TD2 d'Analyse (DUMI2E)

Suites réelles

Le symboles ✍ signale les exercices que les étudiants doivent imprativement savoir traiter. Le symbole ✌ signale les exercices qu'il faut faire chez soi, ils sont relativement faciles . De plus, dans toute la suite, on écrira $(u_n)_n$ au lieu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour alléger la rédaction.

Exercices type Cours

Exercice 1. ✌ [Cours]

1. Montrer qu'une suite convergente est bornée.

2. Montrer que si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

3. Montrer que toute suite extraite d'une suite divergente tendant vers $\pm\infty$ est divergente et tend vers la même chose.

Exercice 2. [Cours]

✍ 1. Montrer que toute suite d'entiers convergente est stationnaire.

✍ 2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent et ont la même limite. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

3. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge[1] .

Exercice 3. [Cours]

✌ ✍ 1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui converge vers l. Montrer que la suite $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$.

✌ 2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers l_1 et l_2. Montrer que la suite $(u_nv_n)_n$ converge vers l_1l_2 et que la suite $(u_n + v_n)_n$ converge vers $l_1 + l_2$.

Application du Cours

[1] ce résultat utilise le point 2. prouvé en cours.

Exercice 4.

1. ✍ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. Etudier la convergence de la suite $u_n = \frac{\alpha^n}{n^p}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, Etudier la convergence de al suite $u_n = \sqrt[n]{\alpha}$.

Exercice 5. ✌ Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ (si elles existent) des suites suivantes

1. $u_n = n^{-1}\, cos\, \sqrt{n}$.
2. $v_n = n\, sin\, n^{-2}, \quad n \geq 1$.
3. $w_n = sin\, n$.

Exercice 6. ✍ On considère la suite $(u_n)_n$ définie comme suit

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

on introduit la suite

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite réelle mais non rationnelle.

Exercice 7. ✌ En utilisant le critère de Cauchy, dites si la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - log(n)$$

converge ou diverge.

Exercice 8. ✌ On définit la suite $(u_n)_n$ comme suit:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{k}}.$$

Montrer qu'il existe des suites convergentes $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9. ✌ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ les deux suites définies respectivement par:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \alpha\, y_n}{1+\alpha}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + \beta\, y_n}{1+\beta},$$

et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. De plus, soit $\lambda = \frac{\beta-\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}$.

1. Vérifier que $|\lambda| < 1$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$x_n - x_{n-1} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\lambda^{n-1}(x_0 - y_0).$$

3. En déduire que $(x_n)n$ et $(y_n)_n$ convergent vers la même limite et la déterminer.

Exercice 10. ✌

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que la suite (u_n) définie par
$$u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
est convergente.

Exercice 11 [Theoreme de Stolz]. On considère deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ tel que:

- b_n est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$.

- Il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$$

Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Exercice 12 [Une toile d'araignée]. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence suivante
$$u_{n+1} = -\frac{1}{4}\,u_n^2 + 3$$
Montrer que les suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs sont convergentes. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente [2].

[2] Aux chargés des TDs: illustrer la toile en dessinant un graphique

Exercice 13 [Sur une moyenne]. On considère deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par la relation suivante:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \\ \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\,(a_n + b_n) \\ \\ a_0 = a > 0, b_0 = b > a. \end{cases}$$

Montrer que les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et qu'elles ont une limite commune appartenant à $[\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}]$.

Exercice 14 [Suites adjacentes récurrentes]. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par les relations de récurrence suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}\,(2\,u_n + v_n) \\ \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}\,(u_n + 2\,v_n) \\ \\ u_0 = 4, v_0 = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2. Déterminer leurs limites.

Exercice 15. Soit $(u_n)_n$ une suite définie par la relation de récurrence suivante:

$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, \quad u_0 = a \in \mathbb{R} \quad \text{et}, \quad u_1 = b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n = u_n - u_{n-1})_n$ est une suite géométrique convergente.

2. En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16 [Suites arithmético-géometriques]. ✍

1. Montrer que toute suite arithmético-géometrique $(u_n)_n$ vérifie

$$u_{n+1} = q^{n+1} u_0 + r\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ q, r \in \mathbb{R}, q \neq 1.$$

2. Application: Un agent souhaite emprunter 100000 euros sur 300 mois à un taux d'intérét $r = 5\%$ par an. Calculer le montant de ses mensualités.

Exercice 17. ✍ Soit $(u_n)_n$ une suite d'élements dans $\mathbb{R}_+^\star$, telle que

$$u_{p+q} \leq u_p + u_q, \quad \forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n>0}$ converge, et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n>0} \frac{u_n}{u}.$$

Exercice 18 [Constante d'Euler]. ✍ Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\frac{1}{n+1} \leq log(n+1) - log(n) \leq \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que
$$log(n+1) \leq H_n \leq log(n) + 1.$$
3. Déterminer la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par
$$u_n = H_n - log(H_n)$$
est décroissante et positive.
5. Conclure.[3]

Exercice 19 [Methode d'Héron]. ✍ Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et on considère la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Le but de cet exercice est de prouver que $(u_n)_n$ tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4\,u_n^2}.$$
2. Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_n > 0$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{a}$.

[3]Question toujours ouverte pour les passionnés mais les autres aussi: la limite de u_n s'appelle la constante de Leonhard Euler, 17007-1783, mathématicien d'origine suisse, cette limite vaut environ 0.5772156649... mais on ne sait toujours pas si ce réel est rationnel ou irrationnel !!

4. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.

5. Supposons que $u_1 - \sqrt{a} \leq k$. Montrer que
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}$$

5. Application: Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 20. Soit n un entier naturel non nul

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution u_n dans $[0, 1]$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.