x,x') = -\frac{1}{2\pi}2\pi i\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{e^{i(k_0+i\varepsilon)(x-x')}}{2(k_0+i\varepsilon)}\right]$$
$$= \frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0 i} \qquad (16.136)$$

bulunur. $(x-x')<0$ için ise (alttaki yol kullanılarak),

$$G(x,x') = \frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0 i} \qquad (16.137)$$

bulunur. Bu sonuçlar da

$$G(x,x') = -\frac{e^{-ik(x-x')}}{2k_0 i}\theta(x-x') + \frac{e^{-ik(x-x')}}{2k_0 i}\theta(x'-x) \qquad (16.138)$$

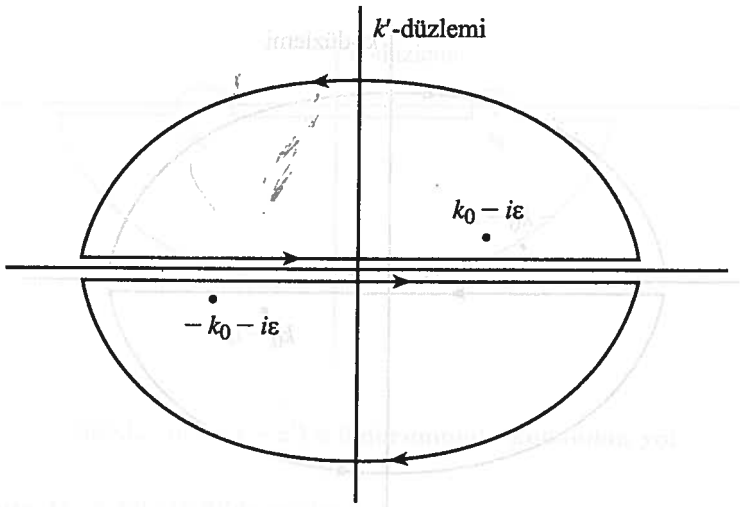
şeklinde birleştirilir.

Durum IV: Şekil(16.5)'de verilen yol için Green fonksiyonu

$(x-x')>0$ için (üstteki yol kullanılarak),

$$G(x,x') = 0$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 16.4. **Durum III'de kullanılan yol.**

ve (alttaki yol kullanılarak) $(x - x') < 0$ için de

$$\begin{aligned} G(x,x') &= -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{e^{i(k_0-i\varepsilon)(x-x')}}{2(k_0-i\varepsilon)} - \frac{e^{i(-k_0-i\varepsilon)(x-x')}}{2(-k_0-i\varepsilon)}\right] \\ &= -i\left[\frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0} - \frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0}\right] \qquad (16.139) \\ &= -2i\frac{\cos k_0(x-x')}{2k_0} \qquad (16.140) \end{aligned}$$

olacağından sonuç,

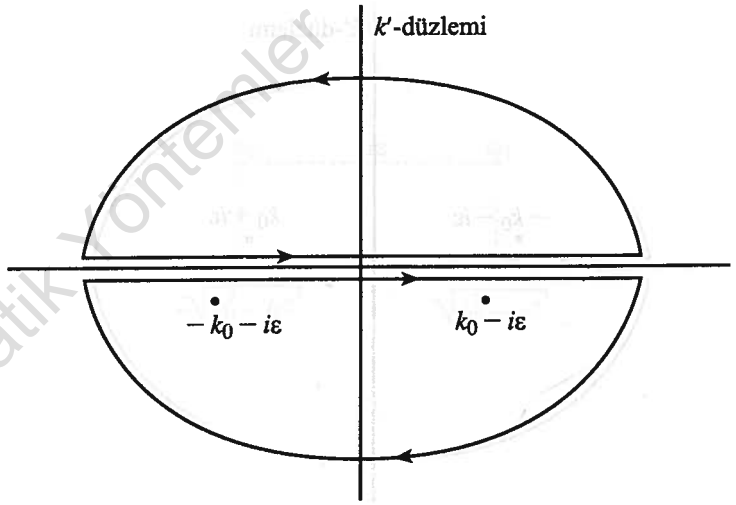
$$G(x,x') = \frac{\cos k_0(x-x')}{k_0 i}\theta(x'-x) \qquad (16.141)$$

şeklinde ifade edilir. Bu Green fonksiyonu

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\begin{array}{l} G(x,x')\to 0 \\ G(x,x')\to 0 \end{array}\right\} \qquad (16.142)$$

sınır şartlarında kullanışlıdır.

Durum V: Şekil (16.6)'da verilen yol bize



ŞEKİL 16.5. **Durum IV'de kullanılan yol.**

$(x - x') > 0$ için (üstteki yol kullanılarak),

$$G(x,x') = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{ik_0(x-x')}}{2k_0} - \frac{e^{-ik_0(x-x')}}{2k_0}\right]\theta(x'-x), \qquad (16.143)$$

ve $(x - x') < 0$ için (alttaki yol kullanılarak)

$$G(x,x') = 0$$

verir. Bu sonuçlar da

$$G(x,x') = \frac{\sin k_0(x-x')}{k_0}\theta(x-x') \qquad (16.144)$$

şeklinde özetlenir. Bu Green fonksiyonu ise,

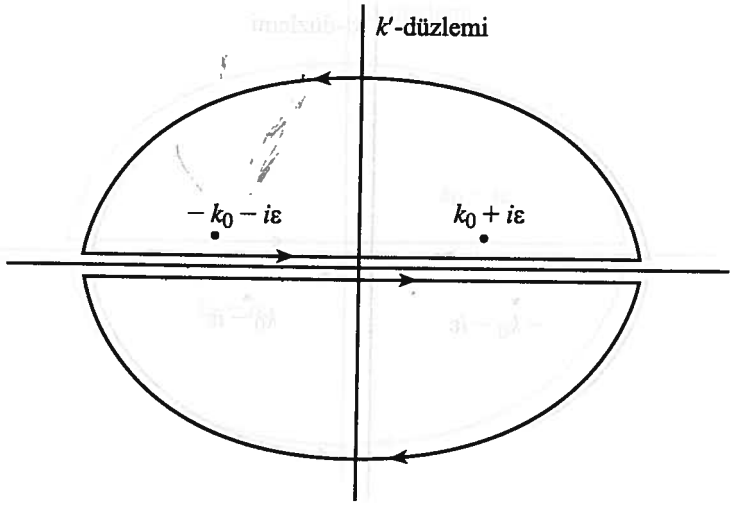
$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\begin{array}{l} G(x,x')\to 0 \\ G(x,x')\to 0 \end{array}\right\} \qquad (16.145)$$

olan durumlarda kullanışlıdır.

Örnek (16.6) ***Yay problemi için Green fonksiyonu:*** Sürümlü ve sönümlü harmonik salınımlar problemini Green fonksiyonu yöntemi ile ele alalım: Çözmemiz gereken denklem,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t), \quad \epsilon > 0 \qquad (16.146)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 16.6. **Durum V'de Kullanılan yol.**

olacaktır. Green fonksiyonu cinsinden bu denklemin çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'G(t,t')f(t') \tag{16.147}$$

Green fonksiyonunu bulmak için Fourier dönüşümü tekniğini kullanarak,

$$G(t,t')=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{e^{i\omega'(t-t')}}{(\omega'^2-2i\varepsilon\omega'-\omega_0^2)} \tag{16.148}$$

integralini yazabiliriz. Bu integralin paydasının kökleri

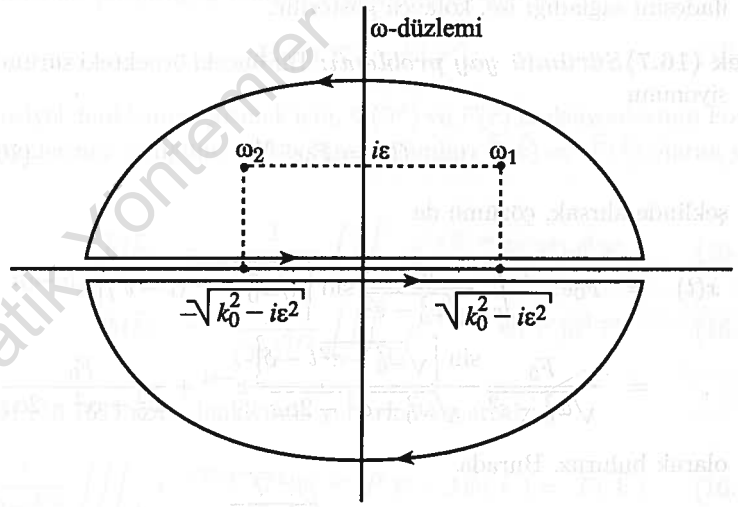
$$\omega'_{1,2} = \frac{2i\varepsilon\mp\sqrt{-4\varepsilon^2+4\omega_0^2}}{2} \tag{16.149}$$

$$= i\varepsilon\mp\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2} \tag{16.150}$$

olacağından, $G(t,t')$ ifadesi de

$$G(t,t')=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{e^{i\omega'(t-t')}}{(\omega'-\omega'_1)(\omega'-\omega'_2)} \tag{16.151}$$

olacaktır. Fourier ve Fourier-ters dönüşümleri bazen bu örnekte olduğu gibi ters işaretli olarak da tanımlanırlar. Ancak, sonuç değişmeyecektir. Bu integral ise, kompleks uzayda Şekil (16.7)'de üstte gösterilen yol kullanılarak, $(t-t')\rangle 0$ için



ŞEKİL 16.7. **Harmonik osilatör probleminin yolu.**

$$G(t,t') = -\frac{2i\pi}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega_1(t-t')}}{(\omega'_1-\omega'_2)}+\frac{e^{i\omega_2(t-t')}}{(\omega'_2-\omega'_1)}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{2\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}}\left(e^{i\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}(t-t')}-e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}(t-t')}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{2\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}}2i\ \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}\,(t-t')\right)\right]$$

şeklinde hesaplanır. $(t-t')\langle 0$ için ise, Şekil (16.7)'de alttan geçen yol içinde tekil noktası bulunmadığından

$$G(t,t')=0$$

olarak bulunur. Özetle, Green fonksiyonu

$$G(t,t')=\left\{\begin{array}{ll}\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}\,(t-t') & t-t'>0\\ 0 & t-t'<0\end{array}\right\} \tag{16.152}$$

olarak veya

$$G(t,t')=\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}}\left[\sin\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}\,(t-t')\right]\theta\,(t-t') \tag{16.153}$$

şeklinde ifade edilir. Bu Green fonksiyonunun

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+2\varepsilon\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right]G(t,t')=\delta\,(t-t') \tag{16.154}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

ifadesini sağladığı ise, kolayca gösterilir.

Örnek (16.7) ***Sürümlü yay problemi:*** Bir önceki örnekteki sürüm fonksiyonunu

$$f(t) = F_0 e^{-\alpha t} \tag{16.155}$$

şeklinde alırsak, çözümü de

$$\begin{aligned} x(t) &= F_0 e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}} \sin\left[\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}\,(t-t')\right] e^{(\varepsilon-\alpha)t'} \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}} \frac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}\,t - \delta\right]}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon}} e^{-\varepsilon t} + \frac{F_0}{\omega_0^2 + \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

olarak buluruz. Burada

$$\tan\delta = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}}{(\alpha - \varepsilon)} \tag{16.156}$$

olarak tanımlanmıştır. $x(t)$'nin

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = F(t) \tag{16.157}$$

denklemini sağladığını kolayca kontrol edebiliriz. Sürtünme katsayısının çok küçük olduğu durumlarda çözüm,

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0} \frac{\sin\left[\omega_0 t - \delta\right]}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} + \frac{F_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} e^{-\alpha t} \tag{16.158}$$

şeklinde verilir ve

$$t \to \infty \quad \text{limitinde} \quad x(t) = \tfrac{F_0}{\omega_0} \tfrac{\sin[\omega_0 t - \delta]}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} \tag{16.159}$$

olur.

16.1.9 *Üç Boyutlu Green Fonksiyonları: Poisson ve Schrödinger Denklemleri*

Şu ana kadar tartıştığımız Green fonksiyonları tek boyutluydu. Problem üç veya daha yüksek boyutlarda doğal olarak daha zor olacaktır. Bu bölümde üç boyutlu Fourier dönüşümü tekniğini uygulayabileceğimiz ve karşımıza uygulamalarda sıkça çıkan

$$\mathbf{H}_0 = \overrightarrow{\nabla}^2 + \lambda \tag{16.160}$$

operatörü ile çalışacağız. Fourier dönüşümü tekniği ile

$$\mathbf{H}_0 \Psi(\overrightarrow{r}) = F(\overrightarrow{r}) \tag{16.161}$$

diferansiyel denklemini çözmek için, $\Psi(\overrightarrow{r})$ ve $F(\vec{r})$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinin olduğunu varsayalım ve bunları $\widehat{\Psi}(\vec{k})$ ve $\widehat{F}(\vec{k})$ olarak yazalım:

$$\widehat{F}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_V e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} F(\overrightarrow{r}) d^3\overrightarrow{r}, \tag{16.162}$$

$$\widehat{\Psi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_V e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \Psi(\overrightarrow{r}) d^3\overrightarrow{r}. \tag{16.163}$$

Bunları (16.161) nolu denklemde yerlerine koyarsak,

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_V e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \overrightarrow{\nabla}^2 \Psi(\overrightarrow{r}) d^3\overrightarrow{r} + \lambda\widehat{\Psi}(\overrightarrow{k}) = \widehat{F}(\overrightarrow{k}) \tag{16.164}$$

elde ederiz. Bu denklemde de birinci terimi,

$$\iiint_V \left(F\overrightarrow{\nabla}^2 G - G\overrightarrow{\nabla}^2 F\right) d^3\vec{r} = \iint_S \left(F\overrightarrow{\nabla}G - G\overrightarrow{\nabla}F\right)\cdot\hat{n}ds \tag{16.165}$$

olarak ifade edilen Green teoremini kullanarak,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_V e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \overrightarrow{\nabla}^2 \Psi(\overrightarrow{r}) d^3\overrightarrow{r} \qquad (16.166) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_V \Psi(\overrightarrow{r}) \overrightarrow{\nabla}^2 e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} d^3\overrightarrow{r} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iint_S \left(e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \overrightarrow{\nabla}\Psi(\overrightarrow{r}) - \Psi(\overrightarrow{r})\overrightarrow{\nabla} e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}}\right)\cdot\hat{n}ds \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada S yüzeyi V hacmini sınırlayacak şekilde seçilir. İntegral bölgesini yarı çapı R olan bir küre olarak düşünür ve $R \to \infty$ limitini alırsak, yukarıdaki integralde yüzey alan terimi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \oint_s \left(e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \overrightarrow{\nabla}\Psi(\overrightarrow{r}) - \Psi(\overrightarrow{r})\overrightarrow{\nabla} e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}}\right)\cdot\hat{n}ds \qquad (16.167) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} R^2 \left\{ \iint_S \left[e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}} \frac{d\Psi}{dr} - \Psi \frac{d\left(e^{-i\vec{k}\cdot\overrightarrow{r}}\right)}{dr} \right] d\Omega \right\}_{r=R} \end{aligned}$$

olacaktır. Burada $\hat{n} = \hat{e}_r$ ve $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ olarak verilirler. Eğer $\Psi(\overrightarrow{r})$ fonksiyonu $|\vec{r}| \to \infty$ limitinde yeteri kadar çabuk sıfıra giderse, yani; $\Psi(\overrightarrow{r})$,

Bel ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 1. baskı 2004

$\frac{1}{r}$'den daha çabuk sıfıra giderse, yukarıdaki yüzey alan terimi de sıfıra gideceğinden, (16.167) denklemi

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_V e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r})d^3\vec{r} = -k^2\hat{\Psi}(\vec{k}) \tag{16.168}$$

olacaktır. Dolayısı ile (16.164) nolu denklem de

$$\left(-k^2+\lambda\right)\ \hat{\Psi}(\vec{k}) = \hat{F}(\vec{k}) \tag{16.169}$$

şeklini alır. Burada $\lambda > 0$ ve $\lambda \leq 0$ durumlarını ayrı ayrı ele almamız gerekmektedir.

Durum 1: $\lambda \leq 0$:

$\lambda = -\kappa^2$ alırsak, $-(k^2+\kappa^2)$ hiç bir zaman sıfır olmaz. Böylece,

$$\hat{\Psi}(\vec{k}) = -\frac{\hat{F}(\vec{k})}{k^2+\kappa^2} \tag{16.170}$$

denkleminin Fourier-ters dönüşümünü alarak (16.161) denkleminin çözümünü

$$\Psi(\vec{r}) = \xi(\vec{r}) - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\frac{\hat{F}(\vec{k})}{k^2+\kappa^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3\vec{k} \tag{16.171}$$

şeklinde buluruz. Burada $\xi(\vec{r})$,

$$\mathbf{H}_0\xi(\vec{r}) = \left(\vec{\nabla}^2-\kappa^2\right)\xi(\vec{r}) = 0 \tag{16.172}$$

şeklinde homojen denklemin çözümüdür. Green fonksiyonunun tanımı kullanılarak da (16.161) denkleminin genel çözümü,

$$\Psi(\vec{r}) = \xi(\vec{r}) + \iiint_V G(\vec{r},\vec{r}')F(\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{16.173}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2+\kappa^2}d^3\vec{k} \tag{16.174}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki integral kompleks analiz teknikleri kullanılarak alınabilir. $\vec{k}$ vektörü

$$\vec{k} = k\hat{r} \tag{16.175}$$

olarak alınırsa, bizim için gerekli olan

$$I = \iiint\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2+\kappa^2}d^3\vec{k}$$

integralindeki, ϕ integrali hemen alınabilir ve

$$I = 2\pi\int_0^\infty\frac{kdk}{k^2+\kappa^2}\cdot\left[\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}-e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{i|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

$$I = \frac{2\pi}{i|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\infty}^\infty dk\frac{ke^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{k^2+\kappa^2} \tag{16.176}$$

elde edilir. Jordan teoremini (Örnek 10.6) kullanarak kompleks k düzleminde yarım çember üzerinden integralin (yarıçapın sonsuza gittiği durumda) sıfır olduğunu gösterebiliriz. Dolayısı ile I integrali,

$$I = \frac{2\pi}{i|\vec{r}-\vec{r}'|}2\pi i\sum_{k>0}\text{rezidüsü}\left(\frac{ke^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{k^2+\kappa^2}\right) \tag{16.177}$$

$$= \frac{4\pi^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\frac{i\kappa e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{2i\kappa} \tag{16.178}$$

$$= \frac{2\pi^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.179}$$

olarak bulunur. Bu sonucu (16.174) denkleminde yerine koyarsak, Green fonksiyonu

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.180}$$

olarak bulunacaktır. (16.173) dekleminde çözümü tamamlamak için $\xi(\vec{r})$ olarak belirtilen homojen denklemin çözümünü bulmamız gerekmektedir. Bu ise,

$$\xi(\vec{r}) = e^{-\kappa_1 x}e^{-\kappa_2 y}e^{-\kappa_3 z}, \tag{16.181}$$
$$\kappa^2 = \kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2$$

şeklinde olacağından ve bu çözüm de sonsuzda patladığından, çözümü

$$\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}F(\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{16.182}$$

olarak veririz. Bu çözümde $F(\vec{r}')$, $|r'| \to \infty$ limitinde yeteri kadar hızlı sıfıra giderse (mesela $F(\vec{r}')$, $|r'| > R$ için sıfır ise), $\Psi(\vec{r})$'nin

$$\Psi(\vec{r}) \to C\frac{e^{-\kappa r}}{r} \tag{16.183}$$

olduğunu görürüz. Bu da (16.164) ifadesinde yüzey alan teriminin ihmal edilmesi ile tutarlıdır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Örnek (16.8) ***Poisson denklemi için Green fonksiyonu:*** Yukarıda bulduğumuz Green fonksiyonunun kullanım alanlanlarından bir tanesi de elektromanyetik teôridir. Þurada Poisson denklemini

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{16.184}$$

olarak yazarsak, (16.181) denkleminde $\lambda = 0$ olacağından çözüm de

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{16.185}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.186}$$

şeklinde verilir.

Örnek (16.9) ***Schrödinger denklemi için Green fonksiyonu-$E < 0$:*** Bir başka uygulama ise,

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\Psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) \tag{16.187}$$

şeklinde verilen zamandan bağımsız Shrödinger denklemidir. Merkezcil çekim kuvvetlerinde bağımlı durumlar için $E < 0$ olacağından,

$$\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \tag{16.188}$$

olarak tanımlanır ve çözüm de

$$\Psi(\vec{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iiint_V \frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\Psi(\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{16.189}$$

şeklinde verilir. Bu da aynı zamanda Shrödinger denkleminin integral denklemi olarak verilmiş şeklidir.

Durum II: $\lambda > 0$:

Bu durumda $\widehat{\Psi}(\vec{k})$ fonksiyonunun (16.169)'da verilen tanımına bakarsak, $k = \pm\sqrt{\lambda}$ değerleri için payda sıfır olacağından, o noktalarda tanımsız olduğunu görürüz. Bu problemi ortadan kaldırmak için, λ değerlerine $i\varepsilon$ kadar küçük bir sanal sayı ekler ve

$$\lambda = (q \pm i\varepsilon)^2, \quad \varepsilon > 0 \tag{16.190}$$

olarak (16.170) denkleminde yerine koyarsak, reel eksen üzerinde her yerde tanımlı olan ve

$$\widehat{\Psi}_\pm(\vec{k}) = -\frac{\widehat{F}(\vec{k})}{k^2 - (q \pm i\varepsilon)^2} \tag{16.191}$$

şeklinde verilen $\widehat{\Psi}_\pm(\vec{k})$ fonksiyonunu buluruz. Daha önce yaptığımız gibi bu ifadenin de Fourier-ters dönüşümünü alırsak, çözüm ve Green fonksiyonunu da

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= \xi(\vec{r}) + \iiint_V G_\pm(\vec{r}, \vec{r}')F(\vec{r}')d^3\vec{r}', \\ G_\pm(\vec{r}, \vec{r}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2 - (q \pm i\varepsilon)^2}d^3\vec{k}\end{aligned} \tag{16.192}$$

olarak buluruz. Artık amacımız, her yerde tanımlanmış olan bu integrali kompleks analiz yöntemleri kullanarak aldıktan sonra, $\varepsilon \to 0$ limitini bulmaktır. İntegrandımızın kompleks k uzayında

$$k = (q \pm i\varepsilon)$$

gibi, iki tekil noktası olduğundan Cauchy integral teoremi kullanılarak değeri kolayca bulunur. Daha önce yaptığımız gibi önce θ ve ϕ integrallerini alırsak,

$$\begin{aligned}G_\pm(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{8\pi^2 i\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} kdk\Big[&\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k - q \mp i\varepsilon)(k + q \pm i\varepsilon)} \\ &- \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k - q \mp i\varepsilon)(k + q \pm i\varepsilon)}\Big]\end{aligned} \tag{16.193}$$

olacaktır. Kalan integrallerden birincisi için kompleks k uzayında yolumuzu üst yarı-uzay içerisinde kapatırsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} kdk\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k - q \mp i\varepsilon)(k + q \pm i\varepsilon)} = \pi i e^{\pm iq|\vec{r}-\vec{r}'| - \varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.194}$$

ve ikinci integral için de yolumuzu alt k yarı-uzayında kapatırsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} kdk\frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k - q \mp i\varepsilon)(k + q \pm i\varepsilon)} = -\pi i e^{\pm iq|\vec{r}-\vec{r}'| - \varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.195}$$

bulunacaktır. Bunları da Green fonksiyonunda ve çözümde yerlerine koyarsak,

$$G_\pm(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm iq|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{16.196}$$

$$\Psi_\pm(\vec{r}) = \xi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{e^{i(\pm q + i\varepsilon)|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}F(\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{16.197}$$

Fen Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın
1. baskı 2004

elde ederiz. Burada $\pm$ işaretinin seçimi çok önemlidir. Eğer $|\overrightarrow{r}| \to \infty$ limitini bulursak,

$$\Psi_+(\overrightarrow{r}) \rightarrow \xi(\overrightarrow{r}) + C\frac{e^{iqr}}{r} \quad \text{veya} \tag{16.198}$$

$$\Psi_-(\overrightarrow{r}) \rightarrow \xi(\overrightarrow{r}) + C\frac{e^{-iqr}}{r} \tag{16.199}$$

elde ederiz. C ise, θ ve ϕ'ye bağlı olabilen fakat r'den bağımsız bir katsayıdır. $\pm$ işaretleri fiziksel olarak gelen (incoming) veya giden (outgoing) dalga çözümlerine karşı gelirler. Şimdi homojen denklemin yani,

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2 + q^2\right)\xi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{16.200}$$

denkleminin çözümlerine bakalım: Bunların $e^{i\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}}$ şeklinde olduklarını görürüz. Bu durumda çözümü tam olarak yazarsak,

$$\Psi_\pm(\overrightarrow{r}) = \frac{A}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}} - \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{e^{i(\pm q+i\epsilon)|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}F(\overrightarrow{r}')d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.201}$$

bulunacaktır. A sabiti ve $\overrightarrow{q}$ vektörünün yönü ise, başlangıç şartlarından bulunurlar.

Örnek (16.10) ***Schrödinger denklemin için Green fonksiyonu-*** $E \geq 0$***:*** $\lambda > 0$ durumuna önemli bir örnek Schrödiger denkleminin

$$\left(\overrightarrow{\nabla}^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\Psi(\overrightarrow{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\overrightarrow{r})\Psi(\overrightarrow{r}) \tag{16.202}$$

saçılmalar ($E \geq 0$) durumu için yazılmış şeklidir: $E \geq 0$ için bu denklem

$$\Psi_\pm(\overrightarrow{r}) = \frac{A}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\overrightarrow{q}_i\cdot\overrightarrow{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\iiint_V \frac{e^{\pm iq_i|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'|}V(\overrightarrow{r}')\Psi_\pm(\overrightarrow{r}')d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.203}$$

şeklini alır. Burada $\overrightarrow{q}_i$ vektörünün büyüklüğü ise,

$$q_i = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

olarak verilir. Bu denklem modern kuantum mekaniğinde saçılma olaylarının çalışılmasında başlangıç noktası olarak alınan "Lipmann-Schwinger" denklemidir. Burada dikkat çekeceğimiz bir nokta, $\varepsilon \to 0$ limitinin sorun çıkarmayacağı düşünülerek sonucun ε'dan arındırılmış olarak verilmiş olmasıdır.

16.2 Zamana Bağlı Green Fonksiyonları

16.2.1 Birinci Dereceden Zamana Bağlı Green Fonksiyonları

Genel olarak aşağıdaki gibi verilmiş diferansiyel denklemleri ele alalım.

$$H\Psi(\overrightarrow{r},\tau) + \frac{\partial\Psi(\overrightarrow{r},\tau)}{\partial\tau} = 0 \tag{16.204}$$

Burada, τ zaman benzeri bir değişkendir. H ise, τ 'dan bağımsız ve birbirlerine dik ve tam özfonksiyonlar seti olan bir diferansiyel operatörüdür. Bu tip denklemler, fizik ve mühendislik problemlerinde sık sık karşımıza çıkarlar. Isı transfer denklemi olan

$$\overrightarrow{\nabla}^2 T(\overrightarrow{r},t) = \frac{c}{k}\frac{\partial T(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}, \tag{16.205}$$

buna bir örnektir. Burada $T(\overrightarrow{r},t)$ ısı dağılımı olup, c birim hacimdeki özgül ısı ve k da ısı iletkenlik katsayısıdır. Bu denklemi (16.204) genel şekli ile kıyasladığımızda,

$$\begin{aligned} H &= -\overrightarrow{\nabla}^2, \\ \tau &= \frac{kt}{c} \end{aligned} \tag{16.206}$$

olduğunu görürüz. Bu tür deklemlere bir başka örnek de zamana bağlı Schrödinger denklemidir:

$$\widehat{H}\Psi(\overrightarrow{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}. \tag{16.207}$$

Burada H toplam Hamilton operatörü olup, serbest hareket eden bir tanecik için

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 \tag{16.208}$$

olarak verilir. Dolayısıyla bu örnekte de

$$\begin{aligned} H &= -\overrightarrow{\nabla}^2 \text{ ve} \\ \tau &= \left(\frac{i\hbar}{2m}\right)t \end{aligned} \tag{16.209}$$

olur. Bir başka örnek de

$$\overrightarrow{\nabla}^2\rho = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{16.210}$$

olarak verilen difüzyon denklemidir. Bu denklemde $\rho(r,t)$ difüzyona uğrayan maddenin yoğunluğu ve a'da difüzyon katsayısıdır. Bu denklem için de

$$\begin{aligned} H &= -\overrightarrow{\nabla}^2 \text{ ve} \\ \tau &= a^2 t \end{aligned} \tag{16.211}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
2004 II. baskı
Selçuk Ş. Bayın

olacaktır

H operatörünün birbirine dik ve tam bir özfonksiyon setinin olduğu durumlarda

$$H\phi_m = \lambda_m \phi_m \tag{16.212}$$

yazabiliriz. Burada λ_m özdeğerler ve ϕ_m de özfonksiyonlardır. (16.204)'ün çözümü olan $\Psi(\overrightarrow{r},t)$ fonksiyonunu,

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \sum_m A_m(\tau)\phi_m(\overrightarrow{r}) \tag{16.213}$$

şeklinde bu özfonksiyonlar seti cinsinden sonsuz bir seri olarak açalım. $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ foksiyonunun zamana bağlılığı, $A_m(\tau)$ katsayılarında taşınacaktır. Bu ifade üzerine H operatörü ile etki edersek,

$$\begin{aligned} H\Psi &= H\left[\sum_m A_m(\tau)\phi_m(\overrightarrow{r})\right] \\ &= \sum_m A_m(\tau) H\phi_m(\overrightarrow{r}) \\ &= \sum_m \lambda_m A_m(\tau)\phi_m(\overrightarrow{r}) \end{aligned} \tag{16.214}$$

elde ederiz. Bunu da (16.204) denkleminde yerine koyarsak,

$$\sum_m \left[\lambda_m A_m(\tau) + \frac{dA_m(\tau)}{d\tau}\right]\phi_m(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{16.215}$$

olacaktır. $\{\phi_m\}$ seti birbirlerinden bağımsız fonksiyonlardan oluştuğundan, bu denklemi sağlamanın tek yolu, bütün m değerleri için $\phi_m(\overrightarrow{r})$ fonksiyonlarının katsayılarının teker teker sıfır olmalarıdır:

$$\frac{dA_m(\tau)}{d\tau} + \lambda_m A_m(\tau) = 0. \tag{16.216}$$

Buradan $A_m(\tau)$ katsayılarını,

$$A_m(\tau) = A_m(0)e^{-\lambda_m \tau} \tag{16.217}$$

olarak belirler ve $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ çözümünü de

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \sum_m A_m(0)\phi_m(\overrightarrow{r})e^{-\lambda_m\tau} \tag{16.218}$$

şeklinde yazarız. Bu çözümü tamamlamak için $\tau = 0$ anında bir başlangıç şartı vermemiz gerekmektedir. $\tau = 0$ çözümü olan $\Psi(\overrightarrow{r},0)$ fonksiyonunu bildiğimizi varsayarsak,

$$\Psi(\overrightarrow{r},0) = \sum_m A_m(0)\phi_m(\overrightarrow{r}) \tag{16.219}$$

yazabiliriz. $\{\phi_m\}$ birbirine dik ve tam bir fonksiyon seti olduğundan,

$$\iiint_V \phi_m(\overrightarrow{r})\phi_n(\overrightarrow{r})d^3\overrightarrow{r} = \delta_{mn}$$

ve

$$\sum \phi_m(\overrightarrow{r})\phi_n(\overrightarrow{r}') = \delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')$$

ilişkilerini kullanarak bu denklemi $A_m(0)$ için,

$$A_m(0) = \iiint_V \phi_m^*(\overrightarrow{r})\Psi(\overrightarrow{r},0)d^3\overrightarrow{r} \tag{16.220}$$

şeklinde çözeriz. $A_m(0)$ değerlerini (16.218) denkleminde yerlerine koyarsak,

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \sum_m e^{-\lambda_m\tau}\phi_m(\overrightarrow{r}) \iiint_V \phi_m^*(\overrightarrow{r}')\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}'$$

elde edilir. Bunu da

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \iiint_V G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.221}$$

şeklinde yazarak, $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonunu buluruz:

$$G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = \sum_m e^{-\lambda_m\tau}\phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}'). \tag{16.222}$$

Burada dikkatimizi çeken, $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',0) &= \sum_m \phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}') \\ &= \delta^3(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}') \end{aligned} \tag{16.223}$$

ve

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = 0 \tag{16.224}$$

denklemlerini sağladığıdır. Bulduğumuz bu fonksiyonu zamana göre birinci dereceden bir denklemi sağladığı için, $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)$ olarak tanımladık. Ancak, $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonu

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = \delta^3(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}')\,\delta(\tau) \tag{16.225}$$

denklemini sağlamadığı için, henüz aradığımız Green fonksiyonu olmadığını da söyleyebiliriz. Yalnız biraz sonra göreceğimiz gibi, her iki fonksiyon

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

arasında yakın bir ilişki vardır. Dikkat edilirse G_1'in kendisi, nokta kaynak tabir edilen ve

$$\Psi(\overrightarrow{r},0) = \delta^3(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_0) \tag{16.226}$$

olarak verilen başlangıç şartı için, (16.204) denkleminin bir çözümüdür. Denklem (16.221)'dan hareket ederek bu çözümü

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r_0},\tau) \quad \tau \geq 0 \tag{16.227}$$

şeklinde yazabiliriz.

16.2.2 *Propagatörler*

Şu ana kadar denklemlerde başlangıç zamanının sıfır olarak seçimi rasgele yapıldığından, herhangi bir τ' başlangıç zamanı için denklemlerimiz,

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau')\Psi(\overrightarrow{r}',\tau')d^3\overrightarrow{r}', \tag{16.228}$$

$$G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau') = \sum_m e^{-\lambda_m(\tau-\tau')}\phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}') \tag{16.229}$$

şeklinde olacaktır. Buradan görüldüğü gibi, $(\overrightarrow{r}',\tau')$ noktasındaki $\Psi(\overrightarrow{r}',\tau')$ çözümü bilinirse, $(\overrightarrow{r},\tau)$ noktasındaki çözüm de $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonu kullanılarak (16.228) denkleminden bulunabilir. Kısaca, $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonu, $(\overrightarrow{r}',\tau')$ noktasındaki çözümü $(\overrightarrow{r},\tau)$ noktasına taşımamızı sağlayacaktır. Bu yüzden de propagatör olarak bilinir. Kuantum alan teorilerinde, perturbasyon hesaplarında ve Feynman diagramlarında propagatör yorumu çok yararlıdır.

16.2.3 *Propagatörlerin Birleştirilmesi*

τ_0 anı için verilen bir çözümün önce τ_1, sonra da τ_2 zamanına ötelenmesini inceleyelim:

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau_1) = \int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)\Psi(\overrightarrow{r}'',\tau_0)d^3\overrightarrow{r}'', \tag{16.230}$$

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau_2) = \int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)\Psi(\overrightarrow{r}',\tau_1)d^3\overrightarrow{r}'. \tag{16.231}$$

(16.230)'u kullanarak ikinci denklemi,

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau_2) = \int\int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)G_1(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)\Psi(\overrightarrow{r}'',\tau_0)d^3\overrightarrow{r}''d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.232}$$

şeklinde yazabiliriz. $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)$ ve $G_1(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)$ propagatörlerinin tanımları bize

$$\int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)G_1(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.233}$$
$$= \int\sum_m e^{-\lambda_m(\tau_2-\tau_1)}\phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}')\sum_n e^{-\lambda_n(\tau_1-\tau_0)}\phi_n(\overrightarrow{r}')\phi_n^*(\overrightarrow{r}'')d^3\overrightarrow{r}'$$

vereceğinden ve özfonksiyonların diklik şartı da

$$\int \phi_m(\overrightarrow{r}')\phi_n^*(\overrightarrow{r}')d^3\overrightarrow{r}' = \delta_{nm}$$

olduğundan, bunu

$$\begin{aligned}\int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)G_1(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)d^3\overrightarrow{r}' &= \sum_m e^{-\lambda_m(\tau_2-\tau_1)}\phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}'')e^{-\lambda_m(\tau_1-\tau_0)} \\ &= \sum_m \phi_m(\overrightarrow{r})\phi_m^*(\overrightarrow{r}'')e^{-\lambda_m(\tau_2-\tau_0)} \\ &= G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}'',\tau_2,\tau_0)\end{aligned} \tag{16.234}$$

olarak yazarız. Sonuç olarak da

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau_2) = \int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}'',\tau_2,\tau_0)\Psi(\overrightarrow{r}'',\tau_0)d^3\overrightarrow{r}'', \tag{16.235}$$

$$G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}'',\tau_2,\tau_0) = \int G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau_2,\tau_1)G_1(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\tau_1,\tau_0)d^3\overrightarrow{r}',$$

denklemlerinden $G_1(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}'',\tau_2,\tau_0)$ bize, τ_0'dan τ_2 anına tek bir adımda götüren propogatörü, önce τ_0'dan τ_1'e ve sonra da τ_1'den τ_2'ye götüren propagatörler cinsinden verir.

16.2.4 *Difüzyon Denklemi İçin Green Fonksiyonu*

Birinci dereceden zamana bağlı sistemlerde Green fonksiyonu hesabına örnek olarak,

$$\overrightarrow{\nabla}^2\Psi(\overrightarrow{x},\tau) = \frac{\partial\Psi(\overrightarrow{x},\tau)}{\partial\tau} \tag{16.236}$$

şeklinde verilen difüzyon veya ısı transfer denklemini ele alalım. Problemi basitleştirmek için tek boyutta,

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \text{ ve} \tag{16.237}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$\Psi(-\frac{L}{2},\tau)=\Psi(\frac{L}{2},\tau) \tag{16.238}$$

olarak verilen periodik sınır şartını kullanalım. (16.204) denkleminde H operatörü

$$H=-\frac{d^2}{dx^2} \tag{16.239}$$

olacağından, bu operatörün özfonksiyonları ve özdeğerleri,

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\phi_m}{dx^2} &= \lambda_m\phi_m, \qquad (16.240)\\ \phi_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\sqrt{\lambda_m}x},\\ \lambda_m &= \left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 \qquad m=\pm \text{ tam sayı} \end{aligned}$$

olarak kolayca bulunur. Kolaylık olsun diye

$$k_m=\frac{2\pi m}{L} \tag{16.241}$$

değerlerini tanımlarsak, $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonu da

$$G_1(x,x',\tau)=\sum_m^\infty \frac{1}{L}e^{ik_m(x-x')}e^{-k_m^2\tau} \tag{16.242}$$

şeklinde yazılacaktır. Bu noktada bir de bu problemin süreklilik limitini ele alalım: İki özdeğer arasındaki farkın

$$\triangle k_m=\frac{2\pi}{L} \tag{16.243}$$

olduğunu düşünürsek, $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonunu

$$G_1(x,x',\tau)=\frac{1}{2\pi}\sum_m^\infty \triangle k_m e^{ik_m(x-x')}e^{-k_m^2\tau} \tag{16.244}$$

şeklinde yazarız. Süreklilik limiti olan $L\to\infty$ 'da özdeğerler arasındaki fark sıfıra gideceğinden, toplama işlemini

$$\lim_{L\to\infty}\sum_m \triangle k_m f(k_m)\to\int f(k)dk \tag{16.245}$$

şeklinde integral ile değiştiririz. Bu da bize $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonunu,

$$G_1(x,x',\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-x')}e^{-k^2\tau} \tag{16.246}$$

olarak verir. Bu integrali

$$ik(x-x')-k^2\tau=-\tau\left(k-\frac{i(x-x')}{2\tau}\right)^2-\frac{(x-x')^2}{4\tau} \tag{16.247}$$

ifadesini ve

$$\delta=\frac{(x-x')}{2\tau}$$

tanımını kullanarak,

$$G_1(x,x',\tau)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{-\tau(k-i\delta)^2} \tag{16.248}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu integral kolayca alınarak, $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonu

$$G_1(x,x',\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}} \tag{16.249}$$

şeklinde elde edilir. Burada dikkat edeceğimiz özellikler arasında, G_1 fonksiyonunun x ve x' 'ne göre simetrik olduğu ve $\tau\to 0$ limitinde

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to 0}G_1(x,x',\tau) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}} \qquad (16.250)\\ &= I(x,x') \end{aligned}$$

verdiğidir. Bu ise, Dirac-delta fonksiyonun tanımlarından bir tanesidir:

$$I(x,x')=\delta(x-x'). \tag{16.251}$$

(16.249) fonksiyonunun grafiğini çizersek, $x=x'$ etrafındaki bir çan eğrisi (Gauss eğrisi) buluruz (Şekil (16.8)).

Çan eğrisinin altındaki alan,

$$\int_{-\infty}^{\infty}G_1(x,x')dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}dx=1 \tag{16.252}$$

şeklinde sabit olacağından, difüzyona uğrayan maddenin toplam miktarı da sabit kalacaktır. Bulduğumuz $G_1(x,x',\tau)$ fonksiyonu cinsinden genel çözümü de

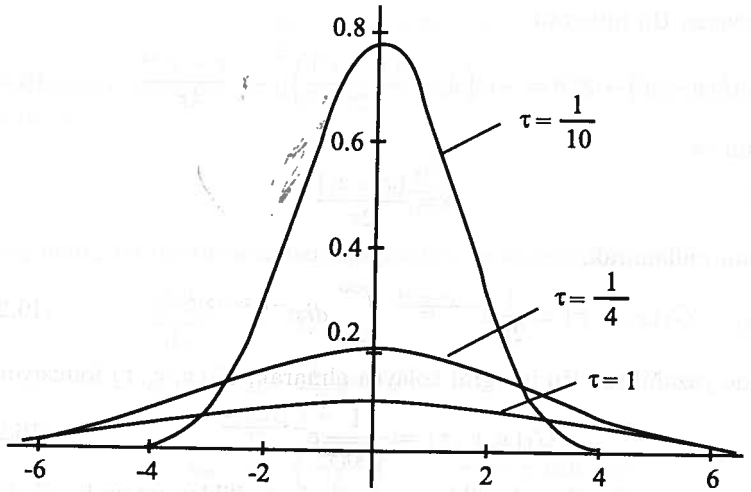
$$\begin{aligned} \Psi(x,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}G_1(x,x',\tau)\Psi(x',0)dx'\\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}\Psi(x',0)dx' \qquad (16.253) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,\tau)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x',0)dx' \tag{16.254}$$

olacaktır. Difüzyon denklemi uygulamasında bu çözüm bize, başlangıçta $\Psi(x',0)$ olan madde dağılımının ilerleyen zamanlarda pozisyona göre dağılımını verecektir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 16.8. **Gauss eğrisi.**

16.2.5 Kaynakların Olduğu Durumlar ve Green Fonksiyonu

Birinci dereceden zamana bağlı diferansiyel denklemler karşımıza

$$H\Psi(\vec{r},\tau) + \frac{\partial\Psi(\vec{r},\tau)}{\partial\tau} = F(\vec{r},\tau) \tag{16.255}$$

şekinde de çıkar. Burada $F(\vec{r},\tau)$ kaynakları veya kayıpları olduğu kadar pertürbasyonları da temsil etmektedir. Örneğin: Difüzyon probleminde bir yerde radyoaktif bir kaynak var ve sürekli yeni madde sağlıyorsa, bu terim sıfırdan farklı olacaktır. Isı transfer problemlerinde ısı kaynaklarımız olursa, bu terim gene sıfırdan farklı olacaktır. Hatırda tutmak gerekir ki, $F(\vec{r},\tau)$ fonsiyonu açık olarak $\Psi(\vec{r},\tau)$ fonksiyonuna da bağlı olabilir. Bu durumda çözümü

$$\Psi(\vec{r},\tau) = \Psi_0(\vec{r},\tau) + \int G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')F(\vec{r}',\tau')d^3\vec{r}'d\tau' \tag{16.256}$$

şeklinde ifade etmemize yardımcı olacak bir Green fonksiyonuna ihtiyacımız vardır. Bu denklemde $\Psi_0(\vec{r},\tau)$, (16.255) denkleminin homojen kısmının çözümüdür. Bilindiği gibi daha önce $G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonunu bulmuştuk ve bu fonksiyon

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = 0 \tag{16.257}$$

denklemini sağlamaktaydı. Fakat, (16.256) denkleminde ihtiyacımız olan Green fonksiyonu,

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\delta(\tau-\tau') \tag{16.258}$$

denklemini sağlamalıdır. Daha önce de belirttiğimiz gibi, $G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonu bu anlamda bir Green fonksiyonu tanımına uymamakla birlikte ona oldukça yakındır. $G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonunun

$$\lim_{\tau\to\tau'} G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \tag{16.259}$$

özelliğinden hareket ederek ona $\tau = \tau'$ anında bir süreksizlik katabilirsek, (16.258) deklemini sağlamayı bekleyebiliriz. $G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonunun (16.258) denklemini $\vec{r} = \vec{r}'$ ve $\tau = \tau'$ noktaları dışında her noktada sağladığını da düşünürsek, aşağıdaki gibi verilmiş bir denklem ile işe başlayabiliriz:

$$G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau'). \tag{16.260}$$

Burada

$$\begin{aligned} \tau>\tau' \quad &\text{için} \quad G = G_1 \quad \text{ve} \\ \tau<\tau' \quad &\text{için} \quad G = 0 \end{aligned} \tag{16.261}$$

olacaktır. Bu fonksiyonu (16.258) denkleminde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} &\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \\ &= HG_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau') + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau')\right] \\ &= \theta(\tau-\tau')HG_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') + \theta(\tau-\tau')\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \\ &\quad + G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\frac{\partial}{\partial\tau}\theta(\tau-\tau') \\ &= \theta(\tau-\tau')\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') + G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\delta(\tau-\tau') \end{aligned} \tag{16.262}$$

buluruz. Basamak fonksiyonunun türevi,

$$\frac{d}{d\tau}\theta(\tau-\tau') = \delta(\tau-\tau'), \tag{16.263}$$

şeklinde Dirac-delta fonksiyonu olacağından ve G_1 (16.257) denklemini sağladığından,

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\delta(\tau-\tau') \tag{16.264}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
1. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olacaktır. Dirac-delta fonksiyonunun $\tau{=}\tau'$ anı dışında her yerde sıfır olduğunu düşünürsek, G_1 fonksiyonunun da sadece $\tau{=}\tau'$ anındaki değeri önemli olacaktır. Bu da (16.223) denkleminden dolayı $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ olduğundan, (16.264) denklemini

$$\left(H + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) G(\vec{r}, \vec{r}',\tau,\tau') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\delta(\tau{-}\tau') \tag{16.265}$$

şeklinde yazarız. Görüldüğü gibi, (16.255) problemi için Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}, \vec{r}',\tau,\tau') = G_1(\vec{r}, \vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau{-}\tau') \tag{16.266}$$

ve genel çözüm de

$$\Psi(\vec{r}',\tau) = \Psi_0(\vec{r}',\tau) + \int d^3\vec{r}' \int d\tau' G(\vec{r}, \vec{r}',\tau,\tau')F(\vec{r}',\tau') \tag{16.267}$$

şeklinde olacaktır.

16.2.6 *Schrödinger Denklemi İçin Green Fonksiyonu*

Serbest parçacık için Green Fonksiyonu:

Schrödinger denkleminde serbest parçacık için Green fonksiyonu, difüzyon denklemi ile olan benzerlikten yararlanılarak, (16.249) denkleminde $\tau \to \frac{i\hbar t}{2m}$ dönüşümü ile kolayca

$$G_1(x,x',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar t/m}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2i\hbar t/m}} \tag{16.268}$$

şeklinde yazılabilir. Schrödinger denkleminin:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t), \tag{16.269}$$

$\Psi(x',0)$ başlangıç şartı ile çözümü ise, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\Psi(x,t) = \int G_1(x,x',t)\Psi(x',0)dx'. \tag{16.270}$$

Etkileşimlerin olduğu durumlarda Green fonksiyonu:

Parçacığın $V(x)$ gibi bir potansiyelin etkisinde hareket ettiğini düşünürsek, Schrödinger denklemi

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + \frac{i2m}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{2m}{\hbar^2}V(x)\Psi(x,t), \tag{16.271}$$

şeklinde yazılacaktır. Başlangıç zamanı olarak da t'alırsak, Green fonksiyonu ve çözüm de

$$G(x,x',t,t') = G_1(x,x',t,t')\theta(t{-}t'), \tag{16.272}$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_0(x,t) - (\frac{2m}{\hbar^2})\int dx' \int dt' G(x,x',t,t')\, V(x')\Psi(x',t') \tag{16.273}$$

şeklinde yazılacaktır.

16.2.7 *İkinci Dereceden Zamana Bağlı Green Fonksiyonları*

Genellikle karşılaşılan ikinci dereceden zamana bağlı denklemler,

$$\left[H + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\Psi(\vec{r},\tau) = 0 \tag{16.274}$$

şeklinde yazılabilirler. Burada τ zaman benzeri bir değişken, H ise, τ'dan bağımsız ve

$$H\phi_n(\vec{r}) = \lambda_n\phi_n(\vec{r}) \tag{16.275}$$

özdeğer problemi tarafından belirlenen, tam ve birbirine dik özfonksiyonlar seti olan bir operatördür. Burada λ_n özdeğerleri ifade göstermektedir. $\Psi(\vec{r},\tau)$ fonksiyonunu bu özfonksiyonlar seti cinsinden

$$\Psi(\vec{r},\tau) = \sum_n A_n(\tau)\phi_n(\vec{r}) \tag{16.276}$$

şeklinde yazar ve τ bağımlılığının da $A_n(\tau)$ kasayılarında taşındığını varsayarsak, (16.274) denkleminden

$$\sum_n \left[\ddot{A}_n(\tau) + \lambda_n A_n(\tau)\right]\phi_n(\vec{r}) = 0 \tag{16.277}$$

elde ederiz. $\{\phi_n\}$ seti doğrusal olarak birbirinden bağımsız fonksiyonlardan oluştuğundan, bu ifade ancak ϕ_n fonksiyonlarının katsayılarının herbirinin ayrı ayrı sıfır olması ile mümkün olur:

$$\ddot{A}_n(\tau) + \lambda_n A_n(\tau) = 0. \tag{16.278}$$

Bunun çözümü ise,

$$A_n(\tau) = a_n e^{i\sqrt{\lambda_n}\tau} + b_n e^{-i\sqrt{\lambda_n}\tau} \tag{16.279}$$

olarak kolayca bulunur. Bunu (16.276)'da kullanarak, $\Psi(\vec{r},\tau)$ çözümünü de

$$\Psi(\vec{r},\tau) = \sum_n \left[a_n e^{i\sqrt{\lambda_n}\tau} + b_n e^{-i\sqrt{\lambda_n}\tau}\right]\phi_n(\vec{r}) \tag{16.280}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde yazarız. Burada a_n ve b_n sabitleri sınır şartlarından bulunacaktır. $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ fonksiyonunun ve zamana göre türevinin $\tau = 0$ anındaki değerlerini bildiğimizi var sayarsak,

$$\Psi(\overrightarrow{r},0) = \sum_n [a_n + b_n]\,\phi_n(\overrightarrow{r}), \tag{16.281}$$

$$\dot{\Psi}(\overrightarrow{r},0) = i\sum_n \sqrt{\lambda_n}\,[a_n - b_n]\,\phi_n(\overrightarrow{r}) \tag{16.282}$$

şeklinde a_n ve b_n için çözülecek iki denklem buluruz. Özfonksiyonların diklik şartını kullanarak da

$$[a_n + b_n] = \int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' \quad \text{ve} \tag{16.283}$$

$$[a_n - b_n] = \frac{-i}{\sqrt{\lambda_n}}\int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.284}$$

yazar ve buradan da a_n ve b_n katsayılarını

$$a_n = \frac{1}{2}\Big[\int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' + \frac{1}{i\sqrt{\lambda_n}}\int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}'\Big], \tag{16.285}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\Big[\int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' - \frac{1}{i\sqrt{\lambda_n}}\int \phi_n^*(\overrightarrow{r}')\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}'\Big] \tag{16.286}$$

şeklinde belirleriz. Bunları $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ fonksiyonunda yerlerine koyarsak,

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \int \sum_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}')\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' + \int \sum_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}')\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.287}$$

buluruz ki; bunu da

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \int G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)\Psi(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' + \int \tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)d^3\overrightarrow{r}' \tag{16.288}$$

şeklinde düzenleyerek, G_2 ve $\tilde{G}_2$ fonksiyonlarını

$$G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = \sum_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}') \quad \text{ve} \tag{16.289}$$

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = \sum_n \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}') \tag{16.290}$$

olarak tanımlarız. Burada elimizde (sırası ile) $\Psi(\overrightarrow{r}',0)$ ve $\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',0)$ üzerine etki eden, G_2 ve $\tilde{G}_2$ gibi iki fonksiyonumuz vardır. G_2 ve $\tilde{G}_2$ fonksiyonları

$$\left[H + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = 0 \tag{16.291}$$

$$\left[H + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = 0 \tag{16.292}$$

denklemlerini sağladıklarından, $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ fonksiyonuda (16.274) denklemini sağlayacaktır. G_2 ve $\tilde{G}_2$ fonksiyonları arasında

$$G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) = \frac{d}{d\tau}\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau) \tag{16.293}$$

ilişkisi vardır. Dolayısı ile $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)$ bulunursa, $G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonu da bunun τ değişkenine göre türevi alınarak bulunabilir. $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ çözümünün gerekli sınır şartlarını sağladığı ise, (16.288) denkleminden ve

$$G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',0) = \sum_n \phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}') = \delta^3(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') \tag{16.294}$$

ilişkisinden kolayca görülür.

(16.288) denkleminde $\tau' = 0$ anının başlangıç zamanı olarak seçimi rasgele yapıldığı için, $\Psi(\overrightarrow{r},\tau)$ çözümünü genelde aşağıdaki gibi yazarız:

$$\Psi(\overrightarrow{r},\tau) = \int G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau')\Psi(\overrightarrow{r}',\tau')d^3\overrightarrow{r}' + \int \tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau')\dot{\Psi}(\overrightarrow{r}',\tau')d^3\overrightarrow{r}'. \tag{16.295}$$

Burada $\tilde{G}_2$ ve G_2 fonksiyonları da

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau') = \sum_n \frac{\sin\left[\sqrt{\lambda_n}c(\tau-\tau')\right]}{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}'),$$

$$G_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau') = \sum_n \cos\left[\sqrt{\lambda_n}c(\tau-\tau')\right]\phi_n(\overrightarrow{r})\phi_n^*(\overrightarrow{r}') = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\tilde{G}_2(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\tau,\tau') \tag{16.296}$$

şeklinde olacaktır.

16.2.8 Skalar Dalga Denklemi için Propagatörler

İkinci dereceden zamana bağlı denklemlere en güzel örneklerden bir tanesi,

$$\Box^2\Psi(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{\nabla}^2\Psi(\overrightarrow{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\overrightarrow{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{16.297}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde verilen (skalar) dalga denklemidir.

Kenar uzunlukları L_1, L_2, L_3 olan bir hacim içinde dalga denklemini ele alalım. Burada

$$H = \overrightarrow{\nabla}^2, \text{ ve } -ct = \tau$$

olacağından, özfonksiyonlar

$$\phi_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \tag{16.298}$$

ve özdeğerler de

$$k_x = \frac{2\pi n_1}{L_1}, \quad k_y = \frac{2\pi n_2}{L_2} \quad k_z = \frac{2\pi n_3}{L_3} \quad n_i = \pm\text{tamsayı ve } \neq 0 \tag{16.299}$$

olarak bulunurlar. Özdeğerler ise,

$$\lambda_{n_1,n_2,n_3} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{16.300}$$

ilişkisini sağlarlar. Bu özfonksiyonlar kullanılarak $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau)$,

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau) \tag{16.301}$$

$$= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \sum_{n_1,n_2,n_3} \frac{\sin\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right)\tau}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}} e^{ik_x(x-x')} e^{ik_y(y-y')} e^{ik_z(z-z')}$$

şeklinde yazılır. Bunun süreklilik limiti de

$$\lim_{L_1\to\infty} \frac{1}{L_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \quad \to \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \tag{16.302}$$

$$\lim_{L_2\to\infty} \frac{1}{L_2} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \quad \to \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_y \tag{16.303}$$

$$\lim_{L_3\to\infty} \frac{1}{L_3} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \quad \to \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tag{16.304}$$

şeklinde alınırsa, $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonunu

$$\tilde{G}_2(\ \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\sin k\tau}{k} e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\rho}} \tag{16.305}$$

şeklinde bir integral olarak elde ederiz. Bu integral,

$$\overrightarrow{k} = (k_x, k_y, k_z) \text{ ve } \overrightarrow{\rho} = (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') \tag{16.306}$$

tanımları ile

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\sin k\tau}{k} \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_{-1}^{1} d(\cos\theta_k)\, e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\rho}} \tag{16.307}$$

şeklini alır. $\overrightarrow{\rho}$ vektörünü $\hat{z}$ yönünde alıp,

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\rho} = k\rho\cos\theta_k \tag{16.308}$$

ve

$$x = \cos\theta_k \tag{16.309}$$

yazdıktan sonra da θ_k ve ϕ_k integrallerini alırsak, $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau) &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\sin k\tau}{k} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta_k)\, e^{ik\rho\cos\theta_k} \\ &= \frac{1}{2\pi^2\rho}\int_0^{\infty} dk \sin k\tau \cdot \sin k\rho \\ &= \frac{1}{4\pi^2\rho}\int_{-\infty}^{\infty} dk \sin k\tau \cdot \sin k\rho \\ &= \frac{1}{8\pi^2\rho}\int_{-\infty}^{\infty} dk[\cos k(\rho-\tau) - \cos k(\rho+\tau)]\end{aligned} \tag{16.310}$$

şeklini alıcaktır. Bu arada, Dirac-delta fonksiyonunun tanımlarından biri olan

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos xy dy \tag{16.311}$$

denklemini kullanırsak, $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonunu

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau) = \frac{1}{4\pi\rho}[\delta(\rho-\tau) - \delta(\rho+\tau)] \tag{16.312}$$

olacaktır.

Başlangıçtaki değişkenlerimize dönersek, dalga denklemi için $\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',\tau)$ fonksiyonu

$$\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',t) = \frac{1}{4\pi|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}[\delta(|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'| - ct) - \delta(|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'| + ct)] \tag{16.313}$$

olacaktır. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ anı, bu denklemde rasgele olarak $t = 0$ olarak seçildiğinden genelde bu denklem,

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}',t,t') \\ &= \frac{1}{4\pi|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}\{\delta[|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'| - c(t-t')] - \delta[|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'| + c(t-t')]\}\end{aligned} \tag{16.314}$$

şeklinde olacaktır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler II. baskı 2004 Selçuk Ş. Bayın

16.2.9 İlerletilmiş (Advanced) veya Geciktirilmiş (Retarded) Green Fonksiyonları

(16.274) denklemi $\rho(\vec{r},\tau)$ gibi bir kaynağın varlığında

$$H\Psi(\vec{r},\tau)+\frac{\partial^2\Psi(\vec{r},\tau)}{\partial\tau^2}=\rho(\vec{r},\tau) \tag{16.315}$$

şeklindedir. Bunu çözmek için de

$$(H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2})\,G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')=\delta^3(\vec{r}-\vec{r})\delta(\tau-\tau') \tag{16.316}$$

denklemini sağlayan bir Green fonksiyonuna gerek vardır. Daha önce bulduğumuz $G_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ ve $\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonları ise,

$$\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\begin{pmatrix}G_2\\ veya\\ \tilde{G}_2\end{pmatrix}=0 \tag{16.317}$$

denklemini sağlarlar. $G(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$'yü bulmak için, $G_1(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonundaki deneyimimizden yararlananarak, G_2veya $\tilde{G}_2$ fonksiyonlarından birine

$$G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')=G_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau') \tag{16.318}$$

şeklinde birim fonksiyonu kadar bir süreksizlik katmayı deneyelim. Burada G_ζ , G_2 veya $\tilde{G}_2$ fonksiyonlarından birini temsil etmektedir. R alt harfini ise, sonra anlatacağız. $G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ fonksiyonunun üzerine $\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]$ operatörü ile etki edersek,

$$\begin{aligned}&\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \qquad (16.319)\\ =\;&\theta(\tau-\tau')\,HG_\zeta+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[G_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau')\right]\\ =\;&\theta(\tau-\tau')\left(H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)G_\zeta+2\dot{\theta}(\tau-\tau')\,\dot{G}_\zeta\\ &+G_\zeta\ddot{\theta}(\tau-\tau')\end{aligned}$$

bulunacaktır. $G_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ ve $\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')$ için

$$\left(H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)G_\zeta=0 \tag{16.320}$$

olduğunu düşünürsek,

$$\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G_R=2\dot{\theta}(\tau-\tau')\,\dot{G}_\zeta+G_\zeta\ddot{\theta}(\tau-\tau') \tag{16.321}$$

yazabiliriz. Burada

$$\dot{\theta}(\tau-\tau')=\delta(\tau-\tau') \tag{16.322}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}&\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \qquad (16.323)\\ =\;&2\delta(\tau-\tau')\,\dot{G}_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')+\dot{\delta}(\tau-\tau')\,G_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\end{aligned}$$

yazar ve Dirac-delta fonksiyonunun aşağıdaki

$$\begin{aligned}&\delta(\tau-\tau')\,\dot{G}_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \qquad (16.324)\\ =\;&\left[\dot{G}_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\right]_{\tau=\tau'}\delta(\tau-\tau'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\delta}(\tau-\tau')\,G_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') \qquad (16.325)\\ =\;&-\left[\dot{G}_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\right]_{\tau=\tau'}\delta(\tau-\tau')\end{aligned}$$

özelliklerini de kullanarak bunu,

$$\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')=\delta(\tau-\tau')\left[\dot{G}_\zeta(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\right]_{\tau=\tau'} \tag{16.326}$$

şeklinde ifade ederiz. Burada G_ζ olarak G_2 alınırsa sağ taraf sıfır olacağından işimize gelmez. Ama $\tilde{G}_2$ alınırsa,

$$\left[H+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\dot{G}_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')=\delta(\tau-\tau')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \tag{16.327}$$

buluruz ki, bu da bize istediğimiz Green fonksiyonunun

$$G_R(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')=\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau') \tag{16.328}$$

olduğunu gösterir. Doğal olarak buna karşı gelen çözüm de

$$\Psi_R(\vec{r},\tau)=\Psi_0(\vec{r},\tau)+\int d^3\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\rho(\vec{r}',\tau') \tag{16.329}$$

şeklinde verilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

16.2.10 *Dalga Denklemi için İlerletilmiş veya Geciktirilmiş Green Fonksiyonları*

Kaynakları bulunduğu durumda dalga denklemi

$$\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \rho(\vec{r},t) \tag{16.330}$$

şeklinde olacaktır. Dalga denklemi için $\tilde{G}_2$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',t,t') \qquad (16.331)\\ &= \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|-c(t-t')]-\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|+c(t-t')]\}\end{aligned}$$

olarak bulmuştuk. Bu problemde $t < t'$ için

$$G_R = 0 \tag{16.332}$$

olacağından ve $t > t'$ için de $\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',t)$ fonksiyonundaki ikinci Dirac-delta fonksiyonu sıfır olacağından, $G_R(\vec{r},\vec{r}',t,t')$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi buluruz:

$$G_R(\vec{r},\vec{r}',t,t') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|-c(t-t')]\,. \tag{16.333}$$

Bu Green fonksiyonuna karşı gelen genel çözüm ise,

$$\Psi_R(\vec{r},t) = \Psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|-c(t-t')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho(\vec{r}',t') \tag{16.334}$$

olacaktır. Burada $\Psi_0(\vec{r},\tau)$ homojen denklemin çözümüdür. t' integralini de alırsak,

$$\Psi_R(\vec{r},t) = \Psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}'\,\frac{[\rho(\vec{r}',t')]_R}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.335}$$

olacaktır. Burada

$$[\rho(\vec{r}',t')]_R\,, \tag{16.336}$$

$\Psi_R(\vec{r},t)$ fonksiyonunun $(\vec{r},t)$ noktasındaki değerinin, $[\rho(\vec{r}',t')]$ kaynağının $\vec{r}'$ noktasında ve

$$t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \tag{16.337}$$

zamanındaki değerleri ile hesaplanması gerektiğini söyler. Böyle hesaplanmış zamanlara geciktirilmiş (retarded) zamanlar denir. Geciktirilmiş zamanlarda hesaplanmış kaynak fonksiyonu

$$[\rho(\vec{r}',t')]_R = \rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}). \tag{16.338}$$

olarak ifade edilir ve bu kaynak kullanılarak bulunmuş çözümler de geciktirilmiş zaman çözümleri olarak $\Psi_R(\vec{r},t)$ şeklinde gösterilir. Bu çözümlerin fiziksel anlamı, kaynakta olan bir değişikliğin başka bir noktadaki etkisinin belli bir süre geçtikten sonra ortaya çıkmasıdır. O süre de ışığın iki nokta arasındaki mesafeyi katetmesi için gerekli olan zamandır. Bir başka deyişle, olayların zamanda sıralanışında sebep daima sonuçtan önce gelecektir.

(16.330) dalga denklemini sağlayan bir Green fonksiyonu ararken, $\tilde{G}_2$ fonksiyonuna $\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau-\tau')$ gibi bir süreksizlik ekleyerek G_R çözümünü bulmuştuk. Bununla birlikte (16.330) denkleminin

$$G_A(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau') = -\tilde{G}_2(\vec{r},\vec{r}',\tau,\tau')\theta(\tau'-\tau) \tag{16.339}$$

şeklinde bir başka çözümü daha vardır. Bu Green fonksiyonuna karşı gelen çözüm ise,

$$\Psi_A(\vec{r},t) = \Psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}'\,\frac{[\rho(\vec{r}',t')]_A}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{16.340}$$

olarak verilir. Burada

$$[\rho(\vec{r}',t')]_A \tag{16.341}$$

ifadesi kaynağın

$$t' = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \tag{16.342}$$

ilerletilmiş (advanced) zamanlarda hesaplanması gerektiğini söyler. Bu çözümün yorumu ise, kaynakta olan bir değişikliğin, başka bir yerdeki etkisinin

$$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \tag{16.343}$$

zaman kadar önce ortaya çıkacağı şeklindedir. Kısaca, olayların etkileri kendilerinden önce ortaya çıkar. Burada ilginç olan iki çözümün de (16.330) denkleminin geçerli çözümleri olmalarıdır. Ancak, ikinci çözüm doğa hakkındaki temel varsayımlarımızdan biri olan olayların sıralanışında sebep daima sonuçtan önce gelir ilkesine ters düştüğü için sınır şartı olarak elenir. Temel parçacık fiziğinde zaman zaman kullanım alanı bulan ilerletilmiş zaman çözümlerinin makro-kozmosta ve diğer bilim dallarında kullanım alanı olup olmadığını zaman gösterecektir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

16.3 Problemler

1. Bessel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\left(kx^2-\frac{m^2}{x}\right)y(x)=0$$

şeklinde verilir ve genel çözümü de

$$y(x)=A_0J_m(x)+B_0N_m(x)$$

olarak yazılır. Burada $N_m(x)$, $x=0$ 'da logaritmik olarak sonsuza gider.

$$y(0)=0, \quad \text{ve} \quad y'(a)=0$$

sınır şartlarını sağlayan Green fonksiyonunu bulunuz.

2. Helmholtz denklemi için bulduğumuz aşağıdaki Green fonksiyonunu:

$$G(x,x')=-k_0^2\left[(x-x')\,\theta\,(x-x')-\frac{x}{L}\,(L-x')\right],$$

trigonometrik Fourier serisine açarak aşağıdaki ifadesi ile aynı olduğunu gösteriniz:

$$G(x,x')=-\frac{2}{L}\sum_n\frac{\sin k_nx\sin k_nx'}{k_n^2+k_0^2}.$$

3. Aşağıda verilen;

$$\pounds=a_3(x)\frac{d^3}{dx^3}+a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)$$

operatörü için, $[a,b]$ aralığında ve

$$G(x,x')|_{x=a}=0, \quad \frac{dG(x,x')}{dx}|_{x=a}=0, \quad \frac{d^2G(x,x')}{dx^2}|_{x=a}=0$$

sınır şartlarını sağlayan bir Green fonksiyonu bulunuz.

4. (16.83) denklemindeki özdeğer probleminin

$$\pounds\phi_n=\lambda_nw(x)\phi_n(x)$$

olarak verildiğini düşünerek Green fonksiyonunu yazınız.

5. (16.13) Wronski determinantının değerinin $\frac{A}{p(x)}$ olduğunu gösteriniz.

6. (16.339) İlerletilmiş zaman çözümünün ayrıntılarını inceleyiniz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

17

GREEN FONKSİYONLARI ve YOL İNTEGRALLERİ

1928 yılında Brown polenlerin su içindeki gelişigüzel hareketlerini mikroskop altında inceler. Daha sonra pek çok küçük cismin içinde bulundukları ortam ile olan gelişigüzel etkileşimleri sonucu, benzer davranışı gösterdiği anlaşılır. Bugün Brown hareketi olarak bilinen bu olay, difüzyon, koloid kimyası, polimer fiziği, quantum mekaniği, finans gibi değişik alanlarda pek çok olayın prototipini oluşturduğundan yoğun ilgi ve araştırma alanıdır. 1920-1930 yılları arasında Wiener, Brown hareketinin yol integralleri ile değişik bir yaklaşımını verir. Bu içinde bulundukları ortamın gelişigüzel etkileri altında hareket eden pek çok klasik sistemin çalışılmasında yeni bir çığır açar. 1948 yılında Feynman, yol integralleri yaklaşımı ile kuantum mekaniğine Schrödinger ve Heisenberg formülasyonlarına ek yeni bir yaklaşım geliştirir. Bu bölümde çok geniş uygulama alanları ile hızla gelişmekte olan bu konunun bazı temel özelliklerini göreceğiz.

17.1 Brown Hareketi ve Difüzyon Problemi

Difüzyon denklemi maddenin korunumu prensibinden hareket edilerek

$$\frac{\partial\rho(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}=D\overrightarrow{\nabla}^2\rho(\overrightarrow{r},t) \tag{17.1}$$

şeklinde verilir. $\rho(\overrightarrow{r},t)$ verilen bir ortam içinde dağılan maddenin yoğunluğu, D de ortamın özelliklerine bağlı difüzyon sabitidir. Difüzyon olayı bir çok parçacığın aynı anda Brown hareketinde bulunması olduğundan $\rho(\overrightarrow{r},t)$'yi dağılan toplam parçacık sayısına bölersek tek bir parcacığın $\overrightarrow{r}$ noktasında ve t anında bulunma olasılığını veren $w(\overrightarrow{r},t)$ bulunur:

$$w(\overrightarrow{r},t)=\frac{1}{N}\rho(\overrightarrow{r},t). \tag{17.2}$$

$w(\overrightarrow{r},t)$ de

$$\frac{\partial w(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}=D\overrightarrow{\nabla}^2w(\overrightarrow{r},t) \tag{17.3}$$

denklemini sağlayacaktır. $t=0$ anında parçacığın $\overrightarrow{r}=0$ noktasından hareketine başladığını düşünürsek, (17.3) denklemini,

$$\lim_{t\to0}w(\overrightarrow{r},t)\to\delta(\overrightarrow{r}) \tag{17.4}$$

başlangıç şartı ile çözmemiz gerekecektir. Problemi sadeleştirmek için difüzyon denklemini tek boyutta

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{17.5}$$

şeklinde yazar ve Fourier dönüşümü yöntemini kullanırsak, çözümü de

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} \tag{17.6}$$

olarak buluruz (Bölüm 13). Parçacığın $(-\infty, \infty)$ arasında bir yerde bulunması kesin olacağından olasılık dağılımı yorumu ile tutarlı olarak heryerde $w(x,t) > 0$ olacağı gibi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx w(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} \\ &= 1\end{aligned} \tag{17.7}$$

olarak verilen normlama koşulu da sağlanacaktır. Brown hareketinin başlangıç noktasının yeri ve zamanı gelişigüzel seçilebileceğinden, hareketine (x_0, t_0) noktasından başlayan bir parçacık için olasılık dağılımı

$$W(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right\} \tag{17.8}$$

şeklinde verilecektir. $W(x,t,x_0,t_0)$,

$$\frac{\partial W(x,t,x_0,t_0)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W(x,t,x_0,t_0)}{\partial x^2} \tag{17.9}$$

denkleminin,

$$\lim_{t\to 0} W(x,t,x_0,t_0) \to \delta(x-x_0) \tag{17.10}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümüdür ve o da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x,t,x_0,t_0) = 1 \tag{17.11}$$

normlama koşulunu sağlayacaktır.

Birinci dereceden zamana bağlı Green fonksiyonları ile ilgili bölümü hatırlarsak (Bölüm 16), $W(x,t,x_0,t_0)$ aynı zamanda da

$$\pounds = \frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{17.12}$$

operatörünün propagatörüdür. Brown parçacığının (x_0, t_0)'da bulunma olasılığından (x,t)'de bulunma olasılığını, $W(x,t,x_0,t_0)$ kullanılarak

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 W(x,t,x_0,t_0) w(x_0,t_0) \qquad t_0 < t \tag{17.13}$$

şeklinde bulabiliriz. Propagatörlerin birleştirilmesi bize Einstein-Smoluchowski-Kolmogorov-Chapman (ESKC) denklemi olarak bilinen denklemi verecektir:

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' W(x,t,x',t') W(x',t',x_0,t_0),\ t_0 < t' < t. \tag{17.14}$$

Bu denklemin önemi, Huygens-Fresnel denkleminde olduğu gibi Brown hareketinde de sebep-sonuç ilişkisini vermesidir.

17.2 Brown Hareketine Wiener Yol İntegrali Yaklaşımı

(17.13) denkleminde $W(x,t,x_0,t_0)$ propagatörünü kullanarak (x_0,t_0)'da bulunma olasılığından (x,t)'de bulunma olasılığının nasıl bulunacağını gördük. (x_0,t_0) ve (x,t) arasındaki mesafenin parçacık tarafından

$$\begin{aligned}\Delta t_i &= t_i - t_{i-1} \\ &= \frac{t-t_0}{N+1}\end{aligned} \tag{17.15}$$

şeklinde birbirinden bağımsız atılmış N adımda alındığını düşünelim. Her bir adımın propagatörü

$$W(x_i,t_i,x_{i-1},t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_i-t_{i-1})}} \exp\left\{-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{4D(t_i-t_{i-1})}\right\} \tag{17.16}$$

olacağından, propagatörlerin N kez birleştirilmesi bizi tek adımda (x_0,t_0) noktasından (x,t) noktasına götürecek propagatörü,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int \cdots\cdots \int \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{4D(t_i-t_{i-1})}\right\} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D(t_i-t_{i-1})}} \tag{17.17}$$

şeklinde verecektir. Bu denklem $N > 0$ için geçerli olduğundan, $N \to \infty$ ve $\Delta t_i \to 0$ limitinde de doğru olacağını varsayarak,

$$\begin{aligned}&W(x,t,x_0,t_0) \\ &= \lim_{N\to\infty,\ \Delta t_i \to 0} \int \cdots\cdots \int \exp\left\{-\frac{1}{4D}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)^2 \Delta t_i\right\} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i(\tau)}{\sqrt{4\pi D\Delta t_i}},\end{aligned} \tag{17.18}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int ..... \int \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right\}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \quad (17.19)$$

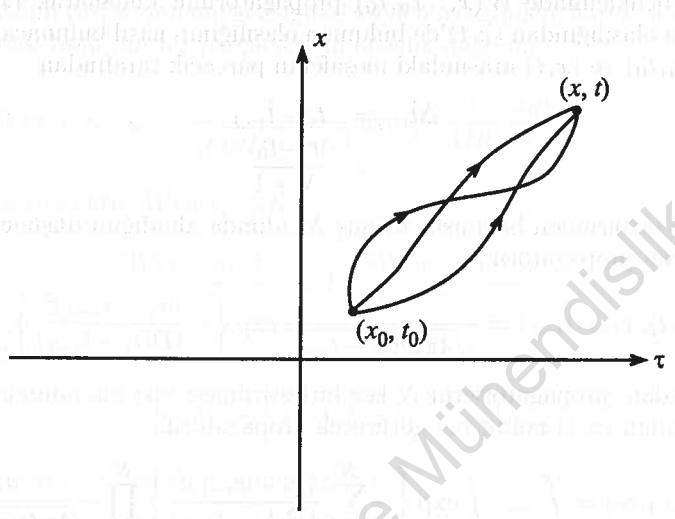
yazabiliriz. Burada τ zaman parametresidir (Şekil (17.1)).$W(x,t,x_0,t_0)$ kısaca,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \check{N}\int \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right\}\check{D}x(\tau) \quad (17.20)$$

olarak da gösterilir. $\check{N}$ normlama çarpanıdır. $\check{D}x(\tau)$ ise, (x_0,t_0) noktasından başlayıp, (x,t) noktasında biten bütün yollar üzerinden integral alındığını göstermektedir. Bu ifade,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau) \quad (17.21)$$

olarak da yazılır. $d_w x(\tau)$ ise, Wiener ölçümüdür (measure). $d_w x(\tau)$ Şekil (17.1)'de gösterildiği gibi (x_0,t_0) noktasından başlayıp (x,t) noktasında biten bütün sürekli yollar üzerinden bir öçümdür. Bu tür yollar için olan ölçüme sabitlenmiş Wiener ölçümü denir.



ŞEKİL 17.1. **Sabitlenmiş Wiener ölçümünde kullanılan yollar.**

ÖZET: t_0 anında x_0 noktasından Brown hareketine başlayan bir parçacık için $W(x,t,x_0,t_0)$ propagatörü,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right\} \quad (17.22)$$

olarak verilir ve $\lim_{t\to t_0} W(x,t,x_0,t_0) \to \delta(x-x_0)$ başlangıç şartı ile

$$\frac{\partial W(x,t,x_0,t_0)}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t,x_0,t_0) \quad (17.23)$$

denkleminin çözümüdür.

$W(x,t,x_0,t_0)$ propagatörü aynı zamanda da Wiener yol integrali olarak

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau) \quad (17.24)$$

şeklinde ifade edilir. Burada integralin ölçümü

$$d_w x(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right\}\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \quad (17.25)$$

olarak verilir. İntegral, (x_0,t_0) noktasından başlayıp, (x,t) noktasında biten bütün sürekli $C[x_0,t_0;x,t]$ yolları üzerinden alındığı için buna **sabitlenmiş Wiener ölçümü** denir.

(x_0,t_0) noktasından hareketine başlayan parçacığın t anında Şekil (17.2)'de gösterildiği gibi Δx aralığında bulunma olasılığı ise,

$$\Delta x \int_{C[x_0,t_0;t]} d_w x(\tau) \quad (17.26)$$

olarak verilir. Bu integralde parçacığın t anındaki yeri belirtilmediğinden, $d_w x(\tau)$ ölçüsüne **koşulsuz Wiener ölçümü** denir. Parçacığın t anında $x \in [-\infty,\infty]$ aralığında herhagi noktada bulunması kesin olacağından,

$$\begin{aligned}\int_{C[x_0,t_0;t]} d_w x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau) \quad (17.27)\\ &= 1\end{aligned}$$

olacaktır. $F[x(t)]$ olarak verilmiş bir fonksiyonelin, t anındaki $C[x_0,t_0;t]$ yolları üzerinden ortalama değeri ise,

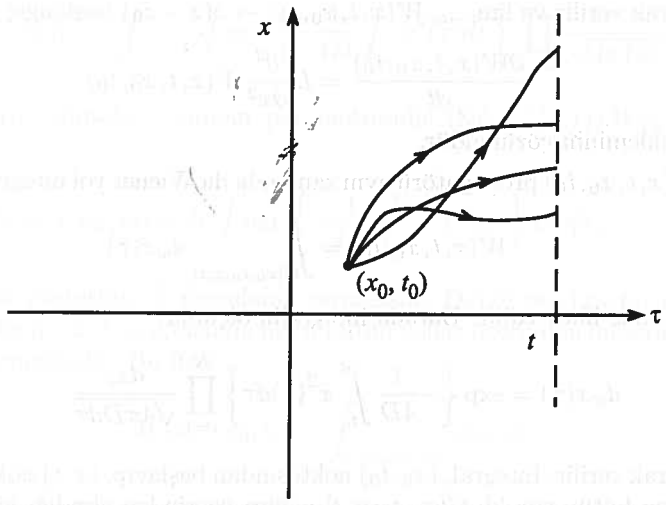
$$\begin{aligned}\langle F[x(t)]\rangle_C &= \int_{C[x_0,t_0;t]} d_w x(\tau)F[x(t)] \quad (17.28)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau)F[x(t)]\end{aligned}$$

olacaktır. Wiener ölçümü ve integrali olarak ESKC ilişkisi ise,

$$\int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{C[x_0,t_0;x',t']} d_w x(\tau) \int_{C[x',t';x,t]} d_w x(\tau) \quad (17.29)$$

olarak verilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 17.2. **Koşulsuz Wiener ölçümünde kullanılan yollar.**

17.3 Feynman-Kac Formülü ve Bloch Denkleminin Pertürbatif Çözümü

Difüzyon denklemi

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{17.30}$$

için, propagatörün (17.24) denkleminde olduğu gibi yol integrali olarak ifade edilebildiğini gördük. Ancak, aynı propagatörün (17.22) denklemindeki gibi kapalı bir ifadesi varken bunun yararı doğrusu pek de açık değildir. Bu bölümde yol integrali yaklaşımının yararlarının ortaya çıkmaya başlayacağı etkileşmelerin olduğu durumlara bakacağız. Difüzyon probleminde $V(x)$ gibi bir potansiyelin varlığında (17.30) denkleminin

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = -V(x)w(x,t) \tag{17.31}$$

şeklinde verildiğini düşünelim. Daha önce bu denklemin çözümünde kullanacağımız Green fonksiyonunun (Bölüm 16)

$$\frac{\partial W_D(x,t,x',t')}{\partial t} - D\frac{\partial^2 W_D(x,t,x',t')}{\partial x^2} = \delta(x-x')\delta(t-t') \tag{17.32}$$

denklemini sağlaması gerektiğini görmüştük. $W_D(x,t,x',t')$ kullanılarak da (17.31) denkleminin çözümü

$$w(x,t) = w_0(x,t) - \int\int W_D(x,t,x',t')V(x)w(x',t')dx'dt' \tag{17.33}$$

şeklinde yazılır. $w_0(x,t)$, (17.31) denkleminin homojen kısmının çözümüdür. Green fonksiyonu $W_D(x,t,x',t')$ ise, daha önce bulduğumuz ve

$$\frac{\partial W(x,t,x',t')}{\partial t} - D\frac{\partial^2 W(x,t,x',t')}{\partial x^2} = 0 \tag{17.34}$$

homojen denklemini sağlayan $W(x,t,x',t')$ propagatörü kullanılarak,

$$W_D(x,t,x',t') = W(x,t,x',t')\theta(t-t') \tag{17.35}$$

şeklinde bulunur. Ancak, (17.33) denkleminde bilinmeyen fonksiyon integral işareti altında da yer aldığından, bu bir çözüm değildir. Sadece (17.31) denkleminin integral denklem olarak yazılmış şeklidir.

$$\frac{\partial W_B(x,t,x',t')}{\partial t} - D\frac{\partial^2 W_B(x,t,x',t')}{\partial x^2} = -V(x)W_B(x,t,x',t') \tag{17.36}$$

denklemini sağlayan $W_B(x,t,x',t')$ ise,

$$\begin{aligned} W_B(x,t,x_0,t_0) &= W_D(x,t,x_0,t_0) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' W_D(x,t,x',t')V(x',t')W_B(x',t',x_0,t_0) \end{aligned} \tag{17.37}$$

olarak verilir. Sağdaki birinci terim (17.34) homojen denkleminin çözümü olan W'dur. Ancak, $t_0 < t$ olacağından W_D de yazabiliriz.

Feynman-Kac formülü (teoremi) olarak bilinen ve Yol integrali yaklaşımında çok önemli bir adım olan

$$W_B(x,t,x_0,0) = \int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau) \exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.38}$$

formülü ise, Bloch denklemi olarak da bilinen (17.36) denkleminin

$$\lim_{t\to t'} W_B(x,t,x',t') = \delta(x-x') \tag{17.39}$$

başlangıç şartı ile çözümüdür. Feynman-Kac teoreminin ispatını bir sonraki bölüme bırakarak, (17.38) denklemindeki yol integralini Riemann toplamı olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} W_B(x,t,x_0,0) &= \lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0} (4\pi D\varepsilon)^{-(N+1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 ..... \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{4D\varepsilon}\sum_{j=0}^{N}(x_{j+1}-x_j)^2 - \varepsilon\sum_{j=1}^{N}V(x_j,t_j)\right\} \end{aligned} \tag{17.40}$$

olacaktır. Burada

$$\begin{aligned} \varepsilon &= t_i - t_{i-1} \\ &= \frac{t-t_0}{N+1} \end{aligned} \tag{17.41}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak alınmıştır. Üstel fonksiyondaki birinci terim (17.34) homojen denkleminin çözümü olacaktır. Üstel fonksiyondaki ikinci terimi de

$$\exp\left\{-\varepsilon\sum_{j=1}^{N}V(x_j,t_j)\right\} \tag{17.42}$$

$$= 1-\varepsilon\sum_{j=1}^{N}V(x_j,t_j)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}V(x_j,t_j)V(x_k,t_k)-....$$

şeklinde olarak açar ve x üzerinden integralini alırsak,

$$W_B(x,t,x_0,t_0)=W(x,t,x_0,t_0) \tag{17.43}$$

$$-\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_jW(x,t,x_j,t_j)V(x_j,t_j)W(x_j,t_j,x_0,t_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\varepsilon^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_j\int_{-\infty}^{\infty}dx_kW(x,t,x_j,t_j)V(x_j,t_j)W(x_j,t_j,x_k,t_k)$$

$$\times V(x_k,t_k)W(x_k,t_k,x_0,t_0)+....$$

buluruz. Burada $\varepsilon\to 0$ limitinde $\varepsilon\sum_j\to\int_{t_0}^{t}dt_j$ olacaktır ve $(1/k!)$'ler de ϵ^k'lar sıfıra gideceklerinde ihmal edilebilirler. Ayrıca, (17.43) ifadesinde zamanlar

$$t_0<t_1<t_2.....<t$$

şeklinde sıralanacaklarından, bu sıralamayı takip etmek için yukarıdaki denklemde W yerine W_D alırsak, W_B'de aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$W_B(x,t,x_0,t_0)=W_D(x,t,x_0,t_0) \tag{17.44}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dt'W_D(x,t,x',t')V(x',t')W_D(x',t',x_0,t_0)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dx''\int_{-\infty}^{\infty}dt''W_D(x,t,x',t')V(x',t')W_D(x',t',x'',t'')$$

$$\times V(x'',t'')W_D(x'',t'',x_0,t_0)+....\ .$$

Bu ise, (17.37) integral denkleminin tekrarlama yöntemi ile pertürbatif bir çözümüdür. $W_B(x,t,x_0,t_0)$ artık denklemin sağ tarafında yer almamakta ve bu çözüm (17.39) başlangıç şartını sağlamaktadır.

17.4 Feynman-Kac Formülünün Çıkarılışı

Bu bölümde

$$W_B(x,t,x_0,0)=\int_{C[x_0,0;x,t]}d_wx(\tau)\exp\left\{-\int_0^t dsV[x(\tau)]\right\} \tag{17.45}$$

olarak verdiğimiz Feynman-Kac formülünün çıkarılışını, Bir başka deyişle;

$$\frac{\partial W_B(x,t,x',t')}{\partial t}-D\frac{\partial^2W_B(x,t,x',t')}{\partial x^2}=-V(x)W_B(x,t,x',t') \tag{17.46}$$

denklemini (17.39) başlangıç şartı ile sağlayan

$$W_B(x,t,x_0,t_0) = W_D(x,t,x_0,t_0) \tag{17.47}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_0^t dt'W_D(x,t,x',t')V(x',t')W_B(x',t',x_0,t_0)$$

denklemi ile aynı olduğunu göstereceğiz.

Öncelikle Feynman-Kac formülünün (17.14) ESKC ilişkisini sağladığını gösterelim:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_sW_B(x,t,x_s,t_s)W_B(x_s,t_s,x_0,0) \tag{17.48}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx_s\int_{C[x_0,0;x_s,t_s]}d_wx(\tau)\exp\left\{-\int_0^s d\tau V[x(\tau)]\right\}$$

$$\times\int_{C[x_s,t_s;x,t]}d_wx(\tau')\exp\left\{-\int_s^t d\tau' V[x(\tau')]\right\}.$$

burada x_s, $t_s$anındaki ve x de t anıdaki konumu göstermektedir.

$C[x_0,0;x_\tau,t_\tau;x,t]$ ifadesinin, $(x_0,0)$ noktasından başlayıp (x_τ,t_τ) noktasından geçtikten sonra (x,t) noktasında son bulan bütün yolları gösterdiği anlayışı ile yukarıdaki denklemin sağ tarafını

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_s\int_{[x_0,0;x_s,t_s;x,t]}d_wx(\tau)\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.49}$$

$$=\int_{C[x_0,0;x,t]}d_wx(\tau)\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.50}$$

$$=W_B(x,t,x_0,0) \tag{17.51}$$

şeklinde yazarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_sW_B(x,t,x_s,t_s)W_B(x_s,t_s,x_0,0)=W_B(x,t,x_0,0) \tag{17.52}$$

olarak Feynman-Kac formülünün ESKC ilişkisini sağladığını görürüz.

(17.21) ve (17.22) nolu denklemlerin yardımı ile Feynman-Kac formülünün $t\to 0$ limitinde

$$\lim_{t\to 0}W_B(x,t,x_0,0)\to\delta(x-x_0) \tag{17.53}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2004 11. baskı Selçuk Ş. Bayın

başlangıç şartını sağladığını görürüz. Feynman-Kac formülündeki fonksiyonel ise,

$$\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.54}$$
$$= 1-\int_0^t d\tau\left(V[x(\tau)]\exp\left\{-\int_0^\tau dsV[x(s)]\right\}\right)$$

eşitliğini sağlar. Bunun doğruluğu her iki tarafın da türevi alınarak kolayca görülebilir. Bütün sürekli $x(s)$ yolları için bu eşitlik doğru olacağından, her iki tarafında $C[x_0,0;x,t]$ yolları üzerinden Wiener ölçümü ile integralini alırsak,

$$\int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau)\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.55}$$
$$= \int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau) - \int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau)\int_0^t d\tau\left(V[x(\tau)]\exp\left\{-\int_0^\tau dsV[x(s)]\right\}\right)$$

bulunacaktır. Sağdaki ilk terim (17.46) denkleminin homojen kısmının çözümü olacağından $W(x_0,0,x,t)$ ve $t>0$ olacağında da $W_D(x_0,0,x,t)$ yazarız. İkinci terim ise, üstel olarak azalan fonksiyonların integrallerini içerdiğinden yakınsaktır. Dolayısı ile ikinci terimde integrallerin sırasını değiştirerek,

$$\int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(s)\int_0^t ds\left(V[x(s)]\exp\left\{-\int_0^s d\tau V[x(\tau)]\right\}\right) \tag{17.56}$$
$$= \int_0^t ds\int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(s)\left[V[x(s)]\exp\left\{-\int_0^s d\tau V[x(\tau)]\right\}\right],$$
$$= \int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty} dx_s\int_{C[x_0,0;x_s,t_s;x,t]} d_w x(s)\left[V[x(s)]\exp\left\{-\int_0^s d\tau V[x(\tau)]\right\}\right],$$
$$= \int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty} dx_s V[x(s)]\int_{C[x_0,0;x_s,t_s]} d_w x(\tau)\left[\exp\left\{-\int_0^s d\tau V[x(\tau)]\right\}\right]$$
$$\times\int_{C[x_s,t_s;x,t]} d_w x(\tau),$$
$$= \int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty} dx_s V[x(s)]W_B(x_s,t_s,x_0,0)W_D(x,t,x_s,t_s)$$

yazarız. Bu sonucu (17.55) ve sonra da (17.45) denkleminde yerine koyarsak,

$$W_B(x,t,x_0,0) = \int_{C[x_0,0;x,t]} dwx(\tau)\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\}, \tag{17.57}$$
$$= W_D(x,t,x_0,0) \tag{17.58}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} dx'\int_0^t dt' W_D(x,t,x',t')V(x',t')W_B(x',t',x_0,t_0)$$

şeklinde Feynman-Kac formülü ispatlanmış olacaktır.

17.5 Bloch Denkleminde $V(x)$'in Yorumu

Bloch denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial W_B(x,t,x_0,t_0)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 W_B(x,t,x_0,t_0)}{\partial x^2} = -V(x)W_B(x,t,x_0,t_0) \tag{17.59}$$

denklemin,

$$W_B(x,t,x_0,t_0)|_{t=t_0} = \delta(x-x_0) \tag{17.60}$$

başlangıç şartı ile çözümünün Feynman-Kac formülü olarak

$$W_B(x,t;x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau)\exp\left\{-\int_{t_0}^t V[x(\tau)]d\tau\right\} \tag{17.61}$$

şeklinde verildiğini görmüştük. Bu denklemde V fonksiyonu tam anlamı ile potansiyel olmamakla birlikte problemde var olan dış kuvvetlerle yakından ilgilidir.

Akışkanlar mekaniğinde tek boyutta $F(x)$ gibi bir dış kuvvetin varlığında Brown hareketi yapan bir parçacığın olasılık dağılımının sağladığı denklem

$$\frac{\partial W(x,t;x_0,t_0)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 W(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\eta}F(x) \tag{17.62}$$

olarak verilir. η , sürüklenme hızı ile doğru orantılı olarak artan sürtünme kuvvetindeki sürtünme katsayısıdır. Bu denklemde,

$$W(x,t;x_0,t_0) = \exp\left\{\frac{1}{2\eta D}\int_{x_0}^x xF(x)\right\}\widetilde{W}(x,t;x_0,t_0) \tag{17.63}$$

şeklinde bir çözüm denersek $\widetilde{W}(x,t;x_0,t_0)$ için çözülmek üzere

$$\frac{\partial \widetilde{W}(x,t;x_0,t_0)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \widetilde{W}(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^2} = V(x)\widetilde{W}(x,t;x_0,t_0) \tag{17.64}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın 2. baskı 2004

denklemi bulunacaktır. Burada

$$V(x) = \frac{1}{4\eta^2 D}F^2(x) + \frac{1}{2\eta}\frac{dF(x)}{dx} \tag{17.65}$$

olarak tanımlanmıştır. (17.64) denkleminin çözümünü Feynman-Kac formülü olarak alırsak, (17.62) denkleminin çözümü de

$$W(x,t;x_0,t_0) = \exp\left\{\frac{1}{2\eta D}\int_{x_0}^{x} dx F(x)\right\}\int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} V[x(\tau)]d\tau\right\} \tag{17.66}$$

olarak bulunur. Wiener ölçümü (17.25) kullanılarak da bu denklem

$$W(x,t;x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.67}$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\eta D}\int_{x_0}^{x} dx F(x) - \frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} d\tau \dot{x}^2(\tau) - \int_{t_0}^{t} d\tau V[x(\tau)]\right\}$$

şeklinde yazılır. Son olarak da

$$\int_{x_0}^{x} dx F(x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \dot{x} F(x) \tag{17.68}$$

eşitliğini kullanılarak

$$W(x,t;x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.69}$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\eta D}\int_{t_0}^{t} d\tau(\dot{x}F(x)) - \frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} d\tau \dot{x}^2(\tau) - \int_{t_0}^{t} d\tau V[x(\tau)]\right\},$$

$$W(x,t;x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]}\exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} d\tau L[x(\tau)]\right\}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.70}$$

yazabiliriz. Bu denklemlerde

$$V(x) = \frac{1}{4\eta^2 D}F^2 + \frac{1}{2\eta}\frac{dF}{dx} \tag{17.71}$$

ve

$$L[x(\tau)] = \left(\dot{x} - \frac{F}{\eta}\right)^2 + 2\frac{D}{\eta}\frac{dF}{dx} \tag{17.72}$$

olarak tanımlanmışlardır.

Görüldüğü gibi, ne $V(x)$ tam olarak parçacığın potansiyel enerjisi, ne de $L[x(\tau)]$ Lagrange fonksiyonudur. $D \to 0$ limitinde Brown hareketine neden olan dalgalanmalar ortadan kalkacaktır. Bu durumda üstel fonksiyonun argümanındaki integralin katsayısı sonsuza gideceğinden (17.70) yol integraline sadece

$$\int_{t_0}^{t} d\tau\left(\dot{x} - \frac{F}{\eta}\right)^2 = 0 \tag{17.73}$$

koşulunu yani,

$$\frac{dx}{d\tau} - \frac{F}{\eta} = 0 \tag{17.74}$$

denklemini sağlayan yol katkıda bulunacaktır. Bunu $m\ddot{x} = -\eta\dot{x} + F(x)$ hareket denklemi ile karşılaştırırsak, kütlesinin ihmal edilebildiği durumlarda, $F(x)$ dış kuvveti ile $-\eta\dot{x}$ sürtünme kuvvetinin etkisinde hareket eden bir parçacığın deterministik hareket denklemi olduğunu görürüz (Pathria, sayfa 463).

Difüzyon sabitinin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ise, çözüm yol integrali olarak

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]}\exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} d\tau L[x(\tau)]\right\}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.75}$$

şeklinde verilecektir. Bu durumda (x_0,t_0) ve (x,t) arasındaki bütün yollar integrale katkıda bulunurlar. (17.75) denkleminden görülmektedir ki, $W(x,t,x_0,t_0)$ propagatörüne her bir yol $\exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} d\tau L[x(\tau)]\right\}$ ağırlığı ile katkıda bulunmaktadır. Doğal olarak en büyük katkı birbirine yakın ağırlıkta yolların kümelendiği yerlerden gelecektir. Bu yollar ise, üstel fonksiyonun argümanındaki integrali ekstremum yapan, yani

$$\delta\int_{t_0}^{t} d\tau L[x(\tau)] = 0 \tag{17.76}$$

koşulunu sağlayan yollar olacaktır. Bu yollar da

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx/d\tau)}\right) = 0 \tag{17.77}$$

olarak verilen Euler-Lagrange denkleminin çözümleridir. Bu noktada tekrar vurgulamak gerekir ki; $L[x(\tau)]$ Brown hareketi yapan parçacığın tam olarak Lagrange fonksiyonu değildir. İlginçtir, $V(x)$ ve $L[x(\tau)]$ gerçek yorumlarına ancak yol integralleri Schrödinger denklemine uygulanınca kavuşacaklardır.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 11. baskı 2004 Çelçuk Ş. Bayın

17.6 Yol İntegrallerini Hesaplama Yöntemleri

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t) = -V(x)w(x,t) \tag{17.78}$$

denkleminin propagatörünün,

$$W(x,t;x_0,t_0) = \check{N}\int_{C[x_0,t_0;x,t]} \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t}\dot{x}^2(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t}V[x(\tau)]d\tau\right\}\check{D}x(\tau) \tag{17.79}$$

olarak verildiğini görmüştük. Bu ifade aynı zamanda da Wiener ölçümü cinsinden

$$W(x,t;x_0,t_0) = \check{N}\int_{C[x_0,t_0;x,t]} \exp\left\{-\int_{t_0}^{t}V[x(\tau)]d\tau\right\}d_w x(\tau) \tag{17.80}$$

şeklinde yazılabilir ve $d_w x(\tau)$ ise,

$$d_w x(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right\}\prod_{\tau=t_0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D dt}} \tag{17.81}$$

olarak tanımlanır. $F[x(\tau)]$ olarak verilen herhangi bir fonksiyonelin $C[x_0,t_0;x,t]$ yolları üzerinde ortalaması ise,

$$\langle F[x(\tau)]\rangle_C = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} F[x(\tau)]\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}V[x(\tau)]d\tau\right\}d_w x(\tau) \tag{17.82}$$

olarak bulunacaktır. Burada $C[x_0,t_0;x,t]$, (x_0,t_0) noktasından başlayıp (x,t) noktasında biten bütün sürekli yollar üzerinden integral alınacak demektir. Bu integrallerin alınış tekniklerini görmeden, (17.80) ifadesine şeklen bakıldığında var olan bir problemden söz etmeden geçemeyiz. Bu ifade de bütün $C[x_0,t_0;x,t]$ yolları sürekli olmakla birlikte Brown hareketinin doğası gereği zik zak yapmaktadırlar. Herhangi bir Brown parçacığının zamanla merkezden uzaklaşmasına bakarsak,

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x,t)x^2 \tag{17.83}$$

$$= \frac{t}{2} \tag{17.84}$$

bulunacaktır. Buradan da t süresi içinde parçacığın kat edeceği yol $\sqrt{\langle x^2\rangle} = \sqrt{t}$ ve her hangi bir noktadaki hızı da

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t}}{t} \to \infty \tag{17.85}$$

olacaktır. Dolayısı ile (17.79) propagatöründeki integralde yer alan $\dot{x}$ her t değeri için tanımsızdır. Ancak, (17.80) veya (17.81) ifadelerindeki integraller $V(x) \geq c$, $-\infty < c < \infty$ için yakınsaktır. Burada $W(x,t,x_0,t_0)$ her zaman sıfırdan büyük değerler alan bir fonksiyondur. Olasılık dağılımı yorumuna uygun olarak da ESKC denklemi (17.14) ile

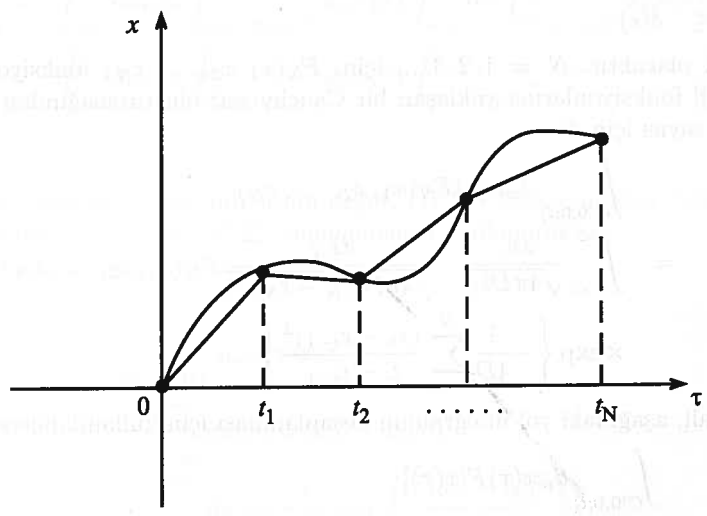
$$\int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_w x(\tau) = 1 \tag{17.86}$$

normlama koşulu sağlanmaktadır. Özetle: (17.80) propagatörüne olasılık dağılımı olarak bakıldığında, (17.78) denkleminin Brown yolları üzerinden, $V(x)$ potansiyeline bağlı uygun bir ağırlık dağılımı ile yol integrali olarak ifade edilmiş şekli olacaktır.

Brown hareketinde yolların zik zak yapması canlı hücrelerin madde alışverişinde vazgeçilmez bir özelliktir. Fraktal teoride Brown parçacığının yolları 2-boyutlu eğrilerdir. Fraktaller, diferintegraller ve yol integralleri arasında var olabilecek ilişkiler ise, araştırmacıların yoğun çalıştıkları konular arasındadır.

17.6.1 Zaman Dilimleri Yöntemi ile Yol İntegrali Hesabı

$F[x(\tau)]$ olarak verilen bir fonksiyonelin Wiener ölçümü ile yol integralini bulalım. Şekil (17.3)'de $x(\tau)$ ile gösterilen yolumuzu N zaman dilimi içinde



ŞEKİL 17.3. **Zamanda dilimler yönteminde kullanılan yollar.**

$l_N(\tau)$ olarak göstereceğimiz doğru parçaları ile yaklaşık olarak gösterelim:

$$l_N(t_i) = x(t_i) = x_i, \qquad i = 1,2,3...,N. \tag{17.87}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
Selçuk Ş. Bayın
II. baskı 2004

Bu demektir ki; verilen bir $x(\tau)$ fonksiyonu ve herhangi bir küçük ϵ sayısı için,

$$|x(\tau) - l_N(\tau)| < \epsilon \tag{17.88}$$

olacak şekilde her zaman τ'dan bağımsız bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz. Bu şartlar altında düzgün fonksiyononeller de

$$|F[x(\tau)] - F[l_N(\tau)]| < \delta(\epsilon) \tag{17.89}$$

koşulunu $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\epsilon) \to 0$ olacak şekilde sağlayacaktır. $l_N(\tau)$ hakkındaki bütün bilgiler $x_1 = x(t_1), ..., x_N = x(t_N)$ değerlerini içeren sette olacağından, $F[l_N(\tau)]$ fonksiyonelini de

$$F[l_N(\tau)] = F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{17.90}$$

olarak yazabiliriz. Bu da

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) F[x(\tau)] - \int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \right| \\
&\leq \int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) \left| F[x(\tau)] - F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \right|, \\
&\leq \int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) \delta(\epsilon), \\
&\leq \delta(\epsilon) \int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau), \\
&\leq \delta(\epsilon)
\end{aligned} \tag{17.91}$$

demek olacaktır. $N = 1, 2, 3....,$ için, $F_N(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyon seti, $F[x(\tau)]$ fonksiyonlarına yaklaşan bir Cauchy seti oluşturacağından uygun bir N sayısı için de

$$\begin{aligned}
&\int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{4\pi D t_1}} ... \frac{dx_N}{\sqrt{4\pi D(t_N - t_{N-1})}} F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \\
&\quad \times \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}
\end{aligned} \tag{17.92}$$

integrali, aşağıdaki yol integralinin hesaplanması için kullanılabilecektir:

$$\begin{aligned}
&\int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) F[x(\tau)] \\
&= \lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{4\pi D t_1}} ... \frac{dx_N}{\sqrt{4\pi D(t_N - t_{N-1})}} F_N(x_1, x_2, ..., x_N) \\
&\quad \times \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}
\end{aligned} \tag{17.93}$$

Her iki yöntem arasındaki fark, verilen bir ϵ için uygun bir $N(\epsilon)$ sayısı seçilerek $\delta(\epsilon)$'dan küçük tutulabilecektir. Bu yöntemle $\int_{C[0,0;t]} d_w x(\tau) F[x(\tau)]$ olarak verilen Wiener yol integrali, (17.92) denklemi ile verilen N boyutlu bir integrale dönüşecektir.

17.6.2 ESKC Bağıntısı ile Yol İntegrali Hesabı

Bu yöntemi $F[x(\tau)] = x(\tau)$ olarak verilmiş bir fonksiyonelin $[0, t]$ aralığında koşulsuz Wiener ölçümü ile yol integralini hesaplayarak gösterelim. τ, $[0, t]$ aralığında herhangi bir zamandır. ESKC bağıntısını kullanarak $\int_{C[x_0,0;t]} d_w x(\tau) x(\tau)$ integralini,

$$\begin{aligned}
&\int_{C[x_0,0;t]} d_w x(\tau) x(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau x_\tau \int_{C[x_0,0;x_\tau,\tau]} d_w x(\tau) \int_{C[x_\tau,\tau;x,t]} d_w x(\tau), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau x_\tau \int_{C[x_0,0;x_\tau,\tau]} d_w x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{C[x_\tau,\tau;x,t]} d_w x(\tau), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau x_\tau \int_{C[x_0,0;x_\tau,\tau]} d_w x(\tau) \int_{C[x_\tau,\tau;t]} d_w x(\tau)
\end{aligned} \tag{17.94}$$

şeklinde yazabiliriz. Son integralin değeri (17.27) denkleminden dolayı bir olacağından, (17.24) ve (17.22) denklemlerini kullanarak da

$$\begin{aligned}
&\int_{C[x_0,0;t]} d_w x(\tau) x(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau x_\tau W(x_\tau, \tau, x_0, 0), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_\tau x_\tau \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{ -\frac{(x_\tau - x_0)^2}{\tau} \right\}, \\
&= x_0
\end{aligned} \tag{17.95}$$

buluruz.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

17.6.3 *Sonlu Elemanlar Yaklaşımı ile Yol İntegrali Hesabı*

Yukarıda hesapladığımız $F[x(\tau)] = x(\tau)$ fonksiyonelin yol integralini bir de (17.17) formülü ile hesaplayalım:

$$\int_{C[x_0,0;t]} d_w x(\tau) x(\tau) \tag{17.96}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_{i-1})}} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\} x_l,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_l}{\sqrt{4\pi D\Delta t_l}} x_l \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{l-1} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D\Delta t_i}} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{l} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=l+1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D\Delta t_i}} \exp\left\{ -\sum_{i=l+1}^{N} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\}, \tag{17.97}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_l \frac{x_l}{\sqrt{4\pi D t_l}} \exp\left\{ -\frac{(x_l - x_0)^2}{4Dt_l} \right\}, \tag{17.98}$$

$$= x_0. \tag{17.99}$$

Bu hesapta τ zamanının t_l zaman diliminde yer aldığı varsayılmıştır. Daha karmaşık fonksiyoneller ise, (17.92) formülü yardımı ile hasaplanabilir.

17.6.4 *'Yarı Klasik' Yöntemlerle Yol İntegrali Hasabı*

Difüzyon sabitinin sıfırdan farklı olduğu durumlarda Bloch denkleminin propagatörünün,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \int_{t_0}^{t} d\tau L[x(\tau)] \right\} \prod_{\tau=t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.100}$$

olarak verildiğini görmüştük. Doğal olarak bu integrale en büyük katkı, Euler-Lagrange denklemi olan

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial(dx/d\tau)}\right] \tag{17.101}$$

denkleminin çözümlerinden gelecektir. 'Klasik' çözümler diyeceğimiz bu çözümleri $x_c(\tau)$ ile gösterelim. Bu çözümler aynı zamanda da $\int L d\tau$ integralini ekstremum yapan yani,

$$\delta \int L d\tau = 0 \tag{17.102}$$

koşulunu sağlayan yollardır. Ancak unutulmamalıdır ki, Bloch denkleminde $V(x)$ tam olarak potansiyel olmadığı gibi, L'de Lagrange fonksiyonu değildir.

Aynı şekilde, (17.102) denkleminde $\int L d\tau$ integrali de klasik fizikte $S[x(\tau)]$ ile gösterilen aksiyon değildir. Bu ifadeler ancak Bloch denklemi ile büyük benzerlik gösteren Schrödinger denkleminin yol integrali formülasyonunda alışageldiğimiz anlamlarına kavuşacaklardır. Bu yüzden Bloch denkleminin çözümlerinde 'klasik' kelimesi tırnak içine alınmıştır.

Difüzyon sabitinin S fonksiyonelinden çok küçük ($D/S << 1$) olduğu durumlarda (17.100) denkleminin çözümü yaklaşık olarak

$$W(x,t;x_0,t_0) \simeq \phi(t-t_0) \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \int_{t_0}^{t} d\tau L[x_c(\tau)] \right\} \tag{17.103}$$

şeklinde yazılabilir. **Dalgalanma çarpanı** olarak da bilinen $\phi(t-t_0)$ çarpanının bulunuşu yol integrali konumuzun dışındadır. Ancak, aşağıdaki iki örnekte bu çarpanın ortaya çıkışını ve bazı durumlarda bulunuşunu göreceğiz.

Örnek (17.1) $\int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau)$ **integralinin bulunması:** $W(x,t,x_0,0)$ propagatörünü yarı klasik yöntemle bulmak için

$$W(x,t,x_0,0) = \int_{C[x_0,0;x,t]} \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \dot{x}^2 \right\} \prod_{\tau=0}^{t} \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.104}$$

yazalım. Bu durumda Euler-Lagrange denklemi

$$\ddot{x}_c(\tau) = 0, \quad x_c(0) = x_0,\ x(t) = x \tag{17.105}$$

olacaktır. Çözümü de

$$x_c(\tau) = x_0 + \frac{\tau}{t}(x - x_0) \tag{17.106}$$

olarak verilir. $x_c(\tau)$ yolundan sapmayı $x(\tau) = x_c(\tau) + \eta(\tau)$ şeklinde $\eta(\tau)$ ile gösterirsek, uç noktalarda $\eta(\tau)$

$$\eta(0) = \eta(t) = 0 \tag{17.107}$$

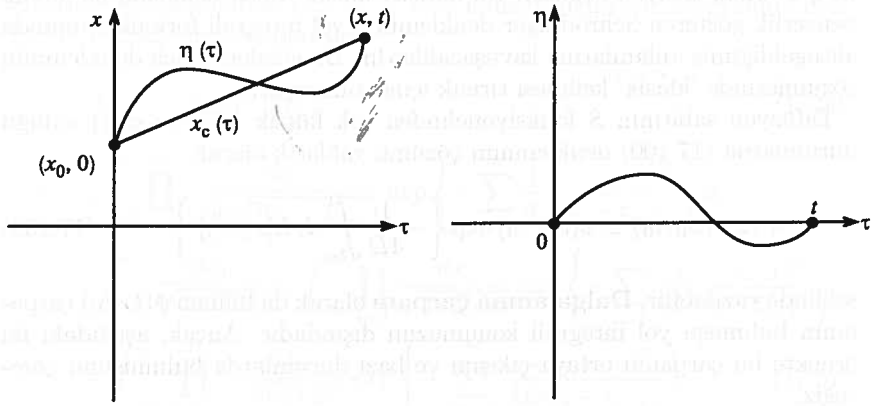
değerlerini alacaktır. $\eta(\tau)$ cinsinden propagatör de

$$W(x,t,x_0,0) = \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \dot{x}_c^2 \right\} \tag{17.108}$$

$$\times \int_{C[0,0;0,t]} \exp\left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \left(\dot{\eta}^2 + 2\, \dot{x}_c \dot{\eta} \right) \right\} \prod_{\tau=0}^{t} \frac{d\eta(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}}$$

olacaktır. Burada hatırlamak gerekir ki, $x(\tau)$ yolları Euler-Lagrange denklemini sağlamak zorunda değildirler. $\int_0^t d\tau \dot{x}_c \dot{\eta} = \frac{(x-x_0)}{t} \eta(\tau)\Big|_0^t =$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın



ŞEKİL 17.4. **"Yarı klasik " yöntemde yol ve sapma fonksiyonu.**

0 olacağından (17.108) denklemini de

$$W(x,t,x_0,0) = \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_0^t d\tau \dot{x}_c^2\right\} \tag{17.109}$$
$$\times \int_{C[0,0;0,t]} \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_0^t d\tau \dot{\eta}^2\right\} \prod_{\tau=0}^{t} \frac{d\eta(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}}$$

olarak yazarız. $\dot{x}_c = (x-x_0)/t$ olarak τ'dan bağımsız olacağından, sağ taraftaki yol integralinin çarpanı da

$$\exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_0^t d\tau \dot{x}_c^2\right\} \tag{17.110}$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{4D}\frac{(x-x_0)^2}{t}\right\}$$

olarak kolayca bulunur.

$$\int_{C[0,0;0,t]} \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^t d\tau \dot{\eta}^2\right\} \prod_{\tau=0}^{t} \frac{d\eta(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.111}$$

integrali sadece t'ye bağlı olacağından $\phi(t)$ ile göstererek propagatörü

$$W(x,t,x_0,0) = \phi(t)\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right\} \tag{17.112}$$

şeklinde yazarız. Propagatörün olasılık dağılımı yorumu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x,t,x_0,0) = 1 \tag{17.113}$$

koşulunu verdiğinden, $\phi(t)$ fonksiyonu da

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \tag{17.114}$$

olarak bulunacaktır. Sonuçta,

$$W(x,t,x_0,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right\} \tag{17.115}$$

olur. Bu örnekte 'yarı klasik ' yöntem tam bir cevap vermiştir. Daha karmaşık problemlerde $\phi(t-t_0)$ çarpanının bulunmasında zamanda dilimler yöntemi kullanılır. Bu örnekte aynı zamanda da (17.24) ifadesinden (17.22) ifadesini $t_0 = 0$ için açık olarak çıkarmış olduk.

Örnek (17.2)$\varphi(t)$'nin zamanda dilimler yöntemi ile hesabı: Bir önceki örneğimiz pek çok hesabın prototipini oluşturduğundan,

$$\phi(t) = \int_{C[0,0;0,t]} \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_0^t d\tau \dot{\eta}^2\right\} \prod_{\tau=0}^{t} \frac{d\eta(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.116}$$

integralini bir de zamanda dilimler yöntemi ile bulalım. $[0,t]$ aralığını

$$t_i - t_{i-1} = \epsilon \tag{17.117}$$
$$= \frac{t}{(N+1)} \quad i = 1,2,....,N+1$$

olarak $(N+1)$ eşit aralığa bölersek, (17.116) integralini de

$$\phi(t) = \lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0} \frac{1}{[\sqrt{4\pi D\varepsilon}]^{N+1}} \tag{17.118}$$
$$\times \int d\eta_1 \int d\eta_2 ..... \int d\eta_N \exp\left\{-\frac{1}{4D\epsilon}\sum_{i=0}^{N}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2\right\}$$

şeklinde yazabiliriz. Üstel fonksiyonun argümanı (-1 çarpanı dışında)

$$\frac{1}{4D\epsilon}\sum_{i=0}^{N}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2 \tag{17.119}$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\eta_k A_{kl}\eta_l$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

şeklinde kuadratik bir ifade olacaktır. A_{kl} ise, $N \times N$ matris olarak,

$$A = \frac{1}{4D\epsilon} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17.120}$$

şeklinde yazılabilir ($\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$). Artık,

$$\int d\eta_1 \int d\eta_2 ..... \int d\eta_N \exp\left\{-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \eta_k A_{kl} \eta_l\right\} \tag{17.121}$$

integralinin değeri lineer cebir yöntemleri ile(prb.5)

$$\int d\eta_1 \int d\eta_2 ..... \int d\eta_N \exp\left\{-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \eta_k A_{kl} \eta_l\right\}$$
$$= \frac{(\sqrt{4\pi D\epsilon})^N}{\sqrt{\det A_N}} \tag{17.122}$$

olarak bulunacaktır. Son kolonu kullanılarak A_N'in determinantının sağlıyacağı tekrarlama bağıntısını da

$$\det A_N = 2 \det A_{N-1} - \det A_{N-2} \tag{17.123}$$

şeklinde yazarız. İlk iki N değeri için $\det A_N$

$$\det A_1 = 1, \tag{17.124}$$
$$\det A_2 = 3 \tag{17.125}$$

olarak bulunur ve bunu $N-1$ için

$$\det A_{N-1} = N \tag{17.126}$$

şeklinde genelleştirirsek, (17.123) tekrarlama bağıntısını kullanılarak $\det A_N$'in değerini

$$\det A_N = N + 1 \tag{17.127}$$

olarak buluruz. Bu da bize $\phi(t)$ fonksiyonunu,

$$\phi(t) = \frac{(\sqrt{4\pi D\epsilon})^N}{(\sqrt{4\pi D\epsilon})^{N+1}\sqrt{N+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \tag{17.128}$$

olarak verecektir.

(17.116) integralini bir başka hesaplama yöntemi ise, η integrallerini tek tek

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left\{-a(\eta - \eta')^2 - b(\eta - \eta'')^2\right\}$$
$$= \left[\frac{\pi}{a+b}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{ab}{a+b}(\eta' - \eta'')^2\right\} \tag{17.129}$$

formülünü kullanarak almaktır.

17.7 Kuantum Mekaniği ve FeynmanYol İntegrali Yaklaşımı

17.7.1 $V(x) = 0$ Olduğu Durumlarda Schrödinger Denklemi

t_0 anında x_0 noktasından Brown hareketine başlayan bir parçacık için difüzyon denkleminin propagatörünün

$$W(x, t, x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{4D(t - t_0)}\right\} \tag{17.130}$$

olarak verilirdiğini ve $\lim_{t \to t_0} W(x, t, x_0, t_0) \to \delta(x - x_0)$ sınır şartı ile

$$\frac{\partial W(x, t, x_0, t_0)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W(x, t, x_0, t_0)}{\partial x^2} \tag{17.131}$$

denklemini sağladığını görmüştük. $W(x, t, x_0, t_0)$ propagatörü aynı zamanda da Wiener yol integrali olarak

$$W(x, t, x_0, t_0) = \int_{C[x_0, t_0; x, t]} d_w x(\tau) \tag{17.132}$$

şeklinde ifade edilebiliyordu. Bu integralde $C[x_0, t_0; x, t]$, (x_0, t_0) noktasından başlayıp (x, t) noktasında biten bütün sürekli yolları göstermektedir. Wiener ölçümü olarak bilinen $d_w x(\tau)$ ise,

$$d_w x(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{4D}\int_{t_0}^{t} \dot{x}^2(\tau) d\tau\right\} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \tag{17.133}$$

olarak verilir.

Kuantum mekaniğinde kütlesi m olan serbest bir parçacık için Schrödinger denklemi

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \tag{17.134}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak verilir. Bu denklemin propagatörü $K(x,t,x',t')$ ise,

$$\frac{\partial K(x,t,x',t')}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 K(x,t,x',t')}{\partial x^2} \tag{17.135}$$

denklemini sağlayacaktır ve (x',t') noktasındaki çözüm bilinirse, (x,t) noktasındaki çözümü de

$$\Psi(x,t) = \int K(x,t,x',t')\Psi(x',t')dx' \tag{17.136}$$

şeklinde bulmamızı sağlayacaktır. Difüzyon denkleminde

$$D \to \frac{i\hbar}{2m} \tag{17.137}$$

dönüşümünü yaparsak Schrödinger denklemini bulacağımızdan, propagatörünü de (17.8) denkleminde aynı dönüşümü yaparak

$$K(x,t,x',t') = \frac{1}{\sqrt{\frac{i2\pi\hbar}{m}(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{m(x-x_0)^2}{i2\hbar(t-t_0)}\right\} \tag{17.138}$$

şeklinde kolayca yazabiliriz.

Bu ifade matematiksel olarak doğrudur ve Schrödinger denkleminin propagatörüdür. Ancak, bu noktada sorunlar ve farklılıklar ortaya çıkmaya başlayacaktır. Difüzyon denklemini çözümlerinin Brown parçacığının (x,t) noktasında bulunma olasılığını verdiğini söylemiştik. Bu yorumla uyumlu olarak da olasılık dağılımı olduğunu söylediğimiz

$$W(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right\} \tag{17.139}$$

propagatörü,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x,t,x_0,t_0) = 1 \tag{17.140}$$

normlama koşulunu sağlamaktaydı. Schrödinger denkleminin propagatörü olan $K(x,t,x',t')$ ise, üstel fonksiyonun argümanında i sayısı olduğundan $(-\infty,\infty)$ arasında salınımlar yapar, dolayısı ile normlanamaz. Bu da aslında çok şaşırtıcı gelmemelidir. Çünkü; Schrödinger denkleminin çözümleri olasılık dağılımından daha temel ve daha çok bilgi içeren olasılık genlikleridir. Olasılık dağılımını veren ise,

$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= \Psi(x,t)\Psi^*(x,t) \\ &= |\Psi(x,t)|^2\end{aligned} \tag{17.141}$$

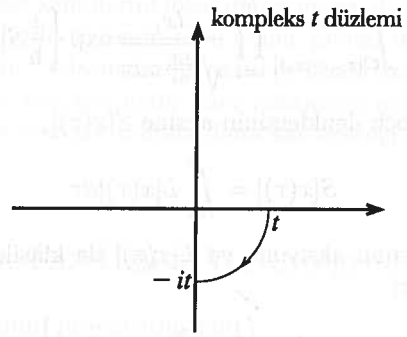
fonksiyonudur. $\rho(x,t)$ ise, her zaman sıfırdan büyük ve reel olan Gauss dağılımıdır ve normlanabilir.

Schrödinger denkleminin propagatörü de aynı şekilde yol integrali olarak yazılabılır mi? Aynı şekilde (17.118) denklemlerinde $D \to \frac{i\hbar}{2m}$ dönüşümünü yaparsak,

$$K(x,t,x',t') = \int_{C[x',t';x,t]} d_F x(\tau) \tag{17.142}$$

$$d_F x(\tau) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau)d\tau\right\}\prod_{i=1}^{N}\frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2i\hbar}{m}\pi d\tau}} \tag{17.143}$$

bulunacaktır. Burada $d_F x(\tau)$ Feynman ölçümü anlamındadır. Feynman tarafından ilk defa verilmiş olan bu tanımda problem, Wiener yol integralinde integralin yakınsamasını sağlayan üstel fonksiyonun argümanın i sayısı ile çarpıldığı için salınımlar yapmasından kaynaklanmaktadır. Problemin en şık çözümlerinde biri ise, Schrödinger denkleminde zaman koordinatının kompleks alt yarı uzayda da analitik olmasına dayanmaktadır. Böylece kompleks t düzleminde $-\pi/2$ gibi bir dönme yapar ve t koordinatı yerine (17.135) denkleminde $-it$ yazarsak, $D = \frac{\hbar}{2m}$ ile difüzyon denklemi elde edilecektir. Artık (17.142) yol integrali, Wiener integrali olarak alınabilecek ve sonra da tekrar reel zamana dönülerek Schrödinger denkleminin propagatörü (17.138) şeklinde elde edilmiş olacaktır.



ŞEKİL 17.5. **Kompleks t-düzleminde $-\frac{\pi}{2}$ kadar bir dönme.**

17.7.2 $V(x) \neq 0$ Olduğu Durumlarda Schrödinger Denklemi

Etkileşmelerin olduğu durumlarda Schrödinger denklemi

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar}V(x)\Psi(x,t) \tag{17.144}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2004 II. baskı Selçuk Ş. Bayın

şeklinde olacaktır. Burada $t \to -it$ dönüşümünü yaparsak,

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar}V(x)\Psi(x,t) \tag{17.145}$$

olarak Bloch denklemi bulunacaktır. Feynman-Kac teoremi kullanılarak da bunun propagatörü bulunup tekrar reel zamana geçilirse,

$$K(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} d_F x(\tau) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau V[x(\tau)]\right\} \tag{17.146}$$

veya

$$K(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2i\hbar}{m}\pi d\tau}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) - V(x)\right]d\tau\right\} \tag{17.147}$$

bulunur. İlk defa Feynman tarafından verilmiş olan bu propagatör yardımı ile Schrödinger denkleminin çözümü de

$$\Psi(x,t) = \int K(x,t,x',t')\Psi(x',t')dx' \tag{17.148}$$

olarak verilir. Kuantum mekaniğine Schrödinger ve Heisenberg yaklaşımlarından sonra ithal edilmiş olan bu formülasyon, bugün modern kuantum mekaniğinin temeli olmuştur. (17.147) propagatörünü

$$K(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2i\hbar}{m}\pi d\tau}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]\right\} \tag{17.149}$$

olarak yazarsak, Bloch denkleminin aksine $S[x(\tau)]$,

$$S[x(\tau)] = \int_{t_0}^{t} L[x(\tau)]d\tau \tag{17.150}$$

şeklinde klasik sistemin aksiyonu ve $L[x(\tau)]$ de klasik sistemin Lagrange fonksiyonu olacaktır:

$$L[x(\tau)] = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) - V(x)\right]. \tag{17.151}$$

17.7.3 Kuantum Mekaniğinin Feynman Formülasyonunda Klasik Limit

Feynman yol integrali formülasyonunda Schrödinger denkleminin propagatörünün

$$K(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m}d\tau}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]\right\} \tag{17.152}$$

şeklinde verildiğini gördük. Burada dikkat çeken, Feynman yol integralinde Euler-Lagrange denklemini sağlayan klasik yollar ile birlikte, $C[x_0,t_0;x,t]$'nin (x_0,t_0)'dan başlayıp (x,t)'de biten her türlü sürekli yolu kapsadığıdır. Klasik fizik limitinde

$$\hbar \to 0 \tag{17.153}$$

olacağından, yol integralindeki

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]\right\} \tag{17.154}$$

terimi çılgın gibi salınımlar yapacaktır. Bu durumda integrale ana katkı salınımların en aza indiği yollardan gelecektir. Doğal olarak da en güçlü katkının $S[x]$'i ekstremum ve özellikle de minimum yapan yollardan gelmesi beklenir. Bu durumda, çok sayıda yol birbirine yakın ağırlıkta olarak integrale katkıda bulunacaktır. Bu yollar da klasik hareket denklemi olan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{17.155}$$

Euler-Lagrange denkleminin çözümleridir. Ancak, bu denklemin çözümleri genelde $S[x]$'i ekstremum yapan yolları verecektir. Pek çok durumda ise, bu minimum olacaktır (Morse & Feshbach sayfa 281).

Yol integrallerinin nöron ağlarına uygulamalarında olduğu gibi bazı durumlarda sistemin birden fazla minimumu ya da maximumu olabilir. Bu tür sistemler zaman zaman kendilerini lokal minimum ya da maximumlarda bulabilirler. Bu durumlarda sistemin arzu edilen global minimuma ulaşması mümkün olacak mıdır? Olacaksa bu nasıl ve hangi koşullarda olacaktır? Bunlar ve bunlar gibi pek çok ilginç soru potansiyel araştırma konularıdır ve yol integralleri yönteminin aslında daha kat edeceği çok yol olduğunun kanıtıdır.

17.8 Feynman Faz Uzayı Yol İntegrali

Schrödinger denkleminin propagatörünün

$$K(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,t_0;x,t]} \prod_{i=1}^{N} \frac{dx_i}{\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m}d\tau}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) - V(x)\right]d\tau\right\} \tag{17.156}$$

şeklindeki ifadesi, Lagrange fonksiyonunun $T - V$ olarak yazılabildiği durumlarda kullanışlı olmakla birlikte, serbest hareket eden relativistik bir parçacığın Lagrange fonksiyonu olan

$$L(x) = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \tag{17.157}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

örneğinde olduğu gibi durumlarda ise, kullanışsızdır. Bunun için 1951 yılında Feynman şeklen,

$$K(q'',t'',q',t') = \check{N}\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\left[p\dot{q} - H(p,\dot{q})\right]\right\} dt\check{D}p\check{D}q \qquad (17.158)$$

olarak gösterebileceğimiz faz uzayı yol integralini verir. Burada integral $t \in [t',t'']$ aralığında $q''(t'') = q''$ ve $q'(t') = q'$ noktalarında sabitlenmiş olarak $q(t)$ yolları üzerinden alınacaktır. p integralin ise, aynı t aralığında ama üzerinde hiçbir sınırlama olmadan alınacaktır.

Daha önceki örneklerde olduğu gibi, bu integrali pratikte uygulanabilir bir duruma getirmek için faz uzayı örgüsü içinde $t \in [t',t'']$ zaman aralığını

$$\epsilon = \frac{t''-t'}{(N+1)} \qquad (17.159)$$

şeklinde $N+1$ zaman dilimine ayırırsak,

$$K(q'',t'',q',t')$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int ..... \int \exp\left\{(\frac{i}{\hbar})\sum_{l=0}^{N}\left[p_{l+1/2}(q_{l+1}-q_l) - \epsilon H\left(p_{l+1/2}, \frac{1}{2}(q_{l+1}+q_l)\right)\right]\right\}$$
$$\times \prod_{l=0}^{N}\frac{dp_{l+1/2}}{2\pi\hbar}\prod_{l=1}^{N}dq_l \qquad (17.160)$$

olacaktır. Burada $q_{N+1} = q''$ ve $q_0 = q'$ hariç bütün q ve p üzerinden integral alınacaktır. Heisenberg belirsizlik prensibine göre momentum ve konum aynı noktada kesin olarak belirlenemeyeceğinden, momentum değerleri $p_{l+1/2}$ şeklinde zaman dilimlerinin ortalarına denk gelecek şekilde alınmıştır. Burada p üzerinden bir fazla integral alınmaktadır. Bu da propagatörün,

$$K(q''',t''',q',t') = \int K(q''',t''',q'',t'')K(q'',t'',q',t')dq'' \qquad (17.161)$$

olarak verdiğimiz ESKC bağıntısını sağlaması şartından kolayca görülür.

17.9 Momentumun Kuadratik Olduğu Durumlarda Feynman Faz Uzayı İntegrali

Faz uzayında propagatördeki üstel fonksiyonu (17.160),

$$\exp\left\{(\frac{i}{\hbar})\sum_{l=0}^{N}\left[p_{l+1/2}(q_{l+1}-q_l) - \epsilon H\left(p_{l+1/2}, \frac{1}{2}(q_{l+1}+q_l)\right)\right]\right\}$$

şeklinde yazmıştık. Momentumun

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q,t) \qquad (17.162)$$

olarak yazılabildiği durumlarda bu fonksiyon,

$$\exp\left\{(\frac{i}{\hbar})\sum_{l=0}^{N}\epsilon\left[\frac{p_{l+1/2}(q_l-q_{l-1})}{\epsilon} - \frac{p_{l+1/2}^2}{2m} - V\left(\frac{1}{2}(q_l+q_{l+1}),t_l\right)\right]\right\} \qquad (17.163)$$

olacaktır. Köşeli parantez içindeki ifadeyi kareye tamamlayarak da bunu da

$$\exp\left\{(\frac{i}{\hbar})\sum_{l=0}^{N}\epsilon\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2m}\left(p_{l+1/2} - \frac{(q_l-q_{l-1})}{\epsilon}m\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{(q_l-q_{l-1})}{\epsilon}\right)^2 \\ -V\left(\frac{1}{2}(q_l+q_{l+1}),t_l\right)\end{array}\right]\right\} \qquad (17.164)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu (17.160) denkleminde yerine koyar ve momentum integralini alırsak propagatör

$$K(q'',t'',q',t') = \lim_{\epsilon\to 0, N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i\frac{\epsilon}{m}}}\prod_{l=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{dq_l}{\sqrt{2\pi\hbar i\frac{\epsilon}{m}}}\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\} \qquad (17.165)$$

olacaktır. Burada S,

$$S = \sum_{l=1}^{N+1}\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{(q_l-q_{l-1})}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{1}{2}(q_l+q_{l+1}),t_l\right)\right] \qquad (17.166)$$

olarak verilmiştir. Süreklilik limitinde

$$S[q] = \lim_{\epsilon\to 0, N\to\infty}\sum_{l=1}^{N+1}\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{(q_l-q_{l-1})}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{1}{2}(q_l+q_{l+1}),t_l\right)\right]$$
$$S[q] = \int_{t'}^{t''}dtL[q,\dot{q},t], \qquad L[q,\dot{q},t] = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q,t) \qquad (17.167)$$

olarak verilen klasik aksiyon olacaktır. Bir başka deyişle; Faz uzayı yol integrali standart Feynman yol integraline dönüşecektir.

Örnek (17.3) Serbest parçacık için propagatör: Serbest parçacığın propagatörü Feynman faz uzayı integrali olarak

$$K(x,t,x_0,t_o) = \check{N}\int_{C[x_0,t_o;x,t]}\check{D}p\check{D}x\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left[p\dot{x} - \frac{p^2}{2m}\right]\right\}d\tau \qquad (17.168)$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler 2004 Selçuk S. Bayın

şeklinde yazılır. Momentum üzerinden integral alındıktan sonra bu da

$$K(x,t,x_0,t_o) = \check{N}\int_{C[x_0,t_o;x,t]} \check{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right\}d\tau \qquad (17.169)$$

olacaktır. Bu integral $t \to -it$ dönüşümü ile Wiener integraline çevrilip alındıktan sonra, tekrar reel zamana geçilerek propagatör

$$K(x,t,x_0,t_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\frac{(t-t_0)}{m}}}\exp\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{(t-t_0)} \qquad (17.170)$$

şeklinde bulunacaktır.

17.10 Problemler

1. (17.8)'de verdiğimiz olasılık dağılımının (17.11) normlama koşulunu sağladığını gösteriniz.

2. Aşağıda verilen denklemin doğru olduğunu her iki tarafın da türevini alarak gösteriniz:

$$\exp\left\{-\int_0^t d\tau V[x(\tau)]\right\} = 1-\int_0^t d\tau\left(V[x(\tau)]\exp\left\{-\int_0^\tau dsV[x(s)]\right\}\right).$$

3. (17.64) denkleminde $V(x)$'in

$$V(x) = \frac{1}{4\eta^2 D}F^2(x) + \frac{1}{2\eta}\frac{dF(x)}{dx}$$

şeklinde tanımlandığını gösteriniz.

4.

$$W(x,t,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right\}$$

propagatörünün ESKC bağıntısını sağladığını gösteriniz.

5. Bölüm (17.3) de verilen

$$W_B(x,t,x_0,t_0) = W(x,t,x_0,t_0) - \varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_j W(x,t,x_j,t_j)V(x_j,t_j)W(x_j,t_j,x_0,t_0) + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_j\int_{-\infty}^{\infty}dx_k W(x,t,x_j,t_j)V(x_j,t_j)W(x_j,t_j,x_k,t_k) \times V(x_k,t_k)W(x_k,t_k,x_0,t_0)+....$$

denklemini çıkarınız.

6. Aşağıda

$$W(x,t,x_0,t_0) = \int_{C[x_0,0;x,t]} d_w x(\tau)\exp\left\{-k^2\int_{t_0}^{t}d\tau x^2\right\}$$

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

olarak verdiğimiz Wiener yol integralinin sonucunun,

$$W(x,t,x_0,t_0) = \left[\frac{k}{2\pi\sqrt{D}\sinh(2k\sqrt{D}(t-t_0)}\right]^{(1/2)} \times \exp\left\{-k\frac{(x^2+x_0^2)\cosh(2k\sqrt{D}(t-t_0)) - 2x_0x}{2\sqrt{D}\sinh(2k\sqrt{D}(t-t_0))}\right\}$$

olduğunu 'yarı klasik ' yöntemle gösteriniz.

7.

$$\int d\eta_1 \int d\eta_2 \ldots\ldots \int d\eta_N \exp\left\{-\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\eta_k A_{kl}\eta_l\right\} = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\sqrt{\det A}}$$

integralini, reel ve simetrik A matrisini diagonalize ederek gösteriniz.

8. (17.129) formülünü kullanarak (17.116) integralini alınız.

9. (17.166) propagatörünün çıkarılışındaki momentum integralini alınız.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

KAYNAKLAR

Kitap ve Süreli Yayınlar

1. Akhiezer, N.I., *The Calculus of Variations*, Blaisdell, Waltham, Massachusetts (1962).
2. Arfken, G. B. and Weber, H. J., *Mathematical Methods of Physics*, Academic Press (1995).
3. Artin, E., *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1964).
4. Boas, M.L., *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd Ed., Wiley (1983).
5. Bell, W.W., *Special Functions For Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Co. Ltd. (1968).
6. Byron, W. Jr. and Fuller R.W., *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover Publications, New York (1970).
7. Butkov, E., *Mathematical Physics*, Addison Wesley Publishing Co., New York (1968).
8. Chaichian, M., and Demichev, A., *Path integrals in Physics* (2cilt), Institute of Physics Publishing (2001).
9. Churchill, R.V., *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Book Co. New York (1960).
10. Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Book Co. New York (1963).
11. Courant, E. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics* (2 Cilt), Wiley (İntersciece), New York (1986).
12. Dennery, P. and Krzywicki, A., *Mathematics for Physics*, Dover (1995).
13. Doniach, S., and Sondheimer, E.H., *Green's functions for Solid State Physics*, World Scientific Publishing Co., Inc. (1998).
14. Erdelyi, A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publications, Inc., New York (1956).

15. Hassani, S., *Mathematical Physics*, Springer Verlag (2002).

16. Hildebrand, F.B., *Methods of Applied Mathematics*, Prentice Hall Inc. (1965).

17. Hilfer, R., *Applications of Fractional Calculus*, World Scientific Publishing Co., Inc. (2000).

18. Kaplan, W., *Advanced Calculus*, Addison Wesley Publishing Co., New York (1973).

19. Karaoğlu, B., *Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler*, BilgiTek Yayıncılık (1997).

20. Kleinert, H., *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*, 3rd. Ed., World Scientific Publishing Co., Inc. (2003).

21. Kyrala, A., *Applied Functions of a Complex Variable*, Wiley-Interscience (1972).

22. Lebedev, N.N., *Special Functions and their Applications*, Prentice Hall Inc. (1965).

23. Mathews, J. and Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, Addison Wesley Publishing Co. (1970).

24. Milton, K.A., *The Casimir Effect*, World Scientific Publishing Co., Inc. (2001).

25. Morse, P. M., and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics* (2 cilt), McGraw Hill Book Co. (1953).

26. Oldham, B.K., and Spanier, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press (1974).

27. Osler, T.J., *Leibniz Rule for Fractional Derivatives and an Application to Infinite Series*, SIAM, J. Appl. Math. **18**, 658 (1970).

28. Osler, T.J., *The Integral Analogue of the Leibniz Rule*, Math.Comp. **26**, 903 (1972).

29. Önem, C., *Fizikte Matematik Metodlar*, Birsen Yayınevi (1998).

30. Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press (1999).

31. Roach, G. F., *Green's Functions*, Cambridge University Press (1982).

32. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers (1993).

33. Sokolov, I.M., Klafter, J.; and Blumen, A., *Fractional Kinetics*, Physics Today, Nov. pg.48 (2002).

34. Ross, S.L., *Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York (1984).

35. Stephani, H., *Differential Equations-Their Solutions Using Symmetries*, Cambridge Univ. Press (1989).

36. Wyld, H. W., *Mathematical Methods for Physics*, Addison Wesley Publishing Co., New York (1928).

İnternet Kaynakları

Eğitim ve araştırma amaçlı pek çok bağlantıyı aşağıdaki sitemizde bulabilirsiniz:

http://www.physics.metu.edu.tr/~bayin

Ek kaynak ve bilgi için referans bölümündeki online ansiklopediler,

http://en.wikipedia.org

ve

http://mathworld.wolfram.com

özellikle önerilir. Bir çok konuda en son yayınları takip etmek isteyen araştırmacılar,

http://xxx.lanl.gov/

sitesini ve astronomi astrofizik konularında da Nasa'nın veri tabanını kullanabilirler:

http://adsabs.harvard.edu/abstract_service.html

Diğer veri tabanlarına bağlantılar da 'Astrophysical Services' bölümünde bulunabilir.

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

SÖZLÜK

Türkçeden İngilizceye

TÜRKÇE	*İNGİLİZCE*	*TÜRKÇE II*	*AZERİCE*
Adım fonksiyonu	Step function		Pille fonksiyası
Adjoint operatör	Adjoint operator		Qosma operator
Akım	Current		Cereyan
Akış	Flow		Axın
Alan	Field		Saha
Analitik	Analytical		Analtik
Analitik süreklilik	Analytical continuation		Analtik kesilmezlik
Ardışık	Successive		Ardıcıl
Argüman	Argument	Değişken	Argumante, deyişen
Asimtotik	Asymptotic		Asimptotik
Asosiye	Associated	İlişkilendirilmiş	
Averaj	Average	Ortalama	Orta
Azimut	Azimuth		
Bağımlı	Bounded	Bağlı, sınırlı	Serhedli
Basit bağlantılı	Simply connected		Sade elageli
Başlangıç şartı	Initial condition	Başlangıç koşulu	Başlangıç Şartları
Belirli integral	Definite integral		Mueyyen integral
Belirsizlik	Uncertainty		Geyri müeyyen
Bir-e-bir	One-to-one	Birden-bire	Birgıymetli
Birimsiz	Dimensionless		Ölçüsüz
Birleşme	Composition		Mürekkeb
Boş fonsiyon	Null function		Sıfır fonksiya
Boyut	Dimension		Ölçü
Brown hareketi	Brownian motion		Broun hereketi
Cauchy temel değer	Cauchy principal value		Koşi baş qiymeti
Cebir	Algebra		Cebir
Civarında	Neighborhood	Komşuluğunda	Qonşu
Cos	Cos	Kosinüs	Kosinus
Çekirdek fonksiyon	Kernel		Nüve
Çok değerli	Multiple valued		Cox giymetli
Çokdan-bire	Many-to-one		
Dağılma	Association		Assosiativ
Dal noktası	Branch point		Budaq nokte
Dalgalanma	Fluctuation		Fluktuasiya
Debi	Current density		Cereyan Sıxlıgı
Değişen seriler	Alternating series	Alternatif seriler	Alternativ sıra
Değişken	Variable		Değişen

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Değişkenlerine ayırma	Separation of variables		Değişenlare ayırma
Değişme	Commute		Kommutativ
Deneme fonksiyonu	Trial function		Sınaq funksiya
Deneyim	Experience	Tecrübe	Tecrübe
Denklem	Equation		Tenlik
Derece	Degree		Derece
Derece	Order	Mertebe	Tertib
Diferansiyel	Differential		Differansiyal
Diferintegral	Differintegral	Türevintegral	Törintegral
Difüzyon	Diffusion		Diffüziya
Direnç	Resistance	Rezistans	Mügarimet
Dizi	Column	Sütun	Sütun
Dizin	Index	İndeks	İnteks
Doğa	Nature	Tabiat	Tebiet
Doğrusal	Linear	Lineer	Xetti
Doğrusal cebir	Linear algebra	Lineer cebir	Xatti Cabr
Dönüşüm	Transformation	Transformasyon	Dönüşme
Durgun kütle	Rest mass	Hareketsiz kütle	Sükünet kütlesi
Durum	State	Hal	Hal
Düzgün	Regular	Regüler	Regulyar
Düzgün akış	Laminar flow	Tabakalı akış	Laylı herekat
Düzgün tekil nokta	Regular singular point		Regulyar singulyar nökte
Düzgün yakınsak	Uniformly convergent		Bircinsli yıgılma
Ekstremum	Extremum	Uç	Extremum
Entropi	Entropy	Devinim	Entropiya
Esaslı tekil nokta	Essential singular point		Mühüm mexsusi nökte
Esneklik	Elasticity	Elastisite	Elastiklik
Eşlenik	Conjugate		Qosma
Eşpotansiyel	Equipotential		Ekvipotensiyal
Evren	Universe	Kainat	Kainat
Evrilme	Evolution	Gelişme	Hereket
Eylemsizlik	Inertia		Inersiya
Eylemsizlik momenti	Moment of inertia		Inersiya momenti
Fonksiyon	Function		Funksiya
Geciktirilmiş	Retarded	Geriletilmiş	Gecikmiş
Gelen	Incomming		Gelen
Gelişigüzel dolaşım	Random walk		Tesadüfi dolaşma
Giden	Outging		Geden

Girdapsız	Irrotational	Devirsiz	Dönmez
Global	Global	Küresel	Global
Gravitasyon	Gravitation	Yer çekimi	Yer cazibesi
Hal denklemi	Equation of state	Durum denklemi	Hal tenliği
Haritalama	Mapping	Gönderme	İnikas
Hata fonksiyonu	Error function		Xeta funksiyası
Hermit operatörü	Hermitian operator		Hermit operator
Integral	Integral		İntegral
Iraksak	Divergent		Dağılan
Isı	Heat		Istilik
İfade	Expression	Yazım	İfade
İkiden-bire	Two-to one		İleri
İlerletilmiş	Advanced		Keciricilik
İletkenlik	Conductivity	Bağıntı	Elaqe
İlişki	Relation	Indissel denklem	İndeks tenliyi
İndis denklemi	Indicial equation	Tümlev	İntegral
İntegral	Integral		İntegrallana bilen
İntegrali alınabilir	Integrable	Entegrant	İntegral altı
İntegrand	Intergrant		Trivial olmayan
İşe yarar	Nontrivial		Coğrafi
Jeodezik	Geodesics		Qalan hed
Kalan terim	Remainder term		Xaos
Kaos	Chaos	Sığa	Kondensator
Kapasitör	Capacitor		Sabit
Kararlı	Stable		Geyri sabit
Kararsız	Unstable		İtirilen
Kayıp	Sink		Menbe
Kaynak	Source		Kesik xett
Kesik çizgisi	Branch cut, Cut line	Rasyonel	Rasyonal
Kesirli	Rational		Kesirli hesablama
Kesirli matematik	Fractional calculus		Mehdudiyet
Kısıt	Constraint	Parçalı integral	Xüsusi integral
Kısmi integral	Integration by parts	Parçalı türev	Xüsusi töreme
Kısmi türev	Partial derivative	Karmaşık sayı	Komplex sayı
Kompleks sayı	Complex number	Açı korur	Konform
Konformal	Conformal	Yoğunluk	Konsentrasyon
Konsantrasyon	Concentration	Pozisyon	Veziyyet
Konum	Position		

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Konvolusyon	Convolution	Harmantama	Bürüme
Koordinat	Coordinate		Kordinat
Kovariant	Covariant		Kovariant
Kuantize	Quantized	Kuantumlu	Kvantlanmış
Kuvvet	Force		Qüvve
Kuvvet serisi	Power series		Güç sırası
Küresel simetrik	Spherically symetric		Sferik simmetrik
Kütle	Mass		Kütle
Lagrange çarpanı	Lagrange multiplier		Lagranj vuruğu
Lagrange fonksiyonu	Lagrangian	Lagranjian	Lagrangian
Laminar akış	Laminar flow	Tabakalı akış	Laylı axın
Maksimum	Maximum	En büyük	En böyük
Matematik	Calculus		Riyaziyat
Matris	Matrix		Matris
Mesafe	Distance	Uzaklık, Aralık	Mesafe
Mesafe Elemanı	Line element	Doğru elemanı	Xett elementi
Minimum	Minimum	En Küçük	En kicik
Modifiye	Modified	Değiştirilmiş	Yenilenmiş
Modülüs	Modulus	Büyüklük	Modul
Momentum	Momentum		Moment
Monon artan	Monotonic increasing	Sürekli artan	Monoton artan
Monoton azalan	Monotonic decreasing	Sürekli azalan	Monoton azalan
Mutlak yakınsak	Absolutely convergent		Mutleq yığılan
Negatif	Negative	Eksi	Negativ
Normlama sabiti	Normalization constant		Normallaşma sabiti
Operatör	Operator	İşlemci	Operator
Ortalama	mean		Ortalama
Ortalama kök değer	Root mean square (rms)		Kökün ortalama değeri
Ölçek	Scale		Maştab
Ölçüm	Measure		Ölçme
Ön teorem	Lemma		Lemma
Örgü	Lattice		Qefes
Öteleme	Translation	Yer değiştirme	Translasiya
Özdeğer	Eigenvalue		Xüsusi Kıymet
Özfonksiyon	Eigenfunction		Xüsusi funksiyası
Özgül ısı	Specific heat		Xususi istilik
Parametrize etmek	Parametrization	Parametrelendirm	Parametrize etmek
Parçacık	Particle	Tanecik	Zerrecik

Parçalı sürekli	Piecewise continuous		Parcalı kesilmez
Patoloji	Pathology	Bozukluk	Patoloji
Periyot	Period		Period
Pozitif	Positive	Artı	Positiv
Propagatör	Propagator	İlerletici	Propogator
Reel sayı	Real number	Gerçel sayı	Real sayı
Regülarize etmek	Regularization	Regülarizasyon,	Regularize etmek
Relativistik	Relativistic	Göreceli	Relativistik
Renormalizasyon	Renormalization	Yeniden normlam	Renormalizaya
Rezidü	Residue	Kalıntı	Çıxıq
Riemann Tabakaları	Riemann Sheets		Riman layları
Rotasyon	Rotation	Dönme	Dönme
Sabitlenmemiş ölçü	Unpinned measure		Terpenmez ölçü
Sabitlenmiş ölçü	Pinned measure		Sepilme
Saçılma	Scattering		Regemle
Salınıcı	Oscillator	Titreşici	Ossilyator
Sanal sayı	Imaginary number	İmajiner sayı	Xeyalı sayı
Sayısal	Numeric		Sebeb ve netice
Sebep-Sonuç	Cause and Effect		
Self adjoint operatör	Self adjoint operator		
Seri	Series	Dizi	Sıra
Set	Set	Küme	Çoxluq
Sıkıştırılamayan	Incompressible		Sıxılmayan
Sınır şartı	Boundary condition	Sınır koşulu	Serhed şerti
Sıra	Row		Setir
Sıradan türev	Ordinary derivative	Adi türev	Adi töreme
Silindirik	Cylindrical		Silindrik
Silindirik Koordinatlar	Cylindrical coordinates		Silindrik koordinatlar
Sin	Sin	Sinüs	Sinus
Sinyal	Signal	İşaret	Signal
Skalar	Scalar		Skalyar
Sonlu elemanlar	Finite elements		Sonlu element
Sonuç	Result	Netice	Netice
Sönümlü salınıcı	Damped oscillator		Sönen ossilyator
Sürekli	Continuous		Kesilmez
Sürüklenme hızı	Drift velocity		Sürüklenme süreti
Sürümlü salınıcı	Driven oscillator		
Sütun	Column	Kolon	

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayin

Şartlı yakınsak	Conditionally convergent		Şartlı yığılan
Tahrik mekanizması	Actuator	Uyarıcı	Heyecanlandırıcı
Tamamlanmamış	Incomplete		Natamam
Tan	Tan	Tanjant	Tangent
Tanım	Definition		Terif
Tek	Unique	Bir tek	Tek
Tekil nokta	Singular point		Singulyar nokta
Teklik	Uniqueness		Yeğanelik
Tekrarlama	Iteration	Yineleme	İterasya
Tekrarlama bağıntısı	Recursion relation		Rekurrent elaqa
Tekrarlamalı	Iterative	Yinelemeli	
Temel durum	Ground state		Esas hal
Teorem	Theorem		Teorem
Teori	Theory	Kuram	Nezeriye
Ters dönüşüm	Inverse Transformation		Ters dönüşme
Tersinme	Inversion		Tersine
Trigonometrik	Trigonometric		Trigonometrik
Tüm fonksiyon	Entire function		Tam fonksiya
Türetim fonksiyonu	Generating function	Üretim fonksiyonu	Yaradan fonksiya
Türev	Derivative		Töreme
Türevlenebilir	Differentiable		Diferensiallanan
Üs	Power	Kuvvet	Üstü
Üstel	Exponential	Eksponansiyel	Eksponensiyal
Varlık	Existence		Varlıq
Varyasyon	Variation	Değişim	Variasiya
Vizkoz	Viscous		Özlü
Vizkozite	Viskosity		Özlülük
Yakınsak	Convergent		Yığılan
Yarık	Slit	Ara	Ara
Yerel	Lokal		Lokal
Yoğunluk	Density		Sıxlıq
Yok etmek	Eliminate	Elimine	Yox etmek
Yol	Path		Yol
Yol integrali	Path integral		Yol integrali
Yönelimli	Oriented		İstigemetli
Yöntem	Method	Metot	Metod
Zaman dilimleri	Time slices		Vaxt aralıqları

İngilizceden Türkçeye

İNGİLİZCE	*TÜRKÇE*	*TÜRKÇE II*	*AZERİCE*
Absolutely convergent	Mutlak yakınsak		Mutleq yığılan
Actuator	Tahrik mekanizması	Uyarıcı	Heyecanlandırıcı
Adjoint operator	Adjoint operatör		Qosma operator
Advanced	İlerletilmiş		İleri
Algebra	Cebir		Cebir
Alternating series	Değişen seriler	Alternatif seriler	Alternativ sıra
Analytical	Analitik		Analtik
Analytical continuation	Analitik süreklilik		Analtik kesilmez
Argument	Argüman	Değişken	Argumante, deyişen
Associated	Asosiye	İlişkilendirilmiş	
Association	Dağılma		Assosiativ
Asymptotic	Asimtotik		Asimptotik
Average	Averaj	Ortalama	Orta
Azimuth	Azimut		
Boundary condition	Sınır şartı	Sınır koşulu	Serhed şerti
Bounded	Bağımlı	Bağlı, sınırlı	Serhedli
Branch cut, Cut line	Kesik çizgisi		Kesik xett
Branch point	Dal noktası		Budaq nokte
Brownian motion	Brown hareketi		Broun hereketi
Calculus	Matematik		Riyaziyat
Capacitor	Kapasitör	Sığa	Kondensator
Cauchy principal value	Cauchy temel değer		Koşi baş qiymeti
Cause and Effect	Sebep-Sonuç		Sebeb ve netice
Chaos	Kaos		Xaos
Column	Dizi	Sütun	Sütun
Column	Sütun	Kolon	
Commute	Değişme		Kommutativ
Complex number	Kompleks sayı	Karmaşık sayı	Komplex sayı
Composition	Birleşme		Mürekkeb
Concentration	Konsantrasyon	Yoğunluk	Konsentrasyon
Conditionally converge	Şartlı yakınsak		Şartlı yığılan
Conductivity	İletkenlik		Keciricilik
Conformal	Konformal	Açı korur	Konform
Conjugate	Eşlenik		Qosma
Constraint	Kısıt		Mehdudiyet
Continuous	Sürekli		Kesilmez
Convergent	Yakınsak		Yığılan

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Convolution	Konvolusyon	Harmanlama	Bürüme
Coordinate	Koordinat		Kordinat
Cos	Cos	Kosinüs	Kosinus
Covariant	Kovariant		Kovariant
Current	Akım		Cereyan
Current density	Debi		Cereyan Sıxlıgı
Cylindrical	Silindirik		Silindrik
Cylindrical coordinates	Silindirik Koordinatlar		Silindrik koordinatlar
Damped oscillator	Sönümlü salınıcı		Sönen ossilyator
Definite integral	Belirli integral		Mueyyen integral
Definition	Tanım		Terif
Degree	Derece		Derece
Density	Yoğunluk		Sıxlıq
Derivative	Türev		Töreme
Differentiable	Türevlenebilir		Diferensiallanan
Differential	Diferansiyel		Differansiyal
Differintegral	Diferintegral	Türevintegral	Törintegral
Diffusion	Difüzyon		Diffüziya
Dimension	Boyut		Ölçü
Dimensionless	Birimsiz		Ölçüsüz
Distance	Mesafe	Uzaklık, Aralık	Mesafe
Divergent	Iraksak		Dağılan
Drift velocity	Sürüklenme hızı		Sürüklenme süreti
Driven oscillator	Sürümlü salınıcı		
Eigenfunction	Özfonksiyon		Xüsusi funksiyası
Eigenvalue	Özdeğer		Xüsusi Kıymet
Elasticity	Esneklik	Elastisite	Elastiklik
Eliminate	Yok etmek	Elimine	Yox etmek
Entire function	Tüm fonksiyon		Tam fonksiya
Entropy	Entropi	Devinim	Entropiya
Equation	Denklem		Tenlik
Equation of state	Hal denklemi	Durum denklemi	Hal tenliği
Equipotential	Eşpotansiyel		Ekvipotensiyal
Error function	Hata fonksiyonu		Xeta funksiyası
Essential singular point	Esaslı tekil nokta		Mühüm mexsusi nökte
Evolution	Evrilme	Gelişme	Hereket
Existence	Varlık		Varlıq
Experience	Deneyim	Tecrübe	Tecrübe

Exponential	Üstel	Eksponansiyel	Eksponensiyal
Expression	İfade	Yazım	İfade
Extremum	Ekstremum	Uç	Extremum
Field	Alan		Saha
Finite elements	Sonlu elemanlar		Sonlu element
Flow	Akış		Axın
Fluctuation	Dalgalanma		Fluktuasiya
Force	Kuvvet		Qüvve
Fractional calculus	Kesirli matematik		Kesirli hesablama
Function	Fonksiyon		Funksiya
Generating function	Türetim fonksiyonu	Üretim fonksiyonu	Yaradan fonksiya
Geodesics	Jeodezik		Coğrafi
Global	Global	Küresel	Global
Gravitation	Gravitasyon	Yer çekimi	Yer cazibesi
Ground state	Temel durum		Esas hal
Heat	Isı		Istilik
Hermitian operator	Hermit operatörü		Hermit operator
Imaginary number	Sanal sayı	İmajiner sayı	Xeyalı sayı
Incomming	Gelen		Gelen
Incomplete	Tamamlanmamış		Natamam
Incompressible	Sıkıştırılamayan		Sıxılmayan
Index	Dizin	İndeks	İnteks
Indicial equation	İndis denklemi	Indissel denklem	İndeks tenliyi
Inertia	Eylemsizlik		Inersiya
Initial condition	Başlangıç şartı	Başlangıç koşulu	Başlangıç Şartları
Integrable	İntegrali alınabilir		İntegrallana bilen
Integral	Integral		İntegral
Integral	İntegral	Tümleme	İntegral
Integration by parts	Kısmi integral	Parçalı integral	Xüsusi integral
Intergrant	İntegrand	Entegrant	İntegral altı
Inverse Transformation	Ters dönüşüm		Ters dönüşme
Inversion	Tersinme		Tersine
Irrotational	Girdapsız	Devirsiz	Dönmez
Iteration	Tekrarlama	Yineleme	İterasya
Iterative	Tekrarlamalı	Yinelemeli	
Kernel	Çekirdek fonksiyon		Nüve
Lagrange multiplier	Lagrange çarpanı		Lagranj vuruğu
Lagrangian	Lagrange fonksiyonu	Lagranjian	Lagrangian

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Laminar flow	Düzgün akış	Tabakalı akış	Laylı herekat
Laminar flow	Laminar akış	Tabakalı akış	Laylı axın
Lattice	Örgü		Qefes
Lemma	Ön teorem		Lemma
Line element	Mesafe Elemanı	Doğru elemanı	Xett elementi
Linear	Doğrusal	Lineer	Xetti
Linear algebra	Doğrusal cebir	Lineer cebir	Xatti Cabr
Lokal	Yerel		Lokal
Many-to-one	Çokdan-bire		
Mapping	Haritalama	Gönderme	İnikas
Mass	Kütle		Kütle
Matrix	Matris		Matris
Maximum	Maksimum	En büyük	En böyük
mean	Ortalama		Ortalama
Measure	Ölçüm		Ölçme
Method	Yöntem	Metot	Metod
Minimum	Minimum	En Küçük	En kicik
Modified	Modifiye	Değiştirilmiş	Yenilenmiş
Modulus	Modülüs	Büyüklük	Modul
Moment of inertia	Eylemsizlik momenti		Inersiya momenti
Momentum	Momentum		Moment
Monotonic decreasing	Monoton azalan	Sürekli azalan	Monoton azalan
Monotonic increasing	Monon artan	Sürekli artan	Monoton artan
Multiple valued	Çok değerli		Cox giymetli
Nature	Doğa	Tabiat	Tebiet
Negative	Negatif	Eksi	Negativ
Neighborhood	Civarında	Komşuluğunda	Qonşu
Nontrivial	İşe yarar		Trivial olmayan
Normalization constant	Normlama sabiti		Normallaşma sabiti
Null function	Boş fonsiyon		Sıfır fonksiya
Numeric	Sayısal		Regemlı
One-to-one	Bir-e-bir	Birden-bire	Birgıymetli
Operator	Operatör	İşlemci	Operator
Order	Derece	Mertebe	Tertib
Ordinary derivative	Sıradan türev	Adi türev	Adi töreme
Oriented	Yönelimli		İstigemetli
Oscillator	Salınıcı	Titreşici	Ossilyator
Outging	Giden		Geden

Parametrization	Parametrize etmek	Parametrelendirmek	Parametrize etmek
Partial derivative	Kısmi türev	Parçalı türev	Xüsusi töreme
Particle	Parçacık	Tanecik	Zerrecik
Path	Yol		Yol
Path integral	Yol integrali		Yol integrali
Pathology	Patoloji	Bozukluk	Patoloji
Period	Periyot		Period
Piecewise continuous	Parçalı sürekli		Parcalı kesilmez
Pinned measure	Sabitlenmiş ölçü		Terpenmez ölçü
Position	Konum	Pozisyon	Veziyyet
Positive	Pozitif	Artı	Positiv
Power	Üs	Kuvvet	Üstü
Power series	Kuvvet serisi		Güç sırası
Propagator	Propagatör	İlerletici	Propogator
Quantized	Kuantize	Kuantumlu	Kvantlanmış
Random walk	Gelişigüzel dolaşım		Tesadüfi dolaşma
Rational	Kesirli	Rasyonel	Rasyonal
Real number	Reel sayı	Gerçel sayı	Real sayı
Recursion relation	Tekrarlama bağıntısı		Rekurrent elaqa
Regular	Düzgün	Regüler	Regulyar
Regular singular point	Düzgün tekil nokta		Regulyar singulyar nökte
Regularization	Regülarize etmek	Regülarizasyon,	Regularize etmek
Relation	İlişki	Bağıntı	Elaqe
Relativistic	Relativistik	Göreceli	Relativistik
Remainder term	Kalan terim		Qalan hed
Renormalization	Renormalizasyon	Yeniden normlama	Renormalizaya
Residue	Rezidü	Kalıntı	Çıxıq
Resistance	Direnç	Rezistans	Mügarimet
Rest mass	Hareketsiz kütle	Durgun kütle	Sükünet kütlesi
Result	Sonuç	Netice	Netice
Retarded	Geciktirilmiş	Geriletilmiş	Gecikmiş
Riemann Sheets	Riemann Tabakaları		Riman layları
Root mean square (rms)	Ortalama kök değer		Kökün ortalama değeri
Rotation	Rotasyon	Dönme	Dönme
Row	Sıra		Setir
Scalar	Skalar		Skalyar
Scale	Ölçek		Maştab
Scattering	Saçılma		Sepilme

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Self adjoint operator	Self adjoint operatör		
Separation of variables	Değişkenlerine ayırmak		Değişenlare ayırma
Series	Seri	Dizi	Sıra
Set	Set	Küme	Çoxluq
Signal	Sinyal	İşaret	Signal
Simply connected	Basit bağlantılı		Sade elageli
Sin	Sin	Sinüs	Sinus
Singular point	Tekil nokta		Singulyar nokta
Sink	Kayıp		İtirilen
Slit	Yarık	Ara	Ara
Source	Kaynak		Menbe
Specific heat	Özgül ısı		Xususi istilik
Spherically symetric	Küresel simetrik		Sferik simmetrik
Stable	Kararlı		Sabit
State	Durum	Hal	Hal
Step function	Adım fonksiyonu		Pille fonksiyası
Successive	Ardışık		Ardıcıl
Tan	Tan	Tanjant	Tangent
Theorem	Teorem		Teorem
Theory	Teori	Kuram	Nezeriye
Time slices	Zaman dilimleri		Vaxt aralıqları
Transformation	Dönüşüm	Transformasyon	Dönüşme
Translation	Öteleme	Yer değiştirme	Translasiya
Trial function	Deneme fonksiyonu		Sınaq funksiya
Trigonometric	Trigonometrik		Trigonometrik
Two-to one	İkiden-bire		
Uncertainty	Belirsizlik		Geyri müeyyen
Uniformly convergent	Düzgün yakınsak		Bircinsli yıgılma
Unique	Tek	Bir tek	Tek
Uniqueness	Teklik		Yeğanelik
Universe	Evren	Kainat	Kainat
Unpinned measure	Sabitlenmemiş ölçü		
Unstable	Kararsız		Geyri sabit
Variable	Değişken		Değişen
Variation	Varyasyon	Değişim	Variasiya
Viscous	Vizkoz		Özlü
Viskosity	Vizkozite		Özlüluk

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

DİZİN

Akışkanlar mekaniği, 118
Analitik fonksiyon, 96
Analitik süreklilik, 145
Asimtotik seriler, 247
Asosiye Laguerre denklemi, 24, 41
Asosiye Laguerre polinomu, 26, 41
Ayrılabilir çekirdek, 330
Basit tekil noktası, 143
Belirli integraller, 147,208
Bernoulli polinomları, 238
Bessel denklemi, 67,287
Bessel fonksiyonu, 68
Beta fonksiyonu, 158,160
Bir-e-bir, 103
Bloch denklemi, 394,399
Brown hareketi, 389
Casimir etkisi, 250
Cauchy formülü, 178
Cauchy Goursat teoremi, 131
Cauchy integral teoremi, 132
Cauchy kök testi, 219
Cauchy temel değer, 161,163
Cauchy teoremi, 135
Cauchy-Riemann şartı, 97
Chebyshev denklemi, 61
Chebyshev polinomları, 61,62,223
CTRW, 211
Çekirdek fonksiyonu, 321
Çokdan bire, 105
Dalga treni, 262
Davul zarı, 315
Değişken seriler, 225
Diferintegral, 175,180, 181,186
Diferintegralin özellikleri, 189,190
Diferintegralin tersi, 196
Diferintegrallerinin birleştirilmesi, 193
Difüzyon denklemi, 169,268,389
Dik fonksiyonlar, 20,27,30,38,51,64,72,87
Dipol hesabı, 54
Dirac-delta, 260
Dirichlet şartları, 84
Dönme, 101
Düzgün yakınsaklık, 228
E&M dalga, 286
Elastik çubuk, 306
Elektrostatik, 23,114,115
En küçük özdeğer, 314
Engel etrafından akış, 119
Esas tekil noktası, 142
ESKC, 405
Esnek zincir, 74
Eşlenik harmonik, 98,99
Euler denklemi, 298
Euler Maclaurin formülü, 339
Faz uzayı yol integrali, 415
Feynman yol integrali, 411
Feynman-Kac formülü, 394,396
Fick denklemi, 169
Fokker Planck denklemi, 214
Fonksiyon serileri, 228
Fourier cos dönüşümü, 261
Fourier dönüşümü, 261
Fourier integrali, 258
Fourier serileri, 258
Fourier sin dönüşümü, 261
Fourier ters dönüşümü, 261
Fraktallar, 171
Friedman modeli, 57
Gama fonksiyonu, 156,160
Gauss denklemi, 77
Gauss eğrisi, 53
Gauss testi, 222
Gegenbauer denklemi, 57
Gegenbauer polinomu, 61
Gelişigüzel dolaşım, 211
Genel Fourier serileri, 89
Geodezikler, 299
Geribırakılmış zamanlar, 384
Green fonk.-(d/dt)*(d/dt), 379
Green fonk.-(d/dt), 369
Green fonk.-Difüzyon denk., 373
Green fonk.-Helmholtz denk., 343,351

Green fonk.-Kaynakların varlığı, 376
Green fonk.-Poisson denk., 366
Green fonk.-Propagatörler, 372
Green fonk.-Schrödinger denk., 368
Green fonk.-Sınır şartları, 345
Green fonk.-Skalar dalga denklemi, 381
Green fonk.-Tek boyutta, 339
Green fonk.-Üç boyutta, 362
Green fonk.-Yay problemi, 359
Green fonksiyonları, 339
Grünwald, 175
Haritalama, 100
Harmonik fonksiyon, 98
Harmonik salınıcı, 47
Harmonik seri, 218
Helmholtz denklemi, 7,343,351
Hermit operatörü, 85
Hermite denklemi, 47
Hermite polinomu, 47
Hidrojen atomu, 33
Hipergeometrik fonksiyon, 77
Iraksak seriler, 349
Isı transferi, 202
İki sarkaç, 289
İkiden bire, 104
İlerletilmiş zamanlar, 384
İntegral denklemler, 321,324,325
İntegral dönüşümler, 257
İntegral testi, 219
İzometrik problemler, 308
Jordan teoremi, 153
Karşılaştırma testi, 218
Kısıtlar, 308
Klasik limit, 414
Kompleks cebir, 93
Kompleks fonksiyon, 95
Kompleks türev, 96
Kompleks yol integralleri, 147
Konfluent Gauss denklemi, 81
Konformal haritalama, 113
Konvolusyon, 265,278
Kozmoloji, 57
Kuvvet serileri, 234
Küresel Bessel Fonksiyonu, 70
Küresel harmonikler, 29
Laguerre denklemi, 35
Laguerre polinomu, 36
Laplace denklemi, 7,304
Laplace dönüşümü, 200,270
Laplace ters dönüşümü, 270
Laurent serileri, 136,139, 142
Legendre denklemi, 8
Legendre polinomları, 14,222
Legendre serisi, 222
Leibniz kuralı, 196
Maclaurin teoremi, 232
Mellin dönüşümü, 292
MEMS, 252
Mittag-Leffler fonksiyonları, 205
Modifiye Bessel fonksiyonu, 70
M-testi, 229
Mutlak yakınsaklık, 218
Neumann serileri, 327,328
Neumann serisinde hata, 329
Neumann şartları, 84
Öteleme, 101
Özdeğer problemi, 85,312
Özdeğerler, 86
Özel değerler, 18,40
Özel fonksiyonlar, 165
Özfonksiyonlar, 86
Parallel kapasitör, 125
Parseval teoremi, 266,267
Periodik sınır şartı, 85
Raabe testi, 220
Rayleigh-Ritz yöntemi, 317
Relativistik kinetik enerji, 233
Rezidü teoremi, 143
Riemann formülü, 184
Riemann tabakaları, 108
Riemann-Liouville, 176
Rodriguez formülü, 15,37,43,50

Sabun köpüğü, 299
Schlöfli formülü, 167
Schrödinger denklemi, 7,316,411,413
Schwarz-Christoffel dönüşümü, 121,123
Seriler ile cebir, 226
Serilerin integrali, 236
Serilerin toplamı, 210,239,243
Serilerin türevi, 236
Sıra değişimi, 227
Sıradışı Diferansiyel denklem, 201
Skalar dalga denklemi, 381
Sonsuz çarpımlar, 252
Sturm-Liouville sistemi, 84
Sturm-Liouville teorisi, 83
Süreklilik, 235
Şartlı yakınsaklık, 226
Tam fonksiyon, 20,30,31
Tam set, 88
Taylor serileri, 231,234
Tekil noktaları, 142
Teklik, 236
Tekrarlama bağıntıları, 17,40,44,51,72
Tersinme, 101,236
Trigonometrik Fourier serisi, 89,90
Tüm fonksiyon, 143
Türetim fonksiyonu, 16,36,42,50,64,71
Türevin Fourier dönüşümü, 263
Türevin Laplace dönüşümü, 282
Varyasyon, 295,296,302,303,305
Weierstrass M-Testi, 229
Wiener ölçümü, 393
Wiener yol integrali, 391
Yakınsaklık, 217
Yalnız tekil noktası, 142
Yarı klasik yöntem, 406
Yol integralleri, 402
Zaman dilimleri, 403

Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler
II. baskı 2004
Selçuk Ş. Bayın

Bu kitabın amacı fen ve mühendislik alanlarında çalışacak yüksek lisans ve doktora öğrencilerinin, meslek yaşamlarında gerekli olacak matematik altyapısını sağlam bir şekilde oluşturmalarına yardımcı olmaktır.

Kitaptan araştırmacıların da yararlanması hedeflendiğinden her bölüm bağımsız olarak okunabilecek şekilde konusunun geniş bir özeti olarak yazılmıştır.

Konular çok geniş bir okuyucu kitlesi düşünülerek özenle seçilmiş ve ders kitabında olması gerektiği gibi bir bütünlük içinde sunulmuşlardır. Kitabın tarzı, fizikçi ve mühendislerin matematiğe yaklaşımı doğrultusunda formalizmden çok kullanıma ve uygulamaya yönelliktir. Konular, Matematik yöntemlerin çok disiplinli oluşlarını ön plana çıkaracak biçimde örneklerle işlenmektedir.

Bu kitap yüksek lisans ve doktora düzeyinde zorunlu olarak okutulan ' Matematiksel Yöntemler I&II ' dersleri için uygun ders kitabı özellikleri taşımaktadır. Kitabın tamamı üç yarı yılda okutulabileceği gibi modüler yapısı sayesinde isteyen öğretim üyeleri kendi konu başlıklarını seçerek ileri lisans, yüksek lisans ve doktora düzeylerinde tek veya iki yarı yıllık dersler de tasarlayabilir.

Bir önceki baskısına göre pek çok değişiklik ve yenilik içeren bu kitapta, her geçen gün yeni ve ilginç uygulama alanları bulan kesirli matematik ve yol integralleri konularında iki yeni bölüm de bulunmaktadır.

İÇİNDEKİLER

- Doğa ve Matematik
- Legendre Denklemi ve Polinomları
- Laguerre Polinomları
- Hermite Polinomları
- Gegenbauer ve Chebyshev Polinomları
- Bessel Fonksiyonları
- Gauss Denklemi ve Çözümleri
- Sturm-Liouville Teorisi
- Kompleks Değişkenler ve Fonksiyonlar
- Kompleks İntegraller, Seriler ve Analitik Süreklilik
- Kesirli Türev ve İntegraller: Diferintegraller
- Sonsuz Seriler
- İntegral Dönüşümler
- Varyasyon Hesabı
- İntegral Denklemler
- Green Fonksiyonları
- Green Fonksiyonları ve Yol İntegralleri

ISBN 975-443-397-6

9 799754 433974

İSTANBUL – 2004