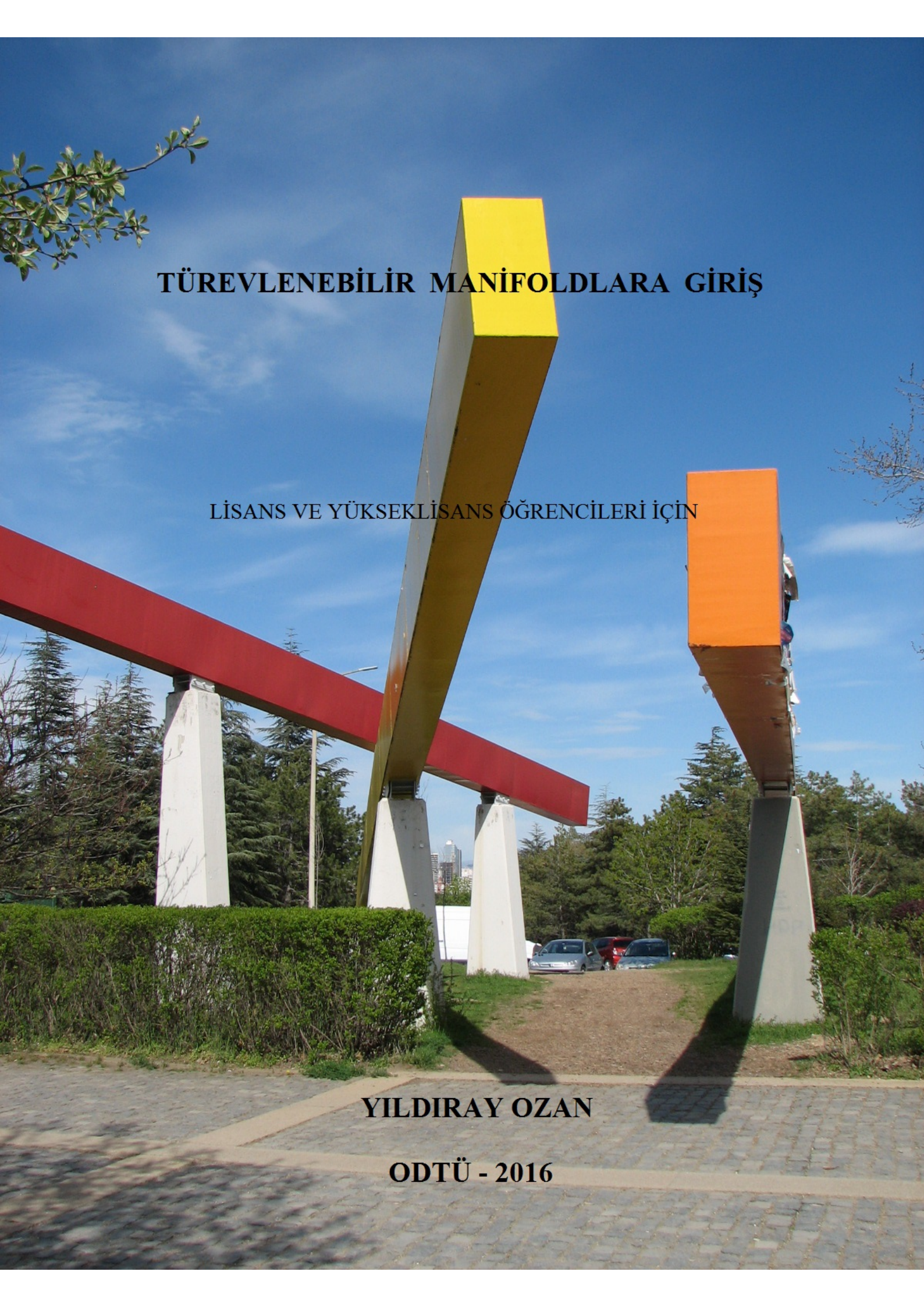




TÜREVLENEBİLİR MANİFOLDLARA GİRİŞ

LİSANS VE YÜKSEKLİSANS ÖĞRENCİLERİ İÇİN

YILDIRAY OZAN

ODTÜ - 2016

Türevlenebilir Manifoldlara Giriş

Yıldıray Ozan

Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Matematik Bölümü

7 Temmuz 2016

Sevgili anne ve babamın hatırasına

“Duyduğumu unuturum. Gördüğümü hatırlarım. Yaptığımı anlarım.”

-Konfüçyüs

Önsöz

Eğriler ve yüzeyler tarih boyunca insanların zihnini meşgul etmiştir. Benzerleri Neolitik çağlarda dahi bilinen Platonik cisimlerin sınıflandırılması Antik Yunan uygarlığında yapılmıştı. Eğri ve yüzeylerin modern anlamda tanımlanıp temel özelliklerinin ortaya konması ise Gauss ve Riemann gibi devleri bekledi. Riemann Gauss’un yüzey ve eğriler üzerine yaptığı çalışmaları mükemmelleştirip yüksek boyutlara taşıyarak bugün artık diferansiyel geometri ve Riemann geometrisi olarak bilinen alanların temellerini attı. Poincaré topolojik uzayların teorisine temel grup ve homoloji gibi cebirsel nesneleri katarak geometri ve topoloji çalışmalarındaki matematiksel kesinlik düzeyini artırdı. Homoloji teorisi yüzeyler için bilinen Euler formülünün çok daha genel bir özellik olduğunu ortaya koydu. Yüzeylerin cebirsel topolojik ve diferansiyel geometrik özellikleri arasındaki ilişki, matematik tarihinin en güzel teoremlerinden biri olan Gauss-Bonnet Teoremi’yle taçlandırıldı. Günümüz modern geometri ve topolojisinin Riemann-Roch ve Endeks Teoremleri gibi en güzel ve kuvvetli sonuçları Gauss-Bonnet Teoremi’nin derinleşmiş genellemeleri olarak görülebilir.

Bu kitabın yazımı yazarın Gauss-Bonnet Teoremi’nin anlaşılabilir bir kanıtını fazlaca diferansiyel geometri kullanmadan sadece türevlenebilir manifoldlar teorisi dilinde yazma arzusu ile 2010 yılı Haziran ayında başlamıştır. İlk başta sadece yazarın ODTÜ’de vermiş olduğu “Calculus on Manifolds” ve “Differentiable Manifolds” derslerine ait notların kapsamlı bir şekilde elden geçirilerek yazılması amaçlanmıştı. Daha sonra ise Gauss-Bonnet Teoremi’nin genel hali ve bunu yapmak için gerekli teorilerin de kitaba dahil edilmesine karar verildi. Oluşturulan bu teorilerin diğer birçok sonucunu da kitaba eklememek olmazdı. Böylece kitap vektör demetlerinin karakteristik sınıfları ve çeşitli uygulamalarıyla son buldu. Şunu belirtelim ki Guillemin ve Pollack’ın “*Differential Topology*” ([16]) adlı kitabı yazarın model aldığı kaynaklarından biridir. Bu kitap sadece içeriği bakımından değil yazım üslubu açısından da vazgeçilmez. Özellikle birçok önemli teoremin kanıtlarının küçük parçalar halinde okuyucuya yaptırılması eğitsel açıdan da çok doğru bir yaklaşımdır.

Birinci ünite bu kitabı okuyabilmek için gerekli olan topoloji, analiz ve doğrusal cebir konularının bir özetini içermektedir. Her ne kadar bu konuların hemen hemen hepsi lisans derslerinde görülmüş olsa da, öğrencilerin lisans üstü eğitime birçok eksikle başladığı göze çarpmaktadır. Örneğin matematikteki en önemli yapılardan biri olan bölüm kümeleri, grupları, uzayları gibi çok temel konular doktora öğrencilerinin zihninde dahi tam oturmamış olabiliyor. Bunun

yanında lisans eğitiminin ilk yıllarında görülen doğrusal cebir konularının hızlıca gözden geçirilmesi yerinde olabilir. Kitabın bütünlüğünü korumak amacıyla bu ünite, Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi, Ters Fonksiyon Teoremi ve doğrusal operatörlerin temel formları kanıtlarıyla verilmiştir. Ünite içinde yer kalmadığı için bahsedemediğimiz bazı önemli detaylar ise alıştırmalarda karşınıza çıkacaktır.

İkinci ünite ise kitabın temel unsurları olan manifoldların tanımı ile başlıyor. Teğet vektör ve teğet vektör demetinin yapısı verildikten sonra, manifoldların Öklit uzayına gömülmesi için hazırlık yapıyoruz. Bu kapsamda sonraki ünitelerde de sürekli yararlanacağımız Sard Teoremi'ni kanıtı ile vereceğiz. Tıkız manifoldların gömülmesi konusunu bu ünite içinde işlerken, tıkız olmayanların gömülmesi konusunu alıştırmalarda okuyucuya bırakacağız. Bu işlemler için gerekli olan Birimin Ayrışımı Teoremi'ni de kanıtıyla sunacağız. Daha sonra manifoldlar üzerinde türevlenebilir formları ve Stokes' Teoremi'ni vereceğiz. Bunu yaparken vektör uzaylarının ve manifoldların yönlendirilmesi konusunu son derece dikkatle yapmaya çalışacağız. Bu bağlamda karmaşık manifoldlar üzerindeki doğal yönlendirmeden bahsedecek ve bu doğal yönlendirmenin çarpıcı sonuçlarından bir iki örnek sunacağız. Öklit uzayı içindeki disk ve kürelerin hacimlerini hesaplama işini de bu üniteye sıkıştıracağız.

Üçüncü ünite manifoldların Euler sınıfının manifold üzerindeki herhangi bir Riemann metriğinin eğriligi cinsinden ifade edilebilmesi için gerekli alt yapıyı oluşturmak amacıyla yazılmıştır. İlk önce manifold üzerinde verilen bir vektör alanının integralinin varlığını gösterdik. Daha sonra bunu kullanarak Lie türevini tanımladık ve Lie türevinin temel özelliklerini çıkardık. Diğer taraftan, manifold üzerine Riemann metriği koyduktan sonra jeodeziklerden bahsetmemek olmazdı. Jeodezik eğri diferansiyel denkleminin Fourier Serileri yardımıyla standart olmayan bir kanıtını da bu üniteye koyduk. Ayrıca manifoldlar üzerinde jeodezik-konveks komşulukların varlığını Spivak'ın kitabındaki sunumu ([35]) takip ederek yaptık. Daha sonra vektör demetlerini ve demetlerin cebirini tanımladık. Teğet vektör demetinde olduğu gibi bu demetler üzerine de metrik koyarak demetlerin geometrisini bağlantı ve eğrilik formları yardımıyla anlamaya çalıştık. Eğrilik formunu altıncı ünite, Euler sınıfını tanımlamak için kullanacağız. Bu ünite, Poincaré Yarı Düzlemi'nin jeodeziklerinin belirlenmesi ve jeodeziklerin bir uygulaması olan Tüp Komşuluk Teoremi ile sona erdi.

Dördüncü ünite De Rham Kohomolojisinin tanımı ile başlıyor. Çemberin kohomolojisini doğrudan hesapladıktan sonra bunun uygulaması olarak sarılma, dönme ve geçişme sayılarını tanımlayıp çeşitli hesaplamalar yapacağız. Daha sonra iki boyutlu kürenin kohomolojilerini doğrudan hesaplayıp burada kullanılan fikirleri homolojik cebirle birleştirerek Mayer-Vietoris dizisini oluşturacağız. Bu dizi yardımıyla kürelerin ve bazı diğer manifoldların kohomoloji vektör uzaylarını belirledik. Poincaré izomorfizmasını kanıtlayabilmek için tıkız destekli kohomolojiyi tanımlayacağız ve bu kohomoloji teorisini kullanarak manifoldlar arasındaki fonksiyonların derecesini tanımlayıp hesaplamalar ya-

pacağız. Bu hesaplamalardan birisi daha çok cebirsel topoloji kitaplarında bulunan, bir küreden kendisine giden ve derecesi sıfır olan fonksiyonların sabite homotopik olduğunun kanıtlanmasıdır. Bu kanıt oldukça teknik olduğu için, bu sonucun çemberler için olan özel hali, aynı fikirler yardımıyla alıştırılarda kanıtlanmaktadır. Bu ünite Poincaré İzomorfizması ve bazı uygulamaları ile bitecektir.

Beşinci ünite kesişim teorisinin kuruluşu ile başlayacaktır. Daha sonra alt manifoldların Poincaré dualini tanımlayıp, bunu alt manifoldların kesişimlerinden yararlanarak kohomoloji halkalarının hesaplanmasında kullanacağız. Ayrıca alt manifoldların Poincaré dualini kullanarak Gysin Tam Dizisi'ni oluşturacağız. Bu diziyi ise Leray-Hirsch ve Künneth teoremlerini kanıtlamakta kullanacağız. Bu ünite de ayrıca Poincaré-Hopf Teoremi'ni ve Lefschetz Sabit Nokta Teoremi'ni kanıtlayacağız. Temel bazı örneklerde alt manifoldların kesişimlerini doğrudan hesaplayacağız. Bunların içinde karmaşık projektif uzay içindeki alt manifoldların kesişimleri ve gerçel projektif düzlemin karmaşık düzlem içinde kendisi ile kesişimi yer alacaktır. Cebirsel eğriler teorisinin en temel sonuçlarından olan Bezout Teoremi, Riemann-Hurwitz Teoremi ve Hurwitz Teoremi'nin kanıtları ile bu üniteyi bitireceğiz. Cebirsel eğriler ve yüzeyler cebirsel geometrinin yanı sıra diferansiyel geometri ve topoloji açısından da çok zengin bir örnek kaynağıdır. Bu ünitenin alıştırılmaları kuadratik formların Arf değişmezinin ve bunun uygulaması olan topolojik Arf değişmezinin bir sunumunu da içermektedir.

Altıncı ve son ünite Euler karakteristik sınıfının kuruluşu ile başlayacak. Gauss-Bonnet Teoremi'nin kanıtını verdikten sonra karmaşık vektör demetlerinin Chern karakteristik sınıflarını tanımlayacağız. Chern sınıflarının bir uygulaması olarak “yan yana gelme eşitliği”ni vereceğiz. Buradan da Derece-Cins formülünü elde edeceğiz. Aslında değişik fikirler içerdiği için Derece-Cins formülünün Chern karakteristik sınıflarını kullanmayan bir başka kanıtını da sunacağız. Bu yaklaşım aynı dereceye sahip tüm cebirsel eğrilerin oluşturduğu uzayın (bir çeşit Moduli Uzayı) incelenmesine dayanır ve eğriler dışındaki diğer cebirsel (yüzeyler veya yüksek boyutlu) nesnelere de uygulanabilir. Son olarak türevlenebilir manifoldların Pontryagin karakteristik sınıflarını ve sayılarını tanımlayıp bu sayıların bazı topolojik uygulamalarını göreceğiz. Bu uygulamalardan en dikkat çekici olanı Milnor'un 1962 yılında kendisine Fields Madalyası kazandıran çalışmalarından biri olan 7-boyutlu egzotik küreler ile ilgili 1956 tarihli çalışmasıdır ([27]). Annals of Mathematics dergisinde yayınlanan 6 sayfalık makale son derece anlaşılabilir olmakla beraber tekil homoloji dilini kullandığı için kitaba doğrudan konulamadı. Milnor'un makalesini takip ederken tekil homoloji içeren bölümlerini kitabın bütünlüğünü korumak adına De Rham Kohomolojisi ile değiştireceğiz.

Dikkatli okuyucularımız Gauss-Bonnet Teoremi'nin yaygın olarak bilinen ve Gauss'un jeodezik üçgenlerle ilgili sonucunu kullanan kanıtını vermediğimizi fark edeceklerdir. Bunun önemli bir nedeni bu kanıtın tıkHz yüzeylerin bir üçgenleme kabul ettiği gerçeğini kullanmasıdır. Bu sonuç ilk olarak 1925 yılın-

da Radó [31] tarafından kanıtlanmıştır. Fakat Radó'nun vermiş olduğu kanıt oldukça zordur ve içerik olarak bu kitabın alanının dışında kalır. Bu kitabın ele aldığı tüm konular klasik sayılabilir. Bu nedenle kitabın içindeki muhtemel matematiksel hatalar ve yazım yanlışları dışındaki hiçbir ifadenin özgünlüğü iddia edilmemektedir.

Kitabı okumak isteyen veya derslerinde kullanmak isteyen akademisyenlere faydalı olabilecek birkaç noktayı belirtmek istiyorum: Birinci ünite kitabı rahat şekilde takip edebilmek için gerekli alt yapıyı oluşturmak için yazılmıştır. Dolayısıyla, gerekli alt yapıya sahip okuyucular doğrudan bir sonraki üniteye geçebilirler. Diğer taraftan lisans derslerinde pek zaman ayrılamayan Ters Fonksiyon Teoremi ile Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi'ni kanıtlarıyla sunuyoruz. Ayrıca boyutu sonlu olan vektör uzayları üzerinde tanımlı doğrusal operatörlerin temel formları detaylarıyla okuyucuya sunulmuştur.

Bir dönemlik türevlenebilir manifoldlar dersi için şöyle bir yol izlenebilir: Birinci ünitenin gerekli görülen yerleri hızlıca yapıldıktan sonra ikinci ünite detaylarıyla yapılmalıdır. Üçüncü üniteden sadece 3.1 yapılarak yola devam edilebilir. Dördüncü üniteden ise sadece 4.1, 4.2 ve 4.3.1 işlenerek ders bitirilebilir. Diferansiyel geometri derslerinden Gauss eğriliğini görmüş bir öğrenci grubuna Sonuç 6.1.11 (Gauss-Bonnet Teoremi) ve bunu takip eden kanıt da verilebilir.

Eğer iki dönemlik bir plan yapılmak isteniyorsa tüm kitap okunabilir. Yine öğrencilerin diğer derslerde görmüş oldukları konular hızlı bir şekilde hatırlatılarak geçilebilir. Bu kitabı çalışan bir öğrenci türevlenebilir manifoldların temel özelliklerinin yanı sıra vektör demetleri ve karakteristik sınıflar konusunda da temel bilgilere kavuşmuş olacaklardır. Ayrıca cebirsel topolojinin konuları olan tıkHz destekli kohomoloji, derece teorisi, Leray-Hirsch ve Künneth teoremlerini de görmüş olacaklardır. Diğer taraftan, cebirsel topoloji derslerinde önemli bir yer tutan Temel Grup ve Örtü Uzayları ise kitabımızda yer almamaktadır.

Ülkemizdeki bir çok lisans üstü program cebir ve diferansiyel geometri alanlarında oldukça kuvvetlidir. Diğer taraftan, diferansiyel topoloji, cebirsel topoloji ve cebirsel geometri konularında büyük eksiklikler vardır. Bu nedenle ilk üç ünite birçok okulda hızlı bir şekilde işlenebilecekken kitabın geri kalanında daha yavaş ve dikkatli olunmalıdır. Muhtemel zaman darlıklarından dolayı bazı teoremlerin kanıtları öğrencilere bırakılabilir. Ayrıca alıştırmalar öğrencilerin en fazla zaman harcaması gereken yerlerdir. Alıştırmalar öğrenci tarafından konuları özümsemek adına birer fırsat olarak görülmelidir. Problem çözmeden matematik öğrenmeyi beklemek, yüzmeyi veya bisiklete binmeyi iyi bilen birini seyrederek bunları öğrenmeyi beklemeye benzer. Bunun ise pek mümkün olmadığı tecrübelerimizle sabittir.

Kapak Sayfaları Hakkında

Ön kapaktaki resimde yer alan heykel ODTÜ Mimarlık Fakültesi önünde bulunmaktadır. 'Yok' isimli bu heykel 1982 yılında Rolf Westphal tarafından

yapılmıştır. Heykel uzayda herhangi ikisi aykırı olan üç doğrudan oluşmaktadır. Uzayda herhangi ikisi aykırı olan n doğrunun durumları (konfigürasyonları) önemli ve zor bir problemidir. Problemin ancak $n \leq 7$ olduğu durumlarda çözümü vardır. Bu konuyla ilgili kapsamlı bir makale [41] nolu referansta bulunmaktadır. Arka kapakta ise ODTÜ Devrim Stadyumu yer almaktadır.

Teşekkür

Matematik öğrenme sürecinde ve akademik hayatımda çok büyük desteklerini gördüğüm Turgut Önder'e ve doktora tez danışmanım Selman Akbulut'a minnettarım. Matematik okumayı, yazmayı, resmini çizmeyi ve yapmayı bana gösteren O.D.T.Ü. ve Michigan State Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Michigan State Üniversitesi doktora programına kabul edilmemdeki katkılarından dolayı Charles L. Seebeck'e ayrıca teşekkür ederim. Yirmi yılı aşkın bir süredir görev yapmaktan zevk aldığım O.D.T.Ü. Matematik Bölümü'ndeki tüm çalışma arkadaşlarıma ve öğrencilerimize bu güzel çalışma ortamı için teşekkür ediyorum. Kitabın yazımı sırasında ihtiyaç duyduğumda yardımlarını esirgemeyen, doğrudan veya dolaylı olarak katkı sağlayan Hayday Alıcı, Hüseyin Altundağ, Nurömür Hülya Argüz, Refik İnanç Baykur, Hayati Bennun, Mehmet Büge, Baran Çetin, Mehmet Dağlı, Yasir Kızmaz, Belgin Korkmaz, Mustafa Korkmaz, Ferit Öztürk, Ayla Ross, Süleyman Kaan Samurkaş, Sinan Sertöz, Bayram Tekin, Andreas Tiefenbach, Bülent Tosun, Muhiddin Uğuz, Çağlar Uyanık, Üstün Yıldırım ve Burak Yıldız'a teşekkür ediyorum. Kitabın hakemliğini yapmış olan meslektaşlarıma harcadıkları zaman ve emek için teşekkür ederim. Katkıları sayesinde kitap çok daha rahat okunur ve anlaşılır bir hale geldi. Ayrıca bilimle tanışmama yardım eden Faruk Ekiz, Rahmi Önkibar ile Zeki Yıldırım'ı ve beni her zaman destekleyen anne ve babamı şükranla anıyorum. Varlıklarından her zaman güç aldığım kardeşlerime de sonsuz teşekkürler.

Son olarak, sürekli destek olmanın yanı sıra kitabın ilk halini detaylı bir şekilde okuyan sevgili eşim Ferihe Atalan'a, ilham kaynaklarım olan oğlum ve kızıma, yaklaşık otuz yıldır mensubu olmaktan gurur duyduğum ve bana kattıkları için kendimi hep borçlu hissettiğim Orta Doğu Teknik Üniversitesi'ne minnettarım.

Yıldırım Ozan

O.D.T.Ü. Ankara

İçindekiler

	i
Önsöz	iii
1 Yardımcı Bilgiler	1
1.1 Genel Topoloji	1
1.1.1 Kümeler	1
1.1.2 Topolojik Uzaylar	2
1.1.3 Tıkız, Bağlantılı Uzaylar	6
1.1.4 Metriklenebilir Uzaylar	10
1.2 Analiz	15
1.2.1 Türevlenebilme	15
1.2.2 Ters Fonksiyon Teoremi	18
1.2.3 Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi	26
1.3 Doğrusal Cebir	28
1.3.1 Determinant Fonksiyonu	28
1.3.2 Tensörler	32
1.3.3 Temel Formlar ve Bazı Uygulamaları	36
1.3.4 Örnek Kanıtlar	38
1.4 Alıştırmalar	44
2 Türevlenebilir Manifoldlar	63
2.1 Türevlenebilir Manifoldlar	63
2.1.1 Temel Tanımlar	63
2.1.2 Teğet Uzayı	66
2.1.3 Teğet Demeti	70
2.1.4 Bölüm Manifoldları	73
2.1.5 Rank Teoremleri	75
2.2 Manifoldların Gömülmesi	80
2.2.1 Birimin Ayrışımı	80
2.2.2 Sard Teoremi	83
2.2.3 Manifoldların Gömülmesi	88
2.3 Türevlenebilir Formlar ve Stokes Teoremi	90
2.3.1 Türevlenebilir Formlar	90
2.3.2 Geri Çekme	92

2.3.3	Manifoldlar Üzerinde Türevlenebilir Formlar	93
2.3.4	Dış Türev	95
2.3.5	Manifoldların Yönlendirilmesi	98
2.3.6	Stokes Teoremi	104
2.3.7	Disk ve Kürenin Hacimleri	113
2.3.8	Karmaşık Manifoldlar Üzerinde Özel Formlar	115
2.4	<i>Alıştırmalar</i>	120
3	<i>Vektör Alanları ve Demetleri</i>	127
3.1	<i>Vektör Alanlarının İntegralleri ve Lie Türevleri</i>	127
3.1.1	Vektör Alanlarının İntegralleri	127
3.1.2	Lie Türevi	132
3.2	<i>Jeodezikler</i>	140
3.2.1	Jeodezik Denklemi	140
3.2.2	Hacim Elemanı ve Yıldız Operatörü	154
3.3	<i>Vektör Demetleri</i>	161
3.3.1	Temel Tanımlar	161
3.3.2	Vektör Demetleri Üzerinde İşlemler	164
3.3.3	Vektör Demetleri Üzerinde Bağlantılar	171
3.3.4	Poincaré Yarı Düzlemi	182
3.3.5	Normal Demet ve Tüp Komşuluk Teoremi	186
3.4	<i>Alıştırmalar</i>	190
4	<i>De Rham Kohomoloji</i>	197
4.1	<i>De Rham Kohomoloji</i>	198
4.1.1	De Rham Kohomolojisinin Tanımı	198
4.2	<i>Poincaré Yardımcı Teoremi</i>	203
4.3	<i>Hesaplamalar ve Uygulamalar</i>	208
4.3.1	Sarılma, Dönme ve Geçişme Sayıları	208
4.3.2	Mayer-Vietoris Dizisi	216
4.3.3	Tıkız Destekli Kohomoloji	223
4.4	<i>Poincaré İzomorfizması</i>	242
4.5	<i>Alıştırmalar</i>	250
5	<i>Kesişim Teorisi</i>	255
5.1	<i>Çapraz Kesişim</i>	255
5.2	<i>Alt Manifoldların Kesişimi ve Poincaré Duali</i>	260
5.3	<i>Vektör Demetleri ve Poincaré-Hopf Teoremi</i>	268
5.3.1	Vektör Demetlerinin Euler Karakteristiği	268
5.3.2	Gysin Tam Dizisi	272
5.3.3	Leray-Hirsch ve Künneth Teoremleri	275
5.3.4	<i>Poincaré-Hopf Teoremi</i>	278
5.3.5	<i>Lefschetz Sabit Nokta Teoremi</i>	281
5.3.6	<i>Riemann-Hurwitz Teoremi</i>	283

5.4	<i>Alıştırmalar</i>	287
6	<i>Karakteristik Sınıflar</i>	305
6.1	<i>Euler Karakteristik Sınıfı</i>	305
6.2	<i>Chern Karakteristik Sınıfları</i>	326
6.2.1	Chern Sınıflarının Özellikleri	330
6.2.2	Uygulamalar	332
6.3	<i>Pontryagin Karakteristik Sınıfları</i>	339
6.4	<i>7-Boyutlu Egzotik Küreler</i>	344
6.5	<i>Alıştırmalar</i>	354
	Kaynakça	369
	Semboller	372
	Dizin	377
	<i>Kitabın Yazımı ile İlgili Notlar</i>	387

“Kendinizi balıkçı değil bahçıvan olarak görün. Balıkçı balığı neyin çekeceğini bilir. Bahçıvan ise gerekli ortamı hazırlar ve bitkilerin büyümesini sağlar. Matematik takımı kurarken en iyi öğrencileri alıp kazanmaya çalışmayın; bunun yerine alabildiğiniz kadar çok öğrenci alıp onları matematikte daha iyi yapmak için elinizden gelen her şeyi yapın.”

-Ashley Reiter

1

Yardımcı Bilgiler

Bu ünite de türevlenebilir manifoldların genel teorisini anlayabilmek için gerekli olan temel bilgiler sunulacaktır. Sırasıyla genel topoloji, analiz ve doğrusal cebir başlıkları altında toplayacağımız bu bilgilere hakim olan okuyucular doğrudan bir sonraki üniteye geçebilirler. Bu ünitenin amacı, genel topoloji, analiz veya doğrusal cebir konularını daha önceden görmemiş olan okuyuculara öğretmek değildir. Tersine bu konuları daha önce çalışmış olanlara biraz hatırlatmak, varsa eksik bilgilerini kapatabilmeleri için fırsat sunmaktır. Her matematik ders kitabında olduğu gibi alıştırmalar kısmı öğrencilerin en fazla zaman harcaması beklenen bölümdür. Genel topoloji ve analiz alanlarında daha kapsamlı ve detaylı bilgi için [30, 33, 34, 37, 38] numaralı referanslara bakabilirsiniz.

1.1 Genel Topoloji

1.1.1 Kümeler

Topolojinin tanımını vermeden önce kümeler ve fonksiyonlara dair bazı temel bilgileri hatırlayalım. Bir X kümesi ve onun bir $A \subseteq X$ alt kümesini alalım. X fark A kümesini $X - A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ olarak tanımlayacağız.

Eğer $f : X \rightarrow Y$, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon ve $B \subseteq Y$ bir alt küme ise B alt kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ olarak tanımlanır.

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ X kümesinin bir alt kümeler ailesi olsun. Bu durumda

$$f(\cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in \Lambda} f(A_\alpha)$$

olduğu halde, söz konusu alt kümelerin görüntülerinin ara kesitleri olunca sadece $f(\cap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} f(A_\alpha)$ içermesi doğrudur. Başka bir deyişle, bir alt

kümeler ailesinin ara kesitlerinin görüntüsü görüntülerin ara kesitinin alt kümesidir ve genelde bu iki küme farklı olabilir. Ters görüntü alma işlemi ise hem arakesit hem de birleşim işlemi ile yer değiştirebilir: $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, Y kümesinin bir alt kümeler ailesi olsun. Bu durumda,

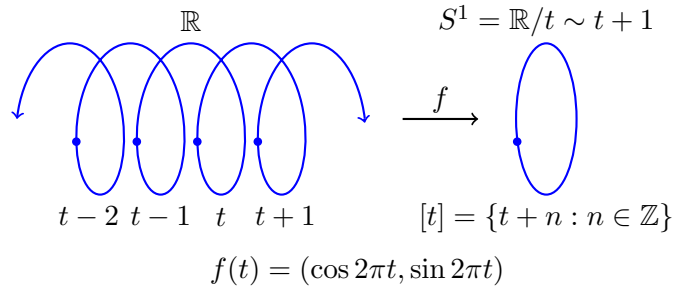
$$f^{-1}(\cup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \cup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha) \text{ ve } f^{-1}(\cap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \cap_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$$

olur.

X bir küme ve $\sim$ bu küme üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $P : X \rightarrow X/\sim$ bölüm fonksiyonu olmak üzere her Y kümesi ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $f = \tilde{f} \circ P$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ fonksiyonun var olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$, $x \sim y$, için $f(x) = f(y)$ olmasıdır. Bu durumda $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu bölüm kümesinde tanımlanır denir. $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ fonksiyonuna ise $f : X \rightarrow Y$ tarafından belirlenen fonksiyon diyeceğiz.

Örnek 1.1.1. $f : X \rightarrow Y$ örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $x \sim y$ ancak ve ancak $f(x) = f(y)$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu bu bağıntının bölüm kümesinden Y kümesine bire bir $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ eşlemesini verir.

Daha somut bir örnek için $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$, fonksiyonunu düşünelim. Burada S^1 düzlemdeki birim çemberi göstermektedir. Bu örten fonksiyona karşılık gelen bağıntı, her $s, t \in \mathbb{R}$ için $s \sim t$ ancak ve ancak $s - t \in \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanır. Aslında aynı örnek bölüm grupları konusunda da verilebilirdi: $\mathbb{R}$ kümesi toplama işlemi ile değişmeli bir grup oluşturur. $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ fonksiyonu ise tam sayıların oluşturduğu $\mathbb{Z}$ normal alt grubuna karşılık gelen bölüm homomorfizmasıdır. Bölüm grubu, S^1 birim çemberi, üzerindeki işlemin karmaşık sayıların üzerindeki çarpma işlemi olduğunun gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Bölüm uzayı

1.1.2 Topolojik Uzaylar

Tanım 1.1.2. X bir küme olmak üzere bu kümenin kuvvet kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan herhangi bir τ alt kümesine X üzerinde bir topolojidir denir:

1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,
2. Λ bir endeks kümesi olmak üzere her $\alpha \in \Lambda$ için bir $O_\alpha \in \tau$ var ise $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha \in \tau$,
3. Her $O_i \in \tau$, $i = 1, \dots, k$, için $\bigcap_{i=1}^k O_i \in \tau$.

Bu durumda (X, τ) ikilisine *topolojik uzay*, τ topolojisinin elemanlarına (bu topolojinin) *açık kümeler*, açık kümelerin tümleyenlerine de (bu topolojinin) *kapalı kümeler* denir.

Bir küme üzerinde birden fazla topoloji tanımlanabileceği açıktır. τ_1 ve τ_2 verilen bir X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_2 topolojisine τ_1 topolojisinden daha *ince* ya da daha *kuvvetli* denir. Bu durumda τ_2 topolojisi τ_1 topolojisinden daha *zayıf* ya da daha *kaba* da denir.

Topolojik uzaylar kategorisinin gönderimleri sürekli fonksiyonlardır. Herhangi iki (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzayları arasında herhangi bir

$$f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$$

fonksiyonu alalım. Eğer her açık $U \in \tau_Y$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü X içinde açık bir küme ise $(f^{-1}(U) \in \tau_X)$ f fonksiyonuna *sürekli* denir. Eğer, sürekli f fonksiyonunun sürekli bir ters fonksiyonu varsa bu fonksiyona bir *homeomorfizma* denir. Bu durumda (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylarına *homeomorfik uzaylar* denir.

Uyarı 1.1.3. *Süreklilik tanımındaki ‘açık kümeler’ ifadesi yerine ‘kapalı kümeler’ yazarak sürekliliğin bir başka (denk) tanımını elde ederiz, çünkü her $B \subseteq Y$ alt kümesi için $X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B)$ dir.*

Örnek 1.1.4. $\mathbb{R}^n$, ($n \geq 0$), üzerindeki standart topolojinin açık kümeleri şu şekilde tanımlanır: Bir $U \subseteq \mathbb{R}^n$ alt küme olmak üzere her $x \in U$ için $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\} \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ gerçel sayısı var ise U alt kümesine *açıktır* denir. ($\|x - y\| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ ifadesi $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ noktaları arasındaki Öklit uzaklığını göstermektedir). Aksi söylenmediği sürece Öklit uzayını her zaman bu topolojisi ile beraber düşüneceğiz.

Örnek 1.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. Bu durumda $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ koleksiyonu A alt kümesi üzerinde bir topoloji belirler ve bu topolojiye *alt uzay topolojisi* veya (X, τ) uzayından edinilen *topoloji* denir.

Bu örnek elimizdeki bir topolojik uzaydan yeni topolojik uzaylar elde etmenin bir yolu olarak da görülebilir.

Verilen topolojik uzaylardan yeni bir topolojik uzay üretmenin bir yolu çarpım topolojisi. Çarpım topolojisini tanımlamadan önce bir topolojinin tabanından bahsedelim: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ bir alt aile olsun. Eğer $X = \cup_{U \in \beta} U$ ve her $V \in \tau$ ve $x \in V$ için $x \in U \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \beta$ açık kümesi varsa β ailesine bu topolojinin bir *tabanıdır* denir.

Şimdi de β bir herhangi bir X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu aileye $X, \emptyset$ ve β ailesinin sonlu sayıdaki elemanlarının ara kesitlerinin rastgele birleşimlerinden oluşan alt kümelerini de ekleyerek bir topoloji oluşturabiliriz. Bu topolojiye β *tarafından üretilen topoloji* denir.

(X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki topolojik uzay olsun. $\beta = \tau_X \times \tau_Y$ ailesinin $X \times Y$ kümesi üzerinde ürettiği topolojiye bu iki uzayın *çarpım topolojisi* denir. Daha genel olarak eğer $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ bir topolojik uzaylar ailesi ise $U_i \in \tau_i$ ve I endeks kümesinin sonlu sayıda elemanı dışındaki tüm elemanları için $U_i = X_i$ olacak şekilde seçilen U_i açık kümelerinin $\prod U_i$ direk çarpımlarının oluşturduğu β ailesinin ürettiği topolojiye $\prod X_i$ çarpım kümesi üzerindeki *çarpım topolojisi* denir.

Uyarı 1.1.6. 1) *Çarpım topolojisi, çarpım kümesinden çarpımı oluşturan uzaylara tanımlanan her bir izdüşüm fonksiyonunu sürekli yapan en zayıf (kaba) topolojidir.*

2) *Yukarıdaki tanımda topolojimizin tabanını tüm $\prod U_i, U_i \in \tau_i$, çarpımları da alabilirdik. Fakat bu durumda $\prod X_i$ çarpım kümesi üzerinde elde edilecek topoloji gereğinden fazla kuvvetli olacağı için kullanışlı olmayacaktır. (Bkz. Alıştırma 5) Kutu topolojisi olarak adlandırılan bu topoloji çarpım kümesi üzerindeki her bir izdüşüm fonksiyonunu sürekli yapan en kuvvetli (ince) topolojidir.*

3) *Gerçel sayılar kümesi üzerindeki standart topolojinin açık kümeleri sayılabilir çoklukta ayrık açık aralığın birleşimidir (Bağlantılı uzaylar bölümüne bakınız). Dolayısıyla, bu şekildeki iki açık kümenin çarpımı da düzlemde yine sayılabilir çoklukta ayrık açık dikdörtgen bölgenin birleşimi olacaktır. Bu nedenle düzlemdeki bir çok açık küme, örneğin yuvarlar, gerçel sayılar kümesinin açıklarının bir çarpımı olamazlar. Diğer taraftan, düzlemdeki her açık küme sayılabilir çoklukta açık dikdörtgen bölgenin birleşimi (genelde ayrık olmayan) olarak yazılabilir.*

Yeni topolojik uzaylar elde etmenin bir diğer yolu ise bölüm uzaylarıdır: $f : X \rightarrow Y$ örten bir küme fonksiyonu ve τ_X X üzerinde bir topoloji olsun. $f : X \rightarrow Y$ örten fonksiyonunun vermiş olduğu $P : X \rightarrow X/\sim$ bölüm kümesini ve $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ bire bir eşlemesini düşünelim (bkz. Örnek 1.1.1). $X/\sim$ bölüm kümesi üzerine koyabileceğimiz ve P bölüm fonksiyonunu sürekli yapacak en kuvvetli topolojiye *bölüm topolojisi* denir. Benzer şekilde Y kümesi üzerinde f fonksiyonunu sürekli yapan en kuvvetli topolojiyi τ_Y ile gösterelim. Bu durumda $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ fonksiyonu bir homeomorfizma olur.

Önerme 1.1.7. $P : X \rightarrow X/\sim$ bir bölüm uzayı, $f : X \rightarrow Y$ ve $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$, $f = \tilde{f} \circ P$, koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f : X \rightarrow$

Y fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

Örnek 1.1.8. Bir önceki bölümde ele aldığımız

$$f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t \in \mathbb{R},$$

fonksiyonu bize $\tilde{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$ homeomorfizmasını verecektir. Burada $\mathbb{R}/\sim$ ve dolayısıyla S^1 üzerindeki topoloji bölüm uzayı topolojisidir. S^1 üzerindeki bu topoloji ile S^1 'in düzlemden edindiği alt uzay topolojisinin aynı olduğunun gösterilmesini okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz.

Bir (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa bu uzaya Hausdorff (veya T_2 uzayı) denir.

$\mathbb{R}^n$ standart topolojisiyle bir Hausdorff uzaydır. Hausdorff uzayların Kartezyen çarpımları da Hausdorff uzaylardır. Bir Hausdorff uzayın tüm alt uzayları da benzer şekilde Hausdorff'tur. Diğer taraftan Hausdorff olma özelliği bölüm uzaylarına geçmeyebilir.

Örnek 1.1.9. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \{-1, 1\}\}$ alt uzayını düşünelim. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart topoloji Hausdorff olduğu için X uzayı da Hausdorff'tur. X üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı tanımlayalım:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak $(x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2)$ veya $(x_1 = x_2 \neq 0)$. Bu denklik bağıntısından elde edilen bölüm uzayı Hausdorff değildir. Bunu görmek için bölüm uzayında $(0, 1)$ ve $(0, -1)$ noktalarının denklik sınıflarının farklı olduklarını fakat bu iki noktayı ayrı ayrı içeren herhangi iki açık kümenin ayrık olamayacağını görmek yeterlidir.

Aşağıda bir topolojik uzay için Hausdorff olmanın kullanışlı bir karakterizasyonunu vereceğiz.

Önerme 1.1.10. X topolojik uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ köşegen alt kümesinin $X \times X$ çarpım uzayı içinde kapalı olmasıdır.

Kanıt : İlk önce $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ köşegen alt kümesinin $X \times X$ çarpım uzayı içinde kapalı olduğunu kabul edelim. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olacak şekilde iki nokta alalım. O halde $(x, y) \notin \Delta$ olur. Δ kapalı bir alt küme olduğu için X içinde $x \in U, y \in V$ ve $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık alt kümeleri bulabiliriz. Fakat $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ tam olarak $U \cap V = \emptyset$ anlamına gelir. O halde, X uzayı Hausdorff'tur. Bu kanıtın tüm adımları kolayca ters çevrilebileceği için diğer yönün kanıtını okuyucuya bırakacağız. $\square$

1.1.3 Tıkız, Bağlantılı Uzaylar

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X = \cup_{i \in I} U_i$ olacak şekilde X uzayının açık kümelerinden oluşan bir $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesine X 'in bir *açık örtüsü* denir.

Tanım 1.1.11. *Bir (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzaya tıkızdır denir.*

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt uzay olsun. Eğer A alt uzayı tıkız ise A 'ya X 'in *tıkız bir alt kümesidir* denir.

Örnek 1.1.12. 1) Gerçel sayılar kümesi (standart topolojisi ile) tıkız değildir çünkü $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

2) Benzer şekilde $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı tıkız değildir çünkü $\{(1/n, 1]\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

3) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ veya } x = 1/n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ alt kümesi tıkızdır çünkü 0 noktasını içeren her açık küme bu kümenin sadece sonlu elemanını dışarıda bırakır ($\lim 1/n = 0$ olduğundan dolayı) ve bu sebepten dolayı bu kümenin her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü vardır.

Yukarıdaki örnekler Öklit uzayının bir alt kümesinin tıkız olması için bu alt kümenin sınırlı ve kapalı olması (yığılma noktalarını içermesi) gerektiğini vurgulamaktadır. Heine-Borel Teoremi de aslında tam olarak bunu ifade etmektedir.

Teorem 1.1.13 (Heine-Borel Teoremi). $X \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. X alt kümesinin Öklit uzayından gelen topolojisi ile tıkız bir uzay olması için gerek ve yeter koşul X alt kümesinin sınırlı ve kapalı olmasıdır.

Aşağıdaki önermelerin kanıtları okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır.

Önerme 1.1.14. *Tıkız bir uzayın her kapalı alt kümesi tıkızdır. Diğer taraftan, Hausdorff bir uzayın her tıkız alt kümesi kapalıdır.*

Önerme 1.1.15. $f : X \rightarrow Y$ tıkız bir X uzayından Y uzayına sürekli bir fonksiyon ise $f(X) \subseteq Y$ alt kümesi de tıkızdır.

Bu sonucu Heine-Borel teoremi ile birleştirirsek şu sonucu buluruz.

Sonuç 1.1.16. *Tıkız bir X uzayında tanımlı her gerçel sayı değerli $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun en büyük (maksimum) ve en küçük (minimum) değeri vardır.*

Aşağıdaki örnek bire bir, örten ve sürekli bir fonksiyonun homeomorfizma olmasının gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 1.1.17. τ_1 ile $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiyi, τ_2 ile de tabanı aşağıdaki aile olan topolojiyi göstereyim:

$$\beta = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, ab > 0\} \cup \{(a, b) \cup (c, \infty) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}.$$

Şimdi $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, fonksiyonunu düşünelim. f 'in bire bir ve örten olduğu açıktır. $\beta \subseteq \tau_1$ olduğundan dolayı f süreklidir. Diğer taraftan $(-1, 1) \in \tau_1$ ve $(-1, 1) \notin \tau_2$ olduğundan f 'in tersi sürekli değildir.

Diğer taraftan aşağıdaki sonuç bazı durumlarda ters fonksiyonun da sürekli olacağını gösteriyor.

Önerme 1.1.18. X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bire bir sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer X tıkız ve Y Hausdorff ise f fonksiyonu görüntüsü üzerine bir homeomorfizmadır.

Kanıt : $A = f(X)$ ile f 'in görüntüsünü ifade edersek tek yapmamız gereken $f^{-1} : A \rightarrow X$ ters fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermektir. O halde, bir kapalı $C \subseteq X$ alt kümesi alalım. X tıkız ve C de kapalı küme olduğundan C kümesi de tıkız olur. f sürekli olduğu için $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ kümesi Y Hausdorff uzayı içinde tıkız ve dolayısıyla kapalı bir küme olur. O halde, f^{-1} ters fonksiyonu süreklidir. $\square$

Eğer bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu görüntüsü üzerine bir homeomorfizma ise f 'ye *topolojik gömme fonksiyonu* denir.

Örnek 1.1.19. $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ uzayı (Öklit topolojisi ile) olsun ve X üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı şu şekilde tanımlansın: $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ ancak ve ancak $(y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısı vardır. X uzayından iki boyutlu birim küreye, S^2 , tanımlanan $F(x) = x/\|x\|$, $x \in X$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, fonksiyonu bölüm uzayına inerek $\tilde{F} : X/\sim \rightarrow S^2$ fonksiyonunu verecektir. Bu fonksiyonun bire bir ve örten olduğu açıktır. Her bir koordinat fonksiyonu sürekli olduğu için F ve dolayısıyla $\tilde{F}$ süreklidir. $P : X \rightarrow X/\sim$ bölüm fonksiyonu olsun. $P(X) = P(S^2)$ olduğu için $X/\sim = P(S^2)$ bölüm uzayı tıkızdır. O halde, yukarıdaki önerme gereğince $\tilde{F} : X/\sim \rightarrow S^2$ fonksiyonu bir homeomorfizmadır (aslında bölüm uzayının $\mathbb{R}^3$ 'e bir gömülmesini verir; bkz. Alıştırma 13).

$f : X \rightarrow Y$ topolojik uzayların sürekli bir fonksiyonu olmak üzere eğer her tıkız $C \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(C)$ ters görüntüsü de tıkız oluyorsa f 'ye *düzgün* bir fonksiyondur denir. Diğer taraftan, eğer her açık (kapalı) $U \subset X$ alt kümesi için $f(U)$ kümesi açık (kapalı) ise f fonksiyonuna *açık (kapalı)* fonksiyon denir. Düzgün fonksiyonların en önemli özelliklerinden biri aşağıdaki sonuçtur.

Önerme 1.1.20. X bir Hausdorff topolojik uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün ve sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f kapalı bir fonksiyondur. Eğer f ayrıca bire bir ise $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir topolojik gömme fonksiyonudur.

Kanıt : $A \subseteq X$ içinde kapalı bir alt küme olsun. $f(A)$ alt kümesinin kapanışında bir $y_0 \in \overline{f(A)} \subseteq \mathbb{R}^n$ noktası alalım. O halde, $f(A)$ içinde y_0 noktasına yakınsayan bir (y_n) , $(n > 0)$, dizisi vardır. Örnek 1.1.12(3)'den dolayı $C = \{y_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ alt kümesi tıkızdır. O halde $f^{-1}(C)$ ve dolayısıyla $f^{-1}(C) \cap A$ alt kümesi X içinde tıkızdır. Bu durumda (y_n) , $(n > 0)$, dizisi

$f(f^{-1}(C) \cap A)$ tıkmaz kümesinin içindedir. Bu tıkmaz küme aynı zamanda kapalı olduğundan dolayı $y_0 = \lim y_n \in f(A)$ sonucunu elde ederiz. Diğer bir deyişle $f(A)$ kapalıdır.

İkinci kısmın kanıtı f 'nin kapalı bir fonksiyon olmasından kolayca elde edilir. $\square$

Tanım 1.1.21. *Bir (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan iki açık alt kümesinin ayrık birleşimi olarak yazılamıyorsa bu uzaya bağlantılıdır denir. Bağlantılı olmayan uzaylara bağlantısız uzaylar denir.*

(X, τ) topolojik uzayının verilen her iki $x, y \in X$ noktası için $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ olacak şekilde sürekli bir $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ fonksiyonu varsa bu uzaya yol bağlantılıdır denir.

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt uzay olsun. Eğer A alt uzayı bağlantılı ise A 'ya X 'in bağlantılı bir alt kümesidir denir.

X bir topolojik uzay olmak üzere X üzerinde $\sim$ denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: $x \sim y$ ancak ve ancak x ve y noktalarının her ikisini birden içeren bir bağlantılı $C \subseteq X$ alt kümesi vardır. (Aslında bu bağıntının geçişme özelliği olduğunu göstermek için Örnek 1.1.25'in ilk kısmını kullanmamız gerekir.) Bu bağlantının denklik sınıflarına X uzayının *topolojik* ya da *bağlantılı bileşenleri* denir. Her denklik sınıfı, X uzayının, bu denklik sınıfının herhangi bir noktasını içeren en büyük bağlantılı alt kümesidir.

Örnek 1.1.22. 1) Gerçek sayılar (standart topolojisi ile) uzayının her aralığı bağlantılıdır. Örnek olarak $X = [0, 1]$ aralığının bağlantılı olduğunu gösterelim. X içinde $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$ ve $X = U \cup V$ olacak şekilde açık kümelerin var olduğunu kabul edelim. $0 \in U$ olsun ve $a = \sup\{x \mid [0, x] \subseteq U\}$ sayısını göstereyim. $a \in (0, 1)$ olduğu kolayca görülür. Eğer $a \in U$ ise U açık bir küme olduğu için $a \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U$ olacak şekilde pozitif ϵ gerçel sayısı vardır. O halde, $a + \epsilon/2 \in U$ olacaktır ve bu a sayısının seçimiyle çelişir. Eğer $a \notin U$ ise $a \in V$ olur ve yine V açık bir küme olduğu için $a - \epsilon/2 \in V$ olacak şekilde bir (başka) pozitif ϵ sayısı vardır. Fakat bu durum da tekrar a sayısının seçimi ile çelişir. O halde en başta yaptığımız kabul yanlıştır ve dolayısıyla $[0, 1]$ aralığı bağlantılıdır.

2) $A \subseteq \mathbb{R}$ boş kümeden farklı bir alt küme olsun. Eğer A bir aralık değilse öyle bir $a \in \mathbb{R} - A$ sayısı vardır ki $A \cap (-\infty, a) \neq \emptyset \neq (a, \infty) \cap A$ olur ve dolayısıyla A bağlantılı bir küme olamaz. O halde, $\mathbb{R}$ 'nin bağlantılı alt kümeleri sadece aralıklardır.

Yukarıdaki örneğin ilk kısmını kullanarak yol bağlantılı bir uzayın aynı zamanda bağlantılı olduğunu görebiliriz (bkz. Alıştırma 14).

Tıkmazlık konusunda olduğu gibi kanıtları alıştırma niteliğinde olan aşağıdaki sonuçların kanıtlarını okuyucuya bırakıyoruz.

Önerme 1.1.23. *Bağlantılı bir uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bağlantılıdır.*

Teorem 1.1.24 (Ara değer teoremi). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bağlantılı bir X uzayında tanımlanan gerçel sayı değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x) < c < f(y)$ olacak şekilde $x, y \in X$ elemanları ve $c \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı varsa, $c = f(z)$ olacak şekilde en az bir $z \in X$ elemanı vardır.

Örnek 1.1.25. 1) $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $E_\lambda \subseteq X$ bağlantılı alt kümelerin oluşturduğu bir aile olsun. Eğer $\cap_\lambda E_\lambda \neq \emptyset$ ise $\cup_\lambda E_\lambda$ bağlantılı bir kümedir.

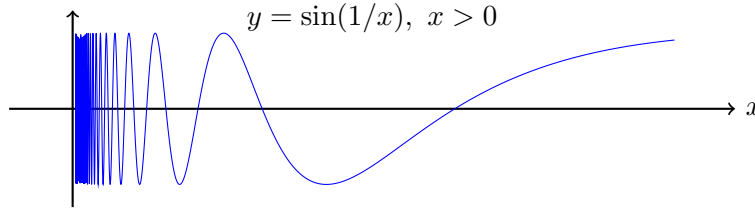
Bağlantılı alt kümelerin ortak bir elemanları varsa bu alt kümelerin birleşimi de bağlantılıdır.

2) $E \subseteq X$ bağlantılı bir alt küme ve $E \subseteq F \subseteq \bar{E}$ ise F alt kümesi de bağlantılıdır.

3) A topolojik X uzayının bağlantılı bir alt kümesi olmak üzere, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ koşulunu sağlayan her B alt kümesi de bağlantılıdır (kanıtı okuyucuya bırakılmıştır). Topolojicinin sinüs eğrisi olarak bilinen

$$S = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

eğrisi yol bağlantılı olduğu için düzlemin bağlantılı bir alt kümesidir. Bu kümenin kapanışı $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ kümesini içerdiği için S eğrisinin y -ekseni ile birleşiminden oluşan alt uzay, $\tilde{S}$, bağlantılıdır ama yol bağlantılı değildir. Bunu şu şekilde görebiliriz.



Şekil 1.2: Topolojicinin Sinüs Eğrisi.

Diyelim ki, $\tilde{S} = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1, 1]\}$ kümesi yol bağlantılı olsun. $\gamma(0) = (0, 0)$ ve $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$ olacak şekilde sürekli bir $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{S}$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, eğrisi alalım. $x(t)$ sürekli fonksiyonu için, $x(0) = 0$ ve $x(1) = 1/\pi$ olduğundan $x^{-1}((0, \infty))$ açık ters görüntü kümesinin 1 noktasını içeren bileşeni $(a, 1]$, $1 > a \geq 0$, şeklinde bir aralıktır. Ayrıca, $x(a) = 0$ olmalıdır çünkü $a \notin x^{-1}((0, \infty))$ olacak şekilde seçilmiştir. Ancak her $t \in (a, 1)$ için $x(t) > 0$ olduğundan

$$y(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \sin(1/x(t)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(1/x)$$

elde ederiz. Fakat en son yazdığımız limitin değeri yoktur, dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Önerme 1.1.26. X bir topolojik uzay olmak üzere, X 'in topolojik bileşenleri birer kapalı alt kümedir. Diğer taraftan, bu uzayın hem açık hem de kapalı her alt kümesi bir topolojik bileşendir. Ayrıca, X uzayı topolojik bileşenlerinin ayrık birleşimi olarak tek bir şekilde yazılabilir. Son olarak, eğer X sonlu sayıda topolojik bileşenden oluşuyorsa her bileşen aynı zamanda açık bir alt kümedir.

Örnek 1.1.27. X topolojik uzayında gerçel sayı değerli bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alalım. Eğer her $x \in X$ için, $f(x) = f(y)$, her $y \in U_x$ için, olacak şekilde bir $x \in U_x \subseteq X$ açık kümesi varsa bu fonksiyona yerel olarak sabit fonksiyon denir. Eğer fonksiyon sürekli ve yerel sabit ise X 'in her bağlantılı bileşeninde sabit olmalıdır. Bunu şu şekilde görebiliriz: $a \in \mathbb{R}$ alalım. $\{a\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi kapalı olduğundan $f^{-1}(a) \subseteq X$ kapalıdır. Diğer taraftan yerel olarak sabit fonksiyon olmanın tanımından $f^{-1}(a) \subseteq X$ alt kümesi açık bir kümedir. O halde $f^{-1}(a) \subseteq X$ alt kümesi X uzayının topolojik bileşenlerinin bir birleşimidir. Buna göre $\sim$ aynı topolojik bileşenin içinde olma bağıntısı ise (Önerme 1.1.26'in öncesindeki paragrafa bakınız) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bize sürekli bir $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verecektir.

1.1.4 Metriklenebilir Uzaylar

Boş olmayan bir X kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alalım: Her $x, y, z \in X$ için

1. $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
3. $d(x, y) \geq 0$ dır ve eşitlik ancak ve ancak $x = y$ durumunda sağlanır.

Bu durumda d fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine ise *metrik uzay* denir. Eğer her $x, y \in X$ için, $d(x, y) \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ gerçel sayısı varsa bu metriğe *sınırlıdır* denir. (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ bir nokta ve r pozitif bir gerçel sayı olsun. $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ alt kümesine x merkezli ve r yarıçaplı yuvar denir. Bir metrik uzayın tüm açık yuvarlarının ürettiği topolojiye *metrik uzay topolojisi* denir. X kümesi üzerindeki bir τ topolojisi bu küme üzerindeki bir metrik tarafından üretilen topoloji ise (X, τ) topolojisine *metriklenebilir* topoloji denir.

d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde tanımlanan metrikler olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y) ,$$

koşulunu sağlayan $m, M > 0$ gerçel sayıları varsa bu iki metriğe *denk metrikler* denir. Denk metriklerin aynı topolojiyi ürettiklerinin gösterilmesini alıştırma-lara bırakıyoruz.

Örnek 1.1.28. Daha önce ele aldığımız, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklit topolojisi Öklit metriği tarafından üretilen topolojidir.

(X, d) bir metrik uzay, $y \in X$ bir nokta ve (x_n) bu uzay içinde bir dizi olsun. Eğer verilen her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için, $(n \geq N \Rightarrow d(x_n, y) < \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisi y noktasına *yakınsıyor* denir ve $\lim x_n = y$ olarak yazılır. Eğer verilen her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için $(m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir. Kolayca görüleceği gibi her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi aynı zamanda yakınsak ise bu uzaya *tam* uzay denir.

Topolojik özellikler metrik uzaylarda sadece diziler yardımı ile ifade edilebilir. Aşağıdaki ifadelerin kanıtlarını okuyucuya bırakıyoruz.

Önerme 1.1.29. 1. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ bir alt küme olsun. A alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A 'nın içindeki her yakınsak dizinin limitinin de A 'nın içinde olmasıdır.

2. (X, d) tam bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A alt kümesi kapalıdır ancak ve ancak A alt uzayı da tam bir metrik uzaydır.

3. Metrik uzaylar arasındaki bir $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul X içindeki her yakınsak (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisinin (Y, d_Y) içinde yakınsak olmasıdır.

(X, d) metrik uzayı içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu metrik uzaya *dizisel tıkHz* metrik uzay denir.

Teorem 1.1.30. (X, d) bir metrik uzay olsun.

A) (X, d) dizisel tıkHz bir uzay ise sınırlı ve tamdır.

B) (X, d) metrik uzayının tıkHz olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın dizisel tıkHz olmasıdır.

Bu teoremin kanıtını topolojik ve metrik uzaylara ait bir çok fikri ve tekniği içerdiği için burada vereceğiz.

Kanıt : A) X dizisel tıkHz bir uzay olsun. Eğer X sınırlı değil ise her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $B(x, n) \neq X$ olacaktır. Buna göre sabit bir $x \in X$ için $x_n \in X - B(x, n)$ olacak şekilde seçilen (x_n) dizisinin yakınsak alt dizisi olmayacaktır. Çünkü limiti z_0 olan yakınsak bir (z_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, x) = d(z_0, x)$ olacaktır fakat bizim durumumuzda $d(x_n, x) \geq n$ 'dir. O halde X metrik uzayı sınırlıdır.

Şimdi de X metrik uzayının tam olduğunu görelim. X uzayı içinde bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. X dizisel tıkHz olduğundan bu dizinin yakınsak bir (x_{k_n}) alt dizisi vardır. $\lim x_{k_n} = x_0$ olsun. Buna göre verilen her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için, öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki, her $m, n \geq n_0$ tam sayıları için $d(x_m, x_n) < \epsilon/2$ ve $d(x_{k_n}, x_0) < \epsilon/2$ eşitsizlikleri sağlanır. Son olarak üçgen eşitsizliğini kullanarak $d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) < \epsilon$, $n \geq n_0$, elde

ederiz. O halde, (x_n) dizisi de x_0 noktasına yakınsamaktadır ve dolayısıyla (X, d) metrik uzayı tam bir uzaydır.

B) İlk önce (X, d) uzayının tıkHz olduğunu kabul edelim ve bu uzayın dizisel tıkHz olduğunu gösterelim. X içinde bir (x_n) dizisi alalım. Şimdilik her $x \in X$ elemanı için, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x, r_x)\}$ kümesi sonlu bir küme olacak şekilde bir $r_x > 0$ gerçel sayısının varlığını kabul edelim. $\{B(x, r_x)\}_{x \in X}$ ailesi X tıkHz uzayının açık bir örtüsü olduğu için bu ailenin sonlu sayıda elemanı da X uzayını örtecektir. Bu ise doğal sayılar kümesinin sonlu olması çelişkesine yol açacaktır. O halde, X öyle bir $x_0 \in X$ noktası vardır ki, her $r > 0$ gerçel sayısı için $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x_0, r)\}$ kümesi sonsuzdur. Bu durumda (x_n) dizisinin x_0 noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Başka bir deyişle (X, d) metrik uzayı dizisel tıkHzdır.

Şimdi de (X, d) metrik uzayının dizisel tıkHz olduğunu kabul edelim ve bu topolojik uzayın tıkHz olduğunu gösterelim. Diyelim ki, X tıkHz olmasın. O halde, X uzayının sonlu alt örtüsü olmayan bir $\{U_\alpha\}$ örtüsü vardır. X uzayı dizisel tıkHz olduğu için X tam ve sınırlıdır. X sınırlı olduğu için $X \subseteq B(x, R)$ olacak şekilde $x \in X$ noktası ve $R > 0$ gerçel sayısı vardır. O halde,

$$A = \{r > 0 \mid \text{bazı } x_1, \dots, x_k \in X \text{ için } X \subseteq B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_k, r)\}$$

gerçel sayıların boş olmayan alttan sınırlı bir alt kümesidir.

$\delta = \inf A$ olsun. Eğer $\delta \neq 0$ olsaydı hiçbir alt dizisi Cauchy dizisi olmayan bir diziyi şu şekilde kurabilirdik: $\epsilon = \delta/2$ alalım. Buna göre $\epsilon \notin A$ olur. $x_1 \in X$ alalım ve $B(x_1, \epsilon)$ yuvarını düşünelim. $\epsilon \notin A$ olduğu için $X - B(x_1, \epsilon) \neq \emptyset$ olur. O halde $x_2 \in X - B(x_1, \epsilon)$ seçebiliriz. Benzer şekilde $x_3 \in X - (B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon))$ ve tümevarım metodu ile $x_n \in X - (B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, \epsilon))$ seçebiliriz. Her $m \neq n$ doğal sayı çifti için $d(x_n, x_m) > \epsilon$ olduğundan dolayı bu dizinin hiçbir alt dizisi Cauchy değildir. Fakat bu durum da (X, d) metrik uzayının dizisel tıkHz olması ile çelişir. O halde, $\delta = 0$ olmalıdır.

İlk önce $r = 1$ alalım. O halde $X \subseteq B(x_1, 1) \cup \dots \cup B(x_k, 1)$ olacak şekilde bazı $x_1, \dots, x_k \in X$ noktaları vardır. $\{U_\alpha\}$ örtüsünün hiçbir sonlu alt örtüsü X 'i örtemediği için bir birim yarıçaplı bu yuvarlardan birini de örtemeyecektir. Diyelim ki bu yuvar $B(x_1, 1)$ olsun. Şimdi $r = 1/2$ alalım. Bu durumda $B(x_1, 1) \subseteq B(y_1, 1/2) \cup \dots \cup B(y_l, 1/2)$ olacak şekilde $y_1, \dots, y_l \in X$ noktaları vardır. Benzer şekilde $B(y_i, 1/2)$ yuvarlarından birisi, diyelim ki $B(y_1, 1/2)$, $\{U_\alpha\}$ örtüsünün hiçbir sonlu alt örtüsü tarafından örtelemeyecektir ve $B(x_1, 1) \cap B(y_1, 1/2) \neq \emptyset$ olacaktır. Bu durumda üçgen eşitsizliğini kullanarak $d(x_1, y_1) \leq 1 + 1/2 = 3/2$ eşitsizliğini elde ederiz. Daha sonra $r = 1/4$ alarak bir $z_1 \in X$ noktası bulabiliriz, öyleki $B(z_1, 1/4)$ yuvarı $\{U_\alpha\}$ örtüsünün hiçbir sonlu alt örtüsü tarafından örtelemez ve $B(y_1, 1/2) \cap B(z_1, 1/4) \neq \emptyset$. Dolayısıyla $d(y_1, z_1) \leq 1/2 + 1/4 = 3/4$ olur. Bu işleme devam ederek ve elde ettiğimiz dizinin terimlerinin gerekirse isimlerini değiştirerek aşağıdaki özelliklere sahip bir (x_n) dizisi elde ederiz:

1) $B(x_i, 1/2^i)$ yuvarı $\{U_\alpha\}$ örtüsünün hiç bir sonlu alt örtüsü tarafından örtü-

lemez;

2) Her i için, $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^{i-1} + 1/2^i < 1/2^{i-2}$ olur.

Üçgen eşitsizliğini kullanarak her $n < m$ için, $d(x_n, x_m) < 1/2^{n-3}$ olduğunu kolayca görebiliriz. O halde, (x_n) dizisi Cauchy'dir. Dizisel tıklılık tam uzay olmayı gerektirdiği için bu dizinin x_0 gibi bir limiti olacaktır.

Son olarak, $x_0 \in U_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir α_0 seçelim. U_{α_0} açık bir küme olduğu için $B(x_0, \rho) \subset U_{\alpha_0}$ olacak şekilde bir $\rho > 0$ gerçel sayısı bulabiliriz. Yeterince büyük bir n doğal sayısı için $d(x_n, x_0) < \rho/2$ ve $1/2^n < \rho/2$ eşitsizliklerini elde ederiz. Fakat bu bize $B(x_n, 1/2^n) \subseteq B(x_0, \rho) \subseteq U_{\alpha_0}$ çelişkisini verecektir. Bu çelişki kanıtı tamamlar. $\square$

Örnek 1.1.31 (Lebesgue sayısı). $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tıkHz (X, d) metrik uzayının bir açık örtüsü olsun. Her $x \in X$ için $B(x, r_x) \subseteq U_{\alpha_x}$ olacak şekilde $r_x > 0$ ve $\alpha_x \in \Lambda$ seçelim. X uzayı tıkHz olduğu için $\{(B(x, r_x/2))_{x \in X}$ açık örtüsünün, $\{B(x_i, r_{x_i}/2)\}_{i=1}^n$ gibi sonlu bir alt örtüsü X uzayını örtecektir. $\delta = \min\{r_{x_i}/2 \mid i = 1, \dots, n\}$ olsun. Şimdi herhangi bir $y \in X$ için $B(y, \delta)$ yuvarını ele alalım. İlk önce, $d(x_i, y) < r_{x_i}/2$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ vardır. Buna göre her $z \in B(y, \delta)$ için üçgen eşitsizliğinden $d(z, x_i) \leq d(z, y) + d(y, x_i) < \delta + r_{x_i}/2 \leq r_{x_i}$ elde ederiz. O halde, $z \in B(x_i, r_{x_i}) \subseteq U_{\alpha_{x_i}}$ ve dolayısıyla $B(y, \delta) \subseteq U_{\alpha_{x_i}}$ olur. Başka bir deyişle rastgele bir noktanın etrafına çizilebilecek δ yarıçaplı yuvar açık örtünün elemanlarının birinin içinde kalacaktır. Bu sayıya açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ örtüsünün bir Lebesgue sayısı denir.

Lebesgue sayısının bir uygulaması olarak aşağıdaki önermeyi kanıtlayalım.

Önerme 1.1.32. TıkHz bir metrik uzaydan başka bir metrik uzaya giden her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.

Kanıt: (X, d_1) tıkHz bir uzay olmak üzere sürekli bir $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ fonksiyonu alalım. Bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda her $x \in X$ noktası için,

$$d_1(x, y) < \delta_x \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon/2$$

olacak şekilde bir pozitif $\delta_x > 0$ gerçel sayısı vardır. TıkHz (X, d_1) uzayının $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı $\lambda > 0$ olsun. Şimdi $d_1(x, y) < \lambda$ olacak şekilde herhangi iki nokta alalım. O halde, $y \in B(x, \lambda) \subseteq B(z, \delta_z)$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası bulabiliriz. Son olarak, $x, y \in B(z, \delta_z)$ olduğundan

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(z)) + d_2(f(z), f(y)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde ederiz. $\square$

Tanım 1.1.33. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde bir $1 > \lambda \geq 0$ gerçel sayısı varsa f fonksiyonuna bir daraltma fonksiyonu, λ katsayısına ise daraltma katsayısı denir.

Bir daraltma fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır.

Teorem 1.1.34 (Banach Daraltma İlkesi). (X, d) tam bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir daraltma fonksiyonu ise f fonksiyonunun bir ve tek bir sabit noktası vardır.

Kanıt: Bu teorem üçgen eşitsizliğinin basit bir uygulamasıdır. Herhangi bir $x_1 \in X$ noktası seçelim ve $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$, ile tanımlanan diziyi göz önüne alalım. $0 \leq \lambda < 1$ gerçel sayısı f fonksiyonunun daraltma sabiti ise, her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \lambda^{n-2} d(x_2, x_1)$$

elde edilir. Diğer taraftan, üçgen eşitsizliğini kullanarak, her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_2, x_1)$$

ve dolayısıyla

$$d(x_n, x_1) \leq (\lambda^{n-2} + \lambda^{n-3} + \cdots + 1) d(x_2, x_1) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x_2, x_1)$$

buluruz. Son olarak her $m > n \geq 1$ tam sayı çifti için,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lambda d(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \cdots \\ &\leq \lambda^{n-1} d(x_{m-n+1}, x_1) \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve $0 \leq \lambda < 1$ olması (x_n) 'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam bir metrik uzay olduğu için (x_n) Cauchy dizisinin x_0 gibi bir limit noktası vardır: $\lim x_n = x_0$. $f : X \rightarrow X$ sürekli olduğu için $f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x_0$ elde ederiz. Dolayısıyla, x_0 noktası $f : X \rightarrow X$ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

Son olarak, eğer $f : X \rightarrow X$ fonksiyonunun $y_0 \neq x_0 \in X$ gibi bir başka sabit noktası daha olsaydı $0 < d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq \lambda d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$ çelişkisini elde ederdik. Dolayısıyla, f fonksiyonunun sadece tek bir sabit noktası vardır. $\square$

Uyarı 1.1.35. Yukarıdaki kanıt tekniği aynı zamanda sabit noktanın nasıl bulunacağını da gösteriyor. İstedığınız $x_1 \in X$ noktasından başlayarak $x_{n+1} = f(x_n)$, $n > 1$, formülü ile tanımladığımız (x_n) dizisi varlığını ve tekliliğini kanıtladığımız sabit noktaya yakınsayacaktır.

Banach Daraltma İlkesi bir metrik uzay üzerinde tanımlanan denklemleri çözmek için kullanılabilir. Bu iş için ilk önce uygun metrik uzayların kurulması gerekmektedir. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $B(X)$ ile X uzayında tanımlı

gerçel (veya karmaşık) sayı değerli sınırlı fonksiyonlar kümesini düşünelim. Bu küme üzerindeki supremum metriği şu şekilde tanımlanır: $f, g \in B(X)$ ise

$$d_{sup}(f, g) = \sup\{ \|f(x) - g(x)\| \mid x \in X \}.$$

$B(X)$ kümesi bu metrik ile tam metrik uzay olur. Ayrıca, $B(X)$ içindeki sürekli fonksiyonlar alt kümesi, $C(X) \cap B(X)$, bu uzayın kapalı bir alt kümesidir ve dolayısıyla da tam bir metrik uzay oluşturur. Eğer X uzayı tıkkız ise $C(X) \subseteq B(X)$ (Sonuç 1.1.16) olacağından $C(X)$ alt uzayının kendisi tam bir metrik uzaydır. Bu paragraftaki iddiaların kanıtları okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek 1.1.36. (a_n) , $a_n \geq 0$, toplamı $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n < 1$ olan yakınsak bir dizi olsun. Supremum metrik ile donatılmış olan $B(\mathbb{N})$ tam metrik uzayı üzerinde, her $(x_n) \in B(\mathbb{N})$ için,

$$\Theta((x_n))(m) = 1 + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{k-1} \cdot x_k ,$$

ile tanımlanan $\Theta : B(\mathbb{N}) \rightarrow B(\mathbb{N})$ fonksiyonunu düşünelim.

$$\begin{aligned} d_{sup}(\Theta((x_n)), \Theta((y_n))) &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{k-1} \cdot (x_k - y_k) \right| \right\} \\ &\leq \alpha d_{sup}((x_n), (y_n)). \end{aligned}$$

olduğundan bu bir daraltma fonksiyonudur. O halde, Banach Daraltma İlkesi'nden, her $n \geq 0$ için, $x_n = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1} \cdot x_k$ koşulunu sağlayan tek bir (x_n) dizisinin var olduğunu görürüz. Diğer taraftan, bu örneği biraz değiştirerek, her $n \geq 0$ için,

$$x_n = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1} \cdot x_{(n+1)k}$$

koşulunu sağlayan tek bir (x_n) dizisinin varlığını kanıtlayabiliriz. Bu dizinin varlığını Banach daraltma teoremini kullanmadan kanıtlamayı deneyiniz!

1.2 Analiz

1.2.1 Türevlenebilme

Türevlenebilir bir manifold yerel olarak (herhangi bir noktasının bir komşuluğu) Öklit uzayına homeomorftir. Dolayısıyla, Öklit uzaylarına dair tüm kavram ve bilgilerimizi manifoldlara taşımayı düşünebiliriz. Öklit uzayı üzerinde analiz yaparken kullanılan en önemli kavramlardan ikisi türev ve integraldir. Bu iki kavramı manifoldlara taşıyabilmek için gerekli olan alt yapıyı bu bölümde sunmaya çalışacağız.

V ve W ile gerçel ya da karmaşık sayı cismi üzerinde tanımlı Banach uzaylarını (tam normlu vektör uzayı) gösterelim. Sonlu boyutlu olması durumunda bu uzayları doğrudan $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ (Öklit veya Hermityan normuyla beraber) alacağız.

Tanım 1.2.1. V ve W Banach uzayları, $x_0 \in V$ bir nokta ve $F : V \rightarrow W$ bir fonksiyon olsun. $L : V \rightarrow W$ sürekli (sınırlı) bir doğrusal dönüşüm olmak üzere her $h \in V$ için

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + L(h) + \|h\| a(x_0, h)$$

ve $\lim_{h \rightarrow 0} a(x_0, h) = 0$ olacak şekilde bir $a(x_0, h) \in W$ varsa F fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilir denir. Bu durumda $L : V \rightarrow W$ doğrusal dönüşümüne de F 'nin x_0 noktasındaki türevi denir ve $DF(x_0)$ veya $F'(x_0)$ ile gösterilir.

Uyarı 1.2.2. Eğer bir fonksiyonun türevi varsa tekdir. Bunu görmek için, her $h \in V$ için

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + L_0(h) + \|h\| b(x_0, h)$$

eşitliğini sağlayan $L_0 : V \rightarrow W$ sürekli (sınırlı) bir doğrusal dönüşüm ve $\lim_{h \rightarrow 0} b(x_0, h) = 0$ olacak şekilde bir $b(x_0, h) \in W$ fonksiyonun varlığını kabul edelim. Bu durumda, her $v \in V$ ve $t \in \mathbb{R}$ için,

$$L(tv) + \|tv\| a(x_0, tv) = L_0(tv) + \|tv\| b(x_0, tv)$$

ve buradan da, $t > 0$ olmak üzere, $L(v) + \|v\| a(x_0, tv) = L_0(v) + \|v\| b(x_0, tv)$ elde ederiz. Son olarak, eşitliğin t sıfıra giderken limitini alırsak $L(v) = L_0(v)$ ve dolayısıyla $L = L_0$ buluruz.

Yukarıdaki tanımın gösterimini kullanarak her noktada türevlenebilir bir $F : V \rightarrow W$ fonksiyonu bize, her $x_0 \in V$ için, $DF(x_0)(h)$ ile tanımlanan

$$DF : V \rightarrow \text{hom}(V, W)$$

türev fonksiyonunu verir (burada $\text{hom}(V, W)$ ile Banach uzayları arasındaki sınırlı doğrusal dönüşümlerin oluşturduğu Banach uzayını kastediyoruz). Eğer bu fonksiyon sürekli ise $F \in C^1(V, W)$ diye yazarız ve F C^1 'dir diye okuruz. Benzer şekilde, eğer $DF \in C^k(V, \text{hom}(V, W))$, $k \in \mathbb{N}$, ise $F \in C^{k+1}(V, W)$ diye yazarız. Eğer, her $k \in \mathbb{N}$ için $F \in C^k(V, W)$ ise $F \in C^\infty(V, W)$ diye yazarız ve F sonsuz türevlenebilirdir deriz.

Banach uzayları arasında tanımlı bir fonksiyonun türevi aynı uzaylar arasında tanımlı sürekli bir doğrusal dönüşümdür. Aslında aşağıda göreceğimiz gibi bir fonksiyonun türevi, eğer varsa, kendisine en yakın (sürekli) doğrusal dönüşümdür.

Uyarı 1.2.3. 1) Eğer $F : V \rightarrow W$ doğrusal sürekli bir fonksiyon ise $L = F$ ve $a(x_0, v) = 0$ alarak F fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu ve türevinin kendisine eşit olduğunu görürüz. Başka bir deyişle doğrusal bir F dönüşümüne en yakın doğrusal dönüşüm yine kendisidir.

2) Eğer $F : V \rightarrow W$ bir x_0 noktasında türevlenebilirse F fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|L(h)\| + \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| \|a(x_0, h)\| = 0.$$

Örnek 1.2.4. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ile verilen fonksiyonun herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenebilir olduğunu görelim:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + 2x_0h + h^2$$

olduğundan $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(h) = 2x_0h$, $h \in \mathbb{R}$, doğrusal dönüşümü ve $a(x_0, h) = |h|$ fonksiyonu alarak f 'nin türevlenebilir olduğunu görürüz.

2) Benzer şekilde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + 3xy + 5y - 6$ ifadesi ile verilen fonksiyonun herhangi bir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasında türevlenebilir olduğunu görebiliriz: $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(h_1, h_2) = (2x_0 + 3y_0)h_1 + (3x_0 + 5)h_2, \quad (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

doğrusal dönüşümü ve

$$a((x_0, y_0), (h_1, h_2)) = \begin{cases} \frac{h_1^2 + 3h_1h_2}{\|(h_1, h_2)\|} & , \quad (h_1, h_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (h_1, h_2) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonu olmak üzere

$$g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = g(x_0, y_0) + L(h_1, h_2) + \|(h_1, h_2)\| a((x_0, y_0), (h_1, h_2))$$

olur ve dolayısıyla g 'nin türevlenebilir olduğunu görürüz.

3) Supremum normu ile donatılmış, $[0, 1]$ aralığında tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların oluşturduğu $B = C^0([0, 1])$ Banach uzayı üzerinde, her $f \in B$ için $\Phi(f) = f^2$ ile tanımlanan $\Phi : B \rightarrow B$ fonksiyonunu düşünelim. Bir $f_0 \in B$ fonksiyonu alalım. Yukarıdaki örneğe benzer şekilde $L : B \rightarrow B$, $L(h) = 2f_0h$, $h \in B$, doğrusal dönüşümü sınırlı ve dolayısıyla süreklidir. Ashnda $\|L(h)\| \leq 2\|f_0\|\|h\|$ olur. Yine benzer şekilde

$$a(f_0, h) = \begin{cases} \frac{h^2}{\|h\|} & , \quad h \neq 0 \\ 0 & , \quad h = 0 \end{cases}$$

sürekli dönüşümünü alarak Φ fonksiyonunun $f_0 \in B$ noktasında türevlenebilir olduğunu görürüz.

4) $f : B_1 \rightarrow B_2$, $g : B_2 \rightarrow B_3$, Banach uzayları arasında fonksiyonlar olsun ve $x_0 \in B_1$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 ve g fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ise $g \circ f : B_1 \rightarrow B_3$ fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve türevi

$$D(g \circ f) : B_1 \rightarrow B_3, D(g \circ f) = Dg(y_0) \circ Df(x_0) ,$$

bileşke fonksiyonudur: Bunu görmek için ilk önce tanımları kullanarak

$$f(x_0 + h_1) = f(x_0) + Df_{x_0}(h_1) + \|h_1\| a(x_0, h_1) \text{ ve}$$

$$g(y_0 + h_2) = g(y_0) + Dg_{y_0}(h_2) + \|h_2\| b(y_0, h_2) ,$$

yazalım. O halde, bileşke fonksiyon için

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h_1) &= (g \circ f)(x_0) + Dg_{y_0}(Df_{x_0}(h_1) + \|h_1\| a(x_0, h_1)) \\ &\quad + \|Df_{x_0}(h_1) + \|h_1\| a(x_0, h_1)\| b(y_0, Df_{x_0}(h_1) + \|h_1\| a(x_0, h_1)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + (Dg_{y_0} \circ Df_{x_0})(h_1) + \|h_1\| c(x_0, h_1) \end{aligned}$$

elde ederiz, öyle ki, hata terimi ($h_1 \neq 0$ için)

$$c(x_0, h_1) = Dg_{y_0}(a(x_0, h_1)) + \|Df_{x_0}(h_1/\|h_1\|) + a(x_0, h_1)\|$$

$$b(y_0, Df_{x_0}(h_1) + \|h_1\| a(x_0, h_1))$$

ile verilir. Son olarak, Df_{x_0} doğrusal dönüşümü sınırlı olduğundan kolayca $\lim_{h_1 \rightarrow 0} c(x_0, h_1) = 0$ eşitliği elde edilir.

Uyarı 1.2.5. Eğer $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ herhangi bir x_0 noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise $DF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ türev fonksiyonunun standart tabanlardaki matris gösterimi F fonksiyonunun x_0 noktasındaki Jakobiyen matrisi olacaktır. Bunun kanıtını okuyucuya bırakıyoruz.

Sayfa 68'de manifoldlar arasında tanımlı fonksiyonların türevini ele alacağız.

1.2.2 Ters Fonksiyon Teoremi

$U \subseteq B_1$, $V \subseteq B_2$ Banach uzayları içinde açık kümeler ve $F : U \rightarrow V$ bire bir örten ve sonsuz kere türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $F^{-1} : V \rightarrow U$ fonksiyonu da sonsuz defa türevlenebilirse $F : U \rightarrow V$ fonksiyonu bir difeomorfizmadır denir.

Analizin en temel sonuçlarından biri olarak kabul edilen Ters Fonksiyon Teoremi türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin bir izomorfizma olması durumunda fonksiyonun kendisinin de, en azından yerel olarak, bir difeomorfizma olduğunu göstermektedir. Bu teoremi vermeden önce kanıt içinde kullanacağımız şu sonucu kanıtlayalım. B_1, B_2 Banach uzayları ve $T : B_1 \rightarrow B_2$ doğrusal

bir dönüşüm olsun. Eğer $\|T(v)\|_{B_2} \leq M \|v\|_{B_1}$, her $v \in B_1$ için, olacak şekilde pozitif bir M gerçel sayısı varsa T operatörüne sınırlıdır denir. Ayrıca, T dönüşümü sınırlı ise

$$\inf\{M \geq 0 \mid \|T(v)\|_{B_2} \leq M \|v\|_{B_1}, v \in B_1\}$$

gerçel sayısına dönüşümün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.6. B bir Banach uzayı ve $T : B \rightarrow B$ sınırlı doğrusal bir operatör olsun. Eğer, $\|T\| = \lambda < 1$ ise $Id_B - T : B \rightarrow B$ operatörünün sınırlı bir tersi vardır. Dolayısıyla, sınırlı ve tersi olan operatörlerin, tüm sınırlı operatörler uzayı içinde oluşturduğu U alt kümesi açıktır.

Ayrıca, $\phi : U \rightarrow U$, $T \mapsto T^{-1}$, sonsuz kere türevlenebilir bir fonksiyondur.

Kanıt : $T^n = T \cdots T$ operatörünün normu $\|T^n\| \leq \lambda^n$ eşitsizliğini sağladığından

$$L : B \rightarrow B, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)$$

operatörü iyi tanımlıdır ve sınırlıdır: $\|L\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1/(1 - \lambda)$. Diğer taraftan,

$$L(Id_B - T) = Id_B = (Id_B - T)L$$

olduğu kolayca görülür. İkinci iddianın kanıtı ilk adımdan şu şekilde elde edilir: T_0 sınırlı ve tersi de sınırlı olan bir operatör olsun. Bu durumda, $h : B \rightarrow B$ normu yeterince küçük bir operatör olmak üzere $T = T_0 + h$ operatörünü $T = T_0(Id_B + T_0^{-1}h)$ şeklinde yazalım. Seçimi gereği $\lambda = \|T_0^{-1}h\| < 1$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde, $Id_B + T_0^{-1}h$ ve dolayısıyla T operatörünün sınırlı tersi vardır.

ϕ fonksiyonunun tersi kendisine eşit olduğundan bu fonksiyon aynı zamanda bire bir ve örtendir. O halde, kanıtı tamamlamak için bu fonksiyonun sonsuz kere türevlenebilir olduğunu söylemek yeterlidir. $T : B \rightarrow B$ tersi olan bir operatör ise normu yeterince küçük bir $h : B \rightarrow B$ operatörü için

$$\begin{aligned} \phi(T + h) &= \phi(T (Id_B + T^{-1}h)) \\ &= (Id_B + T^{-1}h)^{-1} T^{-1} \\ &= [Id_B - (T^{-1}h) + (T^{-1}h)^2 - (T^{-1}h)^3 + \dots] T^{-1} \\ &= T^{-1} - (T^{-1}h) T^{-1} + (T^{-1}h)^2 T^{-1} - (T^{-1}h)^3 T^{-1} + \dots \\ &= \phi(T) - (T^{-1}h) T^{-1} + (T^{-1}h)^2 T^{-1} - (T^{-1}h)^3 T^{-1} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $L_T : B \rightarrow B$, $L_T(h) = -T^{-1} h T^{-1}$, ve

$$a(T, h) = \begin{cases} \frac{(T^{-1}h)^2 T^{-1} - (T^{-1}h)^3 T^{-1} + \dots}{\|h\|} & , h \neq 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases}$$

olarak $\phi : U \rightarrow U$ fonksiyonunun T operatöründe türevli olduğunu görürüz ($\lim_{h \rightarrow 0} a(T, h) = 0$ olduğunun gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz). (Eğer operatörler yer değiştirilebilseydi $L_T(h) = -T^{-2} h$ olurdu. Bunu $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun türeviyle karşılaştırm!) ϕ 'nin ikinci kez türevlenebilir olduğunu görmek için

$$D\phi : U \rightarrow \text{hom}(\text{hom}(B, B), \text{hom}(B, B)) ,$$

$$D\phi(T) = L_T : \text{hom}(B, B) \rightarrow \text{hom}(B, B) , \quad L_T(h) = -T^{-1} h T^{-1}$$

dönüşümünün türevlenebilir olduğunu görmeliyiz. Doğrudan hesap yaparak bunun türevinin

$$D^2\phi : U \rightarrow \text{hom}(\text{hom}^2(B, B), \text{hom}(B, B)),$$

$$\begin{aligned} D^2\phi_T(h, k) &= T^{-1}h(T^{-1}k)T^{-1} + (T^{-1}k)T^{-1}hT^{-1} \\ &= T^{-1}(hT^{-1}k + kT^{-1}h)T^{-1} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Burada $\text{hom}^2(B, B)$ ile $\text{hom}(B, B) \times \text{hom}(B, B)$ kartezyen çarpımını gösteriyoruz. Kanıtın geri kalanını okuyucuya bırakıyoruz. $\square$

Uyarı 1.2.7. Eğer B Banach uzayı sonlu boyutlu ise yukarıda ele aldığımız $\phi(T) = T^{-1}$ fonksiyonu Kramer kuralından dolayı T 'nin matris gösteriminin elemanlarının rasyonel bir ifadesidir ve dolayısıyla sonsuz kere türevlenebilir olduğu açıktır.

Teorem 1.2.8 (Ters Fonksiyon Teoremi). B_1, B_2 Banach uzayları, $x_0 \in B_1$ bir nokta ve $F : B_1 \rightarrow B_2$ bir C^k , $k > 0$, fonksiyon olsun. Eğer $DF(x_0) : B_1 \rightarrow B_2$ bir izomorfizma ise $x_0 \in U \subseteq B_1$, $y_0 = F(x_0) \in V \subseteq B_2$ olmak üzere öyle açık kümeler vardır ki, F fonksiyonunun U kümesine kısıtlanışının tersi vardır ve $F^{-1} : V \rightarrow U$ ters fonksiyonu da C^k sınıfındandır.

Kanıt : $T_1 : B_1 \rightarrow B_1$, $T_1(x) = x + x_0$ ve $T_2 : B_2 \rightarrow B_2$, $T_2(y) = y - y_0$ afin öteleme fonksiyonları olmak üzere F fonksiyonunu $T_2 \circ F \circ T_1$ bileşke fonksiyonu ile değiştirerek, genellikle bir şey kaybetmeden (T_1 ve T_2 fonksiyonları difeomorfizma olduklarından dolayı), $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Benzer şekilde $L = DF(x_0) : B_1 \rightarrow B_2$ de bir difeomorfizma olduğu için teoremi F yerine $L^{-1} \circ F : B_1 \rightarrow B_1$ bileşke fonksiyonu için kanıtlamak yeterli olacaktır. Bu bileşke fonksiyonun türevini x_0 noktasında zincir kuralından hesaplırsak B_1 Banach uzayının birim fonksiyonunu buluruz. O halde, teoremi $F(0) = 0$ ve $DF(0) = I_{B_1}$ koşullarını sağlayan bir $F : B_1 \rightarrow B_1$ fonksiyonu için kanıtlamak yeterlidir.

$DF(0) = I_{B_1}$ olduğundan, her $x \in B[0, r_1]$ için, $F(x) = x + \|x\| a(x)$ ve $\|a(x)\| \leq 1/2$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ gerçel sayısı ve $a : B[0, r_1] \rightarrow B_1$ fonksiyonu bulabiliriz. Ayrıca yine $DF(0) = I_{B_1}$ olduğu için, gerekirse $r_1 > 0$ sayısını küçültürsek, her $x \in B[0, r_1]$ için $\|I_{B_1} - DF(x)\| \leq 1/2$ olduğunu

kabul edebiliriz (burada $\|I_{B_1} - DF(x)\|$ ile Banach uzayından kendisine giden $I_{B_1} - DF(x)$ doğrusal operatörünün normunu kastediyoruz).

Şimdi $y \in B[0, r_1/2]$ olmak üzere $y = F(x) = x + \|x\| a(x)$ denklemini göz önüne alalım. İlk önce bu denklemin her $y \in B[0, r_1/2]$ için sadece tek bir $x \in B[0, r_1]$ çözümü olduğunu göstereceğiz: Bunun için bir $y \in B[0, r_1/2]$ noktası sabitleyelim ve $\theta(x) \doteq y + x - F(x) = y - \|x\| a(x)$ ifadesini düşünelim. Bu durumda, her $x \in B[0, r_1]$ için

$$\|\theta(x)\| \leq \|y\| + \|x\| \|a(x)\| \leq r_1/2 + r_1/2 = r_1 \quad (*)$$

olur ve dolayısıyla θ 'yı $B[0, r_1]$ yuvarından kendisine bir fonksiyon olarak düşünebiliriz.

Şimdi de bu fonksiyonun bir daraltma fonksiyonu olduğunu görelim. $\theta(x) = y + x - F(x)$ fonksiyonu tanımı gereği türevlenebilirdir ve türevi $D\theta(x_0) = I_{B_1} - DF(x_0)$ olur. $r_1 > 0$ gerçel sayısının seçiminden dolayı $\|D\theta(x_0)\| \leq 1/2$ 'dir. Son olarak $x_1, x_2 \in B[0, r_1]$ alalım ve $\gamma(t) = (1-t)x_2 + tx_1$ bu yuvarın içinde kalan doğru parçası olmak üzere $h(t) \doteq \theta(\gamma(t))$ olarak tanımlanan $h : [0, 1] \rightarrow B_1$ fonksiyonunu düşünelim. Zincir kuralından $h'(t) = D\theta(\gamma(t))(x_1 - x_2)$ yazabiliriz. Analizin Temel Teoremi'ni kullanarak

$$\theta(x_1) - \theta(x_2) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt$$

ve buradan da

$$\|\theta(x_1) - \theta(x_2)\| \leq \int_0^1 \|D\theta(\gamma(t))\| \|x_1 - x_2\| dt \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$

eşitsizliğini buluruz. O halde, θ bir daraltma fonksiyonudur. Bir daraltma fonksiyonunun sadece bir sabit noktası olduğundan, her $y \in B[0, r_1/2]$ için $y = F(x)$ olacak şekilde tek bir $x \in B[0, r_1]$ noktası vardır. Aslında yukarıdaki (*) eşitsizliğine tekrar dönersek, her $\|y\| < r_2 < r_1/2$ için $y = F(x)$ denklemini çözen x noktasının $\|x\| \leq r_2 + r_1/2 < r_1$ eşitsizliğini sağladığını görürüz. Dolayısıyla, $V = B(0, r_1/2)$ ve $U = B(0, r_1) \cap F^{-1}(V)$ açık kümeleri için $F : U \rightarrow V$ bire bir ve örten bir C^k fonksiyon olur.

Kanıtın bitmesi için son olarak $F^{-1} : V \rightarrow U$ ters fonksiyonunun da C^k olduğunu göstermeliyiz. Bunun için kanıtın başında yazdığımız $y = x + \|x\| a(x)$ denklemine dönelim. Biliyoruz ki her $\|y\| < r_1/2$ için bu denklemi sağlayan sadece tek bir $\|x\| < r_1$ vardır. Ayrıca bu iki nokta için $y = F(x)$ ve $x = F^{-1}(y)$ dir. O halde, $x = y + x - F(x) = y - \|x\| a(x)$ denklemini kullanarak

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x\| \|a(x)\| \leq \|y\| + \frac{\|x\|}{2}$$

ve buradan da

$$\frac{1}{2} \|x\| \leq \|y\|$$

elde ederiz. Ayrıca, $y = F(x) = x + \|x\| a(x)$ denkleminde

$$\|y\| \leq \|x\| + \frac{\|x\|}{2} = \frac{3\|x\|}{2}$$

buluruz. Buna göre

- 1) $x = 0$ dır ancak ve ancak $y = 0$ 'dır;
- 2) $x \rightarrow 0$ ancak ve ancak $y \rightarrow 0$;
- 3) Eğer $x \neq 0 \neq y$ ise, $\frac{2}{3} \leq \frac{\|x\|}{\|y\|} \leq 2$ ve $\frac{1}{2} \leq \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{3}{2}$ olur.

Şimdi

$$b(0, y) = \begin{cases} \frac{-a(x)\|x\|}{\|y\|} & , \quad y \neq 0 \\ 0 & , \quad y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu düşünelim ($x = F^{-1}(y)$ olduğundan bu ifade gerçekten y 'nin bir fonksiyonudur). (1), (2) ve (3)'ü kullanarak kolayca $b(0, y)$ fonksiyonunun $y = 0$ noktasında sürekli olduğunu görebiliriz. Bu fonksiyonun tanımından

$$x = y + \|y\| b(0, y)$$

elde ederiz. O halde, F^{-1} ters fonksiyonu $y = 0$ noktasında türevidir.

Her $x \in B[0, r_1]$ için $\|I_{B_1} - DF(x)\| \leq 1/2$ olduğundan U kümesinin her noktasında DF 'nin izomorfizma olduğunu biliyoruz (bkz. Önerme 1.2.6). Dolayısıyla aynı kanıt F^{-1} ters fonksiyonunun V üzerinde türevlenebilir olduğunu gösterecektir. Son olarak, zincir kuralını $F(F^{-1}(y)) = y$, $y \in V$, eşitliğine uygulayarak

$$DF^{-1}(y) = (DF(F^{-1}(y)))^{-1}$$

elde ederiz. Buradan kolayca F^{-1} ters fonksiyonunun da C^k olduğunu görürüz, çünkü yukarıdaki ifadenin sağ tarafı türevlenebilir üç fonksiyonun, DF , F^{-1} ve $T \mapsto T^{-1}$, bileşkesidir. Sonuncu fonksiyon tersi var olan operatörler açık alt uzayında, sonsuz kez türevlenebilir, tersini alma işlemi fonksiyondur (bkz. Önerme 1.2.6). $\square$

Uyarı 1.2.9. $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ türevlenebilir (analitik) bir fonksiyon ve $z_0 \in \mathbb{C}^n$ bir nokta olsun. Eğer $DF(z_0) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ türev fonksiyonun tersi varsa F analitik fonksiyonunun yine analitik yerel bir tersi olduğunu görürüz.

Aşağıda vereceğimiz Kapalı Fonksiyon Teoremi Ters Fonksiyon Teoremi'nin bir sonucudur (aslında bu iki teorem birbirine denktir! Bkz. Alıştırma 26):

Sonuç 1.2.10 (Kapalı Fonksiyon Teoremi). B_1, B_2 Banach uzayları $(x_0, y_0) \in B_1 \times B_2$ çarpım uzayı içinde nokta ve $F : B_1 \times B_2 \rightarrow B_2$ türevlenebilir ve türevi sürekli olan bir fonksiyon olsun. $F(x_0, y_0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer bu noktada F 'nin ikinci değişkene göre türevi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) : \{0\} \times B_2 \rightarrow B_2$$

bir izomorfizma ise $x_0 \in U \subseteq B_1$ olacak şekilde bir açık küme ve bu küme üzerinde tanımlı bir $\phi : U \rightarrow B_2$ fonksiyonu vardır; öyle ki,

1) $\phi(x_0) = y_0$ ve

2) her $x \in U$ için $F(x, \phi(x)) = 0$

olur. Başka bir deyişle, (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğunda $F(x, y) = 0$ denkleminin $y = \phi(x)$ gibi bir çözümü vardır.

Kanıt : $G : B_1 \times B_2 \rightarrow B_1 \times B_2$, $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$, fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki türevi

$$DG(x_0, y_0) : B_1 \times B_2 \rightarrow B_1 \times B_2$$

her $(u, v) \in B_1 \times B_2$ için,

$$DG(x_0, y_0)(u, v) = \left(u, \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(u) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(v) \right)$$

ile verilmektedir. Buna göre, eğer bir $(u, v) \in B_1 \times B_2$ vektörü için

$$DG(x_0, y_0)(u, v) = 0$$

ise $u = 0$ ve dolayısıyla da

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(v) = 0$$

olmalıdır. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) : \{0\} \times B_2 \rightarrow B_2$$

bir izomorfizma olduğundan $v = 0$ olmalıdır. Başka bir deyişle, $DG(x_0, y_0)$ bir izomorfizmadır. O halde, Ters Fonksiyon Teoremi'nden G 'nin C^1 sınıfından yerel bir ters fonksiyonu vardır:

$$G^{-1} : U \times V \rightarrow W$$

$((x_0, 0) \in U \times V)$. $G^{-1}(x, y) = (\Psi(x, y), \Phi(x, y))$ olsun. Her $(x, y) \in W$ için

$$(x, y) = G(G^{-1}(x, y)) = G(\Psi(x, y), \Phi(x, y)) = (\Psi(x, y), F(\Psi(x, y), \Phi(x, y)))$$

olduğundan $\Psi(x, y) = x$ ve $y = F(x, \Phi(x, y))$ elde ederiz. Şimdi $y = 0$ alarak her $x \in U$ için $F(x, \Phi(x, 0)) = 0$ olduğunu görürüz. O halde $\phi(x) = \Phi(x, 0)$ olarak tanımlanırsa her $x \in U$ için $F(x, \phi(x)) = 0$ olur. Ayrıca $(x_0, y_0) = G^{-1}(x_0, 0) = (x_0, \Phi(x_0, 0)) = (x_0, \phi(x_0))$ olduğu için $y_0 = \phi(x_0)$ elde edilir. $\square$

Bu bölümü daha sonra bir çok defa kullanacağımız Taylor Teoremi ile bitirelim. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ çok değişkenli bir fonksiyon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ olmak üzere,

$$D^\alpha f \doteq \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

kısmi türevini,

$$x^\alpha \doteq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\alpha! \doteq \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

çarpımlarını ve son olarak

$$|\alpha| \doteq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

toplamını gösterebilirsin.

Teorem 1.2.11 (Taylor Teoremi). $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ 'inci dereceden türevi sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her, $x, x_0 \in I$ için,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_k(x)$$

olur. Burada $R_k(x)$ aşağıdaki formülle verilir:

$$R_k(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^k f^{(k+1)}(t)}{k!} dt.$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise, her $x, x_0 \in U$ için,

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k \frac{(x - x_0)^\alpha (D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} + \sum_{|\beta|=k+1} R_\beta(x) (x - x_0)^\beta$$

olur. Yine burada

$$R_\beta(x) = \frac{|\beta|}{\beta!} \int_0^1 (D^\beta f)(x_0 + t(x - x_0)) (1 - t)^{|\beta|-1} dt$$

ile verilir.

Dolayısıyla, $R_k(x)$ ve $R_\beta(x)$ kalan fonksiyonları (x, x_0) ikilisinin sürekli fonksiyonlarıdır.

Teoremin ilk kısmının kanıtı tümevarım yöntemiyle yapılır. Tümevarımın geçiş adımı kalan terime kısmi integral uygulayarak tamamlanabilir. Teoremin ikinci kısmının kanıtı için ise

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(tx + (1 - t)x_0)$$

fonksiyonuna teoremin ilk kısmını uygulamak yeterlidir.

Son olarak kalan terim için aşağıdaki sonucu vereceğiz:

Önerme 1.2.12. $R_k(x)$ yukarıda tek değişkenli fonksiyonlar için verilen Taylor açılımının kalan terimi olmak üzere, sürekli bir $C(x) \geq 0$ fonksiyonu için

$$|R_k(x)| \leq C(x) |x - x_0|^{k+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde çok değişkenli fonksiyonların k 'inci dereceden Taylor açılımının kalanı için,

$$\left| \sum_{|\beta|=k+1} R_\beta(x) (x - x_0)^\beta \right| \leq C(x) \|x - x_0\|^{k+1}$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir $C(x) \geq 0$ fonksiyonu vardır.

Kanıt : Sadece ilk kısmın kanıtını vereceğiz. İkinci kısmın kanıtını alıştırma olarak size bırakıyoruz.

$$R_k(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt}{k!}$$

olmak üzere $C(x)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonun mutlak değeri olarak tanımlansın:

$$\tilde{C}(x) = \begin{cases} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^{k+1}} & , \quad x \neq x_0 \\ \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} & , \quad x = x_0. \end{cases}$$

$f^{(k+1)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan (Taylor Teoremi'nin hipotezine bakınız) $C(x)$ fonksiyonunun $x \neq x_0$ durumunda sürekli olduğu açıktır. O halde, kanıtı tamamlamak için aşağıdaki limiti hesaplamalıyız:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt}{k! (x-x_0)^{k+1}}.$$

Limit $0/0$ belirsizlik durumunda olduğundan L'Hopital kuralını kullanabiliriz. Bunun için ilk önce payın türevini hesaplamalıyız. Fonksiyonu iki değişkenli fonksiyon gibi görerek türevini alabiliriz:

$$g(x, y) = \int_{x_0}^y \frac{(x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt}{k!}$$

olmak üzere $R_k(x) = g(x, x)$ olacaktır. Şimdi $y = y(x) = x$ alarak türevi hesaplayalım. Eğer $k \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} R'_k(x) &= \frac{d}{dx} g(x, y(x)) \\ &= g_x(x, x) + g_y(x, x) y'(x) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{k-1} f^{(k+1)}(t) dt}{(k-1)!} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır, çünkü ikinci terim sıfırdır. Şimdi L'Hopital kuralını $(k+1)$ defa ardı ardına kullanarak (Eagles'ın söylediği gibi:

https://www.youtube.com/watch?v=FY5_krxYPeY)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^{k+1}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x (x - t)^k f^{(k+1)}(t) dt}{k! (x - x_0)^{k+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

buluruz. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

1.2.3 Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi

Bu bölümde başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ve başlangıç değerlerine bağıllığı üzerine sonuçlar elde edeceğiz. Bir önceki bölümde olduğu gibi yine Banach Daraltma Prensipli'ni kullanacağız.

B bir Banach uzayı, $U \subseteq B$ bir açık alt küme ve $f : U \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in U$ için $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sabiti varsa f fonksiyonuna bir *Lipschitz* fonksiyonu ve λ 'ya da *Lipschitz sabiti* denir.

Teorem 1.2.13. *B bir Banach uzayı, $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : I \times B \rightarrow B$ sürekli ve ikinci değişkene göre Lipschitz olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t_0 \in I$ ve $y_0 \in B$ için,*

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin t_0 noktasını içeren bir $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq I$ alt aralığında tanımlı tek bir çözümü vardır. Ayrıca eğer f fonksiyonu C^k sınıfından ise çözüm fonksiyonu C^{k+1} sınıfındandır.

Kanıt : $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ başlangıç değer problemi

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

integral denkleminde denk olduğundan bundan sonra bu integral denkleminin üzerinde çalışacağız. $\lambda > 0$ ile f fonksiyonun Lipschitz sabitini gösterelim. Ayrıca, $\epsilon\lambda = \alpha < 1$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı seçelim. Bu durumda $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ aralığında tanımlı B Banach uzayı değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı $B_1 = C^0([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B)$ (supremum normu ile beraber) yine bir Banach uzayıdır.

Şimdi B_1 Banach uzayı üzerinde şu fonksiyonu tanımlayalım:

$$\Theta : B_1 \rightarrow B_1, \quad \Theta(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \quad y(t) \in B_1.$$

Aslında Θ bir daraltma fonksiyonudur:

$$\begin{aligned} \|\Theta(y_1)(t) - \Theta(y_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) \, ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \\ &\leq \epsilon \lambda \|y_1(t) - y_2(t)\| \\ &\leq \alpha \|y_1(t) - y_2(t)\| \end{aligned}$$

Bu daraltma fonksiyonunun sabit noktası olan fonksiyon aranan çözüm olacaktır.

Son olarak, eğer f fonksiyonu C^k sınıfından ise $y'(t) = f(t, y)$ bağıntısından çözüm fonksiyonunun C^{k+1} sınıfından olduğunu görürüz. $\square$

Yukarıdaki teoremin ifadesinde verilen I açık aralığını yeterince küçük seçerek verilen her $(t_1, y_1) \in I \times B$ başlangıç değer koşulu için elde edilen çözümün $B_1 = C^0([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B)$ Banach uzayı içinde kaldığını kabul edebiliriz. Şimdi $(t_0, y_0), (t_0 + h_1, y_0 + h_2) \in I \times B$ gibi iki başlangıç değer koşuluna karşılık gelen y^0 ve y^h çözümlerinin arasındaki farkı inceleyelim. Aslında, $\Psi : I \times B \rightarrow B_1$, $(t_1, y_1) \mapsto \Psi(t_1, y_1)$ ifadesi (t_1, y_1) noktasındaki başlangıç değer koşuluna karşılık gelen çözümü veren fonksiyonu gösterirse bu fonksiyonun sürekli olduğunu görebiliriz: İlk önce f fonksiyonun normunun sonlu olduğunu kabul edelim (örneğin, eğer B Banach uzayı tıkHz ise bu koşul açık şekilde sağlanır).

$$\begin{aligned} \|\Psi(t_0 + h_1, y_0 + h_2) - \Psi(t_0, y_0)\| &= \|y^h - y^0\| \\ &= \|\Theta(y^h) - \Theta(y^0)\| \\ &= \|h_2 + \int_{t_0}^{t_0+h_1} f(s, y^0(s)) \, ds \\ &\quad - \int_{t_0+h_1}^t (f(s, y^h(s)) - f(s, y^0(s))) \, ds\| \\ &\leq \|h_2\| + |h_1| \|f\| + \alpha \|y^h - y^0\| \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\|y^h - y^0\| \leq \frac{\|h_2\| + |h_1| \|f\|}{1 - \alpha}$$

elde ederiz. O halde, Ψ fonksiyonu başlangıç değer koşullarına göre düzgün süreklidir. Şimdi de f fonksiyonun sınırlı olmadığını düşünelim. Bu durumda, $f(s, y^0(s))$ fonksiyonu I tıkHz aralığında sınırlı olacağından

$$\int_{t_0}^{t_0+h_1} f(s, y^0(s)) \, ds$$

integralinin mutlak değeri yine $M|h_1|$ gibi pozitif bir sayıdan küçük olacaktır. Başka bir deyişle, Ψ fonksiyonu (t_0, y_0) noktasında süreklidir.

Uyarı 1.2.14. 1) *Teoremin kanıtından elde edilen çözümün tanımlı olduğu aralığın boyunun, 2ϵ , tamamen λ Lipschitz sabiti ile belirlendiğini gördük. Dolayısıyla varlık teklilik teoremini arka arkaya kullanarak çözümün I aralığının tamamında tanımlı olduğunu görürüz.*

2) $f = f(x, y) : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bu fonksiyonun ikinci değişkene göre türevi de sürekli ise f fonksiyonu her sınırlı bölgede ikinci değişkene göre Lipschitz fonksiyon olacaktır.

Örnek 1.2.15. *Bu teoremin bir uygulaması olarak gerçel sayılardan gerçel sayılara giden fonksiyonlar için ters görüntü teoreminin (biraz zayıf bir halinin) bir başka kanıtını verelim: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^k , $k \geq 2$, sınıfından bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) \neq 0$, koşulunu sağlayan bir nokta olsun. Bu durumda $x = a$ noktasının açık bir komşuluğunda fonksiyonumuz hep artan veya hep azalan olacaktır. Başka bir deyişle f fonksiyonu $x = a$ noktasının açık bir komşuluğundan $f(a)$ noktasının açık bir komşuluğuna bire bir örten bir fonksiyon verir (bkz. Alıştırma 25). Şimdi bu ters fonksiyonun türevlenebilir olduğunu görelim. Bunun için aşağıdaki başlangıç değer problemini düşünelim: $b = f(a)$ olmak üzere*

$$y'(x) = \frac{1}{f'(y(x))}, \quad y(b) = a.$$

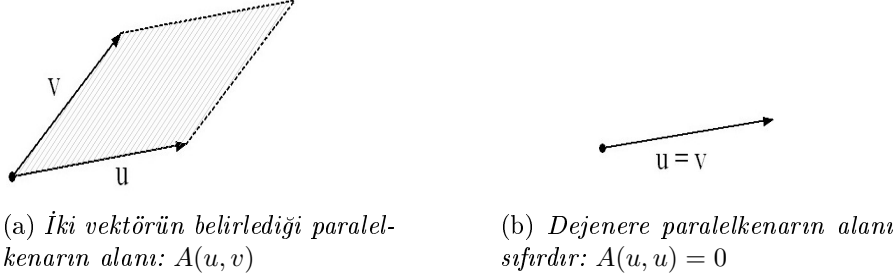
$f \in C^k$, $k \geq 2$ ve $f'(a) \neq 0$ olduğu için $1/f'(x)$ fonksiyonunun türevi $x = a$ noktasının kapalı bir komşuluğunda sürekli olacaktır. Dolayısıyla, $1/f'(x)$ fonksiyonu bu aralıkta Lipschitz olur. O halde, yukarıdaki başlangıç değer probleminin b noktası etrafında tanımlı tek bir $y = y(x)$ yerel çözümü vardır. Diğer taraftan, diferansiyel denklemi $y'(x)f'(y(x)) = 1$ veya $(f(y(x)))' = 1$ diye yazarak $f(y(x)) = x + C$ çözümünü buluruz. Ayrıca $y(b) = a$ başlangıç koşulundan $b = f(a) = f(y(b)) = b + C$ eşitliği ve buradan da $C = 0$ bulunur. O halde, $x = b$ noktasının açık bir komşuluğundaki her x değeri için $f(y(x)) = x$ elde edilir. Başka bir deyişle $x = b$ noktası etrafında f fonksiyonunun türevlenebilir yerel bir tersi vardır. Son olarak, $y'(x) = 1/f'(y(x))$ denkleminin türevini alarak (ve tümevarım metodunu kullanarak) f^{-1} fonksiyonunun da C^k sınıfından olduğunu görürüz.

1.3 Doğrusal Cebir

1.3.1 Determinant Fonksiyonu

Bir koordinat düzleminde verilen iki vektörün belirlediği paralelkenarın alanını bulmaya çalışalım: $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $u = (x_1, y_1)$ ve $v = (x_2, y_2)$ düzlemde vektörler olmak üzere

$$A(u, v) = \text{"u ve v vektörlerinin belirlediği paralelkenarın alanı"}$$



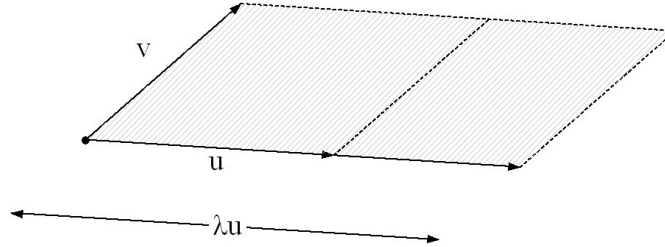
Şekil 1.3

olarak tanımlansın (Şekil 1.3a).

Bu tür bir fonksiyonun sağlamasını beklediğimiz birkaç özelliği sıralayalım:

1) Aynı iki vektörün belirlediği paralelkenar aslında bir doğrunun içinde kalacağından paralelkenarın alanı sıfır olsun: Diğer bir deyişle her $u \in \mathbb{R}^2$ için $A(u, u) = 0$ olsun (Şekil 1.3b).

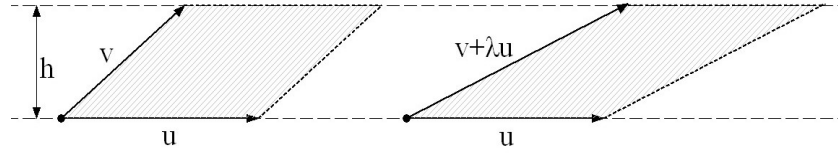
2) Bir paralelkenarın kenarlarından birinin uzunluğunu $\lambda \in \mathbb{R}$ katına çıkarırsak alanı da aynı oranda değişsin: $A(\lambda u, v) = \lambda A(u, v) = A(u, \lambda v)$ (Şekil 1.4).

Şekil 1.4: Bir kenarın skaler ile çarpımı: $A(\lambda u, v) = \lambda A(u, v)$

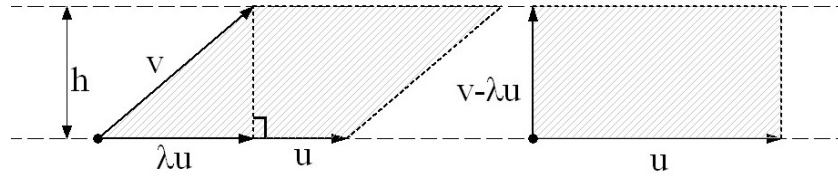
Bu fonksiyonun sağlamasını istediğimiz bir diğer özellik ise şudur:

3) Verilen iki u ve v vektörleri ile belirlenen paralelkenarın kenarlarından birinin herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ katını diğerine eklersek bu paralelkenarın yüksekliği değişmeyeceğinden alanı da değişmeyecektir: $A(u, v + \lambda u) = A(u, v) = A(u + \lambda v, v)$ (Şekil 1.5).

Şimdi de birer kenarları ortak iki paralelkenar alalım: (u, v_1) ve (u, v_2) . Her ikisinin de yüksekliklerini (dolayısıyla alanlarını) değiştirmeden bu paralelkenarları dikdörtgen haline getirelim. Bunu yapmak için v_i vektörlerinden u vektörünün bunlar üzerine izdüşümlerini çıkartmak yeterlidir. Elde edilen dikdörtgen bölgeler $(u, v_1 - \lambda_1 u)$ ve $(u, v_2 - \lambda_2 u)$ vektör çiftleriyle verilsin (Şekil 1.6). Bu iki dikdörtgeni üst üste koyarak alanları toplamından



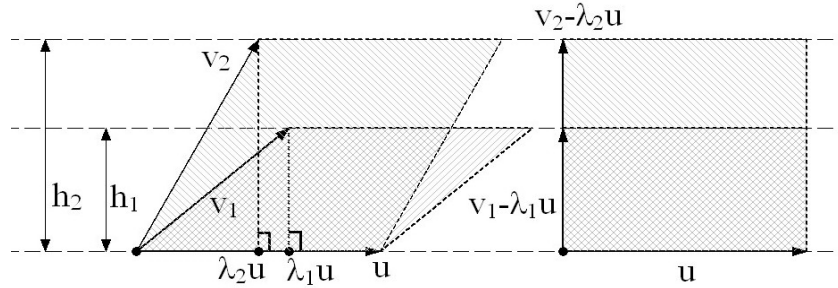
Şekil 1.5: Bir kenarın skaler katının diğerine eklenmesi: $A(u, v) = A(u, v + \lambda u)$



Şekil 1.6: Paralelkenar ile eşit alana sahip dikdörtgen: $A(u, v) = A(u, v - \lambda u)$

$$\begin{aligned} A(u, v_1) + A(u, v_2) &= A(u, v_1 - \lambda_1 u) + A(u, v_2 - \lambda_2 u) \\ &= A(u, v_1 + v_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)u) = A(u, v_1 + v_2) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz (Şekil 1.7). (Yukarıdaki son eşitlik **(3)** numaralı özelliğin sonucudur.) O halde düzlemde verilen herhangi u , v_1 ve v_2 vektörleri için



Şekil 1.7: Ortak kenarlı iki paralelkenarın toplamı:

$$A(u, v_1) + A(u, v_2) = A(u, v_1 + v_2)$$

$$A(u, v_1 + v_2) = A(u, v_1) + A(u, v_2)$$

olmalıdır. Benzer şekilde u_1 , u_2 ve v vektörleri için

$$A(u_1 + u_2, v) = A(u_1, v) + A(u_2, v)$$

olduğu görülür. Bunu **(2)** ile birleştirirsek $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun her iki değişkene göre de doğrusal (bilineer) olduğu sonucuna varırız: Her

u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 vektörleri ve $\lambda \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için

$$A(u_1 + \lambda u_2, v) = A(u_1, v) + \lambda A(u_2, v)$$

ve

$$A(u, v_1 + \lambda v_2) = A(u, v_1) + \lambda A(u, v_2)$$

eşitlikleri doğrudur. Diğer taraftan **(2)** numaralı özellikten

$$\begin{aligned} 0 &= A(u + v, u + v) \\ &= A(u, u) + A(u, v) + A(v, u) + A(v, v) \\ &= A(u, v) + A(v, u) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $A(u, v) = -A(v, u)$ elde ederiz. Bu son eşitliği sağlayan bilineer fonksiyonlara *değişmeli* fonksiyonlar denir. Aslında sıraladığımız diğer bütün özellikler bu iki özellikten türetilir.

Şimdi $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ olmak üzere $u = (a, b) = ae_1 + be_2$ ve $v = (c, d) = ce_1 + de_2$ gibi iki vektörün belirlediği paralelkenarın alanını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= A(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ad A(e_1, e_2) + bc A(e_2, e_1) + ac A(e_1, e_1) + bd A(e_2, e_2) \\ &= (ad - bc) A(e_1, e_2) \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. O halde bu paralelkenarın alanı birim karenin alanının $(ad - bc)$ katıdır.

Eğer birim karenin alanını bir birim olarak alırsak, $A(e_1, e_2) = 1$, $A(u, v) = ad - bc$ olur. Dikkat edersek bu sayı, satırları u ve v vektörlerinin $\beta = \{e_1, e_2\}$ sıralı tabanına göre koordinat vektörlerinden oluşan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantından başka bir şey değildir.

Başka bir deyişle, birim karenin alanının ne olduğuna karar verdikten sonra her paralelkenarın alanını hesaplayabiliriz. Paralelkenarın alanı birim karenin alanı ile satırları, paralelkenarın kenarlarını oluşturan vektörlerin standart tabandaki koordinat vektörleri olan matrisin determinantının çarpımıdır.

Uyarı 1.3.1. *Alan hesabını yukarıdaki gibi aksiyomatik bir şekilde yapmanın bir bedeli olarak bazı paralelkenarların alanları negatif olacaktır. Diğer taraftan, $A(u, v) = -A(v, u)$ eşitliği bize alan hesabı yaparken kenarların sıralamasının önemli olduğunu göstermektedir. $A(u, v)$ sayısı ilk kenarı u ikinci kenarı v olan paralelkenarın işaretli alanı olacaktır. Kenarları sıralama (veya numaralandırma) işlemine yönlendirme diyeceğiz. Buna göre kenarları u, v olarak sıralanmış*

paralelkenar ile v , u olarak sıralanmış paralelkenarlar farklı yönlendirilmiş paralelkenarlardır.

İşaretili uzunluk, işaretili alan veya hacim, işaretsiz olanlara göre daha kullanışlı ve doğal olanlardır. Bu temayı bütün kitap boyunca sık sık göreceğiz.

Şimdi de $\mathbb{R}^n$ içinden rastgele alınan $v_1, \dots, v_n$ vektörlerinin belirlediği paralel yüzünün hacmini hesaplayalım:

$$\beta = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

sıralı tabanında bu v_i vektörünün koordinat vektörü $[a_{i1}, \dots, a_{in}]$ olsun. O halde, her $i = 1, \dots, n$ için $v_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$ olur. Düzlemde yaptığımız geometrik analiz tamamıyla bu durumda da geçerli olacaktır ve dolayısıyla eğer $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir hacim fonksiyonu ise A n -doğrusal (her değişkene göre doğrusal) ve değişmeli olacaktır. Bu iki özelliği defalarca kullanarak

$$\begin{aligned} A(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) &= A\left(\sum_j a_{1j}e_j, \dots, \sum_j a_{ij}e_j, \dots, \sum_j a_{nj}e_j\right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}\right) A(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada S_n n -elemanlı $\{1, \dots, n\}$ kümesinin tüm permütasyonlarının oluşturduğu grubu ve $\text{sgn}(\sigma)$ ise $\sigma \in S_n$ permütasyonunun işaretini göstermektedir. O halde, yine birim küpün hacminin ne olacağına karar verirse her paralel yüzünün hacmini hesaplayabiliriz.

$$A(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) = 1$$

koşulunu sağlayan forma $\mathbb{R}^n$ üzerindeki determinant fonksiyonu denir. Buna göre $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı her değişmeli n -doğrusal form determinant fonksiyonunun bir katı olacaktır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı değişmeli n -doğrusal formların determinant ve bunun katları olduğunu gördük. Diğer taraftan $\mathbb{R}^3$ üzerinde (değişmeli) 2-form var mı diye sorabiliriz. Bu sorunun cevabını vermek için önce tensörleri tanımlamalıyız.

1.3.2 Tensörler

R değişmeli bir halka, M, N, P bu halka üzerinde tanımlı modüller ve $F : M \times N \rightarrow P$ bilineer bir fonksiyon olsun. $F : M \times N \rightarrow P$ bilineer fonksiyonu $M \times N$ çarpım kümesi üzerindeki çarpım modül yapısıyla bir modül homomorfizması değildir. Çünkü eğer öyle olsaydı her $(m, n) \in M \times N$ ve $r \in R$ için $rf(m, n) = f(rm, rn) = rf(m, rn) = r^2f(m, n)$ olurdu ki bunun genelde

doğru olamayacağı açıktır. Diğer taraftan $f(rm, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$ olur. Benzer şekilde $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$ dir. Bu durumda istenilen modül yapısını bir bölüm modülü olarak kurabiliriz: $M \times N$ çarpım kümesini taban olarak kabul eden serbest

$$F(M \times N) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i(m_i, n_i) \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in R, m_i \in M, n_i \in N \right\}$$

R -modülü üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı tanımlayalım. Bunun için ilk önce, aşağıda tanımlanan $\sim_0$ bağıntısını ele alalım.

1. Her $(m, n) \in M \times N$ ve $r \in R$ için

$$(rm, n) \sim_0 r(m, n) \sim_0 (m, rn);$$

2. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $n, n_1, n_2 \in N$ için

$$(m_1 + m_2, n) \sim_0 (m_1, n) + (m_2, n) \text{ ve } (m, n_1 + n_2) \sim_0 (m, n_1) + (m, n_2).$$

Şimdi $\sim$ bağıntısını $\sim_0$ 'ı içeren en küçük denklik bağıntısı olarak tanımlayalım. Çarpım modülünü bu denklik bağıntısına (bağıntının ürettiği alt modüle) bölerek istediğimiz modül yapısını elde ederiz:

$$F(M \times N) / \sim.$$

Bu R -modül M ve N R -modüllerinin R -tensör çarpımı diye adlandırılır ve $M \otimes_R N$ ile gösterilir. Benzer şekilde $(m, n) \in M \times N$ elemanının denklik sınıfını $m \otimes n$ ile göstereceğiz. Bu durumda

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn),$$

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$$

ve

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$

olur. Aynı şekilde sonlu sayıda R -modülün

$$M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$$

tensör çarpımı tanımlanabilir. Alıştırma 30 ise tensör çarpımının uygun bir evrensel özellik yardımıyla tanımlanabileceğini göstermektedir.

V bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V^{\otimes k}$, ($k \leq n$), ile V 'nin kendisi ile k defa tensör çarpımını gösterelim. $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ V 'nin bir tabanı ise $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ olmak üzere

$$T_{i_1, \dots, i_k} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

tensörü olsun. Bu durumda $V^{\otimes k}$ vektör uzayı da sonlu boyutludur ve

$$\{T_{i_1, \dots, i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

bu vektör uzayının bir tabanıdır. Dolayısıyla, $V^{\otimes k}$ 'nin boyutu n^k 'dir.

$\{1, \dots, k\}$ kümesinin permütasyonlarının oluşturduğu S_k grubu $V^{\otimes k}$ vektör uzayı üzerine etki eder: Taban elemanları üzerindeki etki, $\sigma \in S_k$ için,

$$\sigma(T_{i_1, \dots, i_k}) = T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}}$$

olarak tanımlanır ve doğrusal bir şekilde tüm vektör uzayına genişletilir. Bu etkinin altında değişmez olan tensörlere simetrik k -tensörler denir. Simetrik tensörlerin oluşturduğu $\text{Sim}^k(V)$ vektör uzayının boyutu $n + k - 1$ elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir:

$$\binom{n + k - 1}{k}.$$

En az simetrik tensörler kadar önemli olan bir diğer tensör tipi, önceden de görmüş olduğumuz değişmeli tensörlerdir: $a \in V^{\otimes k}$ olmak üzere, eğer her $\sigma \in S_k$ için $\sigma(a) = \text{sgn}(\sigma) a$ oluyorsa, a tensörüne değişmeli k -tensörü denir (burada $\text{sgn}(\sigma)$ ile σ permütasyonunun işareti gösterilmiştir). Değişmeli k -tensörlerin oluşturduğu $\text{Alt}^k(V)$ vektör uzayının boyutunun da

$$\binom{n}{k}$$

sayısı olduğu kolayca görülür. Değişmeli k -tensörlere k -form da denir.

Aslında aşağıda verilen doğrusal fonksiyonların birer izdüşüm dönüşümü (karesi kendisine eşit olan bir dönüşüm) olduğu kolayca gösterilir:

1) $\text{Sim} : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$, her $v \in V^{\otimes k}$ için,

$$v \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(v)$$

olarak tanımlanan doğrusal fonksiyon bir izdüşüm dönüşümüdür ve görüntüsü $\text{Sim}(V^{\otimes k}) = \text{Sim}^k(V)$ 'dir.

2) Benzer şekilde $\text{Alt} : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$, her $v \in V^{\otimes k}$ için,

$$v \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \sigma(v)$$

olarak tanımlanan doğrusal fonksiyon yine bir izdüşüm dönüşümüdür ve görüntüsü $\text{Alt}(V^{\otimes k}) = \text{Alt}^k(V)$ alt uzayıdır.

V vektör uzayının dualini $V^* = \text{hom}(V, \mathbb{F})$ ile gösterelim. Eğer

$$\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$$

tabanının dual tabanı da $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ ise, her $1 \leq i, j \leq n$ için, $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ olur. $f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}$ tensörünün $k!$ Alt operatörü altındaki görüntüsünü

$$f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k} = k! \text{Alt}(f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes f_{i_{\sigma(k)}}$$

ile göstereceğiz.

Uyarı 1.3.2. Eğer $v_s = \sum_j a_{sj} e_j$, $s = 1, \dots, k$, V içinde vektörler ise

$$(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k})(v_1, \dots, v_k) = \det((a_{si_l})_{s,l=1,\dots,k})$$

olur.

Yazım konusunda büyük kolaylık sağlayan bu gösterim şekli değişmeli tensörlerin dış çarpımının tanımlanabilmesi için de olanak sağlar: $f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k}$ ve $f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_l}$ gibi iki taban elemanının dış çarpımı

$$(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k}) \wedge (f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_l}) = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k} \wedge f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_l}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlı doğrusal bir şekilde tüm $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{Alt}(V^{\otimes k})$ vektör uzayına genişleterek bu vektör uzayını bir $\mathbb{F}$ -cebiri yapabiliriz. Bu cebire V vektör uzayına ait dış cebir adı verilir ve $\Lambda(V)$ ile gösterilir. Bu cebirin elemanlarına dış form da denir. Burada $\text{Alt}(V^{\otimes 0})$ ile $\mathbb{F}$ cismi gösterilmektedir.

Aşağıdaki özelliklerin kanıtları okuyucuya bırakılmıştır:

1. Yukarıda tanımladığımız dış cebir bir cebirdir.
2. ω bir k -form ve ν bir l -form ise $\omega \wedge \nu = (-1)^{kl} \nu \wedge \omega$ olur.
3. ω bir k -form ve ν bir l -form ise $\omega \wedge \nu = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Alt}(\omega \otimes \nu)$ olur.
4. $L : V \rightarrow W$ $\mathbb{F}$ -vektör uzayları arasında doğrusal bir fonksiyon ve $L^* : W^* \rightarrow V^*$ ise bu fonksiyonun duali olsun. Bu durumda dual fonksiyon dış cebirler arasında doğal bir doğrusal fonksiyon verir:

$$L^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V), \quad \omega \mapsto L^*(\omega)$$

öyle ki her $v_1, \dots, v_k \in V$ için,

$$L^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(L(v_1), \dots, L(v_k))$$

olur. $L^*(\omega)$ dış formuna ω 'nın L ile geri çekilmesi denir. Geri çekme işlemi dış çarpım ile yer değiştirebilir ve dolayısıyla bir cebir homomorfizmasıdır:

$$L^*(\omega \wedge \nu) = L^*(\omega) \wedge L^*(\nu).$$

L örten (bire bir) ise L^* 'ın bire bir (benzer şekilde, örten) olduğunun gösterilmesini de okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz.

1.3.3 Temel Formlar ve Bazı Uygulamaları

Temel formların en yaygın kullanılabildiği köşegenleştirmedir. Operatörlerin veya matrislerin köşegenleştirilmesinin neden önemli olduğunu anlamak için aşağıda verilen matrisin kuvvetlerini hesaplamaya çalışalım:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \dots$$

bu işlemi on, yüz veya milyon kez yapmak bilgisayar yardımıyla bile oldukça zor olabilir. Örnek vermek gerekirse, A^{100} matrisinin bazı bileşenleri 21 basamaklı sayılardır. Benzer şekilde, A^n matrisini sadece n değişkeninin açık bir fonksiyonu ile ifade edebilir miyiz? Diğer taraftan, A köşegen bir matris olsaydı bu işlem çok kolay olurdu:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}.$$

Sonlu bir vektör uzayı üzerinde tanımlı her operatör uzayın bir tabanı verildiğinde kare bir matris ile ifade edilebilir. Bu sebepten sadece matrislerin köşegenleştirilmesi üzerinde duracağız. Katsayıları $\mathbb{F}$ cisminden seçilmiş $n \times n$ 'lik bir A matrisi alalım. Eğer sıfırdan farklı bir $v \in F^n$ vektörü ve bir $\lambda \in \mathbb{F}$ için $Av = \lambda v$ oluyorsa λ sayısına A matrisinin bir *özdeğeri* ve $v \in F^n$ vektörüne de bu *özdeğere karşılık gelen bir özvektör* denir. Eğer $\mathbb{F}^n$ vektör uzayının A matrisinin özvektörlerinden oluşan bir $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ tabanı varsa, öyle ki her i için $Av_i = \lambda_i v_i$, sağlanıyorsa, A matrisine *köşegenleştirilebilir* matris denir. Bu durumda eğer P sütunları $v_1, \dots, v_n$ vektörlerinden oluşan (taban değiştirme) matris ise $P^{-1}AP$ çarpımı

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisini verir.

Devam etmeden önce çok sık kullanılan ve kanıtını okuyucuya bırakacağımız bir sonucu hatırlatmak istiyoruz:

Teorem 1.3.3. 1) $T : V \rightarrow W$ vektör uzayları arasında doğrusal bir dönüşüm olsun. Eğer V sonlu boyutlu bir uzay ise $\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(T(V))$; başka bir deyişle V 'nin boyutu doğrusal fonksiyonun çekirdeğinin ve görüntüsünün boyutları toplamına eşittir.

2) $A \in M(n, n)$ olmak üzere $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, v \mapsto Av, v \in \mathbb{F}^n$, ile tanımlanan doğrusal fonksiyon için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

- $\det(A) \neq 0$,

- $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ bir izomorfizmadır,
- $\ker(A) = \{0\}$.

$Av = \lambda v$ denklemini $(\lambda I_n - A)v = 0$ olarak yazarsak, $v \neq 0$ olmasından $\det(\lambda I_n - A) = 0$ denklemini elde ederiz. O halde, A matrisinin özdeğerleri $f_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ polinomunun kökleridir. Derecesi n olan bu polinoma A matrisinin *karakteristik polinomu* denir. Cayley-Hamilton Teoremi'ne göre $f_A(A) = 0$ olur (bkz. Alistırma 35)). $P(A) = 0$ koşulunu sağlayan en küçük dereceli monik $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomuna A matrisinin *minimal polinomu* denir (bkz. Sonuç 1.3.5).

Örnek 1.3.4. Bu bölümün başında ele aldığımız $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisine tekrar dönelim. $f_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ olduğundan özdeğerler $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ olarak bulunur. $Av_i = \lambda_i v_i$ denkleminden özvektörler

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

ve

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

olur. Son olarak

$$P^{-1}A^n P = (P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

ve buradan da

$$A^n = P \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

elde edilir.

Bu bölümde şimdi de matrislerin üstel fonksiyonundan bahsedeceğiz. Üstel matrisler doğrusal türevlenebilir denklem sistemleri teorisindeki kullanılışlarının yanı sıra, geometri ve topolojinin de vazgeçilmez konularından biri olan Lie grupları ve Lie cebirleri konusuna da giriş yapma imkanı vermektedir. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

seri açılımı yardımıyla da tanımlanan üstel fonksiyonu matrisler üzerinde de tanımlayabiliriz: $\mathbb{F}$ gerçel veya karmaşık sayı cismini ve $M(m, n)$ bu cisim üzerinde tanımlı $(m \times n)$ -lik matrislerin vektör uzayını gösterebiliriz. Her $A \in M(n, n)$ matrisi ve $t \in \mathbb{F}$ sayısı için,

$$\frac{\|(tA)^k\|}{k!} \leq \frac{(|t| \|A\|)^k}{k!}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$e^{\|tA\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|t| \|A\|)^k}{k!}$$

gerçel sayı serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M -testini kullanarak

$$I_n + \frac{tA}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

serisinin de düzgün yakınsak olduğunu görürüz. Fakat,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi için kolayca

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla A köşegenleştirilebilir bir matris ise

$$e^{tA} = e^{P(tD)P^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}$$

elde ederiz (yukarıdaki ikinci eşitlik, üstel fonksiyonun seri açılımından kolayca görülür).

Bu seri sayesinde $\exp : \mathbb{R} \rightarrow M(n, n)$, $t \mapsto e^{tA}$, şeklinde tanımlanan fonksiyon aslında C^∞ sınıfından bir fonksiyondur ve türevi $t \mapsto Ae^{tA}$, ile verilir.

1.3.4 Örnek Kanıtlar

Bu bölümde yukarıda bahsettiğimiz kanonik formların teorisine dair bazı basit gözlemlerde bulunacağız. Başlangıç olarak aşağıdaki sabit katsayılı doğrusal denklem sistemini düşünelim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alıştırma 33 içinde tanımlanan $R_i \leftrightarrow R_j$, satır değiştirme ve $R_j \leftrightarrow rR_i + R_j$ bir satırın herhangi bir katını diğerine ekleme işlemleri, Gauss yok etme metodundaki satır işlemlerinden ikisine karşılık gelir. Aynı işlemlerin sütunlara uygulanması ise değişkenlerin doğrusal bir izomorfizma ile değiştirilmesine denk olacaktır. Örneğin, $(C_1 \leftrightarrow C_1 + 3C_2)$ işlemi (x, y, z) değişkenlerinin $(x, y+3x, z)$ değişkenleriyle değiştirilmesine karşılık gelir. Eğer amacımız çözüm uzayını bulmak değil de sadece boyutunu hesaplamak ise değişkenlerin nasıl değiştiğinin takip edilmesine bile gerek yoktur.

Şimdi genel bir A kare matrisi için $(\lambda I_n - A)v = 0$ özdeğer-özvektör problemini düşünelim:

$$\lambda I_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (*)$$

sistemini yukarıda bahsettiğimiz satır ve sütun işlemleri yaparak çözmeye çalışalım. Bu matrisi $\mathbb{F}[\lambda]$ polinom halkası (esas ideal bölgesi) üzerinde düşünüp satır ve sütun işlemleri yaparak $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$ olacak şekilde bazı $d_i \in \mathbb{F}[\lambda]$ polinomları için

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \quad (**)$$

matrisine dönüştürebiliriz. Bu matrise $\lambda I_n - A$ matrisinin Smith Normal Form'u denir. Uyguladığımız satır ve sütun işlemleri en fazla determinantın işaretini değiştireceği için

$$d_1 d_2 \cdots d_n = \pm \det(\lambda I_n - A) = \pm f_A(\lambda)$$

karakteristik polinomu olacaktır. O halde hiçbir d_i sıfır polinomu değildir. $d_1 d_2 \cdots d_n = \pm \det(\lambda I_n - A) = \pm f_A(\lambda)$ ve $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$ olduğundan $f_A(\lambda)$ ile d_n polinomları aynı asal çarpanlara sahiptirler. Aslında tüm d_i polinomlarını monik seçerek

$$d_1 d_2 \cdots d_n = \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda)$$

elde ederiz. Bu durumda d_i polinomlarına A matrisinin *değişmez çarpanları* denir.

Yukarıda elde ettiğimiz

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

matrisine A matrisinin *temel formu* denir. İlk önce her matrisin sadece bir tane temel formu olduğunu görelim (d_i polinomlarını monik seçmek kaydıyla): Bunun için, Δ_i ile $\lambda I_n - A$ matrisinin tüm $i \times i$ 'lik alt matrislerinin determinantlarından oluşan $\mathbb{F}[\lambda]$ içindeki idealin monik üreticini gösterelim. Boyutları $i \times i$ olan bir matrisin determinantını bir satır veya sütuna göre açtığımızda $(i-1) \times (i-1)$ 'lik alt matrislerinin determinantlarının bir doğrusal birleşimini elde edeceğimizden, her $i = 1, \dots, n$ için, $\Delta_{i-1} \mid \Delta_i$ olmalıdır.

Diğer yandan yukarıda kullandığımız satır ve sütun işlemleri sadece alt matrislerin yerlerini değiştireceğinden bu satır ve sütun işlemleri Δ_i polinomlarını değiştirmeyecektir. O halde $\lambda I_n - A$ ve D matrisi için aynı Δ_i 'ler elde edilecektir. Fakat D matrisi için $\Delta_i = d_1 \cdots d_i$ olduğu kolaylıkla görülür. Buna göre $d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$ olur. Başka bir deyişle, Δ_i 'ler tamamen A matrisi ile tek bir şekilde belirlendiği için A matrisinin bir ve sadece tek bir temel formu vardır.

Şimdi $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ olmak üzere, $d_n = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ farklı doğrusal terimlerin çarpımı olduğunu kabul edelim. Bu durumda her d_i farklı doğrusal terimlerin çarpımı olmalıdır. Ayrıca karakteristik polinomun derecesi n olduğundan $r_1 + \cdots + r_k = n$ olacak şekilde bazı pozitif r_i tam sayıları için

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

olacaktır. Buna göre her bir $i = 1, \dots, k$, için tam olarak r_i tane farklı $d_{j_1}, \dots, d_{j_{r_i}}$ polinomu $(\lambda - \lambda_i)$ doğrusal terimini içerecektir. (*) ve (**) denklem sistemleri birbirine denk olduğu için (*) sisteminde λ yerine λ_i koyarak λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör uzayının boyutunun tam olarak r_i olduğunu görürüz. Son olarak, $r_1 + \cdots + r_k = n$ olduğundan A matrisinin özvektörleri $\mathbb{F}^n$ vektör uzayı için bir taban oluşturur ve dolayısıyla A matrisi köşegenleştirilebilir.

Diğer taraftan, eğer A köşegenleştirilebilir bir matris ise bu adımları tersinden giderek d_n polinomunun farklı doğrusal terimlerin bir çarpımı olduğunu görürüz. O halde, aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk:

Sonuç 1.3.5. *A kare matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul d_n polinomunun farklı doğrusal terimlerin bir çarpımı olmasıdır.*

Aslında biraz daha dikkatli ilerleyerek kanonik formların teorisini kurabiliriz. $\mathbb{F}$ bir cisim ve $V = \mathbb{F}^n$ olmak üzere

$$T : V \rightarrow V, v \mapsto T(v) \doteq Av, v \in V,$$

dönüşümünü ele alalım. V vektör uzayı doğal bir biçimde bir $R = \mathbb{F}[x]$ modülü olarak görülebilir:

$$R \times V \rightarrow V, (f(x), v) \mapsto f(x) \cdot v \doteq f(T)(v), (f(x), v) \in R \times V.$$

Şimdi

$$\phi : R^n \rightarrow V, e_i^R = (0, \dots, 1, \dots, 0) \mapsto e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1, \dots, n,$$

ile tanımlanan örten R -modül homomorfizması bize $R^n / \ker \phi \cong V$ izomorfizmasını verir. Bu homomorfizmayı genel bir eleman üzerinde hesaplırsak

$$\phi(p_1(x), \dots, p_n(x)) = p_1(T)(e_1) + \dots + p_n(T)(e_n)$$

elde ederiz. Ayrıca, V üzerinde seçtiğimiz modül yapısından dolayı izomorfizmanın sol tarafında bölüm polinom halkasının bir elemanını x ile çarpmak sağ tarafta bir vektöre T ile etki etmeye denk gelecektir:

$$x \cdot m = T(\phi(m)), m = (p_1(x), \dots, p_n(x)) \in R^n / \ker \phi.$$

Dolayısıyla, T operatörünün V üzerindeki etkisini anlamak için bölüm halkasında x ile çarpmayı anlamak yeterli olacaktır.

Bu işe girişmeden önce $\ker \phi$ alt modülünün oldukça tanıdık bir nesne olduğunu görelim.

Önerme 1.3.6. $\ker \phi$ alt halkası $xI_n - A$ karakteristik matrisinin sütunları tarafından üretilir.

Kanıt : Her $i = 1, \dots, n$ için, $T(e_i) = \sum_j a_{ji}e_j$, olduğundan

$$(-a_{1i}, -a_{2i}, \dots, x - a_{ii}, \dots, -a_{ni}) \in \ker \phi$$

elde edilir. Dolayısıyla, $xI_n - A$ karakteristik matrisinin sütunları $\ker \phi$ alt modülünün içinde kalır. Yukarıda olduğu gibi, $xI_n - A$ karakteristik matrisinin Smith normal formunu köşegen $\text{Köşe}(d_1(x), \dots, d_n(x))$ matrisi ile gösterelim. Bu durumda, $\ker \phi$ alt modülünün her $(0, \dots, d_i(x), \dots, 0)$ elemanını içerdiğini kabul edebiliriz. O halde, W , $(0, \dots, d_i(x), \dots, 0)$ elemanlarının ürettiği alt modül olmak üzere, çekirdeği $\ker \phi / W$ olan, örten bir

$$\psi : R^n / \ker \phi \rightarrow R^n / W$$

R -modül, dolayısıyla da $\mathbb{F}$ -vektör uzayı, homomorfizmasını elde ederiz. Yukarıdaki paragraflardan dolayı, $R^n / \ker \phi$ $\mathbb{F}$ -vektör uzayının $V = \mathbb{F}^n$ vektör uzayına izomorfik olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, R^n / W R -modülü ($\mathbb{F}$ -vektör uzayı) için ise

$$R^n / W \cong \oplus_{i=1}^n R / Rd_i(x) = \oplus_{i=1}^n \mathbb{F}[x] / (d_i(x)) \cong \oplus_{i=1}^n \mathbb{F}^{\deg(d_i(x))}$$

yazabiliriz. Son olarak,

$$d_1 d_2 \cdots d_n = \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda)$$

karakteristik polinomu olduğundan

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}^{\deg(d_i(x))} \cong \mathbb{F}^{\sum_i \deg(d_i(x))} \cong \mathbb{F}^n$$

elde ederiz. Buradan, örten

$$\psi : \mathbb{F}^n \cong R^n / \ker \phi \rightarrow R^n / W \cong \mathbb{F}^n$$

$\mathbb{F}$ -vektör uzayı homomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu görürüz. O halde, $\ker \psi = \ker \phi / W = 0$ olmalıdır. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Bu iddianın bir sonucu olarak

$$V \cong R^n / \ker \phi \cong \bigoplus_{i=1}^n R / Rd_i(x)$$

yazabiliriz. Ayrıca, her bir $d_i(x) = d(x) = p_1^{n_1}(x) \cdots p_k^{n_k}(x)$ polinomunu asal çarpanlarına ayırırsak

$$R/d(x) \cong \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{F}[x]/p_j^{n_j}(x)$$

ayrışımını elde ederiz. Ayrıca, $p_j^{n_j}(x) = b(x) = b_0 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m$ ise $\mathbb{F}[x]/p_j^{n_j}(x) = \langle 1, x, \dots, x^{m-1} \rangle_{\mathbb{F}}$ vektör uzayı üzerinde x ile çarpma operatörünün bu tabandaki matris gösterimi olarak $p_j^{n_j}(x)$ polinomunun eş matrisi olan

$$C_{b(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -b_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{m-1} \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Eğer, $\deg(p_j(x)) > 1$ ise bu matris T operatörünün rasyonel kanonik formunu verir. Diğer taraftan, eğer $\deg(p_j) = 1$ ise, başka bir deyişle $b(x) = (x - \lambda)^m$ ise x ile çarpma operatörünün

$$\{1, x - \lambda, \dots, (x - \lambda)^{m-1}\}$$

sıralı tabanındaki matris gösterimi

$$J(\lambda)_m = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan formu olur.

Yukarıda elde ettiklerimizden faydalananarak kanonik formların temel özelliklerini kolayca görebiliriz.

1) Eğer $\mathbb{F}$ -cismi cebirsel kapalı ise her kare matrisin Jordan formu vardır: Aslında eğer f_A polinomu doğrusal çarpanlara ayrılabiliriyorsa uygun bir taban değiştirme sonunda

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_{m_r} \end{bmatrix}$$

Jordan bloklarının bir köşegen matrisi şeklinde yazılabildiğini gördük. Burada J_m 'ler Jordan blok matrislerini göstermektedir,

$$J_m = J(\lambda_i)_m = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Teorik önemlerinin yanı sıra köşegen matrisler kadar olmasa da Jordan blokların kuvvetlerini veya üstel fonksiyonunu hesaplamak kolaydır ve bu sebeple oldukça kullanışlıdır. Örneğin 2×2 'lik bir Jordan blok matrisinin kuvvetleri aşağıdaki gibidir:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}, \dots, \quad J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Genelde ise Jordan matrisin n 'inci kuvveti şöyledir:

$$J_m^n = J^n(\lambda_i)_m = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \lambda_i^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{n}{r-1} \lambda_i^{n-r+1} & \binom{n}{r-2} \lambda_i^{n-r+2} & \cdots & \lambda_i^n \end{bmatrix}.$$

2) A ve B benzer iki matris olsun. O halde tersi olan bir P matrisi için, $B = P^{-1}AP$ ve $\lambda I_n - B = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$ olur ve dolayısıyla $\lambda I_n - B$ matrisi $\lambda I_n - A$ matrisinden satır ve sütun işlemleriyle elde edilir. Bu durumda, bu iki matrisin temel formları aynı olacaktır. (Aslında bir satır veya sütunu bir sayı ile çarpmak determinantı da aynı sayıyla çarpmak anlamına gelir,

fakat Δ_i 'yi monik polinom olarak seçtiğimiz için bu durum bir soruna neden olmayacaktır.)

Diğer taraftan, bu iddianın tersi de doğrudur: Temel formları aynı olan iki kare matris benzerdir; başka bir deyişle, iki matrisin benzer olması için gerek ve yeter koşul bu matrislerin temel formlarının aynı olmasıdır. Bunu görmek için temel formları aynı olan iki matrisin aynı operatörün farklı iki bazdaki temsilleri olduğunu fark etmek yeterlidir. Bu ise yukarıda kanıtladığımız

$$V \cong R^n / \ker \phi \cong \bigoplus_{i=1}^n R/Rd_i(x)$$

izomorfizmasının açık bir sonucudur.

3) Yine

$$V \cong R^n / \ker \phi \cong \bigoplus_{i=1}^n R/Rd_i(x)$$

izomorfizmasını düşünelim. $f_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = d_1 d_2 \cdots d_n$ karakteristik polinomu $f_A(x) \cdot (\bigoplus_{i=1}^n R/Rd_i(x)) = 0$ eşitliğini sağladığı için $f_A(A) = 0$ sonucuna varırız. Bu ise Cayley-Hamilton Teoremi'dir. Diğer taraftan her $d_i(x) \mid d_n(x)$ olduğundan

$$d_n(x) \cdot (\bigoplus_{i=1}^n R/Rd_i(x)) = 0$$

elde ederiz. Buradan d_n polinomunun A matrisinin minimal polinomu olduğunu görürüz, çünkü daha küçük dereceli bir polinom $R/Rd_n(x)$ bileşenini yok edemeyecektir.

1.4 Ahırtırmalar

TOPOLOJİ

1. Λ bir küme ve $\leq$ bu küme üzerinde tanımlı bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer her $i, j \in \Lambda$ için $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak şekilde bir $k \in \Lambda$ varsa $(\Lambda, \leq)$ kısmi sıralama kümesine bir *yönlü* küme denir. Bir $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ topolojik uzaylar ailesi alalım, öyle ki, **1)** her $i \leq j$ için sürekli bir $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ fonksiyonu verilsin, öyle ki $f_{ii} = 1_{X_i}$ sağlansın; ve **2)** her $i \leq j \leq k$ için $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ eşitliği sağlansın.

Bu topolojik uzayların ayrık birleşimi üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı tanımlayalım: $x \in X_i$ ve $y \in X_j$ için $x \sim y$ 'dir ancak ve ancak öyle bir $k \in \Lambda$ ve $z \in X_k$ vardır ki $i, j \leq k$ dir ve hem $f_{ik}(x) = z$ hem de $f_{jk}(y) = z$ olur. $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ topolojik uzaylarının ayrık birleşimini bu denklik bağıntısına bölerek elde edilen bölüm uzayına $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ ailesinin *düz limiti* denir ve $\lim_{i \in \Lambda} X_i$ ile gösterilir. Her bir X_i için $X_i \rightarrow \lim_{i \in \Lambda} X_i$,

$x \mapsto [x]$, x elemanını limit uzayındaki denklik sınıfına götüren fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Ayrıca her bir f_{ij} fonksiyonun bir topolojik gömme fonksiyonu olması durumunda X_i uzaylarının hangi özelliklerinin limit uzayına geçtiğini inceleyiniz: Hausdorff'luk, tıkalılık, bağlantılılık, metriklenebilirlik, vs.

2. X bir topolojik uzay olmak üzere X 'in alt uzaylarının oluşturduğu aileyi alt küme bağıntısı ile sıralayalım: $A, B \subseteq X$ için $A \leq B$ ancak ve ancak $A \subseteq B$. Ayrıca bu durumda $f_{AB} : A \rightarrow B, x \mapsto x$, içirme fonksiyonu olsun. $\lim_{A \subseteq X} A = X$ olduğunu gösteriniz.
3. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ içinde açık bir küme olsun ve X 'in tüm tıkalı alt kümelerinin ailesini, $\Lambda = \{K \subseteq X \mid K \text{ tıkalı bir alt uzay}\}$, yine alt küme bağıntısı ile sıralayalım. $\lim_{K \in \Lambda} A = X$ olduğunu gösteriniz.
4. Aşağıdaki ifadeleri kanıtlayın.
 - (a) Herhangi bir küme üzerinde tanımlı olan rastgele topolojilerin arasının de bir topoloji olduğunu gösteriniz.
 - (b) X bir küme ve β , X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. β ailesinin ürettiği topoloji β 'yi içeren X üzerindeki tüm topolojilerin arasındadır. Dolayısıyla bu topoloji β 'yi içeren en küçük topolojidir.
5. $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ çarpım kümesinde (x_k) , $x_k = (a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^l, \dots)$,

$$a_k^l = \begin{cases} 0, & l \leq k \\ 1, & k < l \end{cases} ,$$

dizisini ele alalım. Bu dizinin çarpım uzayında yakınsak olduğunu ama kutu topolojisinde ıraksak olduğunu gösteriniz.

6. $\{X_i\}_{i \in I}$ bir topolojik uzaylar ailesi ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ bu ailenin çarpım uzayı olsun. Bir topolojik uzaydan çarpım uzayına giden bir $f : Y \rightarrow X$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul f 'nin her bileşen fonksiyonunun $f_i : Y \rightarrow X_i$ sürekli olmasıdır. Bu sonucun kutu topolojisi durumunda doğru olmadığını örnekle gösteriniz.
7. G hem grup hem de topolojik bir uzay olsun. Eğer, $G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$, işlemi sürekli ise G bir topolojik gruptur denir. G topolojik grubunun Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul birim elemandan oluşan tek elemanlı $\{e\} \subseteq G$ kümesinin kapalı olmasıdır, gösteriniz. Benzer şekilde, $H \leq G$ bir alt grup olmak üzere G/H bölüm uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul H alt grubunun kapalı bir alt küme olmasıdır, gösteriniz.

8. Bu alıştırmada Önerme 1.1.10 yardımı ile bölüm uzaylarının hangi koşullar altında Hausdorff olduklarını inceleyeceğiz. X topolojik uzay ve $P : X \rightarrow X/\sim$ bu uzay üzerinde bir bölüm uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:
- (a) P bölüm fonksiyonu açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda $P \times P : X \times X \rightarrow (X/\sim) \times (X/\sim)$ çarpım fonksiyonunun $(X/\sim) \times (X/\sim)$ kümesi üzerine koyduğu bölüm uzayı topolojisi, $X/\sim$ uzayının kendisi ile çarpımından elde edilen çarpım uzayı topolojisi ile çakışır.
 - (b) $(X/\sim) \times (X/\sim)$ çarpım uzayının köşegeninin $P \times P : (X \times X) \rightarrow (X/\sim) \times (X/\sim)$ bölüm fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $\sim \subseteq X \times X$ bağlantı alt kümesidir.
 - (c) $P : X \rightarrow X/\sim$ bölüm fonksiyonunun açık fonksiyon olması durumunda bölüm uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul $\sim$ denklik bağıntısının $X \times X$ çarpım uzayı içinde kapalı bir alt küme olmasıdır.
9. (a) X topolojik uzay ve $P : X \rightarrow X/\sim$ bu uzay üzerinde bir bölüm uzayı olsun. P fonksiyonunun açık olması için gerek ve yeter koşul her $U \subseteq X$ açık alt kümesi için U alt kümesinin $\sim$ *denklik bağıntısı ile genişlemesinin* $U_\sim = \{x \in X \mid x \sim y, \text{ bazı } y \in U\}$ açık olmasıdır, gösteriniz.
- (b) G , X uzayının tüm homeomorfizmalarının oluşturduğu grubun bir alt grubu olsun. X üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı $x \sim y$ ancak ve ancak bazı $g \in G$ için $y = g(x)$, şeklinde tanımlasın. Bu durumda $X/\sim$ bölüm uzayı G -yörüngelerinden oluşur ve X 'in *yörünge uzayı* diye adlandırılır. $P : X \rightarrow X/\sim$ bölüm fonksiyonunun açık bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
- (c) Bir önceki alıştırmanın sonucunu kullanarak X/G bölüm uzayının Hausdorff olması için $\{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$ alt kümesinin $X \times X$ çarpım uzayı içinde kapalı olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu gösteriniz.
- (d) X Hausdorff bir uzay ve G sonlu bir grup ise $X/\sim = X/G$ yörünge uzayının da Hausdorff olduğunu gösteriniz.
10. $P : X \rightarrow Y$ ve $Q : Y \rightarrow Z$ iki bölüm fonksiyonu ise $Q \circ P : X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonunun da bir bölüm fonksiyonu olduğunu gösteriniz.
11. $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in \mathbb{R}$, fonksiyonun bölüm uzayı seviyesinde verdiği $\tilde{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$ fonksiyonunun bir homeomorfizma olduğunu gösteriniz. Burada $\mathbb{R}/\sim$ üzerindeki topoloji bölüm uzayı topolojisidir. S^1 üzerindeki bu topoloji ise S^1 'in düzlemde aldığı alt uzay topolojisidir.

12. Tıkız bir X uzayından tanımlanan her sürekli $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonun düzgün olduğunu gösteriniz.
13. Bu alıştırmada önceden ele aldığımız bir örneği biraz daha derinlemesine inceleyeceğiz (bkz. Örnek 1.1.19): $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ uzayı (Öklit topolojisi ile) olsun ve X üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı şu şekilde tanımlansın: $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ ancak ve ancak $(y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$, olacak şekilde bazı $\lambda \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. $X/\sim$ bölüm uzayı üç boyutlu Öklit uzayındaki doğruların uzayıdır, *gerçel projektif düzlem* diye adlandırılır ve $\mathbb{R}P^2$ ile gösterilir.

(a) Bu uzayın iki boyutlu birim küre, S^2 , üzerinde

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (-x_1, -x_2, -x_3)$$

ile tanımlanan denklik bağıntısından elde edilen bölüm uzayına homeomorfik olduğunu gösteriniz.

- (b) $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}P^2$ 'nin $\mathbb{R}^6$ içine topolojik bir gömme fonksiyonu verdiğini gösteriniz.
- (c) $F(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2, xy, zx)$ ile tanımlanan F fonksiyonunun gerçel projektif düzlemin $\mathbb{R}^4$ içine topolojik bir gömme verdiğini gösteriniz. (Gerçel projektif düzlemin $\mathbb{R}^3$ içine gömülmesi mümkün değildir (bkz. Ünite 5, Alıştırma 16).)
14. Yol bağlantılı bir topolojik uzayın bağlantılı olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan $\mathbb{R}^n$ 'nin bağlantılı her açık alt kümesinin yol bağlantılı olduğunu gösteriniz.
15. $A = (-1, 0) \cup (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ alt uzayı olsun. Eğer $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bire bir sürekli bir fonksiyon ise $f(A)$ görüntü uzayının da bağlantısız olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan, $g(A) \subseteq \mathbb{R}^2$ bağlantılı olacak şekilde bire bir sürekli bir $g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu bulunuz.
16. Genellikle gerçel sayılar kümesinin her aralığının kardinalitesinin aynı olduğu lisans derslerinde işlenir. Diğer taraftan, $[0, 1)$ ve $(0, 1)$ gibi verilen iki aralık arasında bire bir eşleme örneği nadiren verilir:

$$A = \{0, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\} \subseteq [0, 1)$$

ve

$$B = \{1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\} \subseteq (0, 1)$$

olmak üzere $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın: $x \in X - A$ ise $f(x) = x$, $f(0) = 1/2$ ve $n > 1$ için $f(1/n) = 1/(n+1)$. Bu fonksiyon istenilen eşlemeyi verir. Görüldüğü gibi bu eşleme fonksiyonunun sonsuz noktada süreksizliği vardır. Aşağıda, bu durumdan kurtulmanın mümkün olmadığını göreceğiz.

- (a) $\mathbb{R}$ 'nin alt uzayları olarak $[a, b]$ ve (a, b) aralıklarının homeomorfik olmadıklarını gösteriniz.
- (b) $[0, 1]$ ve $(0, 1)$ aralıkları arasındaki her bire bir eşlemenin sonsuz noktada süreksizliği olduğunu gösteriniz.
17. $f : X \rightarrow X$ bağlantılı ve tıkHz X uzayından kendisine açık ve sürekli bir fonksiyon ise f 'nin örten olduğunu gösteriniz. Eğer f fonksiyonu ayrıca bire bir ise f bir homeomorfizmadır.
18. Bir $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona (X, d) metrik uzayının bir izometrisi denir. Her izometrinin bire bir ve sürekli olduğunu gösteriniz. Eğer (X, d) tıkHz bir metrik uzay ise f izometrisinin ayrıca örten ve dolayısıyla bir homeomorfizma olduğunu gösteriniz.
19. $\mathbb{R}^n$ Öklit metrik uzayının her izometrisinin afin bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
20. (a) Örnek 1.1.17'de $\mathbb{R}$ üzerine koyduğumuz τ_2 topolojisinin metriklenebilir olduğunu bir metrik inşa ederek gösteriniz.
- (b) $f : ([0, \infty), \tau_2) \rightarrow S^1$, $f(x) = \left(\cos \frac{2\pi x}{1+x}, \sin \frac{2\pi x}{1+x} \right)$, fonksiyonunun bir homeomorfizma olduğunu gösteriniz.
- (c) $\mathbb{R}$ üzerindeki τ_3 topolojisi

$$\beta = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, ab > 0\}$$

$$\cup \{(a, b) \cup (c_1, \infty) \cup (-\infty, c_2) \mid a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$$
tabanı ile üretilen topoloji olsun. Bu uzayın düzlemde çizilen sekiz rakamına homeomorfik olduğunu gösteriniz.
21. (a) Denk metriklerin aynı topolojiyi ürettiğini gösteriniz.
- (b) d_1 , X kümesi üzerinde tanımlanan bir metrik olmak üzere her $x, y \in X$ için
- $$d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1 + d_1(x, y)}$$
- ile tanımlanan fonksiyonun da X üzerinde bir metrik olduğunu ve bu iki metriğin aynı topolojiyi ürettiklerini gösteriniz. d_1 sınırlı bir metrik ise bu iki metrik denktir.
- (c) $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aynı topolojiyi veren ve birbirine denk olmayan iki metrik bulunuz.
22. (X, d) herhangi bir metrik uzay ve $(\tilde{X}, \tilde{d})$ bu uzayın bir tamlanışı olsun. Eğer X sayılabilir bir küme ise, $X = \{r_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, (r_n) dizisinin, $\tilde{X} - X$ içindeki her nokta için bu noktaya yakınsayan bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

23. Bir metrik uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul o uzay üzerindeki her gerçel değerli sürekli fonksiyonun en büyük (maksimum) değerinin olmasıdır, gösteriniz.

ANALİZ

24. $z = x_1 + ix_2 = (x_1, x_2)$ ve $w = y_1 + iy_2 = (y_1, y_2)$ olarak verilen bir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z)$ karmaşık sayılar fonksiyonunu $\mathbb{R}^2$ 'den $\mathbb{R}^2$ 'ye bir fonksiyon olarak görebiliriz:

$$F(x_1, x_2) = (Re(f(x_1 + ix_2)), Im(f(x_1 + ix_2))).$$

Bu durumda f fonksiyonu bir $p \in \mathbb{C}$ noktasında kompleks fonksiyon olarak türevlenebilir ancak ve ancak F fonksiyonu aynı noktada türevlenebilir ve $DF(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ doğrusal dönüşümü karmaşık vektör uzayı dönüşümüdür, gösteriniz.

25. Bu alıştırmada Ters Fonksiyon Teoremi'nin özel halini Ortalama Değer Teoremi ve temel topoloji bilgileri yardımıyla Banach Daraltma Prensi-bini kullanmadan kanıtlayacağız: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 sınıfından bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) \neq 0$, koşulunu sağlayan bir nokta olsun.

- (a) Ortalama Değer Teoremi'ni kullanarak f fonksiyonun x_0 noktası etrafında hep artan veya hep azalan olduğunu gösteriniz ve bunu kullanarak $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ fonksiyonu bire bir ve örten olacak şekilde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ aralıklarının varlığını kanıtlayınız.
- (b) $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ ters fonksiyonunun y_0 noktasında türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

26. Kapalı Fonksiyon Teoremi'ni kabul ederek Ters Fonksiyon Teoremi'ni kanıtlayınız.

27. (a) $[0, 1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayını supremum metriği ile düşünelim. Her $x \in [0, 1]$ için

$$T(f)(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) \sin t \, dt$$

ile tanımlanan $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ fonksiyonunun, her $f, g \in C([0, 1])$ için $\|T(f) - T(g)\| \leq 0.5\|f - g\|$ eşitsizliğini sağladığını gösteriniz.

- (b) $y(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x y(t) \sin t \, dt$ denklemini sağlayan tek bir sürekli $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

DOğRUSAL CEBİR

28. Bu alıştırmada determinanı pozitif olan $(n \times n)$ 'lik matrislerin oluşturduğu alt uzayın, $GL^+(n, \mathbb{R})$, yol bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için şu elementer pozitif determinantlı matrisleri düşünelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ikinci matris için $c > 0$ alacağız). Şimdi bir $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ alalım ve her biri yukarıdaki iki tipten birinden olacak şekilde seçilen sonlu sayıdaki E_i elementer matrisleri yardımıyla

$$E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A = \tilde{I}_n$$

şeklinde yazalım öyle ki, $\tilde{I}_n$ matrisi birim matristen satırlarının yer değiştirmesi (bir permütasyonu) ve yine bazı satırlarının -1 ile çarpılmasıyla elde edilmiş olsun. Bu matrisin determinantının da pozitif olduğunu gözlemleyiniz. Örneğin, (3×3) 'lük bir $\tilde{I}_3$ matrisi şu olabilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Her $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ matrisinin bu şekilde bir çarpım olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

Şimdi de her bir E_i matrisinin ve $\tilde{I}_n$ matrisinin, görüntüsü $GL^+(n, \mathbb{R})$ içinde kalan sürekli bir eğri ile birim matrise bağlanabileceğini görelim. İkinci tip elementer matris için eğrimiz

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & ct & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [1, 1/c] \text{ ya da } t \in [1/c, 1],$$

olarak seçilebilir. Birinci tip elementer matris için eğri bulma işini size bırakırken yukarıda verdiğimiz $\tilde{I}_3$ matrisini birim matrise bağlayan eğri

şu şekilde seçilebilir:

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \cos t\pi/2 & \sin t\pi/2 & 0 \\ -\sin t\pi/2 & \cos t\pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Genel durumun kanıtını size bırakıyoruz. Kanıtta faydalı olacak bir ipucu verelim: $\tilde{I}_n$ matrisinin içindeki negatif bileşenlerin sayısı m olsun. Her negatif sayıyı pozitifte çevirdikten sonra elde edilen matrisin satırlarının yerlerini değiştirerek birim matris etmemizi sağlayan permütasyon da σ olsun. Bu durumda, $\tilde{I}_n$ matrisinin determinanı pozitif olduğundan $(-1)^m \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ olur. Dolayısıyla, $GL^+(n, \mathbb{R})$ grubu yol bağlantılıdır.

Determinantı pozitif bir matrisin ilk satırını -1 ile çarpmak $GL^+(n, \mathbb{R})$ uzayından determinantı negatif olan matrisler uzayına, $GL^-(n, \mathbb{R})$, bir homeomorfizma tanımlar. Dolayısıyla, $GL(n, \mathbb{R})$ birbirine homeomorfik iki bağlantılı bileşenden oluşmaktadır.

Determinantı sıfırdan farklı bir matrisin satırlarına Gram-Schmidt operasyonu uygulayarak genel doğrusal gruptan ortogonal matrisler grubuna örten sürekli bir fonksiyon buluruz (bkz. ayrıca 240):

$$P : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow O(n).$$

Bu fonksiyonun ortogonal matrisler grubuna kısıtlamasının birim dönüşüm olduğunu gözlemleyiniz. Bu özelliğe sahip fonksiyonlara küçültme fonksiyonu adı verilir (bkz. Tanım 4.1.7). Son olarak, küçültme fonksiyonu yardımıyla, $O(n)$ ortogonal matrisler grubunun biri $SO(n)$ olmak üzere iki bağlantılı bileşenden oluştuğunu gösteriniz.

29. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 sınıfından bir fonksiyon ve $(x_n) \in \mathbb{R}^n$ yakınsak bir dizi olsun. Eğer her $n > 0$ için $f(x_n) = x_n$ ise $x_0 = \lim x_n$ noktasının da f fonksiyonu için sabit nokta olduğunu ve $\lambda = +1$ sayısının bu noktadaki türev fonksiyonunun, $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, bir özdeğeri olduğunu gösteriniz.
30. Bu alıştırmada modüllerin tensör çarpımının evrensel özellik yardımıyla tanımlanabileceğini göreceğiz. R değişmeli bir halka, M ve N bu halka üzerinde tanımlı modüller olsun. Bu durumda öyle bir R -modül A ve $\pi : M \times N \rightarrow A$ R -modül homomorfizması vardır ki, her R -modül P ve $F : M \times N \rightarrow P$ bilineer fonksiyonu için $F = G \circ \pi$ olacak şekilde sadece tek bir $G : A \rightarrow P$ R -modül homomorfizması vardır. Ayrıca, bu evrensel özelliği sağlayan tek modül $A = M \otimes_R N$ tensör çarpımıdır (ya da buna izomorfiktir). Bu ifadeleri kanıtlayınız.
31. Bu alıştırmada tensörlerin geometrik bir uygulaması olarak Hilbert'in üçüncü problemini ele alacağız. David Hilbert 1900 yılında Paris'te düzenlenen Uluslararası Matematik Konferansında 20. Yüzyıl matematiğine

yön veren 10 problemden oluşan bir liste sundu. Daha sonra liste biraz daha genişleyerek 23 probleme çıktı. Listenin 8. problemi olan Riemann Hipotezi, 12. problemi ve Gerçel Cebirsel Düzlem eğrilerinin konfigürasyonu problemini de kapsayan 16. problemi halen açık. Geri kalan problemlerin önemli bir kısmı tamamen veya kısmen çözülmüş durumda. Listenin ilk çözülen problemi ise 3. problem. Bu problem Hilbert'in o zamanlar öğrencisi olan Max Dehn (Dehn adıyla anılan, *Dehn Twist*, *Dehn Surgery* gibi bir çok matematiksel araç ve teknik özellikle düşük boyutlu topoloji alanında halen yoğun olarak kullanılmaktadır) tarafından aynı yıl çözüldü. Bu alıştırmada bu problemi tanıtip Dehn'in çözümünü sunacağız.

Düzlemde aynı alana sahip iki çokgen alalım. Bolyai-Gerwien Teoremi olarak bilinen sonuca göre bunlardan birini, muhtemelen birden fazla, doğru boyunca makas ile kesip farklı şekillerde yapıştırarak diğerini elde etmek mümkündür. Hilbert'in 3. problemi aynı sonucun 3-boyutlu çok yüzlü katı cisimler için doğru olup olmadığını sormaktadır: P_1 ve P_2 aynı hacme sahip çok yüzlü iki katı cisim olsun. Örneğin bir küp ile bir düzgün dört yüzlü. Küpü bir bıçak yardımıyla düzlemler boyunca sonlu sayıda parçaya ayırsak ve yüzleri boyunca tekrar yapıştırsak düzgün dört yüzlüyü elde edebilir miyiz?

Dehn bunun mümkün olmadığını tanımladığı bir değişmez yardımıyla gösterdi. Dehn'in kullandığı fikir gerçekten basit. Katı cisim bir düzlem boyunca kestiğimizi düşünelim. Eğer kenarlardan biri bu düzlemin içinde kalıyorsa bu kenarın uzunluğu değişmeyecek fakat bu kenara ait açı, toplamı aynı kalacak şekilde, iki parçaya bölünecektir. Eğer bir kenar bu düzlem ile kesişmiyorsa ne bu kenarın uzunluğu ne de bu kenara ait açı değişecektir. Yine eğer bu düzlem bir kenarı köşeleri dışında bir noktada kesiyorsa bu kenar, uzunlukları toplamı aynı kalmak üzere, iki parçaya ayrılacaktır. Ayrıca bu durumda bu iki parçanın da açıları değişmeyecektir. Son olarak, kesme işlemi sonunda bir yüz iki parçaya ayrılırsa, aynı uzunluğa sahip iki yeni kenar ortaya çıkacaktır. Bu kenarlara ait açılar toplamı ise π olacaktır.

Şimdi Dehn değişmezini tanımlayabiliriz: P sonlu sayıda ayrık çok yüzlü katı cismin ve E bu cisimlerin tüm kenarlarının kümesi olsun. Herhangi bir $e \in E$ kenarı için $\ell(e) \in \mathbb{R}$ bu kenarın uzunluğunu ve $\theta(e) \in \mathbb{R}$ bu kenara ait yüzler arasındaki açı olsun. Bu durumda, $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/(\mathbb{Q}\pi))$ $\mathbb{Q}$ -vektör uzayı içinde değer alan Dehn değişmezi

$$D(P) \doteq \sum_{e \in E} \ell(e) \otimes_{\mathbb{Q}} (\theta(e) + \mathbb{Q}\pi) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/(\mathbb{Q}\pi)),$$

olarak tanımlanır. Bu ifadenin P kümesi içinde kalan katı cisimlerin düzlemler boyunca kesilmesi ile değişmediğini gözlemleyiniz.

Herhangi bir küp için bu değişmezin sıfır olduğunu gösteriniz. Son olarak, herhangi bir düzgün dört yüzlü için bu değişmezin sıfırdan farklı

olduğunu ve dolayısıyla bir küpü kesip yapıştırarak düzgün dört yüzlü elde edemeyeceğimizi gösteriniz. Bu konuda daha kapsamlı bir okuma için Dehn-Hadwiger Teoremi ile Dehn-Sydler Teoremi'ne bakabilirsiniz. Bu problemin yüksek boyutlu ($n \geq 5$) genellemeleri henüz açık durumdadır.

Bu tarihi ve güzel problemi dikkatime sunan Beşiktaş Atatürk Anadolu Lisesi öğrencisi sayın Baran Çetin'e teşekkür ederim (2014 Aralık ayı).

32. R değişmeli bir halka, $(\Lambda, \leq)$ yönlü bir küme ve $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ bir R -modülleri ailesi olsun, öyle ki,

a) her $i \leq j$ için bir $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ R -modül homomorfizması olsun; ve ayrıca

b) her $i \leq j \leq k$ için $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ eşitliği sağlansın.

Şimdi bu R -modüllerin direkt toplamı üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı tanımlayalım: $x \in M_i$ ve $y \in M_j$ için $x \sim y$ 'dir ancak ve ancak öyle bir $k \in \Lambda$ ve $z \in X_k$ vardır ki $i, j \leq k$ 'dir ve hem $f_{ik}(x) = z$ hem de $f_{jk}(y) = z$ olur. $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i$ içinde $x \sim y$ olmak üzere $x - y$ tipindeki elemanların ürettiği alt modülü D ile gösterelim. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \Lambda} M_i / D$ bölüm modülüne $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ ailesinin *düz limiti* denir ve $\varinjlim M_i$ ile gösterilir.

Buna denk bir başka tanım ise şudur: Bu modüllerin ayrık birleşimi üzerinde yukarıdaki $\sim$ denklik bağıntısını düşünelim. Toplama işlemini de şu şekilde yapalım. $x \in M_i$ ve $y \in M_j$ rastgele iki eleman olmak üzere $i, j \leq k$ koşulunu sağlayan k endeksi için bu iki elemanın toplamını M_k içinde bunlara denk olan elemanların toplamı olarak tanımlayalım: $x + y \doteq f_{ik}(x) + f_{jk}(y)$. Bu şekilde tanımlanan işlemin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz. Bu ikinci tanımın avantajı direkt limitin grup, halka ve cisimler için de doğrudan tanımlanabilmesine olanak sağlamasıdır. Bu sayede gruplar için sıkıntılı olan direkt toplam işinden kurtulmuş oluruz. Bu iki tanımın denk olduğunu gösteriniz.

- (a) $\Lambda = \mathbb{Z}^+$ kümesi üzerinde $m \leq n$ ancak ve ancak $m|n$ kısmi sıralama bağıntısını tanımlayalım. Her $n \in \Lambda$ için $M_n = \mathbb{Z}_n$ devirli grubunu ve her $m|n$ için $f_{mn} : M_m \rightarrow M_n, [k] \mapsto [nk/m]$, ile verilen $\mathbb{Z}$ -modül homomorfizmasını gösterebiliriz. $\varinjlim M_n$ limit grubunun $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bölüm grubuna (toplama işlemi ile beraber) izomorfik olduğunu gösteriniz.

- (b) Yukarıda ele aldığımız sorudaki modülleri $M_n = \mathbb{Z}$ ve homomorfizmaları $f_{mn} : M_m \rightarrow M_n, k \mapsto nk/m$, alırsak $\varinjlim M_n$ limit grubunun $\mathbb{Q}$ grubuna (toplama işlemine göre) izomorfik olduğunu gösteriniz. Eğer M_n modülünü $\{k/n \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ alırsak $f_{mn} : M_m \rightarrow M_n$ homomorfizmasının rasyonel sayılardaki payda eşitleme işlemine karşılık geldiğini görebiliriz.

33. $M = \mathbb{Z}^2$ rankı iki olan değişmeli grup ve N bu grup içinde $(2, 3)$ ve $(1, 5)$ elemanlarının ürettiği alt grup olsun. Bu durumda M/N bölüm grubu nedir? Sonlu ise kaç elemanı vardır? Bu vektörleri satır olarak kabul eden

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantının bir anlamı var mı? Bu alıştırmada bu sorunun cevabını bulmanın sistematik bir yolunu öğreneceğiz.

R bir esas ideal bölgesi, M sonlu üretilen serbest bir R -modül ve $N \subseteq M$ bir alt modül olsun (R bir esas ideal bölgesi olduğundan M Noether-yen'dir ve dolayısıyla her alt modülü sonlu üretilir). $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ M modülünün bir tabanı ve $\beta' = \{f_1, \dots, f_m\}$ N 'nin bir üreteç kümesi olsun. $A = (a_{ij})$, $f_i = \sum_j a_{ij}e_j$, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$, olacak şekilde bir matris olsun.

$$(C_i \leftrightarrow C_j) : e_i \leftrightarrow e_j \quad \text{ve} \quad (R_i \leftrightarrow R_j) : f_i \leftrightarrow f_j$$

yer değiştirme ve

$$(C_i \leftrightarrow C_i - rC_j) : e_j \leftrightarrow re_i + e_j \quad \text{ve} \quad (R_j \leftrightarrow rR_i + R_j) : f_j \leftrightarrow rf_i + f_j$$

bir üreteçin $r \in R$ katını diğerine ekleme işlemleri üreteçlerin değişiminin A matrisini nasıl değiştirdiğini gösterir (C_i ler A matrisinin sütunları, R_i ler ise satırlarıdır). Örnek olarak,

$$(C_i \leftrightarrow C_i - rC_j) : e_j \leftrightarrow re_i + e_j$$

işlemi β kümesinde e_j 'nin $re_i + e_j$ ile değiştirilmesi sonucunda A matrisinin i 'inci satırından j 'inci satırının r katının çıkarıldığını göstermektedir. Taban değiştirme işlemlerinin gerçekten iddia edilen satır ve sütun işlemlerine karşı geldiğini gösteriniz.

Bu tür satır ve sütun işlemlerini kullanarak A matrisin sonlu adımda bir $D = (d_{ij})$ matrisine dönüştürebiliriz; öyle ki, $d_{11} \mid d_{22} \mid \dots \mid d_{kk} \neq 0$ olacak şekilde bir $k \leq \min\{m, n\}$ vardır ve diğer tüm $d_{ij} = 0$ 'dır: d_{11} R halkası içinde tüm a_{ij} 'lerin en küçük ortak bölenidir (halkamız bir esas ideal bölgesi olduğu için bunu yapabiliriz). A matrisinde a_{11} yerine d_{11} elemanını getirdikten sonra yine satır ve sütun işlemleriyle birinci satır ve sütundaki diğer tüm elemanları sıfır yapabiliriz. Daha sonra matrisin birinci satır ve sütununa dokunmadan aynı işlemleri diğer satır ve sütunlara yaparak devam ederiz. Bu işlemin sonlu adımda biteceği açıktır.

Bu işlemler sonucunda $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\beta' = \{d_{11}e_1, \dots, d_{kk}e_k\}$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde bölüm modülü

$$(\oplus_{i=1}^k R/(d_{ii}R)) \oplus R^{n-k}$$

olur.

Son olarak $R = \mathbb{Z}$ ve $n = k$ ise bölüm grubu sonludur ve eleman sayısı $|\det(A)| = |\det(D)| = d_{11} \cdots d_{kk}$ sayısıdır. En başta verdiğimiz örnek için $\det(A) = 7$ olduğundan bölüm grubu yedi elemanlı tek $\mathbb{Z}$ -modül olan $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ olmalıdır.

34. Bu alıştırmada gerçel (veya karmaşık) sayılar üzerindeki $M(n, n)$ kare matrisler uzayı içinde n -tane farklı özdeğeri olan matrislerin oluşturduğu alt uzayın $M(n, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ içinde açık bir yuvar içerdüğini göstereceğiz: $D = (d_{ij})$, $d_{ij} = i\delta_{ij}$, $(i, j = 1, \dots, n)$, köşegen matrisini düşünelim.

- (a) D matrisinin karakteristik polinomunun

$$f_D(\lambda) = (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n)$$

olduğunu gösteriniz. Bu polinomun

$$0.5, 1.5, \dots, n - 0.5, n + 0.5$$

noktalarında aldığı değerlerin işaretlerinin her seferinde değıştiğini gözlemleyiniz.

- (b) Katsayıları $f_D(\lambda)$ polinomunun katsayılarına ϵ kadar yakın olan n 'inci dereceden her $f(\lambda)$ polinomunun n tane farklı gerçel kökü olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısının varlığını gösteriniz.
- (c) $M(n, n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ metrik uzayı içinde her $A \in B(D, \delta)$ matrisinin n tane farklı özdeğeri olacak şekilde bir $B(D, \delta)$ açık yuvarının varlığını gösteriniz.
35. Bu alıştırmada Cayley-Hamilton Teoremi'nin bir başka kanıtını göreceğiz.
- (a) Doğrudan hesap yaparak her köşegen $D \in M(n, n)$ matrisi için $f_D(D) = 0$, sıfır matrisi, olduğunu gösteriniz. Benzer şekilde her köşegenleştirilebilir $B \in M(n, n)$ matrisi için $f_B(B) = 0$, olduğunu gösteriniz.
- (b) $\Phi : M(n, n) \rightarrow M(n, n)$, $\Phi(A) = f_A(A)$, ile tanımlanan fonksiyonun her bileşeninin $A = (a_{ij})$ matrisinin a_{ij} bileşenlerinin birer polinomu olduğunu gösteriniz.
- (c) Alıştırma 34'in sonucunu kullanarak her $A \in M(n, n)$ için $\Phi(A) = 0$ olduğunu gösteriniz.

36. A bir kare matris olmak üzere $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ olduğunu gösteriniz (ilk önce köşegen bir matris için gösteriniz ve daha sonra eşitliğin her iki tarafının da A 'nın analitik fonksiyonları olmasını ve köşegenleştirilebilir matrislerin tüm matrisler içinde açık bir yuvar içerdüğünü kullanınız). A izi sıfır olan bir kare matris ise e^A 'nın determinantı bir olan bir matris olduğunu gösteriniz.

37. Bu alıştırmada karakteristik polinomu doğrusal terimlerin çarpımı şeklinde yazılabilen bir matrisin Jordan temel formunun nasıl bulunacağını göreceğiz. $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir $A \in M(n, n)$ matrisinin karakteristik polinomu, $i \neq j$ için, $\lambda_i \neq \lambda_j$ olacak şekilde $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ özdeğerleri için

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

olsun. V ile $\mathbb{F}^n$ vektör uzayını gösterelim.

- $i = 1, 2$ olmak üzere $T_i : V \rightarrow V$ doğrusal operatörleri için $T_1 T_2 = 0$ ve $\ker(T_1) \cap \ker(T_2) = \{0\}$ ise $V = \ker(T_1) \oplus \ker(T_2)$ direkt toplamı olduğunu gösteriniz.
- $g_1(\lambda), g_2(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ aralarında asal iki polinom ve $B \in M(n, n)$ herhangi bir matris olmak üzere $g_i(B) : V \rightarrow V$ operatörleri için $\ker(g_1(B)) \cap \ker(g_2(B)) = \{0\}$ olduğunu gösteriniz.
- Her $i = 1, \dots, k$ için $V_i = \ker(\lambda_i I_n - A)^{n_i}$ olmak üzere $A(V_i) \subseteq V_i$ ve $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ olduğunu gösteriniz (*İpucu* : $g_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ ve $g_2(\lambda) = f_A(\lambda)/g_1(\lambda)$ alınız ve tümevarım metodunu kullanınız).
- Her $i = 1, \dots, k$ için A 'nın V_i alt uzayına kısıtlanışının, $A|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$, karakteristik polinomunun $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ olduğunu gösteriniz. Buradan V_i vektör uzayının boyutunun n_i olduğu sonucuna varırız. (*İpucu* : $A : V \rightarrow V$ doğrusal operatörünün V_i 'lerin tabanlarının birleşiminden oluşan bir tabandaki matris gösterimini kullanarak karakteristik polinomunu yazınız).
- B matrisinin karakteristik polinomunun $(\lambda - \lambda_0)^n$ olduğunu kabul edelim. $L = \lambda_0 I_n - B$ operatörü olmak üzere $W_i = \ker(L^i)$ olarak tanımlansın. O halde, $L(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $W_0 = \{0\}$, $W_1 = E_{\lambda_0}$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen özvektör uzayı ve $W_n = \mathbb{F}^n$ olur. Eğer $v_1, \dots, v_k \in W_i$ vektörlerinin denklik sınıfları W_i/W_{i-1} bölüm uzayı içinde doğrusal bağımsız bir küme ise $0 \leq s < i$, ve $1 \leq j \leq k$ olmak üzere $\{L^s(v_j)\}$ kümesinin doğrusal bağımsız bir küme olduğunu gösteriniz.

Şimdi $W_i/W_{i-1} \neq \{0\}$ olacak şekilde en büyük i sayısını seçelim. Bu sayı l olsun. W_l uzayı içinde denklik sınıfları W_l/W_{l-1} bölüm uzayının bir tabanı olacak şekilde $v_1^1, \dots, v_{k_1}^1$ vektörleri seçelim. O halde $L(v_1^1), \dots, L(v_{k_1}^1)$ kümesi W_{l-1}/W_{l-2} bölüm uzayının içinde doğrusal bağımsız bir küme verir. Şimdi de, öyle $v_1^2, \dots, v_{k_2}^2 \in W_{l-1}$ seçelim ki,

$$L(v_1^1), \dots, L(v_{k_1}^1), v_1^2, \dots, v_{k_2}^2$$

vektörlerinin denklik sınıfları W_{l-1}/W_{l-2} bölüm uzayının bir tabanı olsun ($k_2 = 0$ olması elbette mümkündür). Bu şekilde devam ederek,

$$L^{l-1}(v_1^1), \dots, L^{l-1}(v_{k_1}^1), L^{l-2}(v_1^2), \dots, L^{l-2}(v_{k_2}^2), \dots,$$

$$L(v_1^{l-1}), \dots, L(v_{k_l-1}^{l-1}), v_1^l, \dots, v_{k_l}^l$$

vektörlerinin denklik sınıfları $E_{\lambda_0} = W_1/W_0$ bölüm uzayı için bir taban olacak şekilde

$$v_1^1, \dots, v_{k_1}^1, v_1^2, \dots, v_{k_2}^2, \dots, v_1^{l-1}, \dots, v_{k_{l-1}}^{l-1}, v_1^l, \dots, v_{k_l}^l$$

vektörlerini elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \{v_1^1, L(v_1^1), \dots, L^{l-1}(v_1^1), \\ & v_2^1, L(v_2^1), \dots, L^{l-1}(v_2^1), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & v_{k_1}^1, L(v_{k_1}^1), \dots, L^{l-1}(v_{k_1}^1), \\ & \\ & v_1^2, L(v_1^2), \dots, L^{l-2}(v_1^2), \\ & v_2^2, L(v_2^2), \dots, L^{l-2}(v_2^2), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & v_{k_2}^2, L(v_{k_2}^2), \dots, L^{l-2}(v_{k_2}^2), \\ & \\ & \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ & \\ & v_1^{l-1}, L(v_1^{l-1}), \\ & v_2^{l-1}, L(v_2^{l-1}), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & v_{k_{l-1}}^{l-1}, L(v_{k_{l-1}}^{l-1}), \\ & \\ & v_1^l, \\ & v_2^l, \\ & \vdots \\ & v_{k_l}^l \}, \end{aligned}$$

kümesinin $V = \mathbb{F}^n$ için bir taban oluşturduğunu ve A matrisinin bu sıralı tabanda Jordan blokları şeklinde görüldüğünü gösteriniz.

38. Bir matrisin karakteristik polinomu doğal bir şekilde matrisin sürekli bir fonksiyonudur. Diğer taraftan, minimal polinomun matrisin sürekli bir fonksiyonu olamayacağını gösteriniz.
39. (a) $a_0 = a_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ile tanımlanan $(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, Fibonacci dizisinin genel teriminin sadece n cinsinden ifadesini Örnek 1.3.4 yardımıyla hesaplayalım: $v_n = [a_n \ a_{n+1}]^T$ vektörü ise $Av_{n-1} = v_n$ olduğunu gösteriniz. Buradan $v_n = A^n v_0$ yazarak sonucu hesaplayalım.

- (b) Bu metodu kullanarak $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ periyodik dizisinin genel teriminin sadece n cinsinden ifadesini bulunuz (bu dizi için kullanacağınız matrisin özdeğerleri karmaşık sayılar olacaktır).
- (c) Jordan temel formunu kullanarak, $n \geq 0$ için, $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$ ile verilen (a_n) dizisinin genel terimini a_0 , a_1 ve n cinsinden hesaplayınız.
- (d) (a_n) k 'inci dereceden indirgemeli bir dizi olsun. Başka bir deyişle öyle $c_0, \dots, c_{k-1}$ sayıları vardır ki her $n \geq 0$ için $a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_0a_n$ olur. Yukarıdaki gibi $v_n = [a_n \ \dots \ a_{n+k-1}]^T$ vektörünü gösterirse $Av_{n-1} = v_n$ olacak şekilde seçilen A matrisinin karakteristik polinomunun $f_A(\lambda) = \lambda^k - c_{k-1}\lambda^{k-1} - \dots - c_1\lambda - c_0$ olduğunu gösteriniz.
40. Bu alıştırmada rankı $n \geq 1$ olan serbest değişmeli $G = \mathbb{Z}^n$ grubunun, endeksi verilen bir $N \geq 1$ doğal sayısına eşit olan alt gruplarının sayısını, Smith Normal Form benzeri bir işlem kullanarak hesaplayacağız. Boyutları $n \times n$ olan tam sayı katsayılı bir A matrisi alalım. Bu matrisin satırlarını üreteç kümesi kabul eden alt grubu $H \leq G$ ile gösterelim. Alıştırma 33'da görmüş olduğumuz satır işlemlerinin H alt grubunu koruyacağı açıktır.

- (a) A matrisine sadece satır işlemleri uygulayarak bu matrisi aşağıda tarif edilen temel forma dönüştürebiliriz:

$$A \cong D = \begin{bmatrix} d_1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_2 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

D matrisinin köşegen elemanlarının pozitif seçilebileceğini ve bu durumda $N = d_1 \cdots d_n$ koşulunu sağladığını gösteriniz. Ayrıca $0 \leq d_{ij} < d_j$ koşulunu da eklersek D matrisinin A matrisi tarafından tek bir şekilde belirlendiğini gözlemleyiniz.

- (b) G serbest değişmeli grubunun endeksi N olan alt gruplarının yukarıda tarif ettiğimiz D matrisleriyle bire bir eşlenebileceğini gösteriniz. O halde, endeksi N olan alt grupları saymak yukarıdaki koşulları sağlayan D matrislerini saymaya denktir.
- (c) Verilen N ve n pozitif tam sayıları için, $G = \mathbb{Z}^n$ grubunun endeksi N olan alt gruplarının sayısını $f_n(N)$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonel bağıntının doğru olduğunu gösteriniz:

$$f_n(N) = \sum_{d|N} d^{n-1} f_{n-1}(N/d).$$

- (d) $f_1(N) = 1$ ve $f_2(N) = \sum_{d|N} d$ olduğunu gösteriniz. (Bu konuda yazılmış oldukça geniş kapsamlı bir çalışma için [23] numaralı referansa bakınız.)

41. Bu alıştırmada doğrusal cebir kullanarak Özel Görecelik Kuramı'nın önemli bir parçası olan Lorentz Dönüşümleri'ni elde etmeye çalışacağız.

Bunun için ilk önce, düz bir yol boyunca sabit v hızıyla ilerleyen bir tren düşünelim. Trenin dışında ve içinde iki ayrı gözlemci olduğunu varsayalım. Trenin üzerinde hareket ettiği yolun x -ekseni olduğunu ve trenin pozitif x eksen boyunca hareket ettiğini kabul edelim. Trendeki gözlemci de uzunlukları ölçebilmek için bir x' -ekseni kullansın. Ayrıca trenin içinde ve dışında bulunan iki saat yardımıyla gözlemciler zaman dilimlerini ölçüyor olsunlar. Trenin dışındaki gözlemci zamanı t ile gösterirken içindeki gözlemci t' ile gösterebilir.

Lorentz dönüşümleri trenin içinde geçen bir olay ile ilgili uzunluk ve zaman ölçümlerinin dışarıdaki gözlemci tarafından nasıl görüldüğünü ifade eder: Trenin içinde ölçülen bir $\Delta x'$ uzunluğu ile $\Delta t'$ zaman dilimi dışarıdaki gözlemci tarafından Δx ve Δt olarak ölçülmüş olsun. O halde, Lorentz dönüşümü $(\Delta t', \Delta x')$ ikilisinin $(\Delta t, \Delta x)$ ikilisi cinsinden ifadesini vermeli:

$$(\Delta t', \Delta x') = L(\Delta t, \Delta x).$$

Işık hızı ile ilgili bir deneyi grafik ile göstermeye çalıştığımızda gerçekçi bir grafik çizmek çok zordur çünkü ışık hızı günlük hayatta karşılaştığımız hızlara göre çok büyüktür. Bu nedenle zaman eksenini c ışık hızı ile çarparak (t, x) yerine (ct, x) ve (t', x') yerine de (ct', x') koordinatları ile çalışalım. Yeni koordinatlarda eksenlerin her ikisinin de aynı birime (metre veya kilometre) sahip olduğunu gözlemleyiniz. Daha fazla ilerleyebilmek için iki kabul yapacağız. Birincisi matematiksel bir kabul:

A) $(ct', x') = L(ct, x)$ fonksiyonu doğrusaldır.

Her iki koordinat sistemini de $\mathbb{R}^2$ ile eşlersek bu doğrusal dönüşümü $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir doğrusal operatör olarak görebiliriz. Bu operatörün standart tabandaki matris gösterimi

$$A(v) = \begin{bmatrix} a_{11}(v) & a_{12}(v) \\ a_{21}(v) & a_{22}(v) \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

İkincisi ise deneylerde tescil edilmiş fiziksel bir olgu:

B) Işık hızı seçilen koordinat sisteminden bağımsızdır.

Dolayısıyla, herhangi bir deney sonucunda her iki gözlemci de ışığın hızını 1 olarak hesaplayacaktır (zamanı ışık hızı ile çarptığımız için artık ışık hızı bir birimdir). Şimdi bir deney hayal edelim: Trenin içindeki bir

vagonun bir ucundan tutulan fenerin ışığının $c\Delta t'$ zaman aralığında $\Delta x'$ kadar yol aldığını kabul edelim. Bu durumda dışarıdaki gözlemci ışığın $c\Delta t$ zaman aralığında Δx kadar yol aldığını ölçecektir. Işık hızı her iki gözlemci için de 1 olacağına göre aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = 1 = \frac{\Delta x}{c\Delta t}.$$

Bu eşitlikleri kullanarak $[1 \ 1]^T$ vektörünün $A(v)$ matrisinin bir özvektörü olduğunu gösteriniz. Ayrıca, aynı deneyi feneri negatif x' - eksenini yönünde vagonun diğer ucundan tutsaydık $[1 \ -1]^T$ vektörünün de bir özvektör olduğunu görürdük. O halde,

$$A(v) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1(v) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A(v) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2(v) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\lambda_1(v)$, $\lambda_2(v)$ gerçel özdeğerleri vardır. Bu bilgileri kullanarak

$$A(v) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(v) & \alpha(v) \\ \alpha(v) & \gamma(v) \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu arada $A(v)$ matrisinin simetrik olduğunu da görmüş olduk.

Her iki gözlemcinin durumları birbirine göre simetriktir. Başka bir deyişle, trendeki gözlemciyi duruyor, dışarıdakini ise $-v$ yönünde hareket ediyor olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla, $A(v)^{-1} = A(-v)$ olmalıdır.

Şimdi dönüşümü matris gösterimini kullanmadan tekrar yazarsak,

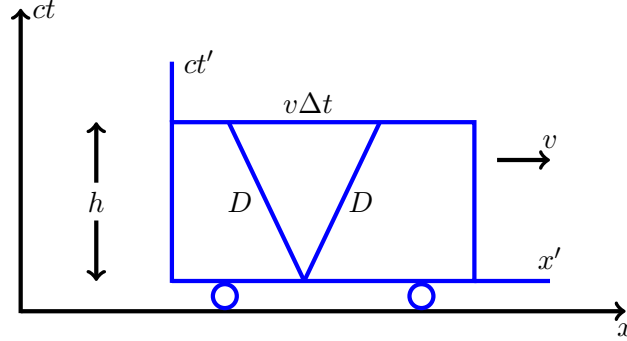
$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(v)c\Delta t + \alpha(v)\Delta x \\ c\Delta x' &= \alpha(v)c\Delta t + \gamma(v)\Delta x \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \gamma(-v)c\Delta t' + \alpha(-v)\Delta x' \\ c\Delta x &= \alpha(-v)c\Delta t' + \gamma(-v)\Delta x' \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.

Einstein hayali bir deney tasarlayarak $\gamma(v)$ fonksiyonunu hesaplamıştır. Deneyi size aktaralım. Vagonun yüksekliği h olsun. Tavandaki bir fenerden çıkan ışık vagonun tabanındaki bir aynadan yansıyarak tekrar tavana çarpsın. Bu durumda vagonun içindeki gözlemciye göre ışığın tavandaki fenerden çıkıp tekrar tavana ulaşması $\Delta t' = 2h/c$ saniye sürecektir. Diğer taraftan, dışarıdaki gözlemci ışığın yukarıdaki şekilde gösterilen iki eğik doğru parçası boyunca hareket ettiğini görecektir. Her bir doğru



Şekil 1.8: Trenin tavanından (üçgenin sağ üst köşesinden) çıkan ve yerden yansıdıktan sonra tekrar tavana çarpan ışığın izlediği yolun dışarıdaki gözlemci tarafından algılanış şekli.

parçası kenar uzunlukları h ve $v\Delta t/2$ olan dik üçgenlerin hipotenüsüdür. O halde,

$$\Delta t = \frac{2D}{c} = \frac{2\sqrt{h^2 + v^2(\Delta t)^2/4}}{c}$$

elde edilir. Şimdi bu iki denklemi kullanarak

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

eşitliğini bulunuz. Diğer taraftan, bu deneyde $\Delta x' = 0$ olduğunu kullanarak $\gamma(-v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ sonucuna ulaşınız.

Şimdi, $\gamma(-v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(v)$ ve $I_2 = A(v)A(v)^{-1} = A(v)A(-v)$ eşitliklerini kullanarak $\alpha(-v) = -\alpha(v)$ ve $\det(A(v)) = 1$ olduğunu gösteriniz. Dolayısıyla, $\gamma^2(v) - \alpha^2(v) = 1$ ve buradan da $\beta(v) = v/c$ olmak üzere $\alpha(v) = \pm\beta(v)\gamma(v)$ eşitliğini elde ediniz.

Hangi işaretin doğru olduğunu tespit etmek için Einstein'ın deneyine tekrar dönelim. Deneyde $\Delta t' > 0$ ve $\Delta x' = 0$ değerlerine karşılık $\Delta x > 0$ 'dır, çünkü Δx deney sırasında ışığın yatay olarak aldığı mesafenin dışarıdaki gözlemci tarafından ölçülen büyüklüğüdür ve ışık dışarıdaki gözlemciye göre pozitif yönde hareket etmektedir. Dolayısıyla, yukarıda elde ettiğimiz

$$c\Delta x = \alpha(-v)c\Delta t' + \gamma(-v)\Delta x'$$

eşitliğinden $\alpha(-v) > 0$ olduğunu görürüz. Son olarak (trenin hızı) $v > 0$ olduğundan $\alpha(v) = -\beta(v)\gamma(v)$ sonucuna varırız. O halde,

$$A(v) = \begin{bmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) \end{bmatrix}$$

olur.

Bu matrisin özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörleri bulunuz. Lorentz dönüşümlerinin trenin hızının her zaman ışık hızından küçük kaldığını öngördüğünü gözlemleyiniz.

Bu alıştırmayı bir soruyla tamamlayalım: Hızı v olan trenin içinde, x' -ekseni boyunca ve u hızında yürüyen birinin hızının dışarıdaki gözlemci tarafından

$$\frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

olarak ölçülmesi gerektiğini kanıtlayınız.

*“Hiç büyümemiş bir çocuk gibiyim. Sürekli ‘ne-
den’ ve ‘nasıl’ diye soruyorum. Arada bir de
cevap buluyorum.”*

-Stephen Hawking

2

Türevlenebilir Manifoldlar

Bu ünite de ilk önce türevlenebilir manifoldun tanımı, manifold örnekleri ve manifoldların yapılarına dair temel özellikler verilecektir. Daha sonra türevlenebilir manifoldların teğet uzayları ve teğet demet yapılarını inceleyeceğiz. Ardından rank teoremlerini ve manifoldların Öklit uzayına gömülmesine dair sonuçlar vereceğiz. Son olarak türevlenebilir formları ve Stokes Teoremi’ni göreceğiz. [16], [2], [42] ve [6] türevlenebilir manifoldlar için yaygın kullanılan kaynaklardır.

2.1 Türevlenebilir Manifoldlar

2.1.1 Temel Tanımlar

X Hausdorff ve ikinci sayılabilir (sayılabilir bir tabana sahip olan) bir uzay olsun. Eğer X her biri $\mathbb{R}^n$ ’nin açık bir alt kümesine homeomorfik olan açık alt kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, X ’e *n -boyutlu topolojik manifold* denir. $X = \cup U_\alpha$, ve $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, homeomorfizmalar ise $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ ailesine X topolojik manifoldunun bir *topolojik atlası* denir. Bu durumda boş kümeden farklı her $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ara kesiti için

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

bileşke fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ ’nin açık alt kümelerinin bir homeomorfizması olacaktır. Eğer X topolojik manifoldu için, bu bileşke fonksiyonlarının hepsi C^k -sınıfından olursa ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) bu atlası X topolojik manifoldu üzerinde C^k -sınıfından *türevlenebilir yapı* denir. Bu durumda X topolojik manifolduna da C^k -sınıfından türevlenebilir manifolddur denir. Eğer $k = \infty$ ise X ’e kısaca türevlenebilir manifold denir. n sayısına X manifoldunun boyutu ve her

bir $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ homeomorfizmasına (U_α üzerinde) bir koordinat sistemi denir. $p \in U_\alpha$ olmak üzere $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ fonksiyonunun $x_i(p)$ bileşenlerine de koordinat fonksiyonları denir. Manifolddarı büyük harflerle, boyutlarını ise manifoldu gösteren harfin üzerine küçük harf veya rakam yazarak gösteririz: $S^n, M^4, \mathbb{R}^3$ vs.

Uyarı 2.1.1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^m$ açık kümeler ve $f : U \rightarrow V$ bir difeomorfizma olsun. Bu durumda her $p \in U$ için $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ türev fonksiyonu doğrusal bir izomorfizma olduğundan $n = m$ olmalıdır. Bundan dolayı türevlenebilir manifoldun boyutu iyi tanımlanmıştır. Aslında f fonksiyonun sadece bir homeomorfizma olması durumunda bile $n = m$ olur. Dolayısıyla topolojik manifoldların boyutu da iyi tanımlıdır. Fakat bu sonucun, birkaç özel durum dışında (bkz. Alıştırma 3), basit sayılabilecek bir kanıtı yoktur (tekil homoloji teorisi kullanılarak kanıtlanabilir).

Sıfır boyutlu her manifold yerel olarak $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ 'a homeomorfik olduğundan ayrık topolojiye sahiptir. Diğer taraftan, her manifold ikinci sayılabilir olduğu için bu ayrık küme sayılabilir bir kümedir. Aslında, sonraki bölümlerde göreceğimiz gibi her manifold bir Öklit uzayının uygun bir alt uzayına homeomorfiktir (bkz. sayfa 80) ve sayılamaz ayrık bir küme hiçbir Öklit uzayına gömülemez. Dolayısıyla, manifold tanımındaki ikinci sayılabilirlik koşulu, manifoldları Öklit uzayına gömmeyi amaçlıyorsak, vazgeçilemez bir koşuldur.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ ya da herhangi bir açık alt kümesi n boyutlu türevlenebilir manifolddur. Aslında koordinat sistemini birim dönüşüm seçerek tek bir elemanı olan atlas ile manifoldumuzu kaplayabiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ Hausdorff ve ikinci sayılabilir olduğu için her alt uzay da Hausdorff ve ikinci sayılabilir.

Uyarı 2.1.3. Yukarıdaki tanımda $\mathbb{R}^n$ yerine $\mathbb{C}^n$ yazarak ve analitik fonksiyonların bileşkelerinin de analitik olduğunu kullanarak, n -boyutlu karmaşık manifold tanımını elde ederiz. Fakat C^1 karmaşık fonksiyonlar aynı zamanda C^∞ oldukları için her karmaşık manifoldu C^∞ kabul edebiliriz. Diğer taraftan, türevlenebilir her $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ fonksiyonu C^∞ bir $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ fonksiyonu olarak görebileceğimiz için n -boyutlu karmaşık her manifold aslında $2n$ -boyutlu C^∞ bir manifolddur.

Örnek 2.1.4 (Birim Küre). Bu örnekte $\mathbb{R}^{n+1}$ içindeki

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

birim küresinin türevlenebilir bir manifold olduğunu göreceğiz. Küre Öklit uzayının bir alt kümesi olduğu için Hausdorff ve ikinci sayılabilir. Ayrıca küre üzerindeki $S = (0, \dots, 0, -1)$ ve $N = (0, \dots, 0, 1)$ noktaları etrafında $U_N = S^n - \{N\}$ ve $U_S = S^n - \{S\}$ ile tanımlanan açık kümeleri birim kürenin açık bir örtüsünü vermektedir. Şimdi

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

ve

$$\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonların terslerinin

$$\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_N, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2} \right)$$

ve

$$\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_S, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2} \right)$$

olduğu kolayca görülür. O halde, φ_N ve φ_S birim küre üzerinde iki elemanlı bir atlas oluşturur. Bu fonksiyonlar ve tersleri değişkenlerin rasyonel ifadeleri olduklarından

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

ve

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

koordinat dönüşüm fonksiyonları C^∞ 'durlar. Dolayısıyla S^n birim küresi türevlenebilir manifolddur.

Örnek 2.1.5 (Projektif Uzay). Bir önceki ünitenin Alıştırma 13'ünde ele aldığımız gerçel projektif düzlemin doğrudan genellemesi olan gerçel projektif uzayı tanımlayacağız. $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ uzayı üzerinde $\sim$ denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ 'dir ancak ve ancak $(y_0, \dots, y_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ sayısı vardır. $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} / \sim$ ile gösterilen bölüm uzayı $n+1$ -boyutlu Öklit uzayında merkezden geçen doğruların uzayıdır ve gerçel projektif uzay diye adlandırılır. Sıfırdan farklı bir $(x_0, \dots, x_n)$ noktasının bölüm uzayındaki denklik sınıfını $[x_0 : \dots : x_n]$ ile göstereceğiz. Bölüm fonksiyonunu $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ile gösterelim. Her $i = 0, \dots, n$ için, $U_i = \{[x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$ açık kümesini gösterebiliriz ($\pi^{-1}(U_i)$ ters görüntü kümesinin $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ içinde açık olduğu kolayca görülür). Yine $\mathbb{R}P^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ olduğunu görmek kolaydır. Bu açık kümeler üzerinde koordinat sistemleri şu şekilde tanımlanır:

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

(Bu gösterimde üzerinde şapka bulunan koordinat yok sayılmaktadır.) Bu fonksiyonun tersi

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i, \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

ile verilir. Aslında projektif uzay aynı denklik bağıntısı yardımıyla birim kürenin bir bölüm uzayı olarak da görülebilir:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \sim,$$

ve dolayısıyla projektif uzay tıktır. Birinci Ünite'deki Alıştırma 9 ve Alıştırma 13 sayesinde projektif uzay Hausdorff'tur. Projektif uzayın ikinci sayılabilir olduğu ise genel bir sonucun gereğidir: İkinci sayılabilir bir uzayın herhangi bir bölüm uzayı da ikinci sayılabilir (kanıtı tanımlardan kolayca görülür). Ayrıca, küredekine benzer şekilde tüm koordinat sistemleri birer homeomorfizmadır ve dönüşüm fonksiyonları C^∞ olduğundan gerçel projektif uzay bir türevlenebilir manifolddur.

Yukarıdaki örnekte gerçel sayılar yerine karmaşık sayılar kullanılarak karmaşık projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ elde edilir. Hemen hemen aynı şekilde tanımlanmış olsalar da gerçel ve karmaşık projektif uzaylar sahip oldukları geometrik ve topolojik özellikler açısından çok farklı manifoldlardır.

Türevlenebilir manifoldlar kategorisinin morfizmaları türevlenebilir fonksiyonlardır: $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldlar arasında bir fonksiyon olsun. Eğer, sırasıyla, m ve n boyutlu M^m ve N^n manifoldları üzerindeki her $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ve $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinat sistemi için $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ bileşke fonksiyonu C^∞ ise $f : M \rightarrow N$ fonksiyonuna *türevlenebilir* denir. Türevlenebilir fonksiyonların bileşkelerinin de türevlenebilir olduğunun gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz.

2.1.2 Teğet Uzayı

M türevlenebilir bir manifold, $p \in M$ bir nokta ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ bu noktanın $p \in U$ ve $p \in V$ gibi iki açık komşuluğunda tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer bu iki fonksiyon $p \in W \subseteq (U \cap V)$ gibi bir açık alt küme üzerinde birbirine eşitse bu iki fonksiyona denktir diyeceğiz. Bu bağıntının denklik sınıflarına p noktasındaki *fonksiyon tohumları* denir ve denklik sınıfları kümesi $\mathcal{G}_p = \{[f] \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}\}$ ile gösterilir. Aslında $\mathcal{G}_p$ gerçel sayılar cismi üzerinde bir cebir oluşturur: $[f], [g] \in \mathcal{G}_p$ rastgele fonksiyonların tohumları olmak üzere toplama ve çarpma işlemleri

$$[f] + [g] = [f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V}]$$

ve

$$[f] \cdot [g] = [f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}]$$

ile tanımlanır. Şimdi M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki *teğet vektörlerini* $\mathcal{G}_p$ cebiri üzerindeki derivasyonlar olarak tanımlayacağız: Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $D : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathcal{G}_p$ üzerinde bir *derivasyon* denir:

1. Her $[f], [g] \in \mathcal{G}_p$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $D(a[f] + b[g]) = a D([f]) + b D([g])$ (Doğrusallık);
2. Her $[f], [g] \in \mathcal{G}_p$ için $D([f] \cdot [g]) = f(p) D([g]) + g(p) D([f])$ (Leibniz kuralı).

Manifoldun $p \in M$ noktasındaki tüm teğet vektörlerinin (derivasyonların) oluşturduğu küme toplama ve sabit ile çarpma işlemleri altında bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya manifoldun $p \in M$ noktasındaki *teğet uzayı* denir ve $T_p M$ ile gösterilir.

Bu tanım herhangi bir koordinat sistemini kullanmadığı için teorik açıdan daha avantajlı olsa da pratikte pek kullanışlı değildir. Şimdi bir koordinat sistemi yardımıyla teğet uzayına bir taban bulacağız: $p \in U \subseteq M$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeler olmak üzere $\varphi : U \rightarrow V$ bir koordinat sistemi olsun. $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$, $q \in U$, ise her $i = 1, \dots, n$ için, $D_i : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathbb{R}$ derivasyonu x_i yönündeki yönlü türev yardımıyla şu şekilde tanımlansın: $p_0 = (a_1, \dots, a_n) = \varphi(p)$ olmak üzere

$$D_i : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_i([f]) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(p_0), \quad [f] \in \mathcal{G}_p.$$

Önerme 2.1.6. Yukarıda tanımladığımız her D_i iyi tanımlanmış bir derivasyondur ve $\{D_1, \dots, D_n\}$ kümesi $T_p M$ teğet uzayının bir tabanıdır.

Kanıt : Eğer $[f] = [g] \in \mathcal{G}_p$ ise $f|_U = g|_U$ olacak şekilde bir $p \in U \subseteq M$ açık kümesi olduğu için D_i iyi tanımlanmıştır. D_i 'nin bir derivasyon olduğu ise Leibnitz kuralından görülür. Gösterimi basitleştirmek için $D([f])$ yerine sadece $D(f)$ yazacağız.

İkinci iddia için $[f] \in \mathcal{G}_p$ ise $p_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası etrafında $h = f \circ \varphi^{-1}$ türevlenebilir fonksiyonun Taylor açılımını göz önüne alalım,

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= g(p_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(p_0)(x_i - a_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j), \end{aligned}$$

(burada ξ , $p_0 = (a_1, \dots, a_n)$ ile $(x_1, \dots, x_n)$ noktalarını birleştiren doğru üzerinde bir noktadır). $D \in T_p M$ bir derivasyon olsun. $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ olduğundan her sabit $C \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için $D(C) = 0$ elde edilir. Yine Leibniz kuralından dolayı

$$D \left(\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i) \right) (x_j - a_j) \right) = 0$$

olduğu görülür (burada $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)$ ifadesinin de türevlenebilir fonksiyon olduğunu kullanıyoruz; bkz. Alıştırma 6). Bu durumda,

$$D(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p_0) D(x_i - a_i)$$

olmalıdır. Diğer taraftan, $D_i(f) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p_0)$ olduğundan

$$D = \sum_{i=1}^n D(x_i - a_i) D_i$$

eşitliğini elde ederiz. Son olarak $D_i(x_j - a_j) = \delta_{ij}$ eşitliğini kullanarak $\{D_1, \dots, D_n\}$ kümesinin doğrusal bağımsız ve dolayısıyla teğet uzayı için bir taban oluşturduğunu görürüz. $\square$

Yukarıdaki sonuca göre, bir nokta etrafında koordinat sistemi seçmek bize o noktadaki teğet uzayı için bir taban verecektir. Yukarıdaki teğet vektörü gösteriminde vektörün ait olduğu teğet uzayı belirtilmemektedir; bu yüzden $D_i \in T_p M$ teğet vektörünü

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

ile göstereceğiz. O halde, eğer $V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $p \in V$ ve $[f] \in \mathcal{G}_p$ ise

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p([f]) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

olur (burada V açık kümesi için koordinat sistemini birim fonksiyon olarak alıyoruz).

$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ türevlenebilir bir fonksiyon, $p \in \mathbb{R}^n$ ve $q = \Phi(p)$ olsun. $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında bir $D \in T_p \mathbb{R}^n$ teğet vektörü alalım. Bu durumda, $[f] \in \mathcal{G}_q$ için $\Phi_*(D)([f]) = D(f(\Phi))$ olarak tanımlanan ifade $q \in \mathbb{R}^m$ noktasında bir teğet vektörü tanımlar. Aslında bu ifade bize bir doğrusal fonksiyon verir:

$$\Phi_* : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_q \mathbb{R}^m, \quad D \mapsto \Phi_*(D).$$

Şimdi bu doğrusal fonksiyonun matris gösterimini bulalım: İlk önce fonksiyonumuzun $\mathbb{R}^n$ üzerinde $(x_1, \dots, x_n)$ ve $\mathbb{R}^m$ üzerinde $(y_1, \dots, y_m)$ ile verilen rastgele koordinat sistemleri cinsinden ifadesini

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n))$$

olarak yazalım. Buradan

$$\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) ([y_j]) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (y_j(\Phi)) = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(p)$$

ve dolayısıyla

$$\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_q$$

elde edilir. Son olarak, bu açılımdan $\Phi_* : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_q \mathbb{R}^m$ doğrusal fonksiyonunun

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\} \quad \text{ve} \quad \beta' = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_q \right\}$$

sıralı tabanlarındaki matris gösteriminin Φ fonksiyonunun $p \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki Jakobiye matrisi,

$$[\Phi_*]_{\beta}^{\beta'} = \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(p) \right]_{m \times n},$$

olduğunu görürüz (Ayrıca bkz. Uyarı 1.2.5).

Sonuç olarak, $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bir uzaydan diğerine noktaları taşıırken bu fonksiyonun türevinin de o noktalardaki teğet vektörleri taşıdığını görmüş olduk. Φ_* teğet fonksiyonunu $\Phi'(p)$, $(d\Phi)_p$ veya $(D\Phi)_p$ ile de gösterebiliriz.

Bazı durumlarda bir fonksiyonun türevini Jakobiye matrisi kullanmadan hesaplamak daha pratik olabilir. Bunu açıklamadan önce kolay bir gözlemde bulunacağız. $v \in T_p \mathbb{R}^n$ bir teğet vektörü olsun. O halde

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

olacak şekilde $a_i \in \mathbb{R}$ katsayıları bulabiliriz. Bu durumda $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = p + tv$, şeklinde verilen fonksiyonun $t = 0$ noktasındaki türevi v vektörüdür:

$$D(\gamma)(0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = v = \gamma'(0).$$

Ayrıca zincir kuralından

$$(D\Phi)_p(v) = (\Phi(\gamma))'(0)$$

buluruz. Bu metodun neden kullanışlı olduğunu bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 2.1.7. $M(n, n) = \mathbb{R}^{n^2}$ ve $S(n) = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ sırasıyla gerçel katsayılı $n \times n$ -matrisler ve $n \times n$ simetrik matrisler uzaylarını gösterebiliriz. $\Phi : M(n, n) \rightarrow S(n)$, $\Phi(Q) = Q^T Q$, fonksiyonunun $Q = Id$ birim matrisindeki türev fonksiyonunu hesaplayalım. Doğrusal bir uzayın bir noktasındaki teğet uzayını kendisi ile eşleyebiliriz. Bu durumda $T_{Id} M(n, n) = M(n, n)$ ve $T_{Id} S(n) = S(n)$ alabiliriz. Herhangi bir $A \in M(n, n)$ teğet vektörü için $\gamma(t) = Id + tA$ alarak

$$(D\Phi)_{Id}(A) = (\Phi(\gamma))'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(\gamma(t)) - \Phi(\gamma(0))}{t}$$

ve buradan da

$$(D\Phi)_{Id}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Id + tA^T + tA + t^2 A^T A - Id}{t} = A + A^T$$

buluruz:

$$(D\Phi)_{Id} : M(n, n) \rightarrow S(n), \quad A \mapsto A^T + A.$$

(Bkz. Örnek 2.1.20)

Bundan sonra, tersi söylenmedikçe her manifold türevlenebilir bir manifold ve manifoldlar arasındaki her fonksiyon türevlenebilir bir fonksiyon olarak kabul edilecektir.

2.1.3 Teğet Demeti

Herhangi bir M manifoldunun *teğet demeti* teğet uzaylarının birleşimi olarak tanımlanır:

$$T_*M = \cup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}.$$

Teğet demetinden manifoldda giden doğal izdüşüm fonksiyonu $\pi : T_*M \rightarrow M$, $(p, v) \mapsto p$, ile tanımlanır. Eğer M boyutu n olan bir manifold ise T_*M boyutu $2n$ olan bir manifold olur. Aslında M C^k -sınıfından bir manifold ise T_*M C^{k-1} -sınıfından bir manifold olur. Teğet demeti üzerindeki manifold yapısı M 'nin koordinat sistemleri kullanılarak oluşturulur. $M = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, $\{\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}\}$, M manifoldunun bir atlası olsun. Yukarıdaki gözlemlerimizin ışığında $(x_1, \dots, x_n) \in V_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde koordinat sistemi ise

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha} : T_*U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha} \times \mathbb{R}^n, \quad \left(p, \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \mapsto (\varphi_{\alpha}(p), (a_1, \dots, a_n))$$

fonksiyonu bire bir eşleme verir. T_*U_{α} üzerine $\widetilde{\varphi}_{\alpha}$ fonksiyonlarını homeomorfizma yapacak şekilde topoloji koyalım. M manifoldunu U_{α} açık kümelerinin birleşimi olarak yazarsak manifoldu $\mathbb{R}^n$ 'nin açık kümelerinin ayrık birleşiminin bir bölüm uzayı olarak görebiliriz:

$$M = \cup_{\alpha} U_{\alpha} \simeq \dot{\cup}_{\alpha} V_{\alpha} / x \sim (\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})(x).$$

Burada $\simeq$ işareti ile homeomorfizma (aslında difeomorfizma) gösterilmektedir. Diğer taraftan, bir $(p, v) \in T_*M$ noktası için $(p, v) \in T_*U_{\alpha} \cap T_*U_{\beta}$ ve $\widetilde{\varphi}_{\alpha}(p, v) = (\varphi_{\alpha}(p), w_{\alpha})$, $\widetilde{\varphi}_{\beta}(p, v) = (\varphi_{\beta}(p), w_{\beta})$ olmak üzere $D(\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})_{\varphi_{\alpha}(p)}(w_{\alpha}) = w_{\beta}$ olduğundan teğet demetini $V_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$ 'lerin ayrık birleşiminin bir bölüm uzayı olarak yazabiliriz:

$$T_*M = \cup_{\alpha} T_*U_{\alpha} \simeq \dot{\cup}_{\alpha} V_{\alpha} \times \mathbb{R}^n / (x, w_{\alpha}) \sim ((\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})(x), w_{\beta}).$$

Teğet demeti bu koordinat sistemlerinin oluşturduğu $\{\widetilde{\varphi}_\alpha : T_*U_\alpha \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n\}$ atlası ile türevlenebilir bir manifold olur. Bu atlası oluşturan koordinat sistemleri, manifoldun koordinat fonksiyonları ve onların türevlerinden oluştuğu için C^k -sınıfından bir manifoldun teğet demeti C^{k-1} -sınıfından olur. Benzer şekilde, $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların C^k -sınıfından bir fonksiyonu ise $f_* : T_*M \rightarrow T_*N$, $(p, v) \mapsto (f(p), (Df)_p(v))$, fonksiyonu da C^{k-1} -sınıfından olur.

Her $W \subseteq U_\alpha$ açık kümesi için $\pi^{-1}(W) = W \times \mathbb{R}^n$ olmasına rağmen genelde $T_*M = \pi^{-1}(M) = M \times \mathbb{R}^n$ kartezyen çarpımına difeomorfik değildir. Alıştırma 17 de bir çarpım manifoldunun teğet uzayının, çarpımı oluşturan manifoldların teğet uzaylarının kartezyen çarpımı olduğu gösterilmektedir.

Tanım 2.1.8. 1) $\pi : X \rightarrow Y$ kümeler arasında örten bir fonksiyon ise $\pi \circ s = \text{id}_Y$ koşulunu sağlayan her $s : Y \rightarrow X$ fonksiyonuna $\pi : X \rightarrow Y$ bölüm fonksiyonunun bir kesiti denir.

2) M bir manifold olmak üzere $\pi : T_*M \rightarrow M$ teğet demeti izdüşüm fonksiyonunun her kesitine M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. Demetin herhangi bir kesiti

$$s : M \rightarrow T_*M, \quad p \mapsto (p, f(p)), \quad p \in M,$$

şeklinde verilsin. Genellikle, gösterimi kötü kullanarak kesitin ilk koordinatını görmezden geleceğiz kesiti sadece $p \mapsto f(p)$ olarak yazacağız.

Örnek 2.1.9. $M = \mathbb{R}^2$ manifoldu üzerinde her vektör alanı $A(p) = A(x, y)$ ve $B(p) = B(x, y)$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(p) = A(p) \frac{\partial}{\partial x}|_p + B(p) \frac{\partial}{\partial y}|_p$$

şeklinde dir. $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x}|_p + y \frac{\partial}{\partial y}|_p$ merkezkaç vektör alanıyken $Y(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x}|_p + x \frac{\partial}{\partial y}|_p$ dönel bir vektör alanıdır.

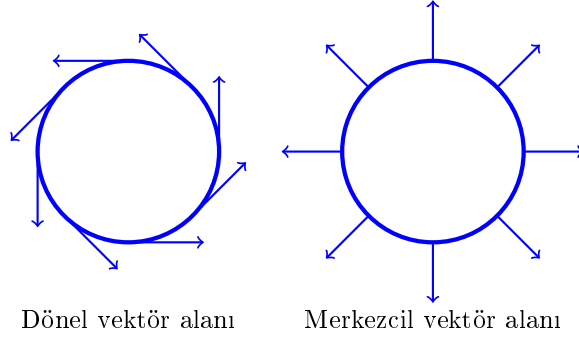
Yukarıdaki örnek vektör alanlarının bir koordinat sisteminde nasıl göründüğünü göstermektedir. $M = \cup_\alpha U_\alpha$, $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$, M manifoldunun bir atlası ve $s : M \rightarrow T_*M$ bir kesiti (vektör alanı) olsun. $s_\alpha : V_\alpha \rightarrow T_*V_\alpha$ bu kesitin V_α koordinat sistemindeki ifadesi ise her α, β için, $\phi_{ij} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ olmak üzere

$$s_\beta(\phi_{ij}(x)) = (D\phi_{ij})_x(s_\alpha(x))$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan bu eşitlikleri sağlayan her $\{s_\alpha : V_\alpha \rightarrow T_*V_\alpha\}$ topluluğu manifold üzerinde bir vektör alanı belirler.

Örnek 2.1.10. 1) Örnek 2.1.5'te ele aldığımız gerçel projektif doğru iki gerçel sayı doğrusunun ayrık birleşiminin bir bölüm uzayı olarak yazılabilir:

$$\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} / x \sim \phi(x) = 1/x, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$



Şekil 2.1: Düzlem üzerindeki alanların birim çembere kısıtlanışları

O halde, teğet demetini de

$$T_*\mathbb{R}P^1 = T_*\mathbb{R} \dot{\cup} T_*\mathbb{R} / (x, v) \sim (\phi(x), \phi'(x)(v)) = (1/x, -v/x^2),$$

$(x, v) \in \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} = T_*(\mathbb{R} - \{0\})$, şeklinde ifade edebiliriz. $\pi : T_*\mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, $[x, v] \mapsto [x]$, teğet demetinin izdüşüm fonksiyonu olsun. Birinci ve ikinci koordinat sistemi üzerinde tanımlanan

$$s_1(x) = \left(x, \frac{1+x^2}{2}\right) \quad \text{ve} \quad s_2(x) = \left(x, -\frac{1+x^2}{2}\right)$$

yerel kesitlerini düşünelim. Gösterimi kötü kullanarak kesitleri

$$s_1(x) = \frac{1+x^2}{2} \quad \text{ve} \quad s_2(x) = -\frac{1+x^2}{2}$$

olarak yazarsak

$$s_2(1/x) = -\frac{1}{x^2} s_1(x)$$

olduğundan bu iki yerel kesit $\mathbb{R}P^1$ üzerinde bir $s : \mathbb{R}P^1 \rightarrow T_*\mathbb{R}P^1$ kesiti verir (bkz. Tanım 2.1.8). Dikkat edilirse bu kesitin hiçbir noktada sıfırı olmadığını görürüz.

$$\text{Eğer } P : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1, ([x], w) \mapsto [x], \text{ ve}$$

$$F : \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} \rightarrow T_*\mathbb{R}P^1, ([x], w) \mapsto w s([x])$$

ile tanımlanan fonksiyonlar ise $P([x], w) = \pi(F([x], w))$ olur. Burada F fonksiyonu difeomorfizma olmakla beraber, her $\{[x]\} \times \mathbb{R}$ lifine kısıtlanması da doğrusal bir izomorfizmadır. O halde, gerçel projektif uzayın teğet demeti bir çarpım olarak ifade edilebilir.

2) Yukarıdakine benzer bir şekilde karmaşık projektif doğrunun (karmaşık) teğet demetini de inşa edebiliriz

$$T_*\mathbb{C}P^1 = T_*\mathbb{C} \dot{\cup} T_*\mathbb{C} / (x, v) \sim (\phi(x), \phi'(x)(v)) = (1/x, -v/x^2),$$

$(x, v) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C} = T_*(\mathbb{C} - \{0\})$ ($\mathbb{C}$ yerine $\mathbb{R}^2$ yazarak gerçel teğet demetinin ifadesini elde edebiliriz). Fakat bu sefer $s : \mathbb{C}P^1 \rightarrow T_*\mathbb{C}P^1$ vektör alanının iki tane sıfırı olacaktır ($s_1(x) = -s_2(x) = \frac{1+x^2}{2}$ polinomlarının i ve $-i$ olmak üzere iki tane ortak kökü vardır ve $1/i = -i$ dir). Dolayısıyla bu teğet demetini, oluşturduğumuz vektör alanını kullanarak bir çarpım olarak yazamayız. Aslında, $S^2 = \mathbb{C}P^1$ projektif uzayının teğet demetini bir çarpım olarak yazamamanın çok haklı sebepleri vardır. (Bkz. Uyarı 5.3.1 (2) ve Örnek 5.3.2 (2))

Yukarıdaki örneğin ilk bölümünde olduğu gibi teğet demeti çarpım şeklinde yazılabilen manifoldlara *paralellenebilir manifoldlar* denir.

2.1.4 Bölüm Manifoldları

X, Y topolojik uzay ve $P : X \rightarrow Y$ bu iki uzay arasında sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $U \subseteq Y$ açık kümesinin $P^{-1}(U)$ ters görüntü kümesi, her $\alpha \in \Lambda$ için $P|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizma olacak şekilde,

$$P^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

bir ayrık birleşimi olarak yazılabiliyorsa U açık kümesine $P : X \rightarrow Y$ fonksiyonu ile *tamamen örtülür* denir. Eğer Y uzayı bu tür açık kümelerin bir birleşimi ise X uzayına Y uzayının bir *topolojik örtü uzayı* (örtüsü) ve $P : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna da bir *örtü fonksiyonu* denir.

Uyarı 2.1.11. Yukarıdaki tanımdan kolayca görüleceği gibi eğer $P : X \rightarrow Y$ bir örtü fonksiyonu ise, $y \mapsto |P^{-1}(y)|$, $y \in Y$, (y noktasının üzerindeki lifin, $P^{-1}(y)$, kardinalitesi) fonksiyonu yerel sabit bir fonksiyondur. Dolayısıyla, eğer Y bağlantılı bir uzay ise her noktanın üzerindeki lifin kardinalitesi aynıdır. Eğer bu kardinalite sonlu bir sayı ise bu sayıya örtünün derecesi denir.

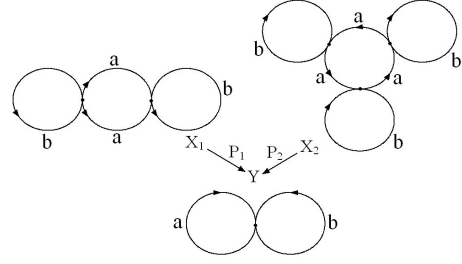
Örnek 2.1.12. Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de iki çemberin tek nokta birleşiminin derecesi iki ve üç olan örtü uzaylarına örnekler verilmiştir. İlk şekildeki örtü uzayları bir grup etkisinin bölüm uzayı olarak yazılabilirse de ikinci şekildeki örnekler için bu doğru değildir! Verilen topolojik bir uzayın örtü uzayları tamamen bu uzayın temel grubu tarafından belirlenir ve cisim genişlemelerinin sınıflandırılması olarak görülebilecek Galois teorisine çok benzerdir (bkz. [19] s.56).

Herhangi bir M manifoldunun difeomorfizmalar kümesi

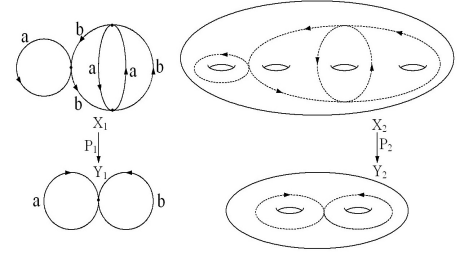
$$Diff(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bir difeomorfizmadır}\}$$

fonksiyonların bileşke operasyonu altında bir grup oluştururlar. G bu difeomorfizma grubunun bir alt grubu olsun. Eğer her $p \in M$ için $id_G \neq g \in G$ olmak üzere $g(U) \cap U = \emptyset$ olacak şekilde bir $p \in U \subseteq M$ açık komşuluğu varsa G grubu M manifoldu üzerinde *düzgün süreksiz* etki ediyor denir (her ne kadar her $g \in G$ için $g : M \rightarrow M, x \mapsto g(x)$, türevlenebilir bir fonksiyon olsa da). Bu koşulu sağlayan açık komşuluklara *iyi komşuluklar* denir.

Şekil 2.2: X_1 üzerinde 180° -döndürme ile $\mathbb{Z}_2$ ve X_2 üzerinde de 120° -döndürme ile $\mathbb{Z}_3$ etkisi vardır. Ayrıca her iki etkinin de bölüm uzayı Y 'dir: $X_1/\mathbb{Z}_2 \simeq Y \simeq X_2/\mathbb{Z}_3$



Şekil 2.3: Sağdaki örtü uzayı soldaki örtü uzayından “şişirilerek” elde edilen iki boyutlu manifoldların bir örtü uzayıdır. Çizgelerin yüzeylere gömülmüş olduğuna dikkat ediniz!



Önerme 2.1.13. Eğer bir $G \subseteq \text{Diff}(M)$ alt grubunun M manifoldu üzerindeki etkisi düzgün süreksiz ise bu etki serbest bir etkidir. Ayrıca hiçbir yörünge yığılma noktası yoktur ve dolayısıyla, her yörünge manifold içinde kapalıdır.

Kanıt: Etkinin serbest olduğu düzgün süreksiz etki tanımından açıktır. Şimdi de önermede iddia edilen tersine manifoldun bir $q \in M$ noktasının $G \cdot p$ gibi bir yörüngesinin yığılma noktası olduğunu kabul edelim. Etki düzgün süreksiz olduğundan her $g \in G$ için, $g(V) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir $q \in V \subseteq M$ açık kümesi vardır. $q \in M$ noktasına yakınsayan bir $(g_n(p)) \subseteq G \cdot p$ dizisi alalım. O halde, her $n \geq n_0$ için $g_n(p) \in V$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tam sayısı vardır. Bu durumda, $g_{n_0}(p), g_{n_0+1}(p) \in V$ ve dolayısıyla $g_{n_0+1}(p) = (g_{n_0+1} g_{n_0}^{-1})(g_{n_0}(p)) \in V \cap (g_{n_0+1} g_{n_0}^{-1})(V)$ olur. O halde, $V \cap (g_{n_0+1} g_{n_0}^{-1})(V) \neq \emptyset$ çelişkinin elde etmiş olduk. Yığılma noktası olmayan her küme kapalı olacağından her yörünge kapalıdır. $\square$

Yukarıdaki gösterimi kullanarak devam edelim. Eğer G grubu sonlu ise Ünite 1, Alıştırma 9'un sonucuna göre M/G bölüm uzayı da Hausdorff'tur.

Eğer G grubunun etkisi düzgün süreksiz ve M/G bölüm uzayı Hausdorff ise bölüm uzayı üzerinde doğal bir türevlenebilir manifold yapısı vardır (M ikinci sayılabilir olduğu için her bölüm uzayı da ikinci sayılabilir): $\pi : M \rightarrow M/G$, $x \mapsto \pi(x) = [x]$, bölüm uzayı fonksiyonu olsun. Eğer $p \in M$ ise bu nokta etrafında bir $U \subseteq M$ iyi komşuluğu alalım. Bu durumda $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ bir homeomorfizma olur. U komşuluğunu gerekirse biraz küçültürsek $\varphi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibi bir koordinat fonksiyonunun tanım kümesi olduğunu kabul edebiliriz. Eğer U ve V $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan iki iyi komşuluk ise $g_{U,V}(U) \cap V \neq \emptyset$ ve $\pi|_V^{-1} \circ \pi|_U = g_{U,V}$ olacak şekilde tek bir $g_{U,V} \in G$ vardır. O halde, bileşke fonksiyonlardan oluşan $\{(\phi_{\pi(U)} = \varphi_U \circ \pi|_U^{-1} : \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n)\}$

ailesi M/G bölüm uzayı üzerinde türevlenebilir bir atlas verir. Gerçekten de yukarıdaki U, V açık kümeleri için $\phi_{\pi(U)} \circ \phi_{\pi(V)}^{-1} = \varphi_U \circ \pi|_U^{-1} \circ \pi|_V \circ \varphi_V^{-1} = \varphi_U \circ g_{V,U} \circ \varphi_V^{-1}$ fonksiyonu C^∞ -sınıfındandır.

Örnek 2.1.14. 1) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ değişmeli grubu düzlem üzerine şu şekilde etki etsin: $G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n)$. Bu etkinin serbest, düzgün süreksiz ve bölüm uzayının da Hausdorff olduğu kolayca görülür. Daha sonra bu etkinin bölüm uzayı üzerinde vermiş olduğu doğal türevlenebilir manifold yapısının torusa, T^2 , difeomorfik olduğunu gösteriniz.

2) $G = \mathbb{Z}$ değişmeli grubu $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ manifolduna şu şekilde etki etsin: Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ için

$$n \cdot (z_1, z_2) = (2^n z_1, 2^n z_2) .$$

Bu etkinin de serbest ve düzgün süreksiz olduğu kolayca görülür. Ayrıca bölüm uzayı doğal olarak bir karmaşık manifold olur. Ayrıca

$$\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} / \mathbb{Z} \rightarrow S^3 \times S^1, \quad (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{(z_1, z_2)}{\|(z_1, z_2)\|}, e^{2\pi i \log_2 \|(z_1, z_2)\|} \right)$$

fonksiyonu bu karmaşık manifolddan $S^3 \times S^1$ manifolduna bir difeomorfizma verir. Başka bir deyişle, $S^3 \times S^1$ türevlenebilir manifoldu aynı zamanda bir karmaşık manifolddur.

İleride bu karmaşık manifoldun $\mathbb{C}^N$ içine karmaşık alt manifold olarak gömülemeyeceğini göreceğiz (bkz. Örnek 2.3.24). Diğer taraftan, bu manifoldun $\mathbb{C}P^N$ içine karmaşık alt manifold olarak gömülememesi ise De Rham Kohomolojisi bölümünde ele alınacaktır (bkz. Örnek 4.3.10).

2.1.5 Rank Teoremleri

$f : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların bir fonksiyonu ve $p \in M$ bir nokta olsun. Eğer $(Df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ doğrusal fonksiyonu bire bir (aynı şekilde, örten) ise f fonksiyonu $p \in M$ noktasında bir *daldırma* (aynı şekilde, *batırma*) fonksiyonudur denir. Eğer fonksiyon manifoldun her noktasında daldırma (batırma) fonksiyonu ise fonksiyona kısaca *daldırma* (*batırma*) fonksiyonudur denir. Eğer $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu bire bir daldırma fonksiyonu ise bu fonksiyona bir alt manifold denir. Bu bire bir daldırma fonksiyonu (alt manifold) aynı zamanda görüntüsü üzerine bir homeomorfizma ise bu fonksiyona (*türevlenebilir*) *gömme fonksiyonu* denir. Başka bir deyişle, türevlenebilir bir fonksiyon hem topolojik gömme fonksiyonu hem de daldırma fonksiyonu ise bu fonksiyon türevlenebilir gömme fonksiyonu olur. Gömme fonksiyonlarının görüntüleri kapalı bir alt uzay olacağından $f(M)$ görüntü kümesine N alt manifoldunun kapalı bir alt manifoldu da denir. Kapalı alt manifoldların bir başka karakterizasyonunu Sonuç 2.1.18'de göreceğiz.

Eğer bir $p \in M$ noktasında $(Df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ türev fonksiyonu örten değilse bu noktaya $f : M \rightarrow N$ fonksiyonunun bir *kritik noktası* ve

$f(p) \in N$ değerine de bu fonksiyonun bir *kritik değeri* denir. N manifoldu içinde bu fonksiyonun kritik değeri olmayan noktalara ise $f : M \rightarrow N$ fonksiyonunun bir *düzgün değeri* denir.

Uyarı 2.1.15. 1) *Teğet uzaylarının boyutlarını karşılaştırarak bir $f : M \rightarrow N$ daldırma fonksiyonu için $\dim(M) \leq \dim(N)$ ve batırma fonksiyonu için $\dim(M) \geq \dim(N)$ olduğunu görürüz.*

2) *N herhangi bir manifold ve M tıkHz bir manifold ise her sürekli bire bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu bir topolojik gömme fonksiyonudur.*

Örnek 2.1.16. 1) $m \geq n \in \mathbb{Z}$ iki tamsayı olmak üzere

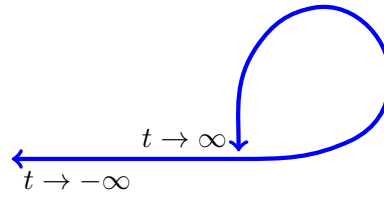
$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1 \cdots, x_n),$$

ile verilen fonksiyona standart batırma fonksiyonu, $n \geq m$ olması durumunda ise $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1 \cdots, x_m, 0 \cdots, 0)$ ile verilen fonksiyona da standart daldırma fonksiyonu denir.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t) = (t^2, t^3)$ topolojik bir gömme fonksiyonudur fakat $t = 0$ noktasında ne daldırma ne de batırma fonksiyonudur.

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ bire bir daldırma fonksiyonudur fakat bir gömme fonksiyonu değildir, çünkü görüntü kümesi düzlemin kapalı bir alt kümesi değildir.

4) Aşağıda görüntüsü ile verilen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu yine bire bir daldırma fonksiyonudur fakat bir (topolojik) gömme fonksiyonu değildir. (Bu fonksiyonu bir homeomorfizma yapacak şekilde tanım kümesi üzerine konan topolojinin Ünite 1'deki Örnek 1.1.17'de $\mathbb{R}$ üzerine koyduğumuz τ_2 topolojisi olduğunu gösteriniz. Dolayısıyla bu topoloji metriklenebilirdir. (Bkz. Ünite 1, Alıştırma 20.))



Şekil 2.4: Gömme fonksiyonu olmayan 1-1 daldırma fonksiyonu

5) Ünite 1, Alıştırma 13'de verilen topolojik gömme fonksiyonu, $F(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2, xy, zx)$, aslında projektif düzlemin $\mathbb{R}^4$ içine türevlenebilir bir gömülmesini verir.

6) MB Möbius Şeridi'ni bir bölüm manifoldu olarak görebiliriz:

$$\mathbb{R} \times (0, 1) / (x, y) \sim (x + 1, 1 - y).$$

Bu durumda, eğer $P : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow MB$ bölüm fonksiyonu ise, her türevlenebilir $g : MB \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu için $f = g \circ P : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ türevlenebilir fonksiyonu şunu sağlar: Her $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ için

$$f(x, y) = f(x + 1, 1 - y) .$$

Başka bir deyişle, f fonksiyonu ve

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y),$$

dönüşümü için $f = f \circ L$ olur. $\det(DL) = -1$ olduğundan her (x, y) için $\det(Df_{(x,y)}) = -\det(Df_{(x+1,1-y)})$ olur. Bu durumda, $\mathbb{R} \times (0, 1)$ bağlantılı olduğundan $\det(Df_{(x,y)})$ fonksiyonunun sıfır olduğu noktalar vardır. O halde, g bir daldırma fonksiyonu olamaz. Başka bir deyişle Möbius Şeridi düzleme daldırılmaz ve dolayısıyla düzleme gömülemez. Diğer taraftan, Ahırtırma 9 Möbius Şeridi'nin $\mathbb{R}^3$ içine bir gömülmesini verir.

7) Tıkız bir uzay üzerindeki gerçel değerli her fonksiyonun bir en büyük ve bir de en küçük değeri vardır. Dolayısıyla, türevlenebilir tıkız bir manifold üzerindeki her türevlenebilir gerçel değerli fonksiyonun en az iki tekil noktası vardır (aşlında bu noktalarda türev fonksiyonu tamamen sıfırdır). Bu durumda n -boyutlu tıkız türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde tanımlı türevlenebilir her $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun da en az iki tekil noktası vardır. Bunu görmek için ilk önce bu fonksiyona sabit bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü ekleyerek $f(M)$ kümesinin orijini içermediğini kabul edelim (manifoldun tıkız olduğunu burada da kullanıyoruz). Şimdi

$$M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \|f(p)\|^2, p \in M,$$

bileşkesini düşünelim. Bu fonksiyonun türevini yazarsak bileşke fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini aldığı noktaların, aşlında $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun da tekil noktaları olduğunu görürüz. Sonuç olarak $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu bir daldırma fonksiyonu olamaz ve dolayısıyla M kendisi ile aynı boyutlu Öklit uzayına daldırılmaz.

Aşağıdaki teorem her daldırma ve batırma fonksiyonun uygun bir koordinat sisteminde standart hale geldiğini göstermektedir.

Teorem 2.1.17. $f : M \rightarrow N$, sırasıyla m ve n boyutlu, manifoldların bir fonksiyonu olsun. Eğer f fonksiyonu bir $p \in M$ noktasında batırma fonksiyonu ise $p \in M$ ve $q = f(p) \in N$ noktaları etrafında öyle

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \quad \text{ve} \quad \varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$$

koordinat sistemleri bulabiliriz ki $(V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ ve $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere) $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ fonksiyonu $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1 \dots, x_n)$ ile verilen standart batırma fonksiyonu olur.

Benzer şekilde, eğer f fonksiyonu $p \in M$ noktasında bir daldırma fonksiyonu ise $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ bileşke fonksiyonu $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ ile verilen standart daldırma fonksiyonu olacak şekilde koordinat sistemleri seçebiliriz.

Kanıt : Her iki kısmın kanıtları benzer olduğu için sadece birinci kısmın kanıtını vereceğiz. İlk önce $p \in M$ ve $q = f(p) \in N$ noktaları etrafında rastgele $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ ve $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ gibi iki koordinat sistemi seçelim. Bu koordinat sistemlerinin, sırasıyla, $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto x - p$, ve $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \mapsto y - q$ doğrusal öteleme fonksiyonları ile uygun şekilde bileşkesini alarak $\varphi_1(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ ve $\varphi_2(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$ olduğunu kabul edebiliriz. $g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ fonksiyonu olsun. $(Dg)_0 : T_0\mathbb{R}^m \rightarrow T_0\mathbb{R}^n$ matrisi kabul gereği örten olduğu için bu matrisi uygun taban değiştirme matrisleriyle çarparak (dolayısıyla doğrusal koordinat değişiklikleri yaparak) $(Dg)_0(e_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$, ve $(Dg)_0(e_i) = 0$, $i = n+1, \dots, m$ olduğunu kabul edebiliriz. Burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, $\mathbb{R}^m$ 'nin, ve $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\mathbb{R}^n$ 'nin standart tabanını göstermektedir. O halde $x_1, \dots, x_m$ ve $y_1, \dots, y_n$ elde edilen yeni koordinat sistemleri olmak üzere $i = 1, \dots, n$ için

$$(Dg)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_0$$

ve $i = n+1, \dots, m$ için de

$$(Dg)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = 0$$

olur. $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+(m-n)}$, $G(x_1, \dots, x_m) = (g(x_1, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m)$ ile tanımlanan fonksiyon olsun. Bu durumda $(DG)_0 = Id$, birim matrisi olur ve dolayısıyla Ters Fonksiyon Teoremi'ne göre G fonksiyonu $x = 0$ noktası etrafında bir difeomorfizmadır. O halde, $G(x_1, \dots, x_m) = (g_1, \dots, g_m)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{n+(m-n)}$ üzerinde (sıfır noktası etrafında yerel) yeni bir koordinat sistemi verir. Bu yeni koordinatları tekrar y_i ile gösterelim: $y_i = g_i(x_1, \dots, x_m)$, ve $i = n+1, \dots, m$ için $y_i = g_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$. Son olarak φ_1 koordinat sistemini $\phi = G \circ \varphi_1$ ile değiştirirsek

$$\varphi_2 \circ f \circ \phi^{-1} = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ G^{-1} = g \circ G^{-1}$$

elde ederiz. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \phi^{-1}(y_1, \dots, y_n, \dots, y_m) &= g(G^{-1}(y_1, \dots, y_m)) \\ &= g(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Yukarıdaki teorem bize alt manifold elde etmenin iki yolunu sunmaktadır.

Sonuç 2.1.18. $f : L^l \rightarrow N^n$ bir gömme fonksiyonu ve dolayısıyla $M = f(L)$ görüntü kümesi N 'nin l -boyutlu kapalı bir alt manifoldu olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktası etrafında,

$$M \cap U = \{q \in U \mid x_{l+1}(q) = \cdots = x_n(q) = 0\}$$

olacak şekilde bir $p \in U \subseteq N$ açık kümesi ve

$$\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad q \mapsto (x_1(q), \dots, x_n(q)),$$

bir koordinat sistemi vardır. Ayrıca, M l -boyutlu türevlenebilir bir manifolddur ve $f : L \rightarrow M$ bir difeomorfizmadır.

Diğer taraftan, yerel olarak yukarıdaki şekilde ifade edilebilen her kapalı $M \subseteq N$ alt kümesi l -boyutlu bir manifolddur ve bu durumda $M \hookrightarrow N$ içermeye fonksiyonu bir gömme fonksiyonudur.

Kanıt : Teorem 2.1.17'yi kullanarak verilen herhangi $p_0 \in L$ ve $p = f(p_0) \in N$ noktaları etrafında öyle $p_0 \in U_0 \subseteq L$ ve $p \in U \subseteq N$ açık kümeleri ve $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad q \mapsto (x_1(q), \dots, x_n(q))$, koordinat sistemi bulabiliriz ki

$$f(U_0) = \{q \in U \mid x_{l+1}(q) = \cdots = x_n(q) = 0\} \subseteq M \cap U$$

olur. Diğer taraftan, $f : L \rightarrow M$ bir homeomorfizma olduğundan $f(U_0)$ alt kümesi M alt uzayı içinde açık bir kümedir. Dolayısıyla, alt uzay topolojisinin tanımından öyle bir $W \subseteq N$ açık kümesi vardır ki $f(U_0) = W \cap M$ olur. Başka bir deyişle,

$$f(U_0) = \{q \in U \mid x_{l+1}(q) = \cdots = x_n(q) = 0\} = M \cap (U \cap W)$$

elde ederiz ve böylece ilk kısmın kanıtı tamamlanır. Diğer iddiaların doğruluğu tanımlardan kolayca görülür. $\square$

Sonuç 2.1.19. Herhangi bir $f : M^m \rightarrow N^n$ fonksiyonunun $q \in N$ gibi bir düzgün değerini alalım. Bu durumda $L = f^{-1}(q)$ ters görüntü kümesi M 'nin $l = (m - n)$ -boyutlu bir alt manifoldudur. Ayrıca her $p \in L$ için $T_p L = \ker((Df)_p : T_p M \rightarrow T_q N)$ olur.

Kanıt : Yukarıdaki teoremi (ve kanıtını) kullanarak $p \in M$ ve $f(p) = q \in N$ noktaları etrafında öyle koordinat sistemleri seçelim ki f bu yerel koordinatlarda $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ ile verilsin. O halde, bu koordinat sistemlerinde $f^{-1}(q)$ kümesi $\{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)\}$ olarak gözükür ve teğet uzayı da iddia edildiği gibidir. $\square$

Örnek 2.1.20. Burada Örnek 2.1.7'de ele aldığımız $\Phi : M(n, n) \rightarrow S(n)$, $\Phi(Q) = Q^T Q$ fonksiyonunun her $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ noktasında bir batırma fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. Bu fonksiyonun birim matristeki türevi $(D\Phi)_{Id} : M(n, n) \rightarrow S(n)$, $A \mapsto A^T + A$ olarak hesaplanmıştı. Bu türev fonksiyonun örten olduğu kolayca görülür, çünkü her simetrik C matrisi

$C = C/2 + C^T/2 = (D\Phi)_{Id}(C/2)$ olarak yazılır. Benzer şekilde bu fonksiyonun herhangi bir Q noktasındaki türevi

$$(D\Phi)_Q : M(n, n) \rightarrow S(n), \quad A \mapsto Q^T A + A^T Q$$

ile verilir. Bunun, $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere, örten olduğunun gösterilmesini okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz. Dolayısıyla, Φ fonksiyonun $GL(n, \mathbb{R})$ açık alt kümesine kısıtlanması, $\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n)$, bir batırma fonksiyonudur. O halde, $n \times n$ -ortogonal matrisler kümesi, $O(n) = \Phi^{-1}(Id)$, tüm $n \times n$ -matrisler uzayı içinde ki, bu $\mathbb{R}^{n^2}$ den başka bir şey değildir, $\dim(GL(n, \mathbb{R})) - \dim(S(n)) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ -boyutlu bir alt manifolddur ve birim matristeki $T_{Id}O(n)$ teğet uzayı,

$$\ker((D\Phi)_{Id}) = \{A \in M(n, n) \mid A^T + A = 0\},$$

ters simetrik matrisler uzayı ile eşlenebilir. Birinci bölümün sonunda yer alan Alıştırma 28 $O(n)$ manifoldunun biri $SO(n)$ olmak üzere iki bağlantılı bileşenden oluştuğunu göstermektedir.

2.2 Manifolddarın Gömülmesi

Öklit uzayı ve her alt uzayı Hausdorff ve ikinci sayılabilirdir. Bu bölümde boyutu n olan türevlenebilir bir M manifoldunun, temelde Hausdorff ve ikinci sayılabilir olmasını kullanarak, $\mathbb{R}^{2n+1}$ içine gömülebileceğini göstereceğiz. Sard teoreminin etkili bir şekilde kullanıldığı kanıt ayrıca aşağıda bahsedeceğimiz birimin ayrışımını da kullanmaktadır. Aslında n boyutlu bir manifold $\mathbb{R}^{2n}$ içine de gömülebilir fakat bunun kanıtı bu kitabın kapsamı dışında kalan topolojik fikirler gerektirmektedir.

2.2.1 Birimin Ayrışımı

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi M manifoldunun bir açık örtüsü olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{\rho_\lambda : M \rightarrow [0, 1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ türevlenebilir fonksiyonlar ailesine M manifoldunun $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsü ile uyumlu bir *birimin ayrışımı* denir:

1) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\{p \in M \mid \rho_\lambda(p) \neq 0\} \subseteq U_\lambda$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır;

2) Her $p \in M$ noktasının öyle bir $p \in V$ açık komşuluğu vardır ki $V \cap \{p \in M \mid \rho_\lambda(p) \neq 0\} \neq \emptyset$ olacak şekilde sadece sonlu sayıda $\lambda \in \Lambda$ elemanı vardır;

3) Her $p \in M$ noktası için

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) = 1.$$

Yukarıdaki toplamın endeks kümesi sonsuz dahi olsa (2) koşulundan dolayı aslında bu bir sonlu toplamdır.

Aşağıdaki sonuç kendi başına da anlamlı olmakla beraber birimin ayrışımının varlık teoreminin önemli bir parçasıdır.

Yardımcı Teorem 2.2.1. *Bağlantılı her M manifoldu $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, olacak şekilde sayılabilir bir (K_n) tıkHz alt kümeler dizisinin birleşimi olarak yazılabilir:*

$$M = \cup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Kanıt : β ile M manifoldunun sayılabilir bir tabanını gösterelim. Her $p \in M$ noktası etrafında bir $p \in U \in \beta$ açık komşuluğu seçelim. Manifoldlar yerel olarak bir Öklit uzayı olduğundan gerekirse bu komşuluğu daha küçük bir komşuluk ile değiştirerek U açık kümesinin kapanışının, $\bar{U}_n$, tıkHz olduğunu kabul edebiliriz. β sayılabilir bir küme olduğu için bu şekilde elde edilen açık kümeleri bir dizi olarak görebiliriz: (U_n) . Bu durumda $M = \cup_n U_n$ olur. Şimdi (K_n) tıkHz alt küme dizisini kurabiliriz: $K_1 = \bar{U}_1$ alalım. $K_1 \cup \bar{U}_2$ tıkHz kümesini sonlu sayıda $U_{n_1}, \dots, U_{n_{k_1}}$ açık kümesi ile örtelim. Bu kümelerin kapanışlarının birleşimi K_2 olsun: $K_2 = \bar{U}_{n_1} \cup \dots \cup \bar{U}_{n_{k_1}}$. Benzer şekilde K_{m+1} tıkHz kümesi $K_m \cup \bar{U}_m$ tıkHz kümesini örten sonlu sayıdaki $U_{n_m}, \dots, U_{n_{k_m}}$ açık kümelerinin kapanışlarının birleşimi olsun. Bu dizinin istenilen koşulları sağladığı kolayca görülür. $\square$

Uyarı 2.2.2. *Eğer M manifoldu tıkHz ise $K_0 = \emptyset$ ve her $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ için $K_n = M$ alabiliriz.*

Teorem 2.2.3. *Bağlantılı bir M manifoldunun verilen her $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık örtüsü ile uyumlu bir birimin ayrışımı vardır.*

Kanıt :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x-1)^2}} & , \quad x \in (0, 1) \\ 0 & , \quad x \notin (0, 1) \end{cases}$$

ile tanımlanan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun C^∞ olduğu kolayca görülür. $M = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ olmak üzere

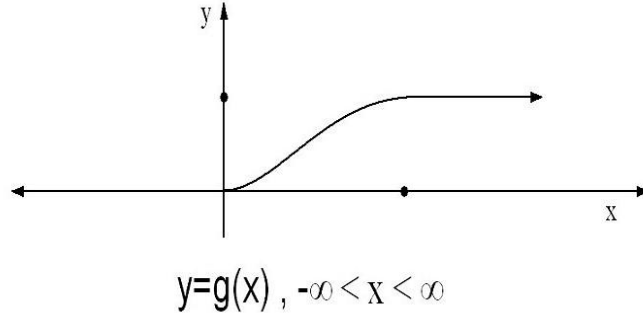
$$g(x) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir. Son olarak

$$\eta(x) = g(x) g(3 - x)$$

ile tanımlanan fonksiyon için $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\eta(x) = 0$, $x \notin (0, 3)$, ve $\eta(x) = 1$, $x \in [1, 2]$ olur.

$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < r\}$ ile yarıçapı $r > 0$ olan açık yuvarı gösterelim. O halde, $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x) = \eta(\|x\|^2 + 1)$, ile tanımlanan C^∞ -fonksiyonu B_1 üzerinde sabit 1 değerini alırken, B_2 yuvarının dışında sıfır değerini alacaktır.

Şekil 2.5: $y=g(x)$ fonksiyonunun grafiği

Şimdi $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık örtüsü ile uyumlu birimin ayrışımını kuralım. İlk önce bu örtünün elemanlarını koordinat komşuluklarıyla kesiştirerek her birinin bir koordinat komşuluğunda kaldığını kabul edebiliriz. Ayrıca yukarıdaki yardımcı teoremden verilen şekilde

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

olduğunu kabul edebiliriz. $p \in M$ olsun. O halde, $p \in K_n - K_{n-1}$ olacak şekilde tek bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ($K_0 = \emptyset$ alabiliriz). Şimdi bu nokta etrafında $p \in V_p \subseteq \text{Int}(K_{n+1}) - K_{n-1}$ olacak şekilde bir V_p açık komşuluğu seçelim. Bu komşuluğu gerekirse küçülterek bazı $\alpha \in \Delta$ için $p \in V_p \subseteq U_\alpha$ olduğunu kabul edebiliriz. U_α üzerinde tanımlı olan koordinat fonksiyonunu biraz değiştirerek ve V_p açık kümesini küçülterek $\phi_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ olacak şekilde yeni bir koordinat fonksiyonu seçelim. $O_p = \phi_p^{-1}(B_2)$ açık kümesini göstereyim. Bu durumda, $\rho_p \doteq \rho \circ \phi_p : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında değerler alacaktır. Ayrıca bu fonksiyon O_p üzerinde pozitif değerler alırken $V_p - O_p$ üzerinde de tamamen sıfır olacaktır. O halde, bu fonksiyonu $M - V_p$ dışında sıfır olarak tanımlayarak tüm manifold üzerinde tanımlı C^∞ -sınıfından bir fonksiyon elde ederiz.

İlk önce K_3 tıkız kümesi için $K_3 \subseteq O_{p_1} \cup \dots \cup O_{p_2}$ olacak şekilde sonlu sayıda $p_1, \dots, p_2$ noktası seçelim. Bu kümelerin tanımından dolayı her birinin $\text{Int}(K_4)$ kümesinin içinde kaldığını kabul edebiliriz. Daha sonra, $K_4 - \text{Int}(K_3) \subseteq O_{p_3} \cup \dots \cup O_{p_4} \subseteq \text{Int}(K_5) - K_2$ olacak şekilde sonlu sayıda $p_3, \dots, p_4$ noktası seçelim. Tümevarım yöntemiyle her $n \geq 5$ doğal sayısı için, $K_n - \text{Int}(K_{n-1}) \subseteq O_{p_{2n-5}} \cup \dots \cup O_{p_{2n-4}} \subseteq \text{Int}(K_{n+1}) - K_{n-2}$ olacak şekilde sonlu sayıda $p_{2n-5}, \dots, p_{2n-4}$ noktasının var olduğunu görebiliriz.

$V_{p_1}, \dots, V_{p_2}, V_{p_3}, \dots, V_{p_4}, \dots, V_{p_{2n-5}}, \dots, V_{p_{2n-4}}, \dots$ açık kümeleri manifoldun yerel sonlu bir açık örtüsünü verir. Başka bir deyişle manifoldun her noktası etrafında bu listeden sadece sonlu tanesi ile kesişen bir açık komşuluk bulabiliriz. Bu sayılabilir listeyi tekrar adlandırarak $V_1, \dots, V_n, \dots$ ve üzerlerinde tanımlı fonksiyonları da $\rho_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ ile gösterelim. $L : M \rightarrow \mathbb{R}$

$L(p) = \sum_n \rho_n(p)$, $p \in M$, ile verilen fonksiyon olsun (her $p \in M$ için bu toplam sonlu bir toplamdır). Son olarak ρ_n fonksiyonlarını $\frac{\rho_n}{L}$ ile değiştirerek istenilen birimin ayrışımını elde ederiz. $\square$

Uyarı 2.2.4. Yukarıdaki kanıtta M manifoldunun verilen her $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık örtüsünün

$$V_{p_1}, \dots, V_{p_2}, V_{p_3}, \dots, V_{p_4}, \dots, V_{p_{2n-5}}, \dots, V_{p_{2n-4}}, \dots$$

gibi yerel sonlu bir açık inceltilmesi olduğunu gördük. Aslında aynı kanıt topolojik manifoldlar için de geçerlidir. Dolayısıyla, her topolojik manifold paraktıktır.

2.2.2 Sard Teoremi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. C^∞ bir fonksiyonun türevleri de sürekli olduğu için kritik noktalar kümesi her zaman kapalı bir kümedir.

Her $a \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, ve $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ için

$$R(a, \delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i - \delta_i < x_i < a_i + \delta_i\}$$

açık kutusunu gösterebiliriz. $R[a, \delta]$ ile de bu kümenin kapanışı olan

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i - \delta_i \leq x_i \leq a_i + \delta_i\}$$

kümesini gösterebiliriz.

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir alt küme olsun. Eğer her gerçel $\epsilon > 0$ sayısı için

$$C \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) < \epsilon$$

olacak şekilde (R_k) sınırlı kutular dizisi varsa bu alt kümeye ölçümü sıfırdır denir. Burada $\text{vol}(R_k)$ ile kutunun hacmi gösterilmiştir:

$$\text{vol}(R_k) = \int_{R_k} dx_1 \cdots dx_n = 2^n \prod_{i=1}^n \delta_i.$$

Teorem 2.2.5. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $C \subseteq \Omega$ bu fonksiyonun kritik noktalarının kümesi ise $F(C)$ kritik değerler kümesinin ölçümü sıfırdır.

Kanıt : Ω açık kümesi sayılabilir çoklukta açık yuvarın birleşimi olarak yazılabilir. Her açık yuvar $\mathbb{R}^n$ 'ye difeomorfik olduğundan ve sayılabilir çoklukta ölçümü sıfır kümenin birleşiminin de ölçümü sıfır olacağından $\Omega = \mathbb{R}^n$ alabiliriz. Kanıtı üç ayrı durumda vereceğiz.

Durum 1) $n = m$. Yukarıda olduğu gibi her $a \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ için

$$R(a, \delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i - \delta < x_i < a_i + \delta\}$$

ve

$$R[a, \delta] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i - \delta \leq x_i \leq a_i + \delta\}$$

olsun.

İddia: Bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı verilsin. Her $a \in C$ için öyle bir $\delta_a > 0$ sayısı vardır ki, her $R[b, r] \subseteq R[a, \delta_a]$ için

$$\text{vol}(F(R[b, r])) \leq \epsilon \text{vol}(R[b, r])$$

olur.

Kanıt: $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ olsun. $a \in C$ bir kritik nokta olduğundan F fonksiyonunun koordinatlarından birinin bu noktadaki gradyan vektörü diğer koordinatların gradyan vektörlerinin bir doğrusal birleşimi olacaktır. Genellikten hiçbir şey kaybetmeden bazı $c_1, \dots, c_{n-1}$ gerçel sayıları için

$$\nabla f_n(a) = c_1 \nabla f_1(a) + \dots + c_{n-1} \nabla f_{n-1}(a)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda F fonksiyonunun hacimleri koruyan

$$L(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - c_1 x_1 - \dots - c_{n-1} x_{n-1})$$

doğrusal fonksiyonu ile birleşimini alarak, $L \circ F$, $\nabla f_n(a) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Öteleme fonksiyonları da hacimleri koruduğu için $a = 0$ ve $F(0) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $x \in R[0, 1]$ ve her $i = 1, \dots, n$ için, $\|\nabla f_i(x)\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ gerçel sayısı seçelim. Şimdi de her $x \in R[0, \delta_0]$ için, $\|\nabla f_n(x)\| \leq \epsilon / (M^{n-1} \sqrt{n^n})$ olacak şekilde bir $1 > \delta_0 > 0$ sayısı seçelim.

Her $x, b \in R[0, \delta_0]$ noktaları için, $t \mapsto f_i(tx + (1-t)b)$, $t \in [0, 1]$, fonksiyonuna Analizin Temel Teoremi'ni uygulayarak

$$f_i(x) - f_i(b) = \int_0^1 (x - b) \cdot \nabla f_i(sx + (1-s)b) ds$$

ve buradan da

$$|f_i(x) - f_i(b)| \leq \int_0^1 \|x - b\| \|\nabla f_i(sx + (1-s)b)\| ds$$

elde ederiz. O halde, $x \in R[b, r] \subseteq R[0, \delta_0]$ olmak üzere her $i = 1, \dots, n-1$ için,

$$|f_i(x) - f_i(b)| \leq rM\sqrt{n} \quad \text{ve} \quad |f_n(x) - f_n(b)| \leq r\epsilon\sqrt{n}/(M^{n-1}\sqrt{n^n})$$

olur. Başka bir deyişle $F(R[b, r])$ görüntü kümesi

$$F(b) + ([-rM\sqrt{n}, rM\sqrt{n}]^{n-1} \times [-r\epsilon\sqrt{n}/(M^{n-1}\sqrt{n^n}), r\epsilon\sqrt{n}/(M^{n-1}\sqrt{n^n})])$$

çarpım kutusunun içinde kalır. Bu kutunun hacmi ise tam olarak

$$\epsilon 2^n r^n = \epsilon \text{vol}(R[0, r])$$

sayısıdır. Dolayısıyla iddianın kanıtı tamamlanmış oldu.

Şimdi tekrar teoremin kanıtına dönelim. $I^n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ ile $\mathbb{R}^n$ içindeki birim küpü gösterelim. $\mathbb{R}^n$ birim küpün sayılabilir çoklukta ötelenmiş kopyasının birleşimi olarak yazılabileceği için, $f(I^n \cap C)$ kümesinin ölçümünün sıfır olduğunu göstermek teoremi kanıtlamak için yeterli olacaktır. Kritik noktalar kümesi kapalı olduğundan $I^n \cap C$ kümesi tıktır. Rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım. Yukarıdaki iddianın koşullarını sağlayan sonlu tane açık küp ile $I^n \cap C$ tıktır kümesini örtelim. Bu sonlu açık örtünün bir $\lambda > 0$ Lebesgue sayısı alalım. Birim küpü paralel hiperdüzlemler ile her bir kenar uzunluğu $\lambda/(2\sqrt{n})$ 'den daha küçük olan küplere ayıralım. Bu durumda bu küçük küplerden kritik küme ile boş kümeden farklı bir şekilde kesişen her biri yukarıda bulduğumuz sonlu adet açık küplerden birinin içinde kalacaktır. O halde, elde ettiğimiz yeni küplerin hacimleri toplamı birim küpün hacminden fazla olamaz ve dolayısıyla $\text{vol}(f(I^n \cap C)) \leq \epsilon$ olur. Başka bir deyişle, $f(I^n \cap C)$ kümesinin ölçümü sıfırdır.

Durum 2) $n < m$. Bu durumda $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun tüm görüntüsü kritik değerlerden oluşacaktır. Diğer bir deyişle, $F(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^m$ alt kümesinin ölçüsünün sıfır olduğunu göstermeliyiz.

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_n)$$

ile verilen fonksiyonu düşünelim. Bir önceki durumdan G fonksiyonunun kritik değerler kümesinin ölçüsü sıfırdır. Diğer taraftan, bu fonksiyonun türevi hiçbir noktada örten değildir ve bundan dolayı $G(\mathbb{R}^m) = F(\mathbb{R}^n)$ görüntü kümesinin ölçümü sıfırdır.

Durum 3) $n > m$. İlk önce $n = m$ durumunda kanıtladığımız iddianın bir benzerinin bu durumda da doğru olduğunu göstereceğiz. Yukarıda olduğu gibi F fonksiyonunun hacimleri koruyan

$$L(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - c_1 x_1 - \cdots - c_{m-1} x_{m-1})$$

doğrusal fonksiyonu ile bileşkesini alarak, $L \circ F$, $\nabla f_m(a) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Öteleme fonksiyonları da hacimleri koruduğu için $a = 0$ ve $F(0) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Fonksiyonumuzun son koordinatı olan f_m fonksiyonunu yeterince küçültmek için Ortalama Değer Teoremi yerine Taylor açılımı kullanacağız. $k > n - m + 1$ olacak şekilde bir pozitif k tek sayısı seçelim ve $\phi(x_1, \dots, x_n) =$

$(x_1^k, \dots, x_n^k)$ ile tanımlanan $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon $B[0, 1]$ küpünün türevlenebilir bir homeomorfizmasıdır. Ayrıca zincir kuralından $F: B[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonun kritik değerlerinin kümesi $F \circ \phi$ bileşke fonksiyonun kritik değerler kümesinin bir alt kümesidir. Dolayısıyla F yerine $F \circ \phi$ ile çalışabiliriz. Bu sayede f_m fonksiyonunun $x = 0$ noktasında derecesi en fazla k olan tüm kısmi türevleri sıfır olacaktır.

Şimdi yine her $x \in R[0, 1]$ için, $\|\nabla f_i(x)\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ gerçel sayısı seçelim. Her $x, b \in R[0, 1]$ noktaları için

$$t \mapsto f_i(tx + (1-t)b), \quad t \in [0, 1],$$

fonksiyonuna Analizin Temel Teoremi'ni uygulayarak

$$f_i(x) - f_i(b) = \int_0^1 (x - b) \cdot \nabla f_i(sx + (1-s)b) \, ds$$

ve buradan da

$$|f_i(x) - f_i(b)| \leq \int_0^1 \|x - b\| \|\nabla f_i(sx + (1-s)b)\| \, ds$$

elde ederiz. O halde, her $x, b \in R[0, 1]$ ve $i = 1, \dots, m-1$ için,

$$|f_i(x) - f_i(b)| \leq M\|x - b\|$$

olur.

f_m fonksiyonuna $x_0 = 0$ noktasında Taylor Teoremi'ni uygulayarak her $x \in B[0, 1]$ için $|f_m(x)| \leq C(x)\|x\|^k$ olacak şekilde bir $C(x) \geq 0$ sayısı bulabiliriz. Aslında $C(x)$ fonksiyonu, $C(0) = 0$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olarak seçilebilir (bkz. Önerme 1.2.12). Diğer taraftan $C(0) = 0$ olduğundan öyle bir $\delta_0 > 0$ sayısı seçebiliriz ki, her $0 < \delta \leq \delta_0$ ve her $x \in B[0, \delta]$ için,

$$C(x) \leq \frac{2^{n-m} \epsilon}{\delta^{k-n+m-1} M^{m-1} \sqrt{n^k}}$$

olur. O halde, her $x \in B[0, \delta]$ için,

$$2|f_m(x)| \leq 2C(x)\|x\|^k \leq \frac{2^{n-m+1} \epsilon}{\delta^{k-n+m-1} M^{m-1} \sqrt{n^k}} \delta^k \sqrt{n^k}$$

olur.

Son olarak bu sınırlamaları kullanarak $\mathbb{R}^n$ içindeki hacmi $2^n \delta^n$ olan $B[0, \delta]$ küpünün görüntüsünün $\mathbb{R}^m$ içindeki hacmi için

$$\text{vol}(F(B[0, \delta])) \leq 2^{m-1} M^{m-1} \delta^{m-1} \frac{\epsilon 2^{n-m+1} \delta^{n-m+1}}{M^{m-1}} = \epsilon 2^n \delta^n$$

elde edilir. Böylece iddianın kanıtı tamamlanmış oldu. Kanıtın geri kalanı yine $n = m$ durumuna benzer şekilde yapılabilir: $n = m$ durumunun kanıtının

sonunda elde edilen, her bir kenar uzunluğu $\lambda/(2\sqrt{n})$ 'den daha küçük olan küplerden kritik küme ile boş kümeden farklı bir şekilde kesişen küpleri, bu küpleri içeren, merkezi kritik küme üzerinde bulunan ve her bir kenar uzunluğu $\lambda/\sqrt{n}$ olan küplerle değiştirelim. Bu son değişiklik küplerin hacimlerini 2^n katına çıkartacaktır. Dolayısıyla, başlangıçta bize verilen ϵ sayısını $\epsilon/2^n$ ile değiştirerek kanıtı tamamlarız. $\square$

Şimdi de Sard Teoremi'nin $n = 2 > 1 = m$ durumu için farklı teknikler kullanılan bir başka kanıtını vereceğiz: Verilen bir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kritik noktalarının oluşturduğu C kümesinden bir $p \in C$ noktası alalım. Yukarıda yaptığımız gibi öteleme kullanarak $p = (0, 0)$ ve $f(0, 0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca fonksiyonun bu noktadaki gradyan vektörünün türevinin de örten olmadığını kabul edelim. Başka bir deyişle,

$$q \mapsto \nabla f(q) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(q), \frac{\partial f}{\partial x_2}(q) \right)$$

fonksiyonunun $p = (0, 0)$ noktasındaki

$$D\nabla(f)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(p) & B(p) \\ B(p) & C(p) \end{pmatrix}$$

türev fonksiyonu bir izomorfizma olmasın. Bu tipteki kritik noktaların kümesini C' ile göstereyim. Rank koşulu kapalı bir koşul olduğundan C' kümesi kapalıdır. Alanları koruyan ortogonal bir koordinat değişiminden sonra $B(p) = C(p) = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca her $q \in B[0, 1]$ için, $|A(q)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı seçelim. Rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım. $a/b \leq \epsilon/(3M)$ olacak şekilde pozitif a/b oranı seçelim. Her $q = (q_1, q_2) \in B[0, \delta]$ için $|B(q)| \leq \epsilon/6$ ve $|C(q)| \leq \epsilon a/(3b)$ olacak şekilde $0 < \delta \leq 1$ sayısı seçelim. $\delta > 0$ sayısı p noktasına bağlı görünse de A, B, C fonksiyonları sürekli olduğundan, tıkHz bir bölgede noktadan bağımsız bir şekilde belirlenebilir.

Oranını yukarıdaki gibi sabitlediğimiz ve $0 < a, b \leq \delta$ olacak şekilde seçilen a ve b sayılarının belirlediği $R_p = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq a, |x_2| \leq b\}$ dikdörtgenini düşünelim. Bu durumda her $q = (x_1, x_2) \in R_p$ noktası için, Taylor Teoremi'nden p ve q noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde öyle bir q' noktası vardır ki

$$f(q) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x_1, x_2) + A(q')x_1^2 + 2B(q')x_1x_2 + C(q')x_2^2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} |f(q)| &\leq M|x_1|^2 + 2|B(q')||x_1x_2| + |C(q')||x_2|^2 \\ &\leq \epsilon ab/3 + \epsilon ab/3 + \epsilon ab/3 \\ &= \epsilon ab \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, $f(R_p)$ kapalı aralığının boyu en fazla $2\epsilon \operatorname{vol}(R_p)/2$ olur.

R_p dikdörtgeninin her kenarını N eş parçaya bölerek kenar uzunlukları oranı halen a/b olan N^2 adet dikdörtgen elde ederiz. Bu dikdörtgenlerden C' kümesi ile kesişen her biri için yukarıdaki hesabı yapabiliriz. Aslında kritik nokta bu dikdörtgenlerin merkezi yerine herhangi bir yerinde olabileceği için bu küçük dikdörtgenlerden herhangi bir R dikdörtgeninin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün uzunluğu en fazla $2\epsilon \operatorname{vol}(R)$ olacaktır.

Şimdi fonksiyonu tıkHz $[0, 1] \times [0, 1]$ alt kümesine kısıtlayalım. Her $p \in C'$ noktası etrafına çizdiğimiz bu R_p dikdörtgenlerinin iç bölgeleri C' tıkHz kümesinin açık bir örtüsünü verecektir ve dolayısıyla bu dikdörtgenlerden sonlu tanesi, $R_1, \dots, R_l$, C' tıkHz kümesini örtecektir. Diğer taraftan $C - C'$ kümesindeki kritik noktalar izole noktalardan oluşmaktadır. O halde $C - C'$ kümesinin bu dikdörtgen bölgeler dışında kalan nokta sayısı sonlu olmalıdır. Başka bir deyişle bu dikdörtgen bölgeler dışında kalan kritik noktaları ihmal edebiliriz.

$R_1, \dots, R_l$ dikdörtgenlerinin çevrelerinin toplamı sonlu bir sayı olacaktır. Bu durumda dikdörtgenlerin çevrelerini oluşturan doğru parçalarının bir $\rho > 0$ komşuluğunun, diyelim ki U olsun, f altındaki görüntüsünün ölçümünün ϵ sayısından küçük olduğunu kabul edebiliriz. O halde, $R_1 \cup \dots \cup R_l - U$ kümesinin her topolojik bileşeni bu dikdörtgenlerden birinin içinde kalacaktır. Her topolojik bileşen için bu bileşeni içeren bir dikdörtgen seçelim ve daha sonra bu dikdörtgeni yeterince küçük eş parçalara bölelim, öyle ki bu küçük eş dikdörtgenlerin köşegen uzunluğu ρ sayısından da küçük olsun. Bu sayede bu küçük dikdörtgenlerden büyük dikdörtgenin kenarlarıyla kesişenler U kümesinin içinde kalacaktır. O halde, $R_1 \cup \dots \cup R_l - U$ kümesinin, iç bölgeleri ayrık olan dikdörtgen bölgelerin birleşiminin içinde kaldığını kabul edebiliriz.

Son olarak, $f(U)$ kümesinin ölçümünün en fazla ϵ olacağını kullanarak kanıtı $m = n$ durumundaki gibi tamamlayabiliriz. $\square$

2.2.3 Manifoldların Gömülmesi

Bu bölümde birimin ayrışımı ve Sard Teoremi yardımıyla n -boyutlu bir manifoldun $\mathbb{R}^{2n+1}$ içine gömülebileceğini göstereceğiz. Aşağıdaki teoremde bu sonuç tıkHzlık koşulu altında kanıtlanmaktadır. Alıştırma 7 ise genel durum için bir kanıt sağlamaktadır.

Teorem 2.2.6. *M n -boyutlu türevlenebilir tıkHz bir manifold ise düzgün bir fonksiyon ile $\mathbb{R}^{2n}$ içine bire bir daldırılabilir ve $\mathbb{R}^{2n+1}$ içine gömülebilir.*

Kanıt : İlk önce bu manifoldun yeterince büyük bir N doğal sayısı için $\mathbb{R}^N$ içine gömülebildiğini gösterelim. Bunun için her $p \in M$ noktası etrafında bir $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinat sistemi seçelim öyle ki $\phi_p(U_p) \subseteq B(0, 1)$ olsun. Ayrıca $p \in V_p \subseteq U_p$ koşulunu sağlayan bir V_p açık kümesi üzerinde bir değerini, U_p kümesi dışında sıfır değerini ve $U_p - \overline{V_p}$ üzerinde de birden

küçük pozitif değerler alan türevlenebilir bir $\rho_p : M \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu seçelim. Bu durumda

$$\Phi_p : M \rightarrow B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \rho(p)\phi(p),$$

fonksiyonu V_p açık kümesi üzerinde görüntüsüne bir difeomorfizmadır. M manifoldu tıkHz olduğundan sonlu tane $p_1, \dots, p_k \in M$ noktası için $M = V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_k}$ olacaktır. $N = kn + k$ olmak üzere

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad p \mapsto (\Phi_{p_1}(p), \dots, \Phi_{p_k}(p), \rho_{p_1}(p), \dots, \rho_{p_k}(p)),$$

ile tanımlanan F fonksiyonu bir daldırma fonksiyonudur. Bu fonksiyonun bire bir olduğu ise kolayca görülür. M tıkHz olduğu için elde ettiğimiz bire bir daldırma fonksiyonu aynı zamanda topolojik ve dolayısıyla türevlenebilir bir gömme fonksiyonudur. O halde, artık $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ olduğunu kabul edebiliriz.

$N > 2n + 1$ olduğunu kabul edelim ve şu fonksiyonları düşünelim:

$$\psi_1 : M \times M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (x_1, x_2, \lambda) \mapsto \lambda(x_1 - x_2)$$

ve

$$\psi_2 : T_*M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (x, v) \mapsto v, \quad (x, v) \mapsto T_x M \subseteq T_x \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N.$$

N doğal sayısı $\dim(M \times M \times \mathbb{R}) = 2n + 1$ ve $\dim(T_*M) = 2n$ sayılarından büyük olduğu için bu fonksiyonların görüntü kümelerinin $\mathbb{R}^N$ içindeki ölçümleri sıfır olacaktır. O halde, bu iki fonksiyonun görüntü kümelerinin dışında bir $v \in \mathbb{R}^N$ vardır. Γ_v ile bu vektörü normal vektör kabul eden hiperdüzlemi gösterelim. Fonksiyonların ve v vektörünün seçiminden dolayı $\mathbb{R}^N$ 'nin Γ_v hiperdüzlemine dik izdüşümü M manifoldundan $\Gamma_v = \mathbb{R}^{N-1}$ içine bire bir daldırma verecektir. Ayrıca manifold tıkHz olduğu için bu bire bir daldırma aslında bir gömülmedir. Aynı şekilde devam ederek $N - (2n + 1)$ adımda manifoldu $\mathbb{R}^{2n+1}$ içine gömebiliriz. $N = 2n + 1$ olduğunda da $v \in \mathbb{R}^N$ vektörünü ψ_2 fonksiyonunun görüntüsü dışından seçerek $\mathbb{R}^{2n}$ içine bir daldırma fonksiyonu elde ederiz. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış oldu. $\square$

Yukarıda verilen kanıtın ilk kısmı tıkHz olmayan manifoldlar için genelde çalışmaz çünkü böyle bir manifold sonlu tane koordinat sistemi ile örtülemeyebilir. Ayrıca aşağıdaki örnekte olduğu gibi herhangi bir $\mathbb{R}^N$ içine gömülmüş tıkHz olmayan bir manifoldun hiçbir hiperdüzleme dik izdüşümü (bire bir daldırma verse dahi) gömülme olmayabilir.

Diğer taraftan, Alistırma 7 tıkHzlık koşulu olmadan manifoldların gömülebileceğini göstermektedir.

Örnek 2.2.7. Her $N > 2$ doğal sayısı için düzgün öyle bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ gömülmesi vardır ki bu gömülmenin hiçbir Γ hiperdüzlemine dik izdüşümü $P \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = \mathbb{R}^{N-1}$ düzgün bir fonksiyon değildir. Bunun için $\mathbb{R}^N$ içindeki tüm tam sayı koordinatlı noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ olarak sıralayalım öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\|p_{n+1}\| \geq \|p_n\|$ olsun. Daha sonra p_0 noktasını

p_1 ve p_2 noktalarına birer eğri ile bağlayalım. Bundan sonra p_1 noktasını p_3 noktasına, p_3 noktasını p_5 noktasına bağlayıp devam ederek tüm tek sayı endeksli noktaları bu şekilde birbirine bağlayalım. Benzer şekilde p_2 noktasını p_4 noktasına ve bu noktayı da p_6 noktasına bağlayarak çift sayı endeksli tüm noktaları birbirine bağlayalım. Diğer taraftan, p_n noktasını p_{n+2} noktasına bağlayan eğriyi yarıçapları $\|p_n\| - 1$ ve $\|p_{n+2}\| + 1$ olan yuvarların arasında kalacak şekilde seçelim. Uç uca eklenen bu eğrileri türevlenebilir bir eğri olarak seçebiliriz. Dahası bu eğri gerçel eksenin $\mathbb{R}^N$ içine düzgün bir gömülmesini verir. Bu eğrinin hiçbir hiperdüzleme dik izdüşümünün düzgün olmadığı gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 11). Diğer taraftan yukarıda verilen kanıta göre bu eğrinin hemen hemen her hiperdüzleme dik izdüşümü bire bir daldırma fonksiyonudur. Dolayısıyla, yukarıda verdiğimiz kanıt tıkHz olmayan manifoldlarda geçerli olmayacaktır. TıkHz olmayan manifoldların gömülmesi işlemi farklı teknikler gerektirmektedir.

2.3 Türevlenebilir Formlar ve Stokes Teoremi

Bu bölümde manifoldlar üzerindeki en temel nesnelerden biri olan türevlenebilir formları inceleyeceğiz. Türevlenebilir formların türev ve integrallerini tanımladıktan sonra Analizin Temel Teoremi'nin manifoldlar üzerindeki genellemesi olan Stokes Teoremi'ni vereceğiz. Stokes Teoremi'nin geometrik ve topolojik sonuçlarını ise kitabın ilerleyen bölümlerinde ele alacağız.

2.3.1 Türevlenebilir Formlar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ içinde açık bir küme olmak üzere U üzerinde X gibi bir vektör alanını $T^*U \rightarrow U$ teğet demetinin bir kesiti olarak tanımlamıştık: $A_1, \dots, A_n$, U üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(p) = A_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1}|_p + \dots + A_n(p) \frac{\partial}{\partial x_n}|_p.$$

Verilen bir $p \in U$ noktası için $V = T_p U$ teğet uzayının dualini $V^* = T_p^* U$ ile gösterelim. Eğer $x_1, \dots, x_n$ U açık kümesi üzerinde bir koordinat sistemi ise $\frac{\partial}{\partial x_k}|_p$ teğet vektörünün Kronecker dualini $dx_k|_p$ ile gösterelim. O halde, her $1 \leq i, j \leq n$ için

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right) = \delta_{ij}$$

olur. Bu vektör uzayını *eşteğit uzayı* diye adlandıracağız. Teğit demetinde olduğu gibi eşteğit uzaylarının birleşimi *eşteğit demetini* verecektir. $T^*U = \cup_{p \in U} T_p^* U$ ile göstereceğimiz eşteğit demetinin türevlenebilir bir

$$\omega(p) = a_1(p) dx_1|_p + \dots + a_n(p) dx_n|_p$$

kesitine U üzerinde bir *türevlenebilir 1-form* diyeceğiz.

Benzer şekilde değişmeli k -tensörlerin oluşturduğu $\text{Alt}^k(T_p^*U)$ vektör uzaylarının birleşimlerini *değişmeli k -tensör demeti* olarak adlandıracağız. Bu demetin türevlenebilir

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(p) dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p$$

kesitine U üzerinde *türevlenebilir bir k -form* denir. Tüm k -formların uzayı ise $\Omega^k(U)$ ile gösterilir. Değişmeli sıfır tensörler uzayı ise U üzerindeki türevlenebilir fonksiyonların oluşturduğu $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ vektör uzayı olacaktır. Noktasal olarak her $\text{Alt}^k(T_p^*U)$ vektör uzayı sonlu boyutlu olsa da $\Omega^k(U)$ uzayı sonsuz boyutlu olacaktır.

Bu noktadan itibaren gösterimi basitleştirmek için $\frac{\partial}{\partial x_k}|_p$ ve $dx_k|_p$ yerine sadece $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ve dx_k yazacağız.

Örnek 2.3.1. $\mathbb{R}^3$ üzerinde türevlenebilir

$$\omega(x, y, z) = x^2y \, dx \wedge dy + (z - x) \, dy \wedge dz + dz \wedge dx$$

2-formunu ele alalım. Bu forma iki tane türevlenebilir vektör alanı yedirelim:

$$X(x, y, z) = 3(x+y) \frac{\partial}{\partial x} - e^x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{ve} \quad Y(x, y, z) = 2xz \frac{\partial}{\partial y} - \sin x \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{olmak üzere } \mathbb{R}^3 \text{ üzerinde}$$

$$\omega(X, Y)(x, y, z) = 6x^3yz(x+y) + (z-x)(e^x \sin x - 2xz) + 3(x+y) \sin x,$$

türevlenebilir fonksiyonunu elde ederiz.

Türevlenebilir formların dış çarpımları doğrusal cebir kısmında (Ünite 1.3) vermiş olduğumuz noktasal çarpım ile tanımlanır: Her $\omega \in \Omega^k(U)$ ve $\nu \in \Omega^l(U)$ için $\omega \wedge \nu \in \Omega^{k+l}(U)$ $(\omega \wedge \nu)(p) = \omega(p) \wedge \nu(p)$, $p \in U$, ile tanımlanır. Eğer ω ve ν U üzerinde birer k ve l form ise

$$\omega \wedge \nu = (-1)^{kl} \nu \wedge \omega$$

olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.3.2. $\omega(x, y, z) = (x+y) \, dx + y^3 \, dy - dz$ ve $\nu(x, y, z) = z^2 \, dx + dy - 5xyz \, dz$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \nu)(x, y, z) &= (x+y - y^3z^2) \, dx \wedge dy + \\ &\quad (1 - 5xy^4z) \, dy \wedge dz + (5xyz(x+y) - z^2) \, dz \wedge dx \end{aligned}$$

olur. Aslında $\mathbb{R}^3$ üzerindeki her iki form iki tane bir formun dış çarpımına eşittir (bkz. Alıştırma 12).

Bir manifold üzerinde türevlenebilir formları tanımlamadan önce formların fonksiyonlar altında nasıl davrandığını görelim.

2.3.2 Geri Çekme

$L : W_1 \rightarrow W_2$ vektör uzayları arasında doğrusal bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun dualini $L^* : W_2^* \rightarrow W_1^*$ gösterelim. O halde, her $f \in W_2^*$ ve $v \in W_1$ için $L^*(f)(v) = f(L(v))$ olur. Bu durumda $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^m$ açık kümeler ve $\phi : U \rightarrow V$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun bir $p \in U$ noktasındaki türevinin, $D\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} V$, dualini $(D\phi_p)^* : T_{\phi(p)}^* V \rightarrow T_p^* U$ ile gösterelim. Şimdi V üzerinde tanımlı bir $\omega \in \Omega^k(V)$ k -formu alalım. Bu durumda

$$\phi^*(\omega)(p)(v) \doteq \omega(\phi(p))((D\phi_p)(v)),$$

$p \in U$ ve $v \in T_p U$, ile $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan k -forma ω formunun ϕ ile *geri çekmesi* denir ve $\phi^*(\omega)$ ile gösterilir. Ayrıca, geri çekme ve dış çarpım noktasal işlemler oldukları için doğrusal cebir bölümünde görmüş olduğumuz özelliklerden dolayı $\phi^*(\omega \wedge \nu) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\nu)$ olur.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir alt küme olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $(x_1, \dots, x_n) \in U$ için $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ise (y ile $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinatı gösteriyoruz) $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p U$ olmak üzere

$$(f^*(dy))(v) = dy((Df)_p(v)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

olur. Bu 1-forma f 'nin *diferansiyeli* denir ve df ile gösterilir.

Bunu kullanarak geri çekme işlemini pratik bir hesaba dönüştürebiliriz: Şimdi $F : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \mapsto F(x) = y = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $\omega = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_k)} a_I(y) dy_I \in \Omega^k(V)$ bir k -form olsun. Bu durumda yukarıdaki açıklamalardan dolayı

$$a_I(y) dy_I = a_I(y) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

ise

$$\begin{aligned} F^*(a_I(y) dy_I) &= (a_I \circ F)(x) F^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dy_{i_k}) \\ &= (a_I \circ F)(x) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $F^*(\omega) = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_k)} a_I(F(x)) df_I$ olur.

Uyarı 2.3.3. Son olarak, eğer $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ve

$$\omega = a(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \in \Omega^n(V)$$

ise $dy_i = df_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ ve dolayısıyla

$$\phi^*(\omega) = a(F(x)) \det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

olur.

Örnek 2.3.4. $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ düzlemdeki birim çember olmak üzere $\omega = \frac{x dy - y dx}{2\pi(x^2 + y^2)} \in \Omega(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ ve

$$F : \mathbb{R}^3 - S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - 1, z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F^*(\omega) = \frac{(x^2 + y^2 - 1) dz - z (2x dx + 2y dy)}{2\pi [(x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2]} \in \Omega(\mathbb{R}^3 - S^1)$$

elde ederiz.

Geri çekme işleminin tanımından kolayca görüleceği gibi herhangi iki fonksiyonun bileşkesi için $(F \circ G)^*(\omega) = G^*(F^*(\omega))$ olur.

2.3.3 Manifoldlar Üzerinde Türevlenebilir Formlar

M atlası $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ olan türevlenebilir bir manifold olsun. Bu durumda, manifoldu

$$M = \cup_\alpha U_\alpha \simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha / x \sim (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)$$

ve teğet demetini de

$$\begin{aligned} T_*M &= \cup_\alpha T_*U_\alpha \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha \times \mathbb{R}^n / (x, v) \sim ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x(v)) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Benzer şekilde manifoldun geçiş fonksiyonlarının türevlerinin duallerini kullanarak eşteğit demetini

$$\begin{aligned} T^*M &= \cup_\alpha T^*U_\alpha \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha \times \mathbb{R}^n / (x, (D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x)^*(\omega)) \sim ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), \omega) \end{aligned}$$

ve geri çekme işlemini kullanarak manifold üzerindeki k -formların demetini, denklik bağıntısını benzer şekilde

$$(x, (D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x)^*(\omega)) \sim ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), \omega)$$

olarak

$$\begin{aligned} \text{Alt}^k(M) &= \cup_\alpha \text{Alt}^k(U_\alpha) \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha \text{Alt}^k(V_\alpha) / \sim \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu vektör demetinin türevlenebilir kesitlerine manifold üzerindeki *türevlenebilir k -formlar* denir ve bu formların oluşturduğu vektör uzayı $\Omega^k(M)$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.5. $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\phi(t_1, t_2) = (\cos t_1, \sin t_1, \cos t_2, \sin t_2)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun görüntüsünün torus olduğu kolayca görülür:

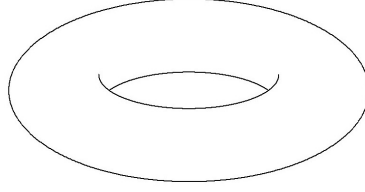
$$\phi(\mathbb{R}^2) = T^2 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + y_1^2 = 1 = x_2^2 + y_2^2\}.$$

$\omega_i = \frac{x_i dy_i - y_i dx_i}{2\pi (x_i^2 + y_i^2)}$, $i = 1, 2$, ifadeleri T^2 üzerinde türevlenebilir 1-formlar

verir. Diğer taraftan, $\phi^*(\omega_i) = \frac{dt_i}{2\pi}$ ve dolayısıyla $\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \frac{dt_1 \wedge dt_2}{4\pi^2}$ olur. Aşağıda üç boyutlu uzay içinde çizilen torus

$$[(x^2 + y^2 + z^2) + 3]^2 = 16(x^2 + y^2)$$

denklemleri ile verilir. $F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2, z, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ ve $F^{-1}(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2(2 + x_1), -y_2(2 + x_1), y_1)$ fonksiyonları $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ içinde yukarıdaki denklemlerle verilen iki ayrı torus arasında bir difeomorfizmadır. $F^*(\omega_i)$ geri çekme işlemlerini okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz.



Şekil 2.6: $[(x^2 + y^2 + z^2) + 3]^2 = 16(x^2 + y^2)$

Örnek 2.3.6. S^2 üç boyutlu uzaydaki birim küreyi gösterebilir. Bu küre üzerinde ω 2-formu şu şekilde tanımlansın: Eğer $u, v \in T_p S^2$ ise

$$\omega(p)(u, v) \doteq (u \times v) \bullet p.$$

Eğer $p = (x, y, z)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olarak verilirse

$$\omega(p)(u, v) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \bullet (x, y, z)$$

olur. Bu durumda

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

olduğunu kolayca görürüz.

2.3.4 Dış Türev

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\omega = \sum_I a_I(x) dx_I \in \Omega^k(V)$ bir k -form olsun.

$$d\omega \doteq \sum_I da_I(x) \wedge dx_I \in \Omega^{k+1}(V)$$

şeklinde tanımlanan $k+1$ -forma ω 'nın dış türevi denir. Dış türev işleminin sıkça kullanılan bazı özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.3.7. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $k, l \in \mathbb{N}$ olsun.

- 1) Her $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(V)$ için $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ 'dir.
- 2) Her $\omega \in \Omega^k(V)$ ve $\nu \in \Omega^l(V)$ için

$$d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-1)^k \omega \wedge d\nu$$

eşitliği sağlanır.

- 3) $d \circ d = 0$.

Kanıt : Sadece üçüncü ifadenin ispatını vereceğiz. Geri kalanını alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz. Birinci ifadedden dolayı formun

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

şeklinde olduğunu kabul edebiliriz. O halde,

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

olur. Bu durumda doğrudan hesap yaparak

$$\begin{aligned}
d^2(\omega) &= d(d\omega) \\
&= d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\right) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \left(\sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\quad + \left(\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \left(\sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&\quad - \left(\sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Dış türevin tanımından $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir U alt kümesi üzerinde tanımlı bir $F: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, $x \mapsto F(x) = y = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ türevlenebilir bir fonksiyon için

$$F^*(d\omega) = F^*\left(\sum_I da_I \wedge dy_I\right) = \sum_I F^*(da_I) \wedge F^*(dy_I)$$

elde ederiz. Diğer taraftan $da_I = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_I}{\partial y_i} dy_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F^*(da_I) &= \sum_{i=1}^m F^*\left(\frac{\partial a_I}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial a_I}{\partial y_i} \circ F\right) F^*(dy_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial a_I}{\partial y_i} \circ F\right) (df_i) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial a_I}{\partial y_i} \circ F\right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(a_I \circ F)}{\partial x_j} dx_j = d(a_I \circ F) = d(F^*(a_I))$$

elde ederiz. O halde,

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= \sum_I d(F^*(a_I)) \wedge F^*(dy_I) \\ &= \sum_I d(F^*(a_I)) \wedge df_I \\ &= \sum_I d(F^*(a_I)df_I) \quad (\text{Önerme 2.3.7}) \\ &= \sum_I d(F^*(a_I dy_I)) \\ &= d\left(F^*\left(\sum_I a_I dy_I\right)\right) \\ &= d(F^*(\omega)) \end{aligned}$$

olur. Başka bir deyişle, formlar üzerindeki geri çekme ve dış türev işlemleri yer değiştirebilir.

Dış türev, bu özelliği sayesinde manifoldlar üzerindeki formlar için de tanımlanabilir: $\omega \in \Omega^k(M)$ M manifoldu üzerinde verilen bir form olsun. Eğer $\phi : U_1 \rightarrow V_1$ ve $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ bu manifold üzerinde iki koordinat sistemi ise

$$\begin{aligned} \phi^*(d((\phi^{-1})^*\omega)) &= (\phi \circ \psi^{-1} \circ \psi)^*(d((\phi^{-1})^*\omega)) \\ &= (\psi^{-1} \circ \psi)^*(\phi^*(d((\phi^{-1})^*\omega))) \\ &= (\psi^{-1} \circ \psi)^*(d((\phi \circ \phi^{-1})^*\omega)) \\ &= (\psi^{-1} \circ \psi)^*(d\omega) = \psi^*(d((\psi^{-1})^*\omega)) \end{aligned}$$

olur. Başka bir deyişle manifold üzerindeki formları herhangi bir koordinat sistemi ile Öklit uzayına indirip, burada dış türevini aldıktan sonra tekrar aynı koordinat sistemi ile manifolda geri çekmek iyi tanımlı bir işlemdir.

Uyarı 2.3.8. Bu Önerme 2.3.7 herhangi bir manifold üzerindeki formlar için de doğrudur (bkz. Alıştırma 15).

M türevlenebilir n -boyutlu bir manifold ve $\omega \in \Omega^k(M)$ bu manifold üzerinde bir k -form olsun. Eğer $d\omega = 0$ ise ω *kapalı bir k -formdur* denir. Eğer $d\nu = \omega$ olacak şekilde bir $\nu \in \Omega^{k-1}(M)$ $(k-1)$ -form varsa ω formuna bir *tam formdur* denir. Formlar üzerinde $d^2 = 0$ olduğundan her tam form kapalıdır.

2.3.5 Manifolddarın Yönlendirilmesi

Vektör uzaylarının yönlendirilmesi: V sonlu boyutlu gerçel bir vektör uzayı olsun. Bu uzayın $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve $\beta_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ gibi iki sıralı tabanı için, eğer $A = [I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ taban değıştirme matrisinin determinantı pozitif bir sayı ise bu iki sıralı tabana *denktir* denir ve $\beta_1 \sim \beta_2$ ile gösterilir. Eğer β_3 bu uzayın bir üçüncü sıralı tabanı ise $[I]_{\beta_1}^{\beta_3} = [I]_{\beta_2}^{\beta_3} [I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ ve dolayısıyla $\det([I]_{\beta_1}^{\beta_3}) = \det([I]_{\beta_2}^{\beta_3}) \det([I]_{\beta_1}^{\beta_2})$ olduğundan bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının her bir denklik sınıfına *vektör uzayının bir yönlendirilmesi* denir.

Yine $\det([I]_{\beta_1}^{\beta_3}) = \det([I]_{\beta_2}^{\beta_3}) \det([I]_{\beta_1}^{\beta_2})$ ve her bir $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tabanı için β ve $\beta' = \{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tabanları denk olmadıklarından her gerçel vektör uzayının tam olarak iki tane yönlendirilmesi vardır.

$V = \{0\}$ bir noktadan oluşan sıfır boyutlu bir vektör uzayı üzerinde de "+" ve "-" olmak üzere iki yönlendirme tanımlayacağız. Yapay bir tanım gibi görünse de bu tanımın çok haklı geometrik bir gerekçesi vardır: V sonlu boyutlu gerçel vektör uzayı ve W_1, W_2 bu uzayın $V = W_1 + W_2$ olacak şekilde alt uzayları olsun. Her üç uzayın da yönlendirilmiş olduğunu düşünelim. $W_1 \cap W_2$ ara kesit vektör uzayının doğal bir yönlendirilmesi var mıdır?

İlk önce $W_1 \cap W_2$ ara kesit vektör uzayının en az bir boyutlu olduğunu ve $W_1 \neq V \neq W_2$ kabul edelim. Bu ara kesit uzayının bir $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sıralı tabanını alalım. Bu tabanı W_1 ve W_2 yönlendirilmiş vektör uzaylarının tabanlarına genişletelim:

$$\{u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_k\}$$

W_1 uzayının ve

$$\{v_1, \dots, v_k, u_{l+1}, \dots, u_{n-k}\}$$

de W_2 uzayının yönlü tabanları olsun (bu durumda V n -boyutlu bir uzaydır). Eğer

$$\{u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_k, u_{l+1}, \dots, u_{n-k}\}$$

tabanı V uzayı üzerindeki yönlendirmeye uyumlu ise arakesit vektör uzayını $\{v_1, \dots, v_k\}$ sıralı tabanı ile yönlendirelim. Aksi halde yine

$$\{-u_1, \dots, u_l, -v_1, \dots, v_k\}$$

W_1 uzayının ve

$$\{-v_1, \dots, v_k, u_{l+1}, \dots, -u_{n-k}\}$$

de W_2 uzayının aynı yönlendirmeyi veren tabanları olacaktır. Fakat bu sefer

$$\{-u_1, \dots, u_l, -v_1, \dots, v_k, u_{l+1}, \dots, -u_{n-k}\}$$

tabanı V uzayı üzerindeki yönlendirmeye uyumlu olacaktır. Bu durumda ara kesit vektör uzayını $\{-v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sıralı tabanı ile yönlendireceğiz.

Eğer W_1 veya W_2 alt uzayı V 'ye eşit ise (diyelim ki $W_2 = V$ olsun, V 'nin yönlendirmesiyle beraber) $W_1 \cap W_2 = W_1$ olacaktır. Dolayısıyla önceki paragrafta yazdığımız şeyler yine geçerli olacaktır.

Son olarak $W_1 \neq V \neq W_2$ ve $\dim(W_1) + \dim(W_2) = n$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ veya başka bir deyişle $V = W_1 \oplus W_2$ dir. Yine $\{u_1, \dots, u_l\}$ W_1 uzayının ve $\{u_{l+1}, \dots, u_n\}$ de W_2 uzayının yönlü tabanları olsun. Ara kesit uzayının bir tabanı olmadığı için, $\{u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_n\}$ sıralı tabanı V uzayının yönlendirmesiyle uyumlu değilse bu durumdan kurtulmak mümkün olmayacaktır. İşte tam da bu durumu ifade etmek amacıyla tek bir noktadan oluşan vektör uzayının yönünü tanımlamak için "+" ve "-" işaretlerini kullanacağız: Eğer

$$\{u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_n\}$$

sıralı tabanı V uzayının yönlendirmesiyle uyumlu ise W_1 alt uzayı W_2 ile pozitif, uyumlu değilse negatif olarak kesişiyor diyeceğiz.

Son olarak, arakesit uzayı üzerine bu şekilde koyduğumuz yönlendirme (W_1, W_2) sıralı vektör alt uzaylarının bir fonksiyonudur. Başka bir deyişle, bu iki alt uzayın sırasını değiştirirsek ara kesit üzerindeki yön değişebilir. Dolayısıyla, $W_1 \oplus W_2 = V$ durumunda $W_1 \cap W_2 = +$ (artı) olduğu halde $W_2 \cap W_1 = -$ (eksi) olabilir. Aslında, eğer $\dim V = n = l + (n - l) = \dim W_1 + \dim W_2$ ise

$$W_2 \cap W_1 = (-1)^{l(n-l)} W_1 \cap W_2$$

çünkü $\{u_{l+1}, \dots, u_n, u_1, \dots, u_l\}$ sıralı tabanından $\{u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_n\}$ sıralı tabanına geçmek için tam olarak $l(n-l)$ tane ardışık ikilinin yer değiştirmesi gerekir.

Örnek 2.3.9. Her karmaşık vektör uzayının gerçel uzay olarak ele alındığında doğal bir yönlendirilmesi vardır ve bu sayede karmaşık manifoldlar türevlenebilir manifoldlar içinde özel bir yere sahiptirler. Bunu şöyle açıklayalım: V sonlu boyutlu bir karmaşık vektör uzayı olsun. $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uzayın sıralı karmaşık bir tabanı ise $\beta_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$ aynı uzayın sıralı gerçel bir tabanı olur. $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$ aynı uzayın sıralı başka bir karmaşık tabanı olsun. $A = [I]_{\beta}^{\beta'}$ karmaşık taban değiştirme matrisinin her a_{ij} bileşeni yerine 2×2 -lik

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_{ij}) & -\operatorname{Im}(a_{ij}) \\ \operatorname{Im}(a_{ij}) & \operatorname{Re}(a_{ij}) \end{pmatrix}$$

matrisi yazarak elde edeceğimiz $2n \times 2n$ -lik matris $A_{\mathbb{R}} = [I]_{\beta_{\mathbb{R}}}^{\beta'_{\mathbb{R}}}$ matrisine eşit olacaktır. Bu matrisin determinantının $\|\det(A)\|^2$ olduğunu şu şekilde görebiliriz: Yukarıda verdiğimiz 2×2 -lik matrislerin oluşturduğu halka, diyelim ki R ile gösterilsin, karmaşık sayılar halkasına izomorfiktir. Ayrıca, bu halkanın

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

tipindeki elemanlarının oluşturduğu alt halkası ise gerçel sayılar halkasına izomorftur. A matrisinin determinantını hesaplamak için satır ve sütun işlemleri yapalım. Matrisin tersi olduğu için sonunda bu matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

matrisine dönüştürebiliriz. Bu matris işlemlerinin karşılıklarını $2n \times 2n$ -lik $A_{\mathbb{R}}$ matrisine uygularsak sağ alt köşedeki 2×2 -lik kısmı

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\det(A)) & -\operatorname{Im}(\det(A)) \\ \operatorname{Im}(\det(A)) & \operatorname{Re}(\det(A)) \end{pmatrix}$$

ve geri kalan kısmı birim matris olan matrisi elde ederiz. Dolayısıyla, $A_{\mathbb{R}}$ matrisinin determinantı $\|\det(A)\|^2 > 0$ olur.

Sonuç olarak V karmaşık vektör uzayının herhangi bir sıralı karmaşık $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ tabanına karşılık gelen $\beta_{\mathbb{R}} = \{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$ gerçel sıralı tabanının gerçel vektör uzayına verdiği yönlendirme başlangıçta seçtiğimiz $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ tabanından bağımsızdır. Bu nedenle bu yönlendirmeye karmaşık yapının verdiği kanonik yönlendirme diyeceğiz. Karmaşık bir vektör uzayının her karmaşık alt uzayının da kanonik bir yönlendirmesi olacaktır. Bunun bir sonucu olarak da $V = W_1 \oplus W_2$ koşulunu sağlayan her W_1, W_2 karmaşık alt uzayları pozitif olarak kesişecektir.

Manifoldların yönlendirilmesi:

Verilen bir manifoldun yönlendirilmesini, bu manifoldun her noktasındaki teğet uzayının, noktaya göre değişimi sürekli olan bir yönlendirmesini seçmek olarak tanımlayabiliriz. Teğet uzayları üzerindeki yönlendirmenin noktaya göre sürekli olmasını ise şu şekilde ifade edeceğiz: M türevlenebilir bir manifold olsun. Eğer bu manifold üzerinde her $\alpha, \beta \in \Lambda$ ve her $p \in \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ için $\det(D(\varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\beta})_p) > 0$ olacak şekilde bir $\{\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlası varsa M manifolduna yönlendirilebilir manifold denir. M bu atlası ile yönlendirilebilir manifold olsun ve $p \in M$ bir nokta olsun. $p \in U_{\alpha}$ olacak şekilde bir koordinat sistemi seçelim. $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi_{\alpha}(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, ise $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ sıralı tabanı $T_p M$ için bir yönlendirme verir. Koordinat değişim fonksiyonlarının pozitif determinanlı olmasından dolayı $p \in M$ noktasını içeren her koordinat sistemi bu noktada aynı yönlendirmeyi verecektir. $\mathbb{R}^n$ 'nin her açık kümesi sadece tek bir koordinat sistemi ile örtülebileceği için yönlendirilebilir bir manifolddur.

Bağılantılı her manifold en fazla iki farklı yönlendirmeye sahiptir (bkz. Alıştırma 16).

Örnek 2.3.10. *Tüm küreler yönlendirilebilir manifoldlardır. Aslında türevlenebilir bir manifold hem kendileri hem de ara kesitleri bağlantılı iki koordinat sistemi ile örtülebiliyorsa bu manifold yönlendirilebilirdir. Çünkü eğer koordinat değişim fonksiyonunun türevinin determinanı negatif ise (ara kesit bağlantılı olduğu için her noktada negatif olacaktır) koordinat sistemlerinden birinin bir koordinat fonksiyonunu -1 ile çarpmak koordinat değişim fonksiyonunun türevinin determinantını pozitif yapacaktır.*

Yönlendirilebilir manifoldların çarpımlarının da yönlendirilebilir olduğunun gösterilmesini okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 20). Dolayısıyla, sonlu tane kürenin çarpımı da yönlendirilebilir bir manifolddur.

Örnek 2.3.11. *Karmaşık manifoldların doğal yönlendirmeleri vardır ve dolayısıyla her karmaşık manifold yönlendirilebilirdir (bkz. Örnek 2.3.9).*

Diğer taraftan gerçel projektif uzaylar içinde sadece tek boyutlu olanlar yönlendirilebilir manifoldlardır. Bunu kanıtlayabilmek için biraz hazırlık yapmamız gerekiyor. Aşağıdaki sonuç yönlendirilebilen manifoldların bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 2.3.12. *Boyutu n olan türevlenebilir bir M manifoldunun yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan bir $\omega \in \Omega^n(M)$ formunun var olmasıdır.*

Kanıt : İlk önce M manifoldunun yönlendirilebilir olduğunu kabul edelim ve $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ yönlendirmeyi veren bir atlas olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ formunu düşünelim. Bu durumda her $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktası ve bu noktadaki teğet uzayının her $\{v_1, \dots, v_n\}$ sıralı tabanı için $\varphi_\alpha^*(v_1 \cdots, v_n)$ ve $\varphi_\beta^*(\nu)(v_1 \cdots, v_n)$ aynı işaretli olacaktır. Bu durumda $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*(\nu)$ diferansiyel formlarını bu atlas ile uyumlu bir birimin ayrışımı, $\{\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}$, ile toplayarak elde edeceğimiz $\omega = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_\alpha$ formu manifoldun hiçbir noktasında sıfır olmayacaktır.

Şimdi de manifold üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan bir ω n -formu olduğunu kabul edelim. Manifoldun verilen her $p \in M$ noktası etrafındaki küçük bir yuvarda tanımlı öyle bir

$$q \mapsto \phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$$

koordinat sistemi seçelim ki $\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) > 0$ olsun. Bu şekilde oluşturulan atlas M üzerinde bir yönlendirme verecektir. $\square$

Aslında yukarıdaki kanıt yönlendirilebilir bir manifold üzerinde yönlendirme seçmek ile bu manifold üzerinde sıfırı olmayan en yüksek boyutlu bir form seçmenin aynı şey olduğunu göstermektedir. ω sıfırı olmayan bir form ise her teğet uzayının bu form altında pozitif sayı veren sıralı tabanını seçerek

manifold üzerinde yönlendirme seçebiliriz. Yönlendirilebilir ve bağlantılı her manifold üzerinde tam olarak iki tane yönlendirme olduğu açıktır (bkz. Alıştırma 16). Üzerinde bir yönlendirilme seçilmiş manifoldlara *yönlendirilmiş manifoldlar* diyeceğiz. M yönlendirilmiş bir manifold ise $-M$ ile aynı manifoldu diğer yönlendirmesiyle göstereceğiz.

M ve N yönlendirilebilen n -boyutlu iki manifold olsun. Bu manifoldlar arasındaki bir $\phi : M \rightarrow N$ fonksiyonun yerel difeomorfizma olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde hiçbir noktada sıfırı olmayan bir $\omega \in \Omega^n(N)$ formu için $\phi^*(\omega) \in \Omega^n(M)$ formunun hiç sıfırı olmamasıdır. (Bkz. Alıştırma 19).

İki yönlendirilmiş manifold arasındaki bir $\phi : M \rightarrow N$ yerel difeomorfizması M üzerindeki yönlendirmeyi N üzerindeki yönlendirmeye taşıyorsa $\phi : M \rightarrow N$ yerel difeomorfizmasına *yön koruyan* denir. Eğer manifoldların üzerindeki yönlendirmeler $\nu_M \in \Omega^n(M)$ ve $\nu_N \in \Omega^n(N)$ gibi iki tane 2-form yardımı ile veriliyorsa ϕ yerel difeomorfizmasının yön koruyan olması için gerek ve yeter koşul $\phi^*(\nu_N) = f(x)\nu_M$ olacak şekilde bir $f : M \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Örnek 2.3.13. *Möbius Şeridi, MB , yönlendirilemez bir manifolddur. Bunu görmek için, MB üzerinde bir ω 2-formu alalım. MB 'yi bir bölüm manifoldu olarak görebiliriz:*

$$\mathbb{R} \times (0, 1)/(x, y) \sim (x + 1, 1 - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1).$$

Bu durumda, eğer $F : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow MB$ bölüm fonksiyonu ise $F^*(\omega)$ bir 2-form olacaktır. Bu formu $F^*(\omega) = f(x, y) dx \wedge dy$ şeklinde yazalım. Diğer taraftan $F^*(\omega)$ 2-formu $(x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y)$ dönüşümü altında değişmez olacağı için $f(x, y)$ fonksiyonu $f(x + 1, 1 - y) = -f(x, y)$ simetrisine de sahip olmalıdır. Dolayısıyla, bu fonksiyon bir (a, b) noktasında pozitif (veya negatif) değer alıyorsa $(a + 1, 1 - b)$ noktasında da negatif (veya pozitif) değer alacaktır. $f(\mathbb{R} \times (0, 1))$ bağlantılı olacağından sıfır noktasını içeren bir aralık olmak zorundadır. Dolayısıyla, ω formunun en az bir sıfırı vardır. O halde, MB yönlendirilemez bir manifolddur. Hemen hemen aynı kanıt $MB \times \mathbb{R}^n$ çarpım manifoldunun da yönlendirilemez olduğunu gösterir.

Ashnda biraz daha fazlasını kanıtlamış durumdayız: Eğer türevlenebilir n -boyutlu bir M manifoldu $MB \times \mathbb{R}^{n-2}$ 'yi bir alt manifold olarak içeriyorsa manifold üzerindeki her n -formunun bu alt manifold üzerinde en az bir sıfırı olacaktır. Dolayısıyla, M yönlendirilemez bir manifolddur. Örneğin, gerçel projektif uzay Möbius şeridini bir alt manifold olarak içerdiği için yönlendirilemez bir manifolddur.

Benzer bir şekilde, M yönlendirilemez bir manifold olmak üzere her $M \times N$ çarpım manifoldu da yönlendirilemez bir manifolddur (bkz. Alıştırma 20).

Örnek 2.3.14 (Örtü Uzayları). G grubu türevlenebilir ve yönlendirilmiş M manifoldu üzerinde difeomorfizmalarla serbest ve düzgün süreksiz bir şekilde etki etsin, öyle ki bölüm uzayı da manifold olsun (bölüm uzayı Hausdorff ise

üzerinde doğal bir türevlenebilir yapı olacaktır). Eğer G grubunun içindeki her difeomorfizma M üzerindeki yönü korursa bölüm manifoldu üzerinde doğal bir yönlendirme vardır ve bölüm fonksiyonu bu yönlendirmeyi korur. Eğer bazı $g \in G$ elemanları yönü korumazsa (ters çevirirse) bölüm manifoldu yönlendirilemez bir manifold olur (bkz. Alıştırma 21).

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $F(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$ ters kutupsal difeomorfizmasını düşünelim. $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ formu olmak üzere $F^*(\omega) = (-1)^n \omega$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla bu fonksiyon sadece çift boyutlu Öklit uzaylarında yönü korur.

Benzer şekilde, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ üzerinde tanımlı kapalı (bkz. Alıştırma 22 ve Ünite 5, Alıştırma 8)

$$\omega_{S^{n-1}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}}$$

formunun S^{n-1} küresine kısıtlanışının hiç sıfırı yoktur ve dolayısıyla küre üzerinde bir yönlendirme verir. Fakat bu sefer, $F^*(\omega_{S^{n-1}}) = (-1)^n \omega_{S^{n-1}}$ olduğu için ters kutupsal fonksiyon sadece tek boyutlu kürelerde yönü korur. Dolayısıyla sadece tek boyutlu gerçel projektif uzaylar yönlendirilebilir manifoldlardır.

Örnek 2.3.15 (Lens Uzayları). Üç boyutlu küreyi iki boyutlu karmaşık birim kürenin sınırı olarak görelim: $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|(z_1, z_2)\| = 1\}$. p ve q aralarında asal pozitif tam sayılar ve $\xi = e^{2\pi i/p}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}^p = \langle g \rangle$ sonlu devirli grubu S^3 üzerinde serbest bir şekilde etki eder: $g(z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2)$. Grup sonlu olduğu için bölüm uzayı türevlenebilir bir manifolddur. Grup etkisinin yönü koruduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, bölüm manifoldu da S^3 üzerindeki yönlendirme sayesinde yönlü bir manifold olur. Aslında, $g^*(\omega_{S^3}) = \omega_{S^3}$ olur ve dolayısıyla bu form bölüm uzayı üzerinde de hiçbir noktada sıfırı olmayan bir üç form verir. Bu yönlendirilmiş üç boyutlu bölüm manifolduna Lens uzayı denir ve $L(p, q)$ ile gösterilir.

$F : S^3 \rightarrow S^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_2)$ difeomorfizması yönü ters çevirir ve ayrıca $(F \circ g \circ F^{-1})(z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^{p-q} z_2)$ olur. Başka bir deyişle, üç boyutlu küre üzerindeki F difeomorfizması $-L(p, q)$ ile $L(p, p-q)$ arasında yönü koruyan bir difeomorfizma verir.

Bu bölümü aşağıdaki sonuçla bitireceğiz.

Teorem 2.3.16. M n -boyutlu yönlendirilebilir bir manifold, $\phi : M \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $p \in N$ bir düzgün değer ise $\phi^{-1}(p)$ yönlendirilebilir alt manifolddur.

Kanıt : $L = \phi^{-1}(p)$ boş küme olmasın. Her $q \in L$ için $D(\phi)_q : T_q M \rightarrow T_p N$ türev fonksiyonunun çekirdeği $T_q L$ teğet uzayıdır. Manifoldun teğet demetini uygun $N_q \subseteq T_q M$ bir alt uzay olmak üzere $T_q M = T_q L \oplus N_q$ şeklinde yazalım (örneğin, $T_q M$ vektör uzayı üzerine bir iç çarpım koyup

$N_q \subseteq T_q M$ alt uzayını $T_q L$ alt uzayının dik tümleyeni olarak seçebiliriz). Bu durumda $(D\phi)_q : N_q \rightarrow T_p N$ bir izomorfizma olacaktır. $T_p N$ teğet uzayının $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ gibi bir yönlendirmesini seçelim. O zaman, bu izomorfizma yardımıyla N_q vektör uzayı üzerine $\{v_{k+1} = (D\phi)_q(u_{k+1}), \dots, v_n = (D\phi)_q(u_n)\}$ yönlendirmesini koyabiliriz. Son olarak $T_q L$ uzayı üzerine bir $\{v_1, \dots, v_k\}$ yönlendirmesi koyalım öyle ki, $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ sıralı tabanı da $T_q M = T_q L \oplus N_q$ üzerindeki yönlendirme olsun. Bu işlem noktasal olsa da aslında bir koordinat komşuluğunda sürekli bir şekilde de yapılabilir: Uygun koordinat değişimleri altında

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

şeklinde görülecektir. Bu durumda $u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ ve $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}|_q$ alarak kanıtı bitirebiliriz. $\square$

2.3.6 Stokes Teoremi

Stokes Teoremi en kaba anlamıyla, bir manifoldun içinde olanları anlamak için bu manifoldun sınırında olanları anlamının yeterli olduğunu ifade etmektedir. Bu teoremin en çok bilinen hali Analizin Temel Teoremi'dir: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ türevi sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

olur. Başka bir deyişle, $d\omega = f'(x) dx$ 1-formunun yine 1-boyutlu $I = [a, b]$ yönlendirilmiş manifoldu üzerindeki integrali, $\omega = f(x)$ 0-formunun bu manifoldun sınırını oluşturan 0-boyutlu $\partial I = \{b^+, a^-\}$ manifoldu üzerindeki integraline eşittir:

$$\int_I d\omega = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \sum_{x \in \partial I} f(x) = \int_{\partial I} \omega.$$

Stokes Teoremi'nin özü ifadesinde geçen terimleri doğru tanımlamaktan ibarettir. Şimdi bu işi dikkatli bir şekilde yapmaya çalışacağız.

Manifold üzerinde İntegral: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\omega \in \Omega^n(U)$ olsun. Eğer bu formun sıfırdan farklı olduğu noktalar kümesi,

$$\text{supp}(\omega) \doteq \overline{\{p \in U \mid \omega(p) \neq 0\}},$$

tıkız ise bu forma *tıkız destekli form* denir. Bu formların $\Omega^n(U)$ içinde oluşturduğu küme bir alt uzaydır ve $\Omega_c^n(U)$ ile gösterilir. U üzerindeki her n -form $\omega = f(p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ olarak yazılabildiği için $\text{supp}(\omega) = \text{supp}(f)$ olacaktır. Bu durumda ω formunun U açık kümesi üzerindeki integrali

$$\int_U \omega = \int_U f(p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \doteq \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Riemann integrali olarak tanımlanır. Formun sıfırdan farklı olduğu küme tıkmaz bir kümenin içinde kaldığı için bu bir belirli integraldir ve sonuç sonlu bir sayı olacaktır.

İntegralin bu şekilde tanımlanmasının nedeni $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart yönlendirmenin $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ sıralı tabanı ile verilmesidir. Başka bir deyişle, formlar değişkenlerin sıralamasına duyarlı oldukları için integralleri de ancak yönlendirilmiş manifoldlarda tanımlanabilir.

Uyarı 2.3.17. *Riemann integralinde değişkenlerin sırasını istediğimiz gibi değiştirebiliriz: $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ olmak üzere*

$$\int_U f(p) dx_1 \cdots dx_n = \int_U f(p) dx_{i_1} \cdots dx_{i_n} .$$

Diğer taraftan, yukarıdaki tanımda kullanılan ω formunun

$$\omega = f(p) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

açılımındaki koordinatlarının sırası önemlidir. Örneğin, $\omega \in \Omega_c^2(\mathbb{R}^2)$ durumunda

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_2 \wedge dx_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} (-f(x_1, x_2)) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

olur.

$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeler, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : U \rightarrow V$ yönü koruyan bir difeomorfizma ve $\omega = f(p) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(V)$ olsun. Bu durumda Uyarı 2.3.3'den dolayı

$$\phi^*(\omega) = f(\phi(p)) \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

olacağından

$$\int_U \phi^*(\omega) = \int_V \omega$$

eşitliğini elde ederiz. Başka bir deyişle yönü koruyan bir difeomorfizma ile formu geri çekmek (koordinat sistemini değiştirmek) integralin değerini değiştirmez.

Tanım 2.3.18. M n -boyutlu yönlendirilmiş bir manifold ve $\omega \in \Omega_c^n(M)$ olsun. Ayrıca $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ bu yönlendirmeyi veren bir atlas ve $\{\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}$ bu açık örtü ile uyumlu bir birimin ayrışımı olsun. ω 'nın M manifoldu üzerindeki integrali

$$\int_M \omega \doteq \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha(p) \omega)$$

olarak tanımlanır.

İntegralini aldığımız formun sıfırdan farklı olduğu kümenin kapanışı tıkkız olduğu için yukarıdaki toplam aslında sonlu bir toplamdır. Yine aynı nedenden toplamın her terimi sonlu bir sayıdır. İntegralin iyi tanımlı olabilmesi için bu tanımın seçilen atlas ve onunla uyumlu birimin ayrışımından bağımsız olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Aynı yönlendirmeyi veren başka bir atlas verildiğinde bu iki atlasın açık kümelerini içeren atlası göz önüne alalım. Bu iki atlasın açık örtüleriyle uyumlu olan birimin ayrışimleri bu yeni atlasın açık örtüsüyle de uyumlu olacaktır. O halde, integralin iyi tanımlı olduğunu göstermek, $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlasıyla uyumlu bir başka $\{\varrho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}$ birimin ayrışımı için

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha(p) \omega) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\varrho_\alpha(p) \omega)$$

olduğunu kanıtlamaya denk olacaktır:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha(p) \omega) &= \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* \left(\left(\sum_{\beta \in \Lambda} \varrho_\beta(p) \right) \rho_\alpha(p) \omega \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} \sum_{\beta \in \Lambda} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\varrho_\beta(p) \rho_\alpha(p) \omega) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\varrho_\beta(p) \rho_\alpha(p) \omega) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \Lambda} \int_{V_\beta} (\varphi_\beta^{-1})^*(\varrho_\beta(p) \rho_\alpha(p) \omega) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda} \int_{V_\beta} \sum_{\alpha \in \Lambda} (\varphi_\beta^{-1})^*(\varrho_\beta(p) \rho_\alpha(p) \omega) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda} \int_{V_\beta} (\varphi_\beta^{-1})^* \left(\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha(p) \right) \varrho_\beta(p) \omega \right) \\ &= \sum_{\beta \in \Lambda} \int_{V_\beta} (\varphi_\beta^{-1})^*(\varrho_\beta(p) \omega) \end{aligned}$$

Bu çıkarımdaki ilk (benzer şekilde son) eşitlik $\sum_{\beta \in \Lambda} \varrho_\beta(p) = 1$ ifadesinin sonucudur. İkinci ve altıncı eşitlik geri çekme işleminin toplamsal olmasından elde edilmiştir. Benzer şekilde üçüncü ve beşinci eşitlikler integralin toplamsallığının sonucudur. Dördüncü eşitlik ise integrali alınan formun yönü koruyan $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ difeomorfizması ile geri çekmesi ile elde edilmiştir ($\varrho_\beta(p) \rho_\alpha(p) \omega$ formu sadece $U_\alpha \cap U_\beta$ açık kümesi içinde sıfırdan farklı değer alabilir).

Sıfır Boyutlu Manifold Üzerinde İntegral: Sıfır boyutlu bir manifold ayrık noktalar kümesidir (bkz. Uyarı 2.1.1). Böyle bir manifold üzerinde yönlendirme ise her noktaya "+" veya "-" işareti koymak demektir: $\sigma : M \rightarrow$

$\{+, -\}$. Eğer $\sigma(p) = +$ ise p^+ (veya $\sigma(p) = -$ ise p^-) yazacağız. Bu manifoldun sadece tıkHz bir kümesi üzerinde sıfırdan farklı değerler alan bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 0-formunun (fonksiyonunun) integrali ise

$$\int_M f = \sum_{p \in M} \sigma(p) f(p)$$

olarak tanımlanır. Ayrık bir kümenin tıkHz alt kümeleri sonlu olduğundan bu toplam da sonlu bir toplamdır.

Örnek 2.3.19. İki elemanlı $M = \{a, b\}$ kümesi üzerine dört farklı yönlendirme koyabiliriz: $M_1 = \{a^+, b^+\}$, $M_2 = \{a^+, b^-\}$, $M_3 = \{a^-, b^+\}$ ve son olarak $M_4 = \{a^-, b^-\}$.

Sınırlı Manifoldlar: Boyutu n olan yarı Öklit uzayı

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$$

olarak tanımlanır. Bu alt uzayın $\mathbb{R}^n$ içindeki sınırı ise

$$\partial \mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

ile gösterilir.

Topolojik manifold tanımına benzer bir şekilde, Hausdorff ve ikinci sayılabilir bir M uzayı, her biri $\mathbb{H}^n$ 'nin açık bir alt kümesine homeomorfik olan açık alt kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa M 'ye *n-boyutlu sınırlı topolojik manifold* denir. Bu homeomorfizmalar kümesini yine $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ ile göstereceğiz ve M topolojik sınırlı manifoldunun bir *topolojik atlası* diye adlandıracağız. Eğer bu atlasın her $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ve $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ koordinat sistemi için, geçiş fonksiyonu

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

$\mathbb{R}^n$ 'nin açık kümelerinin bir türevlenebilir fonksiyonuna genişletilebiliyorsa bu atlasla türevlenebilir bir atlasdır diyeceğiz. M manifoldunun sınırı

$$\{p \in M \mid \text{bazı } \alpha \text{ için } p \in U_\alpha \text{ ve } \varphi_\alpha(p) = (0, x_2, \dots, x_n)\}$$

kümesi olarak tanımlanır ve ∂M ile gösterilir.

Önerme 2.3.20. Boyutu n olan sınırlı bir manifoldun sınırı iyi tanımlıdır ve $n - 1$ -boyutlu bir manifolddur.

Kanıt: Önce önermenin ilk kısmının doğru olmadığını kabul edelim. Diğer bir deyişle, bir koordinat komşuluğuna göre sınırda olan bir nokta bir başka koordinat komşuluğunda sınır noktası olmasın. O halde elimizde şunların olduğunu kabul edebiliriz: $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ iki açık küme olmak üzere bir $f : U \cap \mathbb{H}^n \rightarrow$

$V \cap \mathbb{H}^n$ homeomorfizma olsun. Ayrıca, $F : U \rightarrow V$ ve $G : V \rightarrow U$ gibi iki türevlenebilir fonksiyon vardır öyle ki $F|_{U \cap \mathbb{H}^n} = f$ ve $G|_{V \cap \mathbb{H}^n} = f^{-1}$ 'dir. Son olarak

$$f(p) = q = (y_1, y_2, \dots, y_n) \notin V \cap \partial \mathbb{H}^n$$

olacak şekilde $p = (0, x_2, \dots, x_n) \in U \cap \partial \mathbb{H}^n$ bir noktası vardır. O halde, $y_1 < 0$ olmalıdır. Diğer taraftan, $U \cap \mathbb{H}^n$ üzerinde $G \circ F = id$ olduğu için $DF(p)$ türev fonksiyonu bir izomorfizmadır. Dolayısıyla, Ters Fonksiyon Teoremi bize F fonksiyonunun p noktası etrafında bir difeomorfizma olduğunu söyler. Fonksiyon sürekli olduğu için p noktasının bir açık komşuluğu F altında $V \cap \partial \mathbb{H}^n$ kümesinin iç bölgesine gönderilir. Başka bir deyişle, f^{-1} fonksiyonu ilk koordinatı negatif olan bazı noktaları ilk koordinatı pozitif olan noktalara gönderir. Bu çelişki önermenin ilk kısmının kanıtını tamamlar.

Sınırın bir manifold olduğunu ise şu şekilde görebiliriz. Türevlenebilir F ve G fonksiyonlarının sınırdaki noktalar etrafında birer difeomorfizma olduğunu yukarıda gördük. Ayrıca $F(U \cap \partial \mathbb{H}^n) = f(U \cap \partial \mathbb{H}^n) \subseteq V \cap \partial \mathbb{H}^n$ olduğunu da biliyoruz. O halde, $F|_{U \cap \partial \mathbb{H}^n}$ fonksiyonu manifoldun sınırı için ihtiyaç duyduğumuz koordinat fonksiyonlarını verir. $\square$

Bu önerme hem manifoldun sınırının iyi tanımlı olduğunu hem de bu kümenin $(n - 1)$ -boyutlu bir manifold olduğunu gösterir. Bu manifoldda M 'nin sınırı denir ve ∂M ile gösterilir.

Örnek 2.3.21. $\mathbb{R}^n$ içindeki birim yuvarın sınırı S^{n-1} küresidir.

Örnek 2.3.22. Bir manifoldun sınırı, sınırı olmayan bir manifolddur.

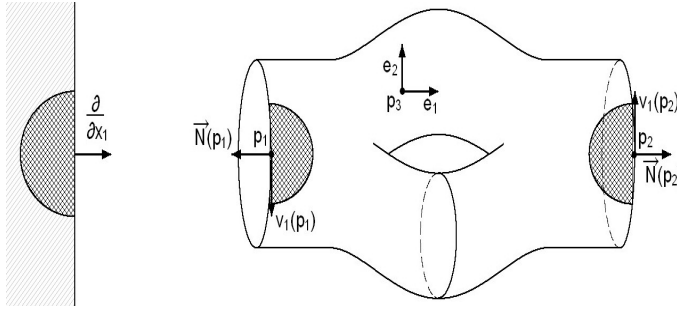
Sınırlı manifoldların sınırlarındaki noktaların da teğet uzayları vardır. Bu şu şekilde görebiliriz. Aslında teğet uzayının iyi tanımlı olması konusunda problem olabilecek tek konu, sınırdaki noktaların koordinat sistemleri arasındaki geçiş fonksiyonu $\partial \mathbb{H}^n$ uzayının bir açık kümesinde tanımlıyken, bu fonksiyonun tüm Öklit uzayı içindeki bir açık kümeye genişlemesinin alınarak teğet uzayının bu genişleme yardımıyla tanımlanıyor olmasıdır. Fakat bir geçiş fonksiyonunun birden fazla genişlemesi olsa da, bunların $\partial \mathbb{H}^n$ içinde kalan her noktadaki türevleri aynı olacaktır. Açıkça söylemek gerekirse, genişlemelerin herhangi bir sınır noktasındaki türevi sınırın üzerindeki ve ilk koordinatın negatif olduğu noktalardaki değerleri tarafından tamamen belirlenir. Başka bir deyişle, geçiş fonksiyonun ilk koordinatının pozitif olduğu noktalara nasıl genişletildiği fonksiyonun sınır noktalarındaki türevini etkilemez.

Sınırı olan manifoldların yönlendirilmesi de sınırı olmayan manifoldlardaki gibi yapılır. Yönlendirilmiş sınırlı bir manifoldun sınırı doğal bir yönlendirmeye sahiptir. Örneğin, $X = [a, b]$ kapalı aralığı bir boyutlu ve sınırlı bir manifolddur. Analizin Temel Teoremi'nin bize önerdiği üzere bu manifoldun üzerindeki yönlendirme her noktada $\partial/\partial x$ vektörü ile verilirse bu manifoldun sınırındaki yönlendirme $\{a^-, b^+\}$ ile verilir. Genelde ise, yönlendirilmiş bir manifoldun sınırındaki yönlendirme şu şekilde tanımlanır: İlk önce bir $p \in \partial M$ ve bu

nokta etrafında bir $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ koordinat sistemi alalım. $\vec{N}(p)$ ile $T_p M$ teğet uzayındaki dış normal vektörü gösterelim: Başka bir deyişle, $q = \varphi(p)$ olmak üzere

$$\vec{N}(p) = (D\varphi^{-1})(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

olsun. $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $T_p \partial M$ vektör uzayının bir sıralı tabanı olmak üzere eğer $\beta' = \{\vec{N}(p), v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $T_p M$ vektör uzayının yönlendirmesi ise sınır manifoldunun p noktasındaki yönlendirmesi $\beta = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ sıralı tabanı ile tanımlanacaktır.



Şekil 2.7: Manifoldun iki ucundaki yönlendirmelerin ters yönlü olduğuna dikkat ediniz!

Stokes Teoremi: Artık teoremi ifade etmek ve kanıtlamak için yeterli alt yapıyı oluşturmuş durumdayız.

Teorem 2.3.23 (Stokes Teoremi). M türevlenebilir, n -boyutlu yönlendirilmiş bir manifold ve $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ tıkkız destekli bir $(n-1)$ -form ise

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : M üzerindeki yönlendirmeyi veren $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ atlası ve bununla uyumlu bir $\{\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}$ birimin ayrışımı seçelim. ω formunun M manifoldu üzerindeki integrali

$$\int_M \omega \doteq \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha(p) \omega)$$

olarak tanımlanmıştı. Şimdi $\omega_\alpha \doteq \rho_\alpha \omega$ ile ifade edilen formu tanımlayalım. O halde, $\omega = \sum_{\alpha \in \Lambda} \omega_\alpha$ ve $d\omega = \sum_{\alpha \in \Lambda} d\omega_\alpha$ olur. İntegral işlemi toplamsal olduğundan, sadece keyfi bir $\alpha \in \Lambda$ için

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega_\alpha$$

olduğunu göstermek teoremi kanıtlamaya yeterli olacaktır. Ayrıca, formlar bir koordinat sistemi içinde yaşadıkları için sadece şu özel durumu incelemek yeterlidir: $\varphi : U \rightarrow V$ bir koordinat sistemi, ω U açık kümesi içinde kalan tıkHz bir küme dışında sıfır değeri alan bir $(n-1)$ -form olsun. Ayrıca, V açık kümesini $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{H}^n$ olarak seçebiliriz. O halde,

$$(\varphi^{-1})^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

ve dolayısıyla

$$(\varphi^{-1})^*(d\omega) = d((\varphi^{-1})^*\omega) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

elde ederiz.

Durum 1) $\varphi(U) = V = \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_U d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\lim_{x_i \rightarrow \infty} a_i(x) - \lim_{x_i \rightarrow -\infty} a_i(x) \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Yukarıdaki limitlerin sıfır çıkmasının nedeni ω ve dolayısıyla $a(x)$ fonksiyonun tıkHz bir küme dışında sıfır olmasıdır. Diğer taraftan, V kümesi $\partial\mathbb{H}^n$ ile kesişmediği için $U \cap \partial M = \emptyset$ olacaktır ve bu nedenle

$$\int_{\partial M} \omega = 0$$

integrali de sıfırdır.

Durum 2) $\varphi(U) = V = \mathbb{H}^n$ olsun.

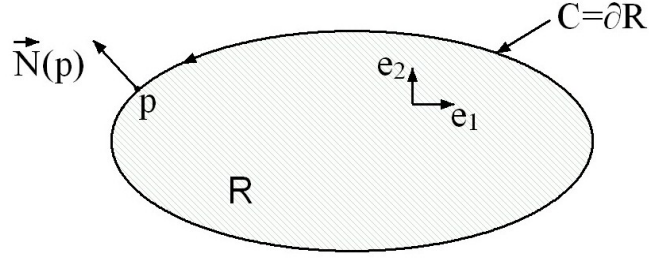
$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_U d\omega \\
&= \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_i \cdots dx_n \\
&= (-1)^{1-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(a_1(0, x_2, \dots, x_n) - \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} a_1(x) \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\partial \mathbb{H}^n} a_1(x) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^n a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_{\partial M} \omega
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla kanıt tamamlanır. Sondan ikinci eşitlikteki toplamın ilk terimi dışındaki formların tamamen sıfır olduğunu gözlemleyiniz. $\square$

Stokes Teoremi'nin Bazı Özel Halleri ve Uygulamaları: Bu bölümün girişinde Analizin Temel Teoremi'ni Stokes Teoremi'nin bir özel hali olarak vermiştik.

Green Teoremi: R düzlemde sınırlı bir bölge ve bu bölgenin sınırı $C = \partial R$ olsun. R bölgesini düzlemin $\beta = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ sıralı tabanının verdiği yönlendirme ile düşünersek, bu bölgenin sınırı üzerinde verdiği yönlendirme saat yönünün tersi olan yönlendirme olacaktır. R bölgesi üzerinde tanımlı bir $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ formunu düşünelim. Bu durumda $d\omega = (g_x(x, y) - f_y(x, y)) dx \wedge dy$ olacağından Stokes Teoremi Green Teoremi'ne dönüşecektir:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy &= \int_C \omega \\
&= \int_R d\omega \\
&= \int_R (g_x(x, y) - f_y(x, y)) dx \wedge dy \\
&= \int_R (g_x(x, y) - f_y(x, y)) dx dy
\end{aligned}$$



Şekil 2.8: R bölgesi ve sınırı düzlemin standart yönlendirmesine sahiptir.

Klasik Stokes Teoremi: S üç boyutlu uzayda sınırlı bir yüzey ve bu yüzeyin sınırı $C = \partial S$ olsun. S yüzeyi üzerinde seçilen bir $\vec{n}$ normal vektörü ile yönlendirilsin ve bu yönlendirmeyi kullanarak sınırını da yönlendirelim. S bölgesi yüzeyinde tanımlı bir

$$\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$$

1-formunu düşünelim. Bu durumda

$$d\omega = (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx$$

olacağından Stokes Teoremi klasik Stokes Teoremi'ne dönüşecektir:

$$\begin{aligned} \int_C f dx + g dy + h dz &= \int_{C=\partial S} \omega \\ &= \int_S d\omega \\ &= \int_S (g_x - f_y) dx \wedge dy \\ &\quad + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx . \end{aligned}$$

Saçılım Teoremi: D üç boyutlu Öklit uzayında sınırı, $S = \partial D$, türevlenebilir bir yüzey olan bir bölge olsun. D bölgesi üç boyutlu uzayın standart $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ sıralı tabanı ile ve sınır yüzeyi de bununla uyumlu şekilde yönlendirilsin.

$$\omega = f(x, y, z) dy \wedge dz + g(x, y, z) dz \wedge dx + h(x, y, z) dx \wedge dy$$

2-formunu düşünelim. Bu durumda

$$d\omega = (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

olacağından Stokes Teoremi Saçılım Teoremi'ne dönüşecektir:

$$\begin{aligned}
 \int_S f \, dy \wedge dz + g \, dz \wedge dx + h \, dx \wedge dy &= \int_{S=\partial D} \omega \\
 &= \int_D d\omega \\
 &= \int_D (f_x + g_y + h_z) \, dx \wedge dy \wedge dz \\
 &= \int_D (f_x + g_y + h_z) \, dx dy dz .
 \end{aligned}$$

2.3.7 Disk ve Kürenin Hacimleri

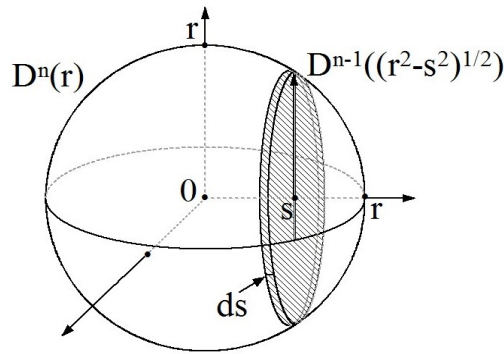
Küre ve diskin hacim formülleri iyi bilinse de pek fazla kaynakta bulunmamaktadır. Bu nedenle bu bölümde bu hacimleri hesaplayacağız. $D^n(r)$ ile $\mathbb{R}^n$ içindeki $r \geq 0$ yarıçaplı yuvarı gösterelim. Bu durumda $D^n(r)$ yuvarının hacmi

$$\text{Hac} (D^n(r)) = \int_{D^n(r)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{D^n(r)} dx_1 \cdots dx_n$$

olacaktır. Şimdi bu integrali hesaplayalım: İlk önce her $n > 0$ doğal sayısı için

$$\text{Hac}(D^n(r)) = A_n r^n$$

olacak şekilde bir A_n gerçel sayısının olduğunu gösterelim. $A_1 = 2$ (hatta, $A_2 = \pi$ ve $A_3 = 4\pi/3$) olduğunu biliyoruz. Tümevarım metodu ile kanıtı yapmak için A_{n-1} sayısının var olduğunu kabul edelim ve bir sonrakinin varlığını gösterelim: Aşağıdaki şekilden dolayı



Şekil 2.9: $A(n)$ ile $A(n-1)$ arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \text{Hac}(D^n(r)) &= 2 \int_0^r \text{Hac}(D^{n-1}(\sqrt{r^2 - s^2})) ds \\ &= 2A_{n-1} \int_0^r (\sqrt{r^2 - s^2})^{n-1} ds \end{aligned}$$

olur. $s = r \sin \theta$ değişken değişimini yaparsak

$$\text{Hac}(D^n(r)) = 2r^n A_{n-1} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta$$

eşitliğini elde ederiz. O halde,

$$A_n \doteq 2A_{n-1} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta$$

olarak tanımlarsak kanıtı bitirmiş oluruz. Şimdi de $B_n \doteq \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta$ sayısını hesaplayalım. Kolayca, $B_1 = 1$ ve $B_2 = \pi/4$ olduğunu görürüz. Diğer taraftan, $n \geq 2$ için $v = (\cos \theta)^{n-1}$ ve $du = \cos \theta d\theta$ alarak kısmi integral hesabı yaparsak

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{n-2} (\sin \theta)^2 d\theta$$

elde ederiz. Son olarak $(\sin \theta)^2 = 1 - (\cos \theta)^2$ yazarak

$$B_n = \frac{n-1}{n} B_{n-2}$$

bağıntısını buluruz. Bu bağıntıyı kullanarak kolayca

$$B_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{ve} \quad B_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

olduğunu görürüz. Hacimleri bulmak için $A_n/A_{n-1} = 2B_n$ bağıntısını kullanırsak

$$A_{2n+1} = \frac{2^{n+1} \pi^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \quad \text{ve} \quad A_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}$$

elde ederiz.

$S^{n-1}(r)$ ile $\mathbb{R}^n$ içindeki yarıçapı $r \geq 0$ olan küreyi gösterirsek bu kürenin hacmi $\text{Hac}(D^n(r))$ fonksiyonunun r 'ye göre türevi olacaktır. Örneğin, $\text{Hac}(D^4(r)) = \pi^2 r^4/2$ ve $\text{Hac}(S^3(r)) = 2\pi^2 r^3$ olur. Yine n -boyutlu birim diskin hacmi $A_n 1^n = A_n$ olurken $(n-1)$ -boyutlu birim kürenin hacmi ise nA_n olacaktır.

Örnek 2.3.14'te ele aldığımız, S^{n-1} küresi üzerindeki

$$\omega_{S^{n-1}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{n/2}}$$

formuna tekrar dönelim. Bu form herhangi bir $A \in SO(n)$ matrisi altında değişmezdir (bkz. Alıştırma 22):

$$A^*(\omega_{S^{n-1}}) = \omega_{S^{n-1}}.$$

Ayrıca bu form $T_{(1,0,\dots,0)}S^{n-1}$ teğet uzayının $\{\partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n\}$ sıralı tabanında $+1$ değerini alır. Bu noktayı ve bu sıralı tabanı $SO(n)$ grubunun elemanlarıyla kürenin herhangi bir noktasına taşıyabileceğimiz için,

$$\int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}} = \text{Hac}(S^{n-1}) = nA_n$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$\omega_{0,\mathbb{R}^n} \doteq \frac{\omega_{S^{n-1}}}{nA_n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

formunun birim küre üzerindeki integrali (yönlendirmeye bağlı olarak) ± 1 değerini alacaktır. Aslında Stokes Teoremi'nden dolayı $\mathbb{R}^n - \{0\}$ içinde kalan her tıkHz (yönlendirilmiş) M^{n-1} manifoldu için

$$\int_M \omega_{0,\mathbb{R}^n}$$

integrali sıfır veya ± 1 değerini alır. Daha açıkça söylemek gerekirse, integral, eğer orijin manifoldun sınırladığı tıkHz bölgenin içindeyse ± 1 , dışındaysa sıfır olur. Bu nedenle $\omega_{0,\mathbb{R}^n}$ formuna $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ alt manifoldunun geçişme formu denir. (Bkz. sayfa 214 ve Ünite 5, Alıştırma 8.)

2.3.8 Karmaşık Manifoldlar Üzerinde Özel Formlar

Karmaşık Doğrusal Uzay: $z_k = x_k + iy_k$ ve $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ koordinatları ile beraber ele aldığımız $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ karmaşık vektör uzayı üzerinde

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$$

türevlenebilir formunu düşünelim. Kolayca, her $0 \leq l \leq n$ için

$$\omega^l = \left(\frac{i}{2}\right)^l l! \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq n} dz_{k_1} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge dz_{k_l} \wedge d\bar{z}_{k_l}$$

olduğu görülür. Bu karmaşık vektör uzayı içinde $l \leq n$ boyutlu bir V alt uzayı alalım. $(w_1, \dots, w_l) \in V$ alt uzayı üzerinde doğrusal bir koordinat sistemi olsun. $L : V \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) &= L(w_1, \dots, w_l) \\ &= (a_{11}w_1 + \dots + a_{l1}w_l, \dots, a_{1n}w_1 + \dots + a_{ln}w_l) \end{aligned}$$

içerme fonksiyonunun bu koordinatlardaki ifadesi olsun. $A_{k_1, \dots, k_l}$ ile $A = (a_{ij})$ matrisinin $k_1, \dots, k_l$ 'inci satırlarının oluşturduğu alt matrisi gösterelim. Bu durumda

$$L^*(dz_j) = a_{1j}dw_1 + \dots + a_{lj}dw_l$$

ve

$$L^*(d\bar{z}_j) = \bar{a}_{1j}d\bar{w}_1 + \dots + \bar{a}_{lj}d\bar{w}_l$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L^*(dz_{k_1} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge dz_{k_l} \wedge d\bar{z}_{k_l}) &= \overline{\det(A_{k_1, \dots, k_l})} \det(A_{k_1, \dots, k_l}) \\ &\quad dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_l \wedge d\bar{w}_l \\ &= \|\det(A_{k_1, \dots, k_l})\|^2 \\ &\quad dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_l \wedge d\bar{w}_l \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca A matrisinin rankı l olduğundan bu alt matrislerden en az biri için $\|\det(A_{k_1, \dots, k_l})\|^2 > 0$ olmalıdır. Sonuç olarak, bir pozitif $C_V > 0$ sayısı için

$$L^*(\omega^l) = C_V \left(\frac{i}{2}\right)^l l! dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_l \wedge d\bar{w}_l$$

elde ederiz. V karmaşık vektör uzayının koordinatlarını

$$w_1 = u_1 + iv_1, \dots, w_l = u_l + iv_l$$

şeklinde yazarak $2l$ -boyutlu gerçel vektör uzayı olarak görebiliriz. Diğer taraftan, Örnek 2.3.9'dan dolayı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l} \right\}$$

V karmaşık vektör uzayının teğet uzayının bir tabanı olduğundan

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, i \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l}, i \frac{\partial}{\partial u_l} \right\}$$

kümesi aynı uzayın karmaşık yapı ile yönlendirilmiş gerçel bir tabanı olur. Ayrıca karmaşık türevlenebilir fonksiyonlar Cauchy-Riemann denklemlerini sağladıkları için bu sıralı taban

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial v_l} \right\}$$

ile aynıdır (ayrıca bkz. Önerme 6.3.1). Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 L^* \left(\omega^l \right) \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial v_l} \right) &= C_V \left(\frac{i}{2} \right)^l l! \\
 &\quad dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_l \wedge d\bar{w}_l \\
 &\quad \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial v_l} \right) \\
 &= C_V l! du_1 \wedge dv_1 \wedge \dots \wedge du_l \wedge dv_l \\
 &\quad \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial v_l} \right) \\
 &= C_V l! > 0
 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Sadece doğrusal cebir kullanarak elde ettiğimiz bu bilgilerin karmaşık manifoldların geometri ve topolojisine dair çok önemli sonuçları olacaktır. Bunun basit bir örneği aşağıdaki örnekte sunulmaktadır.

Örnek 2.3.24. *Elde ettiğimiz pozitiflik sonucu ve Stokes Teoremi sayesinde $\mathbb{C}^n$ içindeki her tıkız ve karmaşık alt manifoldun sıfır boyutlu olduğunu göstereceğiz: $M \subseteq \mathbb{C}^n$ karmaşık tıkız ve pozitif boyutlu, diyelim ki karmaşık boyutu $0 < l \leq n$ olan, bir alt manifold olsun. Bu alt manifoldu karmaşık yapısından gelen yönlendirme ile düşünelim. Bu durumda ω^l formu alt manifoldun her noktasındaki karmaşık yönlü tabanında pozitif değer alacaktır. Dolayısıyla,*

$$\int_M \omega^l > 0$$

olur. Fakat diğer taraftan $\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k = d(\sum_{k=1}^n x_k dy_k)$ olarak yazılabildiği için, $\nu = \sum_{k=1}^n x_k dy_k$ olmak üzere, $\omega^l = d(\nu \wedge \omega^{l-1})$ formu tamdır (burada $l > 0$ kullanılmıştır). Şimdi Stokes Teoremi'ni kullanırsak

$$0 < \int_M \omega^l = \int_M d(\nu \wedge \omega^{l-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \nu \wedge \omega^{l-1} = 0$$

çelişkisine ulaşırız. O halde, alt manifoldun boyutu $2l = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, Örnek 2.1.14 içinde incelediğimiz tıkız ve karmaşık $S^1 \times S^3$ manifoldu karmaşık bir alt manifold olarak doğrusal karmaşık uzaya gömülemeyecektir.

Karmaşık Projektif Uzak: Yukarıda $\mathbb{C}^n$ karmaşık vektör uzayı üzerinde oluşturduğumuz ω formunu doğrudan karmaşık projektif uzaya taşımak mümkün değildir. Karmaşık projektif uzay üzerinde doğal bir form yakalamak için ilk önce iki boyutlu küre üzerindeki hacim formuna bakalım. Örnek 2.3.14 içinde oluşturduğumuz $S^2 = \mathbb{C}P^1$ küresinin

$$\omega = x dy \wedge d\zeta + y d\zeta \wedge dx + \zeta dx \wedge dy$$

hacim formunu

$$P^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{(0, 0, -1)\},$$

$$(r, s) \mapsto (x, y, \zeta) = \left(\frac{2r}{1+r^2+s^2}, \frac{2s}{1+r^2+s^2}, \frac{1-r^2-s^2}{1+r^2+s^2} \right)$$

stereografik izdüşüm fonksiyonunun tersiyle düzleme geri çekelim:

$$dx = \frac{2(1-r^2+s^2)}{(1+r^2+s^2)^2} dr - \frac{4rs}{(1+r^2+s^2)^2} ds, \quad dy = \frac{2(1-s^2+r^2)}{(1+r^2+s^2)^2} ds - \frac{4rs}{(1+r^2+s^2)^2} dr$$

ve

$$d\zeta = -\frac{4r}{(1+r^2+s^2)^2} dr + \frac{4s}{(1+r^2+s^2)^2} ds$$

elde ederiz. Buradan kolayca,

$$(P^{-1})^*(\omega) = 4 \frac{dr \wedge ds}{(1+r^2+s^2)^2} = 2i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+\|z\|^2)^2}$$

olduğunu görürüz ($z = r + is$ yazarak). Bu form $S^2 = \mathbb{CP}^1$ üzerindeki diğer koordinat sisteminde de aynı ifadeyle verilecektir: $z = 1/w$ koordinat değişimi altında formumuz $2i \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1+\|w\|^2)^2}$ olacaktır. Dolayısıyla karmaşık projektif doğru üzerinde bir 2-form elde etmiş olduk. Bu formun $1/4$ katına *Fubini-Study formu* denir ve ω_{FS} ile gösterilir. Dolayısıyla, Fubini-Study formu yarıçapı $1/2$ olan küre üzerindeki alan formudur ve

$$\int_{S^2} \frac{\omega_{FS}}{\pi} = 1.$$

Karmaşık fonksiyonlar için holomorfik ve antiholomorfik dış türev dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\partial f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \quad \text{ve} \quad \bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i.$$

Bu tanım doğal bir şekilde karmaşık formlara genişletilir. Doğrudan hesap yaparak kolayca

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+\|z\|^2)^2} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1+\|z\|^2)$$

olduğunu görürüz. Fubini-Study formunu homojen koordinatlarda da yazabiliriz. $z = z_1/z_0$ alarak

$$\begin{aligned} \omega_{FS} &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1+\|z\|^2) = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1+\|z_1/z_0\|^2) \\ &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} [\log \|(z_0, z_1)\|^2 - \log \|z_0\|^2]. \end{aligned}$$

Son olarak $\partial \bar{\partial}(\log \|z_0\|^2) = \partial \left(\frac{d\bar{z}_0}{\bar{z}_0} \right) = 0$ olduğundan

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \|(z_0, z_1)\|^2$$

olarak yazabiliriz. Bu formu $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ üzerinde yazarak $\mathbb{C}P^n$ üzerindeki

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \|(z_0, z_1, \dots, z_n)\|^2$$

Fubini-Study formunu elde ederiz. Hesaplamalar benzer olduğundan bu ifadenin kanıtının detaylarını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 23).

Şimdi $M^k \subseteq \mathbb{C}P^n$ karmaşık boyutu k olan bir karmaşık alt manifold olsun. O halde, uygun bir holomorfik koordinat değişimi altında alt manifoldumuz yerel olarak, örneğin U_0 içinde ($z_0 = 1$ alarak) $z_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$, eşitlikleriyle ifade edilir. Geri çekme işlemi dış türev ile yer değiştirebildiğinden Fubini-Study formunun M manifoldunun bu koordinat sistemi üzerindeki ifadesi

$$\phi^*(\omega_{FS}) = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + \|(z_1, \dots, z_k)\|^2)$$

olacaktır.

Uyarı 2.3.25. *Fubini-Study formunu $n = 2$ için yerel koordinat sisteminde hesaplayalım:*

$$\begin{aligned} \omega_{FS} &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + \|(z_1, \dots, z_2)\|^2) \\ &= \frac{i}{2} \partial \left(\frac{\bar{\partial}(1 + \|(z_1, \dots, z_2)\|^2)}{1 + \|(z_1, \dots, z_2)\|^2} \right) \\ &= \frac{i}{2} \partial \left(\frac{z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) \\ &= \frac{i}{2} \frac{(1 + z_2 \bar{z}_2) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1 + z_1 \bar{z}_1) dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{z_1 \bar{z}_2 d\bar{z}_1 \wedge dz_2 + z_2 \bar{z}_1 d\bar{z}_2 \wedge dz_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2}. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \omega_{FS} \wedge \omega_{FS} &= 2 \left(\frac{i}{2} \right)^2 \frac{1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \\ &= 2 \frac{1}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^3} dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu formun koordinatları (x_1, y_1, x_2, y_2) olan $\mathbb{R}^4$ üzerindeki integrali yakınsaktır ve pozitif bir sayıya eşittir. Dolayısıyla, $M \subseteq \mathbb{C}P^n$ içinde karmaşık boyutu iki olan bir karmaşık alt manifold ise

$$\int_M \omega_{FS} \wedge \omega_{FS}$$

integrali pozitif bir sayıdır. Benzer sonucun her boyut için geçerli olduğunun gösterilmesini okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz.

2.4 Alıştırmalar

1. Tıkız bir manifoldun atlasında en az iki koordinat sistemi olduğunu gösteriniz.
2. Gerçel projektif doğrunun bir boyutlu küreye, karmaşık projektif doğrunun da iki boyutlu küreye difeomorfik olduğunu gösteriniz.
3. $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesi $\mathbb{R}$ 'nin açık bir alt kümesine homeomorfik ise $n = 1$ olduğunu gösteriniz.
4. Karmaşık boyutu bir olan (dolayısıyla gerçel boyutu iki olan) C^∞ karmaşık manifoldlara Riemann yüzeyleri denir. Eğer Σ tıkız bir Riemann yüzeyi ise her analitik $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz. (*İpucu: Maksimum Modülüs Prensibini kullanınız.*)
5. (a) M türevlenebilir bir manifold ve $p \in U \subseteq M$ rastgele bir açık küme olmak üzere, $\mathcal{G}_p$ değişmeli halkasının, U kümesi üzerindeki türevlenebilir fonksiyonlar halkasının uygun bir direkt limiti olduğunu gösteriniz:

$$\mathcal{G}_p = \lim_{p \in U \subseteq M} C^\infty(U, \mathbb{R}).$$

- (b) Karmaşık bir manifoldun herhangi bir noktasındaki analitik fonksiyon tohumlarının bu nokta etrafında tanımlanmış yakınsak çok değişkenli karmaşık kuvvet serileri olduğunu gösteriniz.
6. Birinci ünite de görmüş olduğumuz Taylor Teoremi'ni kullanarak Önerme 2.1.6'nın kanıtında kullandığımız aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu gösteriniz: Taylor açılımı

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(p_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p_0)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

olan türevlenebilir fonksiyon için

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)$$

ifadesi de türevlenebilir bir fonksiyondur.

7. Bu alıştırmada Teorem 2.2.6'yı tıkız olmayan manifoldlara genişleteceğiz. Biz kanıtın ana hatlarını sunacağız; detayları okuyucuya bırakacağız. Bunu dört adımda yapacağız. Türevlenebilir n -boyutlu bir M manifoldu alalım.

- (a) Bu kısımda Poincaré İzomorfizması olarak bilinen sonucun (Teorem 4.4.1) kanıtının dördüncü adımındaki iddiayı ve kanıtını takip edeceğiz. Manifold U_t ve $U_ç$ gibi iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir öyle ki,
- i. $U_t = \cup_k U_{2k+1}$ ve $U_ç = \cup_k U_{2k}$ koordinat komşuluklarının birleşimidir;
 - ii. Her $k \neq l \geq 0$ tam sayıları için,

$$U_{2k+1} \cap U_{2l+1} = \emptyset = U_{2k} \cap U_{2l}, \text{ olur;}$$

- iii. Her $k \geq 0$ tam sayısı için, bir $\bar{V}_k \subseteq U_k$ ve $M = \cup_k V_k$ olacak şekilde kapanışı tıkHz olan bir V_k açık kümesi vardır;
 - iv. Her $k \geq 0$ tam sayısı için, bir $\phi_k : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ türevlenebilir fonksiyonu vardır, öyle ki $\phi_k|_{V_k}$ görüntüsüne bir difeomorfizma ve $\phi_k(M - U_k) = \{0\}$ 'dir. Ayrıca, her $k \neq l \geq 0$ tam sayıları için, $\phi_k(V_k) \cap \phi_l(V_l) = \emptyset$ 'dir;
 - v. $\phi_e = \sum_k \phi_{2k} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $\phi_o = \sum_k \phi_{2k+1} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\phi = (\phi_e, \phi_o) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bir daldırma fonksiyonudur.
- (b) M üzerinde tanımlı, gerçel değerkli türevlenebilir düzgün bir $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bunu şu şekilde görebiliriz: $M = \cup_n V_n$, $\bar{V}_n \subset U_n \subseteq M$, yerel sonlu $\{U_n\}$ açık kümeler ailesi için $\rho_n : M \rightarrow [0, 1]$, türevlenebilir fonksiyonları bulabiliriz öyle ki, $\rho_n^{-1}(1) = \bar{V}_n$ ve $\rho_n^{-1}(0) = M - U_n$ olsun. Bu durumda $\rho = \sum_n n \rho_n$ istenilen fonksiyonu verir.
- (c) $\sigma_e = \sum_k \rho_{2k}$ $\sigma_o = \sum_k \rho_{2k+1}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda,

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+3}, f(p) = (\phi(p), \rho(p), \sigma_e(p), \sigma_o(p)),$$

fonksiyonu bir gömme fonksiyonudur. (İpucu: Yukarıda yaptıklarımızdan dolayı bu fonksiyonun düzgün bir daldırma fonksiyonu olduğu açıktır. Fonksiyonun bire bir olduğunu ise şu şekilde gösterebiliriz. $f(p) = f(q)$ olsun. Eğer, bazı k_0, l_0 için, $p \in V_{2k_0}$ ve $q \in V_{2l_0}$ ise kolayca $k_0 = l_0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $p = q$ elde edilir. Benzer şekilde $p \in V_{2k_0+1}$ ve $q \in V_{2l_0+1}$ durumu da yapılır. O halde, $(p \in V_n \Rightarrow n = 2k_0)$ ve $(q \in V_n \Rightarrow n = 2l_0 + 1)$ olduğu-nu kabul edebiliriz. Bu durumda da, son iki koordinatı kullanarak kanıtı tamamlarız.

- (d) Son olarak $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+3}$ gömme fonksiyonunun, ardı ardına iki kere, uygun hiper alt uzayların dik izdüşüm fonksiyonları ile bileşkesini alarak kanıtı tamamlarız. (Dik izdüşümler, bileşkelerinin çekirdeği $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0)$ vektörünü içermeyecek şekilde seçilmelidir.)

8. Örnek 2.1.20'de ele aldığımız $\Phi : M(n, n) \rightarrow S(n)$, $\Phi(Q) = Q^T Q$, fonksiyonunun herhangi bir Q noktasındaki türevi

$$(D\Phi)_Q : M(n, n) \rightarrow S(n), \quad A \mapsto Q^T A + A^T Q$$

ile verilir. Bunun örten olduğunu gösteriniz.

9. Möbius şeridinin $\mathbb{R}^3$ içine bir gömülmesini veriniz. Möbius şeridinin $\mathbb{R}^2$ içine gömülemeyeceğini gösteriniz.
10. Determinantı bire eşit olan $n \times n$ -matrisler kümesinin, $SL(n) \subseteq M(n, n)$, $(n^2 - 1)$ -boyutlu bir alt manifold ve bu alt manifoldun birim matristeki teğet uzayının da izi sıfır olan matrislerin oluşturduğu vektör uzayı, $sl(n)$, olduğunu gösteriniz.
11. Örnek 2.2.7'de ele aldığımız eğrinin hiçbir alt uzaya dik izdüşümünün düzgün bir fonksiyon olmadığını gösteriniz.
12. $\mathbb{R}^3$ üzerindeki her 2-formun iki tane 1-formun dış çarpımı olarak yazılabildiğini gösteriniz. $\mathbb{R}^4$ üzerindeki

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

2-formunun iki tane 1-formun dış çarpımı olarak yazılamayacağını gösteriniz.

13. Örnek 2.3.5'de verilen geri çekme işlemlerini tamamlayınız.
14. Örnek 2.1.10 içinde $\mathbb{R}P^1$ için oluşturduğumuz vektör alanının Örnek 2.1.4'te verilen koordinat sistemleri yardımıyla düzlemdeki birim çembere taşındığında çember üzerinde birim uzunlukta bir vektör alanı oluşturduğunu gösteriniz.
15. Önerme 2.3.7'nin kanıtını tamamlayınız. Bu önermenin manifoldlar üzerindeki türevlenebilir formlar için de doğru olduğunu gösteriniz.
16. Yönlendirilebilir ve bağlantılı her manifoldun iki farklı yönlendirmesi olduğunu gösteriniz.
17. Sonlu sayıda manifoldun Kartezyen çarpımının herhangi bir noktasındaki teğet uzayının, çarpımı oluşturan manifoldların teğet uzaylarının kartezyen çarpımına doğal olarak izomorfik olduğunu gösteriniz.
18. Her kürenin yönü ters çeviren bir difeomorfizması olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan, $\mathbb{C}P^2$ karmaşık projektif düzleminin yönü ters çeviren bir difeomorfizması yoktur. Bu iddiayı kanıtlamak için karmaşık projektif düzlemin kohomoloji halka yapısını kullanabiliriz. Bunu ise 4. Ünite'de işleyeceğimiz Poincaré İzomorfizması yardımıyla yapabiliriz.

19. M ve N yönlendirilebilen n -boyutlu iki manifold ve $\phi : M \rightarrow N$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun yerel difeomorfizma olması için gerek ve yeter koşulun M üzerinde hiçbir noktada sıfırı olmayan bir $\omega \in \Omega^n(M)$ formu için $\phi^*(\omega) \in \Omega^n(M)$ formunun hiç sıfırı olmaması olduğunu kanıtlayınız.
20. M^m ve N^n iki manifold olmak üzere $M \times N$ çarpım manifoldunun yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her ikisinin de yönlendirilebilir olmasıdır. (İpucu: Herhangi bir $q \in N^n$ noktası etrafında $\mathbb{R}^n$ 'ye difeomorfik bir $q \in U \subseteq N$ koordinat komşuluğu alalım. Eğer $M \times N$ yönlendirilebilir ise $M \times U$ açık kümesi de yönlendirilebilir bir manifolddur. Bu durumda $M \times U$ üzerinde hiç sıfırı olmayan bir $m+n$ form bize $M \cong M \times \{q\}$ üzerinde hiç sıfırı olmayan bir m form verecektir.)
21. G grubu türevlenebilir ve yönlendirilmiş M manifoldu üzerinde difeomorfizmalarla serbest ve düzgün süreksiz bir şekilde etki etsin, öyle ki bölüm uzayı da manifold olsun. Bu durumda M/G bölüm manifoldunun yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter koşul G grubunun içindeki her difeomorfizmanın M üzerindeki yönü korumasıdır, gösteriniz.
22. Örnek 2.3.14'te $\mathbb{R}^n - \{0\}$ manifoldu üzerinde tanımlanan

$$\omega_{S^{n-1}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{n/2}}$$

formunun kapalı olduğunu ve herhangi bir $A \in SO(n)$ matrisi altında değişmediğini gösteriniz. (Bkz. ayrıca Ünite 5, Alıştırma 8)

23. Karmaşık projektif uzay üzerindeki Fubini-Study formunun, karmaşık projektif doğru durumunda olduğu gibi,

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \|(z_0, z_1, \dots, z_n)\|^2$$

olduğunu gösteriniz.

24. Karmaşık projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ 'nin karmaşık boyutu m olan bir $M^m \subseteq \mathbb{C}P^n$ karmaşık alt manifoldunu alalım. Bu durumda, ω_{FS} karmaşık projektif uzay üzerindeki Fubini-Study formu olmak üzere

$$\int_M \omega_{FS}^m$$

integrali pozitif bir sayıdır. Kanıtlayınız. Ayrıca, beşinci ünite

$$\frac{1}{\pi^m} \int_M \omega_{FS}^m$$

pozitif sayısının bir tam sayı olduğunu göreceğiz (bkz. Ünite 5, Alıştırma 15).

25. Bu alıştırmada verilen bir manifoldun *yönlendirme (ikili) örtü uzayını* kuracağız: Türevlenebilir ve bağlantılı bir M manifold için

$$\tilde{M} = \{(p, O_p) \mid p \in M \text{ ve } O_p, T_p M \text{ teğet uzayının bir yönlendirmesi}\}$$

kümesini tanımlayalım. Her gerçel vektör uzayının iki yönlendirmesi olduğu için

$$P : \tilde{M} \rightarrow M, (p, O_p) \mapsto p,$$

örten fonksiyonunun her lifi iki noktadan oluşur. Yine M üzerindeki her $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subseteq M$ koordinat komşuluğu görüntüleri ayırık olan iki fonksiyon verir:

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M}, p \mapsto \left(p, \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\} \right) \text{ ve} \\ \psi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M}, p \mapsto \left(p, \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\} \right). \end{aligned}$$

$\tilde{M}$ kümesinin bu fonksiyonları koordinat komşulukları olarak kabul eden türevlenebilir manifold yapısı taşıdığını gösteriniz. Ayrıca bu türevlenebilir yapı ile $P : \tilde{M} \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonunun türevlenebilir ikili örtü uzayı olduğunu gözlemleyiniz. Son olarak aşağıdaki ifadeleri kanıtlayınız:

- $\sigma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}, (p, O_p) \mapsto (p, -O_p)$, fonksiyonu $\tilde{M}$ üzerinde türevlenebilir bir $\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ -etkisi tanımlar ve $P : \tilde{M} \rightarrow M$ bu etkinin bölüm fonksiyonudur.
- $\tilde{M}$ manifoldu yönlendirilebilirdir.
- M manifoldunun yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{M}$ manifoldunun bağlantılı olmamasıdır.
- $P : \tilde{M} \rightarrow M$ ve $Q : \tilde{N} \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların yönlendirme örtü uzayları ve $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Q \circ F = f \circ P$ olacak şekilde tam olarak iki $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ türevlenebilir fonksiyonu vardır.
- N yönlendirilebilir bir manifold, $p \in N$, $f : N \rightarrow M$ türevlenebilir bir fonksiyon, $q = f(p)$ ve $\tilde{q} \in P^{-1}(q)$ ise $f = P \circ F$ ve $F(p) = \tilde{q}$ olacak şekilde tam olarak tek bir $F : N \rightarrow \tilde{M}$ türevlenebilir fonksiyonu vardır.
- $P : \tilde{M} \rightarrow M$ örtü uzayı (e) şıkında verilen koşulu sağlayan ve derecesi iki olan tek örtü uzayıdır. Kanıtlayınız. $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ dört manifoldunun dört tane bağlantılı örtü uzayını bulunuz. Hangisi yönlendirme ikili örtü uzayıdır? (Bu şık Turgut Önder tarafından önerilmiştir.)
- Klein Şisesi'nin ikili yönlendirme örtü uzayı nedir?

26. Bu alıştırmada Sard Teoremi'nin bir uygulaması olarak Morse fonksiyonlarını vereceğiz. Daha kapsamlı bir okuma için [16, 28, 39] numaralı kaynaklara bakabilirsiniz. Özellikle [39] aşağıdaki sonuçlar için ayrıntılı kanıtlar içeren ilk Türkçe kaynaktır.

Öklit uzayının açık bir $U \subseteq \mathbb{R}^n$ alt kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun herhangi bir $p \in U$ kritik noktasında

$$H(f)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{n \times n}$$

Hessian matrisinin tersi varsa bu kritik noktaya *yozlaşmamış kritik nokta* denir. Eğer f fonksiyonunun tüm kritik noktaları yozlaşmamış ise bu fonksiyona *Morse Fonksiyonu* denir.

(a)

$$Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right),$$

türev fonksiyonunun türevinin yukarıdaki Hessian matrisi ile verildiğini gözlemleyiniz: $D(D(f)) = H(f)$. Daha sonra Ters Fonksiyon Teoremi'ni kullanarak f fonksiyonunun yozlaşmamış kritik noktalarının kümesinin U içinde ayrıık bir küme olduğunu gösteriniz.

- (b) Yozlaşmamış kritik nokta tanımının koordinat değişimini altında korunduğunu gösteriniz. Başka bir deyişle, eğer $p \in U$ noktası $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun yozlaşmamış bir kritik noktası ve $\phi : V \rightarrow U$ bir difeomorfizma ise $\phi^{-1}(p)$ noktası da $f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun yozlaşmamış bir kritik noktasıdır. Bu sonucu kullanarak manifoldlar üzerinde yozlaşmamış kritik nokta ve Morse fonksiyonu kavramlarını tanımlayınız.
- (c) Tıkız bir manifold üzerinde tanımlı her Morse fonksiyonunun sonlu sayıda kritik noktası olduğunu gösteriniz.
- (d) $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ bir alt manifold ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda Lebesgue ölçümü sıfır olan bir $C \subseteq \mathbb{R}^N$ kümesi dışından alınan her $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N - C$ vektörü için

$$f_a : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + a_1 x_1 + \dots + a_N x_N,$$

fonksiyonu bir Morse fonksiyonudur, gösteriniz.

- (e) *Morse Yardımcı Teoremi*: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonunun yozlaşmamış bir $p \in U$ kritik noktasını alalım. Bu durumda bu nokta etrafında öyle bir koordinat sistemi vardır ki, fonksiyon bu koordinat sisteminde

$$f(x) = f(p) + \sum h_{ij} x_i x_j$$

ile verilir. Burada $H(f)(p) = (h_{ij})$ matrisi f fonksiyonunun p noktasındaki Hessian matrisidir.

Bu sonucu sadece $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durumunda kanıtlayınız. Genellikle bir şey kaybetmeden $p = 0 = f(0)$ olduğunu kabul edelim. O halde, Taylor Teoremi'nden yeterince küçük bir $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığında

$$f(x) = ax^2 + C(x)x^3$$

olacak şekilde bir $a \neq 0$ gerçel sayısı ve $C(x)$ sürekli fonksiyonu bulabiliriz. Aslında, $C(x)$ fonksiyonu da türevlenebilir seçilebilir. Bu durumda $x \mapsto \tilde{x} = x\sqrt{1 + xC(x)/a}$ bir koordinat dönüşümüdür ve bu dönüşüm altında fonksiyonumuz $\tilde{f}(\tilde{x}) = a\tilde{x}^2$ ile verilir. Detayları doldurunuz. Genel durum için [28, 39] numaralı kaynaklara bakabilirsiniz.

“Durmadığınız sürece ne kadar yavaş yol aldığınızın önemi yoktur.”

-Konfüçyüs

3

Vektör Alanları ve Demetleri

Bu ünite de ilk önce vektör alanlarının tanımladığı akışları inceleyeceğiz. Daha sonra bu akışları kullanarak manifoldlarda çeşitli türev alma metotlarını göreceğiz. Bunu yaparken jeodezikleri tanımlayıp temel özelliklerinden bazılarını inceleyeceğiz. Teğet demeti ile ilgili birçok kavramı vektör demetlerine taşıyarak karakteristik sınıfların tanımlanabilmesi için gerekli alt yapıyı oluşturmaya çalışacağız. Bu ünite konularını içeren temel kaynaklar için [35], [36], [9], [42], [2] ve [10] numaralı referanslara bakabilirsiniz.

3.1 Vektör Alanlarının İntegralleri ve Lie Türevleri

3.1.1 Vektör Alanlarının İntegralleri

M bir manifold ve $(-a, a)$ gerçel sayı doğrusu üzerinde bir aralık olmak üzere

$$\varphi : (-a, a) \times M \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \varphi(t, p),$$

aşağıdaki koşulları sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon olsun:

1. Her $t \in (-a, a)$ sabit değeri için, $\varphi_t : M \rightarrow M$, $\varphi_t(p) \doteq \varphi(t, p)$, bir difeomorfizmadır;
2. Her $p \in M$ için, $\varphi_0(p) = p$ dir;
3. Herhangi $s, t \in (-a, a)$ değerleri için $s+t \in (-a, a)$ ise $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ eşitliği sağlanır.

Bu durumda φ_t , $t \in (-a, a)$, difeomorfizmalar ailesine *bir parametrelili difeomorfizma ailesi* denir. Sadece ilk koşulu sağlayan türevlenebilir fonksiyonlar ailesine ise manifold üzerinde bir *izotopi* denir.

Uyarı 3.1.1. Yukarıdaki difeomorfizma ailesi için, eğer $(-a, a) = \mathbb{R}$ ise bu aileyi $(\mathbb{R}, +)$ grubundan M manifoldunun difeomorfizmalarının oluşturduğu gruba bir homomorfizma olarak görebiliriz:

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto (\varphi_t : M \rightarrow M) .$$

Eğer bu grup etkisi periyodik ise, başka bir deyişle her $t \in (\mathbb{R}, +)$, için $\varphi_{t+T} = \varphi_t$, olacak şekilde bir $T > 0$ gerçel sayısı varsa bu etki bir çember etkisine dönüşür:

$$\Phi : (\mathbb{R}, +)/T \cdot \mathbb{Z} \simeq S^1 \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto (\varphi_t : M \rightarrow M) .$$

Her $\varphi : (-a, a) \times M \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \varphi_t(p)$, difeomorfizma ailesi manifold üzerinde bir vektör alanı belirler:

$$X : M \rightarrow T_*M, \quad X(p) \doteq \dot{\varphi}_0(p) .$$

Burada $\dot{\varphi}_0(p)$ ile $t \mapsto \varphi_t(p)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, eğrisinin $t = 0$ anındaki teğetini gösteriyoruz. Eğer difeomorfizma ailesi aslında bir $(\mathbb{R}, +)$ etkisi ise, bu vektör alanı, her $(t, p) \in (-a, a) \times M$ için

$$X(\varphi_t(p)) = \dot{\varphi}_t(p)$$

koşulunu sağlar:

$$X(\varphi_t(p)) = \dot{\varphi}_0(\varphi_t(p)) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\varphi_s(\varphi_t(p))) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\varphi_{s+t}(p)) = \dot{\varphi}_t(p) .$$

$X(p)$ vektör alanına φ_t izotopisini üreten vektör alanı ve φ_t difeomorfizma ailesine de $X(p)$ vektör alanının akışı da denir.

Şimdi bir vektör alanının integralini alarak bu alanın ürettiği izotopiyi ya da akışı bulmaya çalışacağız. Aşağıdaki örnek her vektör alanının integralinin alınamayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}$ üzerindeki sabit $x \mapsto X(x) = \frac{\partial}{\partial x}$ vektör alanının ürettiği akışın $\varphi(t, x) = x + t$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, bu vektör alanının $\mathbb{R} - \{0\}$ üzerine kısıtlanması bir akış üretmez. Diğer taraftan, yine $\mathbb{R} - \{0\}$ üzerindeki $Y(x) = x \frac{\partial}{\partial x}$ vektör alanının integrali bize $\phi_t(x) = e^t x$ akışını verir:

$$Y(\phi_t(x)) = Y(e^t x) = e^t x \frac{\partial}{\partial x} = \dot{\phi}_t(x)$$

Aşağıdaki teorem tıkm manifoldlarda her vektör alanının integrallenebileceğini göstermektedir.

Teorem 3.1.3. M tıkm bir manifold ise M üzerindeki her $X(p)$ türevlenebilir vektör alanının tek bir

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \varphi(t, p),$$

türevlenebilir akışı vardır.

Kanıt : Manifold üzerinde herhangi bir $p \in M$ noktası alalım. Bu nokta etrafında bir koordinat sistemi alarak problemi Öklit uzayına taşıyabiliriz. O halde,

$$X(\varphi_t(p)) = \dot{\varphi}_t(p)$$

denklemini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ içinde çözmek istiyoruz. $(0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ noktasının etrafında kapanışı tıkHz olan bir açık dikdörtgen alalım. Bu tıkHz bölge içinde $X(p)$ fonksiyonu ikinci değişkenine göre Lipschitz olacaktır. Bu dikdörtgeni gerekirse küçülterek denklemin bir $(-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U$ açık kümesi üzerinde $\varphi : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U \rightarrow M$ şeklinde, her $p \in U$ için $\varphi(0, p) = p$ koşulunu sağlayan tek bir çözümü olduğunu görürüz. Manifold tıkHz olduğu için bu tipteki sonlu tane açık U kümesi manifoldu örtecektir. Bu sonlu sayıdaki açık kümeye karşılık gelen yine sonlu sayıdaki $\epsilon_p > 0$ 'ların en küçüğünü alarak denklemin $\varphi_0 = id_M$ başlangıç değerini sağlayan tek

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$$

çözümünü elde ederiz.

Şimdi de çözümün sadece $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığı değil tüm gerçel ekseninde tanımlı olduğunu göstereceğiz. Bunu yaparken çözümleri birbirine yapıştıracağız: Bir $p \in M$ noktası, $-\epsilon < t_1 < \epsilon$ gerçel sayısı ve $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset (-\epsilon, \epsilon)$ aralığı seçelim. Bu durumda

$$f : (-\delta, \delta) \rightarrow M, \quad f(t) = \varphi_{t_1+t}(p),$$

ve $q = \varphi_{t_1}(p)$ olmak üzere,

$$g : (-\delta, \delta) \rightarrow M, \quad g(t) = \varphi_t(q),$$

fonksiyonlarının ikisi de aynı başlangıç değer probleminin çözümü olacaklardır:

$$\dot{y}(t) = X(y(t)), \quad y(0) = q.$$

O halde, her $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ ve $p \in M$ için

$$\varphi_{t+t_1}(p) = \varphi_t(\varphi_{t_1}(p))$$

elde edilir. Buradan, $-\epsilon < s_i, t_j < \epsilon$ ve $\sum_i s_i = \sum_j t_j$ koşulunu sağlayan sonlu sayıda gerçel sayı için

$$\varphi_{s_1} \circ \cdots \circ \varphi_{s_k} = \varphi_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_l}$$

sonucuna varırız. Şimdi bu sonucu kullanarak çözümü tüm gerçel eksene genişletebiliriz.

Teorem 1.2.13'ün kanıtının altındaki paragrafın sonucunu kullanarak her $t_0 \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_{t_0} : M \rightarrow M$ fonksiyonunun sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, $\varphi_{t_0} \circ \varphi_{-t_0} = \varphi_0 = id_M$ olduğundan

$$\varphi_{t_0} : M \rightarrow M$$

fonksiyonunun aslında bir homeomorfizma olduğu sonucuna varırız. Denklemden çözümün t değişkenine göre sonsuz türevlenebilir olduğu kolayca görülür. Denklemi

$$X(\varphi(t, p)) = \dot{\varphi}(t, p)$$

şeklinde yazıp çözümün p değişkenine göre türevlenebilir olduğunu kabul edersek

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \exp \int_0^t DX(\varphi(s, p)) ds$$

elde ederiz. Buradan da çözümün türevlenebilir (her değişkene göre sonsuz defa türevlenebilir) olduğu sonucuna varırız. O halde, sadece çözümün p değişkenine göre türevlenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için yine yerel bir koordinat sisteminde, dolayısıyla Öklit uzayında olduğumuzu kabul edebiliriz. Şimdi bir $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ noktası ve $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ birim vektörü seçelim ve her $s \neq 0$ için

$$A(t_0, s) \doteq \frac{\varphi(t_0, x_0 + sv) - \varphi(t_0, x_0)}{s}$$

bölümünü tanımlayalım. İlk önce, $\varphi(t, x)$ fonksiyonunun v vektörü boyunca türevlenebilir olduğunu görelim. Bunun için

$$\lim_{s \rightarrow 0} A(t_0, s)$$

limitinin varlığını göstermeliyiz. $X(x)$ vektör alanının türevlenebilir olduğunu kullanarak $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$ olacak şekilde bir $a(x)$ için

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t_0, x) &= \dot{\varphi}(t_0, x_0) + DX(\varphi(t_0, x_0)) \cdot (\varphi(t_0, x) - \varphi(t_0, x_0)) \\ &\quad + a(\varphi(t_0, x)) \|\varphi(t_0, x) - \varphi(t_0, x_0)\| \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Aslında, $X(x)$ vektör alanı türevlenebilir olduğu için Taylor Teoremi'ni kullanarak (Önerme 1.2.12) $a(x)$ fonksiyonun, her tıkkız $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bölgesi için $\|a(x)\| \leq C_T \|x - x_0\|$, $(t_0, x_0), (t_0, x) \in T$, eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir C_T sabitine sahip olduğunu görürüz. Şimdi $x = x_0 + sv$ alalım ve yukarıdaki denklemi $s \neq 0$ ile bölerek

$$\dot{A}(t_0, s) = DX(\varphi(t_0, x_0))A(t_0, s) + \|A(t_0, s)\| a(\varphi(t_0, x_0 + sv)) \quad (*)$$

elde edelim. Bu denklemin $A(t_0, s)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|A\|^2) = A^T DXA + \|A\| a \cdot A$$

elde edilir. Bu durumda öyle $r, K, \epsilon > 0$ sayıları bulabiliriz ki, her $0 \neq s \in (-r, r)$ ve $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ için,

$$\frac{d}{dt} (\|A\|^2) \leq K(1 + \|A\|^2)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\frac{d}{dt}(\ln(1 + \|A\|^2)) \leq K$$

bulunur. Şimdi integral alarak ve her $s \neq 0$ için $\|A(0, s)\| = \|v\| = 1$ olduğunu kullanarak

$$\|A\|^2 \leq 2e^{Kt} - 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde, $A(t, s)$ fonksiyonu

$$(-\epsilon, \epsilon) \times ((-r, r) - \{0\})$$

üzerinde sınırlıdır. Buradan yukarıdaki (*) doğrusal diferansiyel denkleminin $\mu(t) = DX(\varphi(t, x_0))$ ve $\nu(t, s) = \|A(t, s)\| a(\varphi(t, x_0 + sv))$ katsayı fonksiyonlarının $(-\epsilon, \epsilon) \times (-r, r)$ üzerinde sürekli olduğu sonucuna varırız (türevin tanımından dolayı t yeterince küçük olduğunda $a(\varphi(t, x))$ fonksiyonun $x \neq x_0$ olduğu durumda sürekli olduğu açıktır). Bu denklemin $Y(0, s) = v$ başlangıç değerini sağlayan, $(-\epsilon, \epsilon) \times (-r, r)$ kümesi üzerinde tanımlı tek çözümünü $Y(t, s)$ ile gösterelim ($s \neq 0$ sabit tutulurken). Çözümün her iki değişkene göre de sürekli olduğunu görmek için

$$\dot{Y}(t, s) = DX(\varphi(t, x_0)) \cdot Y(t, s) + \|A(t, s)\| a(t, \varphi(t, x_0 + sv))$$

denklemini

$$\dot{Y}(t, s) - \mu(t) \cdot Y(t, s) = \nu(t, s)$$

şeklinde yazalım. Denklemin $e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau}$ integral çarpanı yardımıyla çözersek

$$Y(t, s) = e^{\int_0^t \mu(\tau) d\tau} \left(v + \int_0^t \nu(t', s) e^{-\int_0^{t'} \mu(\tau) d\tau} dt' \right) \quad (**)$$

elde ederiz. $\nu(t, s)$ sürekli olduğundan $Y(t, s)$ fonksiyonu da $(-\epsilon, \epsilon) \times (-r, r)$ üzerinde süreklidir. Son olarak, her $(t, s) \in (-\epsilon, \epsilon) \times ((-r, r) - \{0\})$ için $Y(t, s) = A(t, s)$ olduğundan

$$\lim_{s \rightarrow 0} A(t, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, x_0 + sv) - \varphi(t, x_0)}{s} = Y(t, 0)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\varphi(t, x)$ fonksiyonunun yönlü türevleri vardır. O halde, bu fonksiyonun türevlenebilir olduğunu kanıtlamak için yönlü türevlerinin sürekli olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için ise, $Y(t, s)$ fonksiyonunun (**)’da verilen ifadesinden dolayı $\mu(t) = DX(t, \varphi(t, x_0))$ ve $\nu(t, s) = \|A(t, s)\| a(\varphi(t, x_0 + sv))$ katsayı fonksiyonlarının (t, x_0) ikilisine göre sürekli olduğunu görmeliyiz. DX türevlenebilir ve $\varphi(t, x_0)$ sürekli olduğundan $\mu(t)$, (t, x_0) ikilisinin fonksiyonu olarak süreklidir. Diğer taraftan, $A(t, s) = \frac{\varphi(t, x_0 + sv) - \varphi(t, x_0)}{s}$ fonksiyonunun $s \neq 0$ olduğu durumda sürekli olduğu

açıktır. Taylor Teoremi'nden dolayı $a(\varphi(t, x_0 + sv))$ fonksiyonu da (t, x_0, s) üçlüsüne göre süreklidir (bkz. Teorem 1.2.11). Ayrıca,

$$\lim_{s \rightarrow 0} a(\varphi(t, x_0 + sv)) = 0$$

ve $A(t, s)$ sınırlı olduğundan $\nu(t, s) = \|A(t, s)\| a(\varphi(t, x_0 + sv))$ fonksiyonu (t, x_0) ikilisinin sürekli bir fonksiyonu olacaktır. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 3.1.4. 1) *Manifoldun tıkHz olması koşulu vektör alanının tıkHz destekli olması koşulu ile değiştirilebilir.*

2) $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere, zamana bağlı

$$X : I \times M \rightarrow T_*M, (t, p) \mapsto X(t, p),$$

vektör alanı $I \times M$ çarpım manifoldu üzerinde bir vektör alanı tanımlar:

$$Y : I \times M \rightarrow T_*(I \times M), (t, p) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t} + X(t, p) \right).$$

Bu vektör alanının akışı bir $J \subseteq \mathbb{R}$ aralığı için

$$\varphi : J \times I \times M \rightarrow I \times M, (s, t, p) \mapsto (\phi(s, t, p), \theta(s, t, p))$$

ile veriliyorsa

$$\Theta : J \times I \times M \rightarrow M, (s, t, p) \mapsto \Theta_{s,t}(p) \doteq \theta(s, t, p)$$

zamana bağlı bir akış verir. Bu akışın aşağıdaki özelliklerinin kanıtları okuyucuya bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 1):

- a) Her $t_1 \in J$, $t_2 \in J \cap I$ ve $t_3 \in I$ için $\Theta_{t_3, t_2} \circ \Theta_{t_2, t_1} = \Theta_{t_3, t_1}$ 'dir.
b) Her $s, t \in J \cap I$ için $\Theta_{s,t} \circ \Theta_{t,s} = Id_M$ olur.

3.1.2 Lie Türevi

Öklit uzayı üzerinde türevlenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun herhangi bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki, verilen bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü boyunca yönlü türevi,

$$D_v(f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

limiti ile tanımlanır. Bu tanımda kullanılan, $t \mapsto p + tv$, eğrisi Öklit uzayında, p noktasından v vektörü boyunca hareket etmemizi sağlayan en doğal yolu verir. Diğer taraftan aynı eğri, integrali

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t, p) = p + tv,$$

fonksiyonu olan $X(p) = v$, $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sabit vektör alanının akışından başka bir şey değildir. O halde, yukarıdaki yönlü türev

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t, p)) - f(p)}{t},$$

limitine eşittir.

Bu tanım doğrudan manifoldlara taşınabilir: M türevlenebilir bir manifold ve $X : M \rightarrow T_*M$ bu manifold üzerinde integrali $\varphi(t, p)$ olan bir vektör alanı olmak üzere, türevlenebilir bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki Lie türevi

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t, p)) - f(p)}{t},$$

ile tanımlanır. $\varphi(0, p) = p$ olduğundan bu limit $p \in M$ noktasındaki $X(p)$ derivasyonunun f fonksiyonundaki değerine eşittir:

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = X(f)(p) .$$

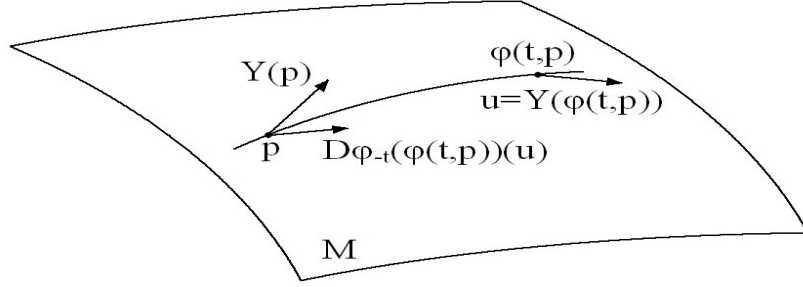
Benzer şekilde vektör alanlarının ve diferansiyel formların bir vektör alanı boyunca Lie türevini tanımlayabiliriz. Fakat vektör alanları ve türevlenebilir formlar gerçel değerli fonksiyonlar olmadıkları için bunların p ve $\varphi(t, p)$ noktalarındaki değerlerini

$$D\varphi_t(p) : T_pM \rightarrow T_{\varphi(t, p)}M$$

izomorfizması yardımıyla karşılaştıracacağız. $Y : M \rightarrow T_*M$ bir vektör alanı olmak üzere Y 'nin X boyunca Lie türevi

$$\mathcal{L}_X(Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [D\varphi_{-t}(\varphi(t, p)) \cdot Y(\varphi(t, p)) - Y(p)],$$

ile tanımlanır.



Şekil 3.1: Y vektör alanının X vektör alanı boyunca Lie türevi

Şimdi de M üzerinde bir $\omega \in \Omega^k(M)$ türevlenebilir k -formu alalım. Bu formun X vektör alanı boyunca Lie türevi, $q = \varphi(t, p)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X(\omega)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi_t^*(q)(\omega) - \omega](p),$$

şeklinde tanımlanır. Tanımladığımız bu Lie türevlerinin temel özelliklerine geçmeden önce bir iki tanım vermemiz gerekiyor. Yukarıdaki gösterimi kullanarak, X ve Y vektör alanlarını $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna sırayla uygulayalım:

Bu vektör alanlarını yerel bir koordinat sisteminde $X(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y(p) = \sum_j b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}$ olarak yazalım. Bu durumda kolayca

$$X \circ Y(f) \doteq X(Y(f)) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

elde edilir. $X \circ Y$ bileşkesi bir vektör alanı (derivasyon) değildir (bkz. Alıştırma 2). Diğer taraftan,

$$(X \circ Y - Y \circ X)(f) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

olduğundan $X \circ Y - Y \circ X$ farkı bir vektör alanıdır. Bu vektör alanını

$$[X, Y] \doteq X \circ Y - Y \circ X$$

köşeli parantezi ile göstereceğiz.

Türevlenebilir formların Lie türevleri ile ilgili sonuçlara geçmeden önce türevlenebilir formların vektör alanları boyunca daraltılmasını tanımlayalım: $\omega \in \Omega^k(M)$ bir k -form ve $X, Y_1, \dots, Y_{k-1}$ vektör alanları olmak üzere

$$\mathbf{i}_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

denklemleri yardımıyla M üzerinde $\mathbf{i}_X \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ olarak tanımlanan forma ω 'nın X vektör alanı boyunca daraltılması denir. Lie türevi beklediğimiz şekilde çarpım (Leibniz) kuralına uyar:

Önerme 3.1.5. X ve Y vektör alanları ve ω bir form olmak üzere,

$$\mathcal{L}_X(\mathbf{i}_Y \omega) = \mathbf{i}_{\mathcal{L}_X Y} \omega + \mathbf{i}_Y(\mathcal{L}_X \omega).$$

Kanıt : φ_t manifold üzerindeki X vektör alanının akışı olsun (manifold tam olmasa da t 'nin sıfır etrafındaki küçük bir aralığında tanımlı bir akış mutlaka vardır). Şimdi manifold üzerinde herhangi bir p noktası alalım ve $q = \varphi_t(p)$ olsun. Tanımları kullanarak

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(\mathbf{i}_Y \omega)(p) &= \varphi_t^*(\omega(q)(Y(q), \dots)) \\ &= \varphi_t^*(\omega(q))(D\varphi_{-t}(Y(q)), \dots) \\ &= \mathbf{i}_{D\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p)))} \varphi_t^*(\omega(q)) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\mathbf{i}_Y \omega) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^*(\mathbf{i}_Y \omega)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{i}_{D\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p)))} \varphi_t^* \omega) \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin son teriminde çarpım şeklinde bulunan her iki ifade de p noktasında tanımlı zamana bağlı ifadelerdir. Dolayısıyla, bu ifadenin türevini almak için çarpım kuralını kullanabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\mathbf{i}_Y\omega) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathbf{i}_{D\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p)))}) \varphi_0^*\omega + \mathbf{i}_{D\varphi_{-0}(Y(\varphi_0(p)))} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^*\omega) \right) \\ &= \mathbf{i}_{\mathcal{L}_X Y}\omega + \mathbf{i}_Y(\mathcal{L}_X\omega)\end{aligned}$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki sonuç oldukça teknik olmakla beraber hem başka teoremlerin kanıtında hem de bir çok geometrik sonucun elde edilmesinde önemli bir yere sahiptir.

Önerme 3.1.6. X ve Y vektör alanları ve ω bir form olmak üzere,

$$d(\mathbf{i}_X\mathbf{i}_Y\omega) + \mathbf{i}_X(d\mathbf{i}_Y\omega) - \mathbf{i}_Y(d\mathbf{i}_X\omega) - \mathbf{i}_Y\mathbf{i}_X d\omega - \mathbf{i}_{[X,Y]}\omega = 0.$$

Kanıt : Kanıt yerel bir hesaplamadan ibarettir. İfadedeki tüm terimler vektör alanlarının bileer fonksiyonları olduğu için

$$X = a \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad Y = b \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olduğunu kabul edebiliriz. Takip edilmesini kolaylaştırmak için ayrıca $b = 1$ ve $\omega = f dx_i \wedge dx_j$ alacağız. Genel durumun kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 3). Şimdi önermenin ifadesinde yer alan tüm terimleri hesaplayalım.

İlk terim

$$d(\mathbf{i}_X\mathbf{i}_Y\omega) = -d(af) = -\sum_k \frac{\partial(af)}{\partial x_k} dx_k$$

olur. İkinci terim ise

$$\mathbf{i}_X(d\mathbf{i}_Y\omega) = \mathbf{i}_X d(-f dx_i) = -\mathbf{i}_X \sum_{k \neq i} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i = \sum_{k \neq i} a \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde üçüncü terim

$$\mathbf{i}_Y(d\mathbf{i}_X\omega) = \mathbf{i}_Y d(af dx_j) = \mathbf{i}_Y \sum_{k \neq j} \frac{\partial(af)}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j = -\sum_{k \neq j} \frac{\partial(af)}{\partial x_k} dx_k$$

olur. Diğer taraftan, dördüncü terim

$$\mathbf{i}_Y\mathbf{i}_X d\omega = \mathbf{i}_Y\mathbf{i}_X \sum_{k \neq i,j} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_{k \neq i,j} a \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

olacaktır. Son olarak $[X, Y] = -\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$ olduğundan beşinci terim

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{[X, Y]} \omega &= \mathbf{i}_{-\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}} f dx_i \wedge dx_j \\ &= -f \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \end{aligned}$$

olur. Buradan önermenin doğru olduğu kolayca görülür. $\square$

Şimdi bu kavramları kullanarak Lie türevinin daha pratik şekillerini verebiliriz.

Teorem 3.1.7. *M türevlenebilir bir manifold, X, Y bu manifold üzerinde vektör alanları ve $\omega \in \Omega^k(M)$ türevlenebilir bir k -form olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$1. \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

$$2. \mathcal{L}_X \omega = \mathbf{i}_X(d\omega) + d(\mathbf{i}_X \omega) \quad (\text{Cartan'ın Sihirli Formülü}).$$

Kanıt : X, Y vektör alanlarının yerel bir koordinat sistemindeki açılımları aşağıdaki gibi olsun:

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ayrıca, X vektör alanının akışı $\varphi(t, p)$ ile verilsin. İlk önce aşağıdaki türevi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y(\varphi(t, p))) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\sum_j b_j(\varphi(t, p)) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j X(b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= X \circ Y - \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}. \end{aligned}$$

Şimdi teoremin birinci bölümündeki Lie türevini hesaplayabiliriz: $q = \varphi(t, p)$ olmak üzere, bu fonksiyonun t değişkenine göre türevini $\dot{\varphi}(t, p)$ ile gösterirken

ikinci değişkene göre türevleri ise $\varphi_2(t, p)$ veya $\varphi_{22}(t, p)$ şeklinde göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(Y)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (D\varphi(-t, q) \cdot Y(q) - Y(p)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_2(-t, q) \cdot Y(q)) \\
&= \varphi_2(0, p) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y(\varphi(t, p))) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_2(-t, \varphi(t, p))) \cdot Y(p) \\
&= Id(X \circ Y) - \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \\
&\quad - \dot{\varphi}_2(0, p) \cdot Y(p) + \varphi_{22}(0, p) \cdot \dot{\varphi}(0, p) \cdot Y(p) \\
&= X \circ Y - \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - DX(Y) \\
&= X \circ Y - Y \circ X.
\end{aligned}$$

Son üç eşitlik, bir önceki bölümde verdiğimiz kanıtın içinde kullandığımız

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \exp \int_0^t DX(s, \varphi(s, p)) ds$$

eşitliğinden elde edilmiştir. İlk önce her $p \in M$ noktası için $\varphi_2(0, p) = Id$ olduğu ve bundan elde edilen $\varphi_{22}(0, p) = 0$ sonucu kullanılmıştır. Son eşitlik için de, bu eşitliğin zamana göre türevini $(0, p)$ noktasında hesaplayarak elde edilen

$$\dot{\varphi}_2(0, p)(Y) = DX(p)(Y) = \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{d}{dx_j} = Y \circ X - \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

bağıntısı kullanılmıştır.

İkinci ifadenin kanıtını ω formunun derecesi üzerine tümevarım metodu ile yapacağız. İlk önce, $\omega = \sum c_i dx_i$ birinci dereceden bir form ve yine $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanları olsun. Lie türevi için çarpım kuralını kullanarak

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X(Y))$$

ve buradan, yukarıda kanıtladığımız, bu teoremin ilk kısmını kullanarak

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

eşitliğini elde ederiz. Doğrudan hesap yaparak

$$X(\omega(Y)) = X \left(\sum_i c_i b_i \right) = \sum_{i,j} a_j \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} b_i + c_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right)$$

ve

$$\omega([X, Y]) = \sum_{i,j} c_i \left(-b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right)$$

sonucuna varırız. Bu durumda

$$\mathcal{L}_X(\omega)(Y) = \sum_{i,j} b_i a_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_i b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

eşitliğini buluruz.

Şimdi de $d(\mathbf{i}_X \omega)(Y)$ ve $\mathbf{i}_X(d\omega)(Y)$ terimlerini hesaplayalım:

$$d(\mathbf{i}_X \omega)(Y) = \left(\sum_{i,j} \frac{\partial(c_i a_i)}{\partial x_j} dx_j \right) (Y) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) b_j ,$$

ve benzer şekilde

$$\mathbf{i}_X(d\omega)(Y) = d\omega(X, Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} (a_j b_i - a_i b_j)$$

elde ederiz. O halde,

$$(d(\mathbf{i}_X \omega) + \mathbf{i}_X(d\omega))(Y) = \sum_{i,j} b_i a_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_i b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \mathcal{L}_X \omega(Y)$$

bulunur ve dolayısıyla tümevarımın birinci adımını göstermiş olduk.

Tümevarım adımını tamamlamak için derecesi $k > 1$ olan bir ω formu alalım. Bu durumda $\mathbf{i}_Y \omega$ $(k-1)$ form olacağı için sonucun bu form için doğru olduğunu kabul edebiliriz:

$$\mathcal{L}_X(\mathbf{i}_Y \omega) = d(\mathbf{i}_X(\mathbf{i}_Y \omega)) + \mathbf{i}_X(d(\mathbf{i}_Y \omega)) .$$

Diğer taraftan bu teoremin kanıtladığımız ilk kısmı ile Önerme 3.1.5'i kullanarak

$$\mathcal{L}_X(\mathbf{i}_Y \omega) = \mathbf{i}_{[X,Y]} \omega + \mathbf{i}_Y \mathcal{L}_X \omega$$

eşitliğini elde ederiz. Bu iki eşitlikten de

$$\mathbf{i}_Y \mathcal{L}_X \omega = d(\mathbf{i}_X(\mathbf{i}_Y \omega)) + \mathbf{i}_X(d(\mathbf{i}_Y \omega)) - \mathbf{i}_{[X,Y]} \omega$$

bulunur. Kolayca görüleceği üzere, $\mathcal{L}_X \omega = d(\mathbf{i}_X \omega) + \mathbf{i}_X(d\omega)$ eşitliği, her Y vektör alanı için, $\mathcal{L}_X \omega(Y) = d(\mathbf{i}_X \omega)(Y) + \mathbf{i}_X(d\omega)(Y)$ eşitliğinin sağlanmasına denktir. O halde, teoremin kanıtını tamamlamak için aşağıdaki eşitliğin gösterilmesi gerek ve yeterlidir:

$$d(\mathbf{i}_X \mathbf{i}_Y \omega) + \mathbf{i}_X(d \mathbf{i}_Y \omega) - \mathbf{i}_Y(d \mathbf{i}_X \omega) - \mathbf{i}_Y \mathbf{i}_X d\omega - \mathbf{i}_{[X,Y]} \omega = 0.$$

Fakat bu eşitlik zaten Önerme 3.1.6'dan başka bir şey değildir. $\square$

Bu bölümü kanıtını alıştırma'lara bırakacağımız vektör alanlarının bazı temel özellikleriyle bitireceğiz.

Önerme 3.1.8. M manifoldu üzerinde integralleri, sırasıyla, φ_t ve ψ_t olan $X(p)$ ve $Y(p)$ vektör alanları alalım. Bu durumda bu iki difeomorfizmanın yer değiştirmesi için gerek ve yeter koşul $[X, Y]$ köşeli parantezinin manifold üzerinde sıfır olmasıdır. Başka bir deyişle, her $t, s \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

olması $[X, Y] = 0$ koşuluna denktir.

Vektör alanları üzerindeki ters değişmeli köşeli parantez işlemi birleşme özelliğine sahip değildir. Yine de bu işlem aşağıdaki özelliğe sahiptir.

Önerme 3.1.9 (Jacobi Eşitliği). M manifoldu üzerinde alınan her $X(p)$, $Y(p)$ ve $Z(p)$ vektör alanları için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

eşitliği sağlanır.

Jacobi eşitliğini ve $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$ (Teorem 3.1.7) Cartan formülünü kullanarak şu hesapları yapalım:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)Z &= \mathcal{L}_X[Y, Z] - \mathcal{L}_Y[X, Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\ &= -[Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] \\ &= \mathcal{L}_{[X, Y]}Z. \end{aligned}$$

Diğer taraftan, manifold üzerindeki herhangi bir fonksiyon için de

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f) = [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)(f)$$

elde edilir. Lie türevinin en genel durumda da bu özelliğe sahip olduğunun kanıtını okuyucuya bırakıyoruz:

Sonuç 3.1.10. M manifoldu üzerinde alınan herhangi iki $X(p)$ ve $Y(p)$ vektör alanı için

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$$

eşitliği sağlanır.

Bir V vektör uzayı üzerinde verilen herhangi bir $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ değişmeli (başka bir deyişle, her $v \in V$ için $[v, v] = 0$) bilineer işlemi ayrıca Jacobi eşitliğini de sağlıyorsa $(V, [\cdot, \cdot])$ ikilisi Lie cebiri olarak adlandırılır. Dolayısıyla, bir manifold üzerindeki vektör alanları doğal olarak bir Lie cebiri oluştururlar. Manifold üzerine koyduğumuz geometrik yapılar bu Lie cebirinin bazı alt cebirlerini belirler. Aşağıda bunun tipik bir örneğini vereceğiz.

Örnek 3.1.11. ω türevlenebilir n -boyutlu tam M manifoldu üzerindeki kapalı bir k -form ve X , akışı bu formu koruyan bir vektör alanı olsun: Her $t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t^*(\omega) = \omega$. Bu koşul Lie türevinin tanımından dolayı $\mathcal{L}_X(\omega) = 0$ koşuluna denktir. Ayrıca form kapalı olduğundan bu son koşul $d_X\omega = 0$ olmasına denktir. Bu koşulu sağlayan vektör alanları bir vektör uzayı oluştururlar. Ayrıca Önerme 3.1.6'dan dolayı bu vektör uzayı Lie köşeli parantezi altında kapalıdır. Başka bir deyişle ω formunu koruyan vektör alanları bir Lie alt cebiri oluştururlar.

Çift boyutlu bir M^{2n} türevlenebilir manifoldunun her $p \in M$ noktasında $\omega^n(p) \neq 0$ olacak şekilde kapalı bir $\omega \in \Omega^2(M)$ formuna manifold üzerinde bir simplektik yapı, (M, ω) ikilisine ise simplektik manifold denir. Simplektik yapıyı koruyan vektör alanları ise ω -simplektik alanlar adını alır. Simplektik manifoldlar geometri ve topolojinin en zengin çalışma alanlarından birisidir. Bu konudaki en yaygın kaynaklardan birisi [26] numaralı referanstır. Simplektik manifoldlar hem üç hem de dört boyutlu manifoldlar teorilerinde çok önemli bir paya sahiptir (bkz. [14]).

3.2 Jeodezikler

3.2.1 Jeodezik Denklemi

Bu bölümde her manifoldun üzerine Riemann metriği konulabileceğini göreceğiz ve bu metrik yardımıyla bir takım geometrik hesaplamalar yapacağız. M türevlenebilir bir manifold olmak üzere $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ bu manifold üzerinde yerel sonlu bir atlas ve $\{\rho_\lambda : M \rightarrow [0, 1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ bu açık örtü ile uyumlu bir birimin ayrışımı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her noktanın teğet uzayını yine $\mathbb{R}^n$ ile eşleyerek her bir teğet uzayına bir iç çarpım koymuş oluruz. Bu iç çarpımı $D\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ doğrusal izomorfizması ile $T_p M$ teğet uzayına çekelim. g^α ile U_α üzerindeki bu iç çarpım ailesini gösterelim. İki iç çarpımın negatif olmayan bir doğrusal birleşimi yine bir iç çarpımdır. Bundan dolayı $g = \sum_\alpha g_\alpha$ manifoldun her noktasında bir iç çarpım verir. Ayrıca bu iç çarpımın katsayıları manifold üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır. Açıkça söylemek gerekirse, $(x_1, \dots, x_n)$ manifold üzerinde yerel bir koordinat sistemi ise $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$ yerel tabanı için Riemann metriğinin bileşenleri

$$g_{ij}(p) \doteq g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $g_{ij} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyondur. $g = (g_{ij})$ iç çarpımına manifold üzerinde bir *Riemann metriği*, $(M, (g_{ij}))$ ikilisine de bir *Riemann manifoldu* denir.

Türevlenebilir bir $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eğrisi için,

$$E(\gamma) = \int_a^b \sum_{ij} g_{ij}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i(s) \dot{\gamma}_j(s) ds$$

gerçel sayısına bu eğrinin enerjisi,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i(s) \dot{\gamma}_j(s)} ds$$

gerçel sayısına ise bu eğrinin uzunluğu denir. Aşağıdaki teorem bir Riemann manifoldu üzerinde enerji fonksiyonelinin kritik noktası olan bir eğrinin, $i = 1, \dots, n$, olmak üzere

$$\ddot{\gamma}_i = -\frac{1}{2} \sum_{m,l,j} g^{im} (g_{jm}^l + g_{lm}^j - g_{jl}^m) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l = -\sum_{l,j} \Gamma_{jl}^i \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l$$

denklemlerini sağladığını göstermektedir. Bu denklemleri sağlayan eğrilere jeodezik denir. $\Gamma_{jl}^i = \frac{1}{2} \sum_m g^{im} (g_{jm}^l + g_{lm}^j - g_{jl}^m)$ fonksiyonları Riemann metriğinin ikinci tip Christoffel sembolleri olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teoremin kanıtında birçok kitapta bulunan Birinci Varyasyon Formülü (*First Variation Formula*) yaklaşımı yerine Fourier serilerini kullanacağız. Daha sonra enerji fonksiyonelinin kritik noktaları ile uzunluk fonksiyonelinin kritik noktalarını karşılaştırarak geometrik sonuçlar elde edeceğiz. Bu bölümde aşağıdaki teorem hariç Spivak'ın (birinci cildindeki bazı alıştırmaları yaparak) kitabını ([35]) takip edeceğiz.

Teorem 3.2.1. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ bu manifold üzerinde enerji fonksiyonelinin kritik noktası olan eğri ise, her $i = 1, \dots, n$ için,

$$\ddot{\gamma}_i + \sum_{j,l} \Gamma_{jl}^i \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l = 0$$

olur.

Kanıt : Eğrimiz enerji fonksiyonelinin bir kritik noktası olduğundan eğrinin sadece herhangi bir koordinat sistemi içinde kalan parçasının değişimini incelemek yeterlidir. Başka bir deyişle, $M = \mathbb{R}^n$ olarak alabiliriz. Metriği $g = (g_{ij})$ ile gösterelim. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $s \in [0, 1]$ için, $\gamma(0) = (0, \dots, 0)$ ve $\gamma(1) = (1, 0, \dots, 0)$ noktalarını birleştiren bir eğri olsun. $\gamma_1(s)$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığının bir difeomorfizması olduğunu kabul edelim (türevlenebilir her eğri için bu tür bir yerel koordinat sistemi vardır; çünkü verilen herhangi bir $s_0 \in [0, 1]$ değeri için en az bir $\dot{\gamma}_i(s_0) \neq 0$ olduğuna göre s_0 etrafındaki bir aralık üzerinde γ_i bir difeomorfizma olur).

X bu eğrinin açık bir komşuluğunda desteklenen ve eğrinin uç noktalarında sıfır değeri alan bir vektör alanı ve $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bu vektör alanının akışı

olsun. Bu durumda $\gamma^t(s) \doteq \varphi_t(\gamma(s))$ $\gamma(s) = \gamma^0(s)$ eğrisinin bir değişimi olacaktır. Şimdi bu değişimin enerjisini yazalım:

$$E(\gamma^t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma^t(s)) \dot{\gamma}_i^t \dot{\gamma}_j^t \right) ds.$$

Bu durumda

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds} (\gamma^t(s)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds} (\varphi_t(\gamma(s))) = \frac{d}{ds} X(\gamma(s)) = DX(\dot{\gamma}(s))$$

olduğundan enerji fonksiyonelinin türevi aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} 2E(\gamma^t) &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j} X(g_{ij})(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \right) ds \\ &+ \int_0^1 \left(\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(s)) \{ (DX)_i \cdot \dot{\gamma} \dot{\gamma}_j + (DX)_j \cdot \dot{\gamma} \dot{\gamma}_i \} \right) ds. \end{aligned}$$

Burada $(DX)_i \cdot \dot{\gamma}$ ile $(DX)_j \cdot \dot{\gamma}$ vektörünün i 'inci terimini gösteriyoruz. Herhangi iki $k \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq l \leq n$ sabit pozitif tam sayıları için X vektör alanını $X(x) = X(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)$ olarak seçelim, öyle ki $a_l(x) = \sin k\pi x_1$ ve her $m \neq l$ için $a_m = 0$ olsun. Bu durumda birinci integralin içindeki terim için

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} X(g_{ij})(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j &= \sum_{i,j,m} a_m(\gamma(s)) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \\ &= \sum_{i,j} a_l(\gamma(s)) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \\ &= \sum_{i,j} \sin(k\pi\gamma_1(s)) g_{ij}^l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j, \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, ikinci integraldeki küme parantezinin içindeki ifade ise

$$(DX)_i \cdot \dot{\gamma} \dot{\gamma}_j + (DX)_j \cdot \dot{\gamma} \dot{\gamma}_i = 2 \sum_i g_{il}(\gamma(s)) (k\pi \cos(k\pi\gamma_1)) \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_i$$

olur.

Enerji fonksiyoneli $t = 0$ noktasında kritik değere ulaştığı için

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}|_{t=0} 2E(t) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j} \sin(k\pi\gamma_1(s)) g_{ij}^l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \right) ds \\ &+ 2 \int_0^1 \left(\sum_i g_{il}(\gamma(s)) (k\pi \cos(k\pi\gamma_1)) \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_i \right) ds \end{aligned}$$

elde ederiz. Terimlerden birini diğer tarafa atıp ikinci integrale kısmi integral tekniğini uygularsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(k\pi\gamma_1(s)) \left(\sum_{i,j} g_{ij}^l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \right) ds &= -2 \int_0^1 \left(\sum_i g_{il}(\gamma(s)) (k\pi \cos(k\pi\gamma_1) \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_i) \right) ds \\ &= 2 \int_0^1 \left(\sum_i \frac{d}{ds} [g_{il}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i] \sin(k\pi\gamma_1) \right) ds \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için doğru olduğundan Fourier teorisi bize

$$\sum_{i,j} g_{ij}^l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 2 \sum_i \frac{d}{ds} [g_{il}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i]$$

sonucunu verir (bkz. Alistırma 5). Şimdi türevi alıp terimleri düzenlersek

$$\sum_{i,j} g_{ij}^l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 2 \left(\sum_i \ddot{\gamma}_i g_{il} + \sum_{i,m} g_{il}^m \dot{\gamma}_m \dot{\gamma}_i \right)$$

ve buradan da

$$\sum_i \ddot{\gamma}_i g_{il} = - \sum_{i,j} \left(g_{il}^j - \frac{1}{2} g_{ij}^l \right) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j$$

elde ederiz. Riemann metriğinin tersini (g^{ij}) ile gösterirsek

$$\ddot{\gamma}_i = - \sum_{m,l,j} g^{im} \left(g_{jm}^l - \frac{1}{2} g_{jl}^m \right) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l$$

ifadesine ulaşırız. Bu toplamdaki j ve l endekslerinin yerlerini değiştirirsek toplam değişmez. O halde,

$$\ddot{\gamma}_i = - \frac{1}{2} \sum_{m,l,j} g^{im} \left(g_{jm}^l + g_{lm}^j - g_{jl}^m \right) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l = - \sum_{l,j} \Gamma_{jl}^i \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l$$

jeodezik denklemini elde ederiz. $\square$

M manifoldu üzerinde bir $(x_1, \dots, x_n)$ koordinat sistemi seçelim. Eğer $y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olarak tanımlanırsa $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ manifoldun T_*M teğet demeti üzerinde bir koordinat sistemi oluşturur. M üzerindeki türevlenebilir her $\gamma(s)$ eğrisi teğet demeti üzerinde doğal bir eğri verir: $s \mapsto (\gamma(s), \dot{\gamma}(s))$. Bu durumda ikinci derece jeodezik denklem sistemi aşağıdaki birinci derece sisteme denktir:

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= - \sum_{l,j} \Gamma_{jl}^i y_j y_l ; \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Aslında, T_*M manifoldu üzerindeki

$$X(x, y) = (y_1, \dots, y_n, -\sum_{l,j} \Gamma_{jl}^1 y_j y_l, \dots, -\sum_{l,j} \Gamma_{jl}^n y_j y_l)$$

vektör alanının akışı $\varphi_s(x, y) = (\gamma(s, x, y), \dot{\gamma}(s, x, y))$ olacaktır. Dolayısıyla,

$$\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M, v \mapsto \gamma(1, p, v)$$

ile tanımlanan üstel fonksiyon türevlenebilir bir fonksiyondur. Vektör alanlarının teorisinden her $(x, y) \in T_*M$ noktasından başlayan bir çözüm eğrisinin var olduğunu biliyoruz fakat bu eğri tüm gerçel ekseninde tanımlı olmayabilir (bkz. Alıştırma 6). Dolayısıyla, Exp_p fonksiyonu $T_p M$ teğet uzayının tamamında tanımlı olmayabilir. Fakat, eğer manifold tıkız ise tüm teğet uzayında tanımlı olacaktır.

Şimdi jeodeziklerin geometrik özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun için ilk önce jeodeziklerin eğri uzunluğu ile parametrize edildiğini göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.2.2. *Eğer $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ bir jeodezik ise $\|\dot{\gamma}(s)\|$, $s \in [a, b]$, sabittir. Başka bir deyişle jeodezikler sabit hız eğridirler.*

Kanıt : Doğrudan türev alarak ve

$$g_{ij}^l = \frac{1}{2} (g_{ij}^l + g_{lj}^i - g_{il}^j) + \frac{1}{2} (g_{ji}^l + g_{li}^j - g_{jl}^i)$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}(s)\|^2 &= \frac{d}{ds} \left(\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(s)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \right) \\ &= \sum_{i,j,l} g_{ij}^l(\gamma(s)) \dot{\gamma}_l \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \\ &\quad + \sum_{k,j} g_{kj}(\gamma(s)) \ddot{\gamma}_k \dot{\gamma}_j + \sum_{k,i} g_{ik}(\gamma(s)) \ddot{\gamma}_k \dot{\gamma}_i \\ &= \sum_j \dot{\gamma}_j \left(\sum_k g_{kj}(\gamma(s)) \ddot{\gamma}_k + \sum_{i,l} \frac{1}{2} (g_{ij}^l + g_{lj}^i - g_{il}^j) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_l \right) \\ &\quad + \sum_i \dot{\gamma}_i \left(\sum_k g_{ik}(\gamma(s)) \ddot{\gamma}_k + \sum_{j,l} \frac{1}{2} (g_{ji}^l + g_{li}^j - g_{jl}^i) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_l \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Son adımda eğrinin jeodezik olduğunu kullandık. O halde, $\|\dot{\gamma}(s)\|$, teğet vektörünün boyu eğri boyunca sabittir. Bu kanıtı tamamlar. $\square$

Örnek 3.2.3. Bu örnekte $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ Lie grubunun üzerine homojen bir Riemann metriği koyacağız ve daha sonra bu metriğin jeodezikleri ile üstel fonksiyonunu $n = 1$ durumunda hesaplayacağız. Manifoldun birim matristeki $T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$ teğet uzayı üzerindeki standart iç çarpımı alalım:

$$(\cdot, \cdot)_{Id} : T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) \times T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr}(A^t B).$$

Herhangi bir $P \in GL(n, \mathbb{R})$ noktasındaki teğet uzayı üzerindeki iç çarpımı da

$$P \cdot : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), Q \mapsto PQ$$

difeomorfizmasının

$$P \cdot : T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_PGL(n, \mathbb{R}), A \mapsto PA$$

türevinin verdiği doğrusal izomorfizma ile tanımlayalım. Dolayısıyla, P noktasındaki iç çarpımı $(\cdot, \cdot)_P$ ile gösterirsek, her u ve $v \in T_{Id}GL(n, \mathbb{R})$ vektörleri için

$$(u, v)_{Id} = (Pu, Pv)_P$$

olur. Başka bir deyişle, $GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubu üzerine homojen bir Riemann metriği koymuş olduk.

Bu metriğe karşılık gelen üstel fonksiyonu $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ Lie grubu için şu şekildedir: $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ üzerindeki $X(x) = x \frac{\partial}{\partial x}$ vektör alanının birim hızlı olduğu açıktır. Dolayısıyla bu vektör alanının integrali, $\gamma(t) = e^t$, bir jeodezik olacaktır. Başka bir deyişle, bu Lie grubunun birim elemandaki üstel fonksiyonu

$$\text{Exp}_1 : T_1GL(1, \mathbb{R}) \rightarrow GL(1, \mathbb{R}), \text{Exp}_1(t) = e^t,$$

ile verilir.

Benzer şekilde

$$\phi : T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

funksiyonu yukarıda tanımladığımız Riemann metriğinin vermiş olduğu üstel fonksiyondur. Bu genel durumun kanıtını okuyucuya bırakıyoruz.

Örnek 2.1.20'de ortogonal grubun birim matristeki teğet uzayının

$$T_{Id}O(n) = \{A \in M(n, n) \mid A^T + A = 0\}$$

ters simetrik matrisler vektör uzayı olduğunu görmüştük. $O(n)$ manifoldunu $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldundan aldığı Riemann metriği ile düşünelim ve

$$\text{Exp}_{Id} : T_{Id}GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

üstel fonksiyonunu ortogonal grubun teğet uzayında hesaplayalım. Bunun için ilk önce, çarpım halindeki A ve $-A$ matrisleri yer değiştirebildiğinden $Q = e^A$ olmak üzere, $Id = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A e^{-A} = Q e^{-A}$ ve dolayısıyla $e^{-A} = Q^{-1}$ olduğunu gözlemleyelim. Dolayısıyla, herhangi bir $A \in T_{Id}O(n)$ vektörü için $A^T = -A$ olduğundan

$$Q^T = (e^A)^T = e^{A^T} = e^{-A} = (e^A)^{-1} = Q^{-1}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, Q matrisi ortogonaldır. Diğer taraftan, e^{tA} eğrisi $GL(n, \mathbb{R})$ içinde bir jeodezik olduğu için yerel olarak (üzerindeki) herhangi iki nokta arasındaki en kısa eğridir. O halde, bu eğri $O(n)$ alt manifoldu içinde de yerel olarak en kısa eğridir ve dolayısıyla bir jeodeziktir. Başka bir deyişle, ortogonal grubun üstel fonksiyonu yine

$$Exp_{Id}(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

ile verilir.

Özel doğrusal grup $SL(n)$ manifoldu için de benzer bir hesap yapılabilir (bkz. Alıştırma 12). Son olarak bir noktayı belirtmeliyiz. Matris grupları üzerine koyduğumuz metrik homojendir. Başka bir deyişle, herhangi bir noktayı birim matrise o matrisin tersi ile taşıyarak o noktayı birim matris olarak görebiliriz. Dolayısıyla, her jeodezik birim matristen geçen bir jeodeziğin bir matris ile ötelemesidir.

Şimdi de genel bir (M, g) Riemann manifoldunun üstel fonksiyonunun türevini hesaplayalım. Jeodezik denklemi s -değişkenine göre homojendir; başka bir deyişle, eğer $\gamma(s)$ bir jeodezik ise $\gamma(as)$, $a \neq 0$, eğrisi de bir jeodeziktir. Aslında, her $a \neq 0$ için, $\gamma(as, p, v)$ ve $\gamma(s, p, av)$ jeodezikleri aynı başlangıç değerlerine sahip olduklarından $\gamma(as, p, v) = \gamma(s, p, av)$ olur. Bunu kullanarak

$$D(Exp_p)_0 = Id_{T_p M}$$

olduğunu görürüz (bkz. Alıştırma 13). Buradan, $Exp_p : T_p M \rightarrow M$ fonksiyonunun sıfır vektörünün bir açık komşuluğundan görüntüsüne difeomorfizma olduğu sonucuna varırız.

Benzer şekilde,

$$F : T_* M \rightarrow M \times M, (p, v) \mapsto (p, Exp_p(v))$$

fonksiyonunun $(p, 0)$ noktasındaki türevi de birim dönüşümdür. Diğer taraftan, $F(p, 0) = (p, p)$ olduğundan F fonksiyonunun $(p, 0)$ noktası etrafında bir difeomorfizma olduğunu görürüz. Başka bir deyişle, $p \in M$ noktasının yeterince küçük her U komşuluğu için, bu komşuluktaki herhangi iki noktayı birbirine bağlayan bir jeodezik vardır. Bu jeodezik bir başlangıç değer probleminin çözümü olduğundan aynı zamanda tektir. Son olarak jeodeziklerin hızı sabit olduğundan jeodeziğin uzunluğu ilk hızı ile tanımlandığı aralığın boyunun çarpımı kadar olacaktır. Dolayısıyla, aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk.

Sonuç 3.2.4. *Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir $p \in M$ noktası alalım. Bu durumda öyle bir $p \in U$ açık komşuluğu ve $r > 0$ gerçel sayısı vardır ki, U içinde aldığımız herhangi iki noktayı birbirine bağlayan tek bir jeodezik vardır ve bu jeodeziğin uzunluğu r gerçel sayısından küçüktür.*

Daha fazla ilerleyebilmek için Gauss'un aşağıdaki sonucuna ihtiyacımız var.

Yardımcı Teorem 3.2.5 (Gauss'un Yardımcı Teoremi). *Yukarıdaki sonucun koşullarını sağlayan $p \in U \subseteq M$ ve $r > 0$ alalım. Bu durumda $p \in U$ noktasından geçen jeodezikler her $C < r$ için*

$$S_C = \{Exp_p(v) \mid \|v\| = C < r\}$$

hiper yüzeylerine diktir.

Kanıt : $v : \mathbb{R} \rightarrow T_p M$, $\|v(t)\| = C$, her $t \in \mathbb{R}$ için, türevlenebilir bir eğri olmak üzere,

$$f(s, t) = Exp_p(sv(t)) , \quad s \in (-1, 1),$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde, kanıtlamamız gereken sonuç tam olarak

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right) = 0$$

iç çarpımının sıfır olduğudur. Yardımcı Teorem 3.2.2'in kanıtına benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) &= \sum_{i,k} g_{ik} \frac{\partial^2 f^k}{\partial s \partial t} \frac{\partial f^i}{\partial s} \\ &+ \sum_{i,j,l} \frac{1}{2} (g_{ji}^l + g_{li}^j - g_{jl}^i) \frac{\partial f^j}{\partial s} \frac{\partial f^l}{\partial t} \frac{\partial f^i}{\partial s} \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

elde ederiz. Diğer taraftan, $\partial f / \partial s$ vektörü $s \mapsto f(s, t)$ jeodeziğinin s anındaki teğet vektörü olduğundan bu vektörün uzunluğu tüm jeodezik boyunca sabittir. Dolayısıyla, yukarıdaki her iki türev de sıfırdır. Bu durumda,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right)$$

iç çarpımı s değişkeninden bağımsızdır. Son olarak $s = 0$ başlangıç anında, $f(0, t) = p$ ve dolayısıyla $\partial f / \partial t(0, t) = 0$ olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 3.2.6. *Gauss Yardımcı Teoremi şu şekilde genelleştirilebilir (bkz. [35], s.489, Alıştırma 28): $c(s) \in (M, g)$ Riemann manifoldu içinde $dc/ds \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir eğri olsun.*

$$N = \{Exp_{c(s)}(v) \mid \|v\| = \text{sabit}, v \in T_{c(s)}M, g_{c(s)}(v, dc/ds) = 0\}$$

ile tanımlanan M 'nin alt manifoldu olsun. Bu durumda, eğer

$$0 \neq v \in T_{c(s)}M, g_{c(s)}(v, dc/ds) = 0$$

koşulunu sağlayan bir vektör ise $\gamma(t) = Exp_{c(s)}(tv)$ jeodeziği N alt manifoldunu dik keser. Bu sonucun kanıtı alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 14).

Bu önemli yardımcı teoremin iki geometrik sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.2.7. $u : [a, b] \rightarrow (0, r)$ ve $v : [a, b] \rightarrow T_pM$, $\|v(s)\| = 1$, parçalı türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$c : [a, b] \rightarrow M, c(s) = Exp_p(u(s)v(s))$$

parçalı türevlenebilir eğrisini tanımlayalım.

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|\dot{c}(s)\| ds$$

bu eğrinin uzunluğu olmak üzere $L_a^b(c) \geq |u(b) - u(a)|$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik sadece ve sadece u fonksiyonun artan (veya azalan) ve v fonksiyonun sabit olması durumunda elde edilir. Bu durumda, $c(s)$ p -noktasından geçen merkezcil bir jeodeziğin bir parçasıdır.

Kanıt : Önceki teoremin gösterimini kullanarak yine

$$f(s, t) = Exp_p(sv(t)), s \in (-1, 1),$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde, $c(s) = f(u(s), s)$ ve dolayısıyla

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} u'(s) + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot 1$$

elde ederiz. Gauss Yardımcı Teoremi'nden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0 \text{ ve } \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\left\| \frac{dc}{ds} \right\|^2 = |u'(s)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |u'(s)|^2$$

elde edilir. Ayrıca eşitlik sadece $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ve dolayısıyla $v'(s) = 0$ olması durumunda sağlanır. O halde,

$$\int_a^b \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds \geq \int_a^b |u'(s)| ds \geq |u(b) - u(a)| ,$$

buluruz. Ayrıca, eşitlik sadece $v(s)$ sabit ve $u(s)$ artan veya azalan olması durumunda sağlanır. $\square$

Bu sonuçtan kolay bir şekilde aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.2.8. $p \in U_p \subseteq M$, $v \in T_p M$, $\|v\| \leq r$, ve $\gamma(s) = \text{Exp}_p(sv)$, $s \in [0, 1]$, uzunluğu r sayısından küçük olan bir jeodezik olsun (Sonuç 3.2.4'ün gösterimini kullanıyoruz). $c : [0, 1] \rightarrow M$ p noktasını $p' = \gamma(1)$ noktasına bağlayan parçalı türevli bir eğri ise

$$L_0^1(\gamma) \leq L_0^1(c)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik sadece $c(s)$ eğrisi γ jeodeziğinin bir başka parametrizasyonu olması durumunda doğrudur.

Bu sonuçlar bize jeodeziklerin yerel olarak uzaklığı en aza indiren eğriler olduğunu gösterir. Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki her jeodezik tüm gerçel eksene genişletilebilirse bu manifolda *jeodezik tam* manifold denir. Riemann metriği manifold üzerinde de bir metrik tanımlar: $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \inf \{L_a^b(c) \mid c : [a, b] \rightarrow M, c(a) = x, c(b) = y\},$$

(c parçalı türevlenebilir eğri olmak üzere). Bu metriğin ürettiği metrik topolojinin manifoldun üzerindeki topoloji olduğu Alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 15). (Bkz. [35], s. 428, Teorem 7). Yukarıdaki yerel sonucu kullanarak kolayca aşağıdaki sonuca varırız (Alıştırma 16):

Sonuç 3.2.9. $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, g)$ bir Riemann manifoldu üzerinde parçalı türevlenebilir bir eğri olsun. Eğer $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L_a^b(\gamma)$ ise γ eğrisi bir jeodeziktir.

Daha fazla ilerlemeden uzunluk ve enerji fonksiyonlarının kritik noktalarını karşılaştıran bir sonuç vereceğiz:

Önerme 3.2.10. 1) Her parçalı türevlenebilir $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ eğrisi için

$$L_a^b(\gamma) \leq (b - a) E_a^b(\gamma) , \quad a, b \in I ,$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik sadece ve sadece γ eğrisi eğri uzunluğu ile parametrelendirilmiş ise sağlanır.

2) $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, g)$ $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ koşulunu sağlayan bir jeodezik olsun. Herhangi bir $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ eğrisi $c(a) = \gamma(a)$, $c(b) = \gamma(b)$ koşulunu sağlıyorsa

$$E(\gamma) = \frac{L(\gamma)^2}{b-a} \leq \frac{L(c)^2}{b-a} \leq E(c)$$

olur. Dolayısıyla, $E(\gamma) = E(c)$ eşitliği sadece ve sadece c eğrisinin $L(c) = L(\gamma)$ koşulunu sağlayan bir jeodezik olması durumunda sağlanır. Ayrıca, yeterince küçük jeodezik parçaları enerji fonksiyonelinin en küçük değeri aldığı noktalar olur.

Kanıt : $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere Schwarz eşitsizliğini hatırlayalım (bkz. Alıştırma 17):

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right),$$

öyle ki, eşitlik sadece ve sadece f ve g fonksiyonlarının doğrusal bağımlı olduğu durumda sağlanır. Bu durumda, $f(s) = \|\dot{\gamma}(s)\|$ ve $g(s) = 1$ fonksiyonları için

$$\left(L_a^b(\gamma) \right)^2 \leq (b-a) \left(E_a^b(\gamma) \right),$$

elde ederiz. Eşitlik ise sadece $f(s) = \|\dot{\gamma}(s)\|$ fonksiyonun sabit olması durumunda sağlanır. O halde, ilk kısmın kanıtı tamamlanmış oldu.

İkinci kısmın ilk eşitsizliği γ ve c eğrilerinin seçiminden dolayıdır. Buradaki ikinci eşitsizlik ise bu önermenin ilk kısmının sonucudur. Ayrıca yine ikinci eşitsizlik sadece c eğrisi eğri uzunluğu ile parametrize edilmişse eşitliklidir. Dolayısıyla, $E(\gamma) \leq E(c)$ eşitsizliği her zaman doğrudur ve eşitlik sadece c eğrisi $L(c) = d(c(a), c(b))$ koşulunu sağlayan bir jeodezik ise sağlanır.

Son olarak, jeodezikler eğri uzunluğu ile parametrelendirilmiş ve yerel olarak uzunluk fonksiyonun en küçük değerini aldığı eğriler oldukları için enerji fonksiyonelinin de yerel olarak en küçük değerini aldığı eğrilerdir. $\square$

Yukarıdaki sonuçlar iki noktayı birleştiren en kısa eğrinin var olması durumunda bunun bir jeodezik olduğunu gösteriyor. Aşağıdaki teorem ise jeodeziklerin tam manifoldlarda var olduğunu göstermektedir. Bu teoremin kanıtını burada vermeyeceğiz (bkz. [35], s. 462, Teorem 18).

Teorem 3.2.11 (Hopf-Rinow-De Rham). (M, g) Riemann manifoldunun jeodezik tam olması için gerek ve yeter koşul manifoldun üzerindeki Riemann metriği tarafından üretilen (bkz. Sayfa 149) metriğin tam olmasıdır.

Ayrıca jeodezik tam bir manifold üzerinde, verilen herhangi iki noktayı birbirine bağlayan en kısa uzunluğa sahip bir jeodezik vardır.

Diğer taraftan herhangi bir $U \subseteq M$ açık kümesi içindeki rastgele seçilen $q_1, q_2 \in U$ noktalarını birbirine bağlayan en kısa jeodezik U açık kümesinin içinde kalmayabilir. Eğer bir alt küme, herhangi iki noktasını birbirine bağlayan en kısa uzunluğa sahip jeodeziği de içeriyorsa bu kümeye jeodezik konveks denir. Gauss Yardımcı Teoremi bize şu sonucu verir:

Teorem 3.2.12. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ bir nokta olsun. Bu durumda öyle bir $\rho > 0$ sayısı vardır ki, $T_p M$ teğet uzayındaki ρ yarıçaplı $B(0, \rho)$ yuvarının $\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M$ üstel fonksiyonu altındaki görüntüsü jeodezik konvektir. Başka bir deyişle, $U = \text{Exp}_p(B(0, \rho))$ açık kümesinde herhangi iki noktayı birbirine bağlayan ve tamamen U içinde kalan tek bir jeodezik vardır. Ayrıca bu jeodezik (M, g) manifoldu içindeki bu iki noktayı birbirine bağlayan en kısa eğridir.

Teoremin kanıtı birçok adımdan oluşmaktadır. Aslında kanıt Spivak I. cildindeki bir problemin çözümünü içermektedir (bkz.[35], s. 490, Alıştırma 32). Spivak'ın kitabı bu çözümü içermediği için burada vereceğiz.

Kanıt : Adım 1) $p \in M$ noktasının bir U komşuluğunda üstel fonksiyonun tersinin vermiş olduğu koordinat sistemini alalım. Başka bir deyişle, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ kümesi $T_p M$ için bir sıralı taban ise (p noktasının yeterince yakınındaki) her $q \in M$ noktası için

$$\text{Exp}_p^{-1}(q) = \sum x_i(q)v_i$$

eşitliği ile tanımlanan $x_i(q)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemini düşünelim.

İddia: Bu koordinat sisteminde tüm Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri p noktasında sıfır değerini alır.

İddianın kanıtı : Herhangi bir $u = (u_1, \dots, u_n) \in T_p M$ vektörü için $\gamma(s) = \text{Exp}_p(su)$ jeodeziğini ele alalım. $x_i(\gamma(s)) = su_i$ olacağından

$$\frac{dx_i(\gamma(s))}{ds}\bigg|_{s=0} = u_i \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 x_i(\gamma(s))}{ds^2}\bigg|_{s=0} = 0$$

elde edilir. Bu durumda γ için jeodezik denklemini yazarsak, her $u = (u_1, \dots, u_n) \in T_p M$ için

$$0 = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(p) u_i u_j$$

bulunur ve böylece iddianın kanıtı tamamlanır.

Adım 2) Yukarıdaki koordinat sistemini kullanırsak, $r : U \rightarrow \mathbb{R}$, $r(q) = d(p, q)$ fonksiyonu olmak üzere $r(\gamma(s))^2 = \sum_k \gamma_k^2(s)$ olduğu açıktır. Şimdi

$\gamma(s)$ eğrisinin bir jeodezik olduğunu kabul edelim ve bu eşitliğin ikinci türevini hesaplayalım:

$$\frac{d(r(\gamma(s))^2)}{ds} = \frac{d(\sum_k \gamma_k^2)}{ds} = \sum_k 2\gamma_k \frac{d\gamma_k}{ds}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r(\gamma(s))^2)}{ds^2} &= 2 \sum_k \left(\frac{d^2\gamma_k}{ds^2} \gamma_k + \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 \right) \\ &= 2 \left(\sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \gamma^k \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right) \end{aligned}$$

buluruz.

Adım 3)

$$0 \leq \left(\sum_k \frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 = \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds}$$

eşitsizliğinin orta terimine Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$0 \leq \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \leq \left(\sum_k 1^2 \right) \left(\sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 \right) \leq n \sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2$$

ve dolayısıyla

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \leq \sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2$$

elde ederiz. Gerekirse U kümesini küçülterek (bu $\|\dot{\gamma}(0)\|$ vektörünü yeterince küçük seçmek anlamına gelecektir) öyle bir pozitif K gerçel sayısı bulabiliriz ki, verilen her $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Exp}_p(U)$ jeodeziği ve her k, s için $|\gamma_k(s)| \leq K$ olur. Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri p noktasında sıfır olduğundan gerekirse U kümesini daha da küçülterek

$$K \max_{i,j,k} \{\Gamma_{ij}^k(q) \mid q \in U\} < \frac{1}{n^2}$$

olduğunu kabul edebiliriz. O halde, $\text{Exp}_p(U)$ içinde kalan her γ jeodeziği

için

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \gamma_k \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right| &\leq n K \max_{i,j,k} \{ \Gamma_{ij}^k(q) \mid q \in U \} \left| \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right| \\
 &< \frac{1}{n^2} n \left| \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right| \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi yukarıdaki sonuçları kullanarak

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2(r(\gamma(s))^2)}{ds^2} &= 2 \left(\sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \gamma_k \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right) \\
 &\geq 2 \left(\sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 - \left| \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \gamma_k \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right| \right) \\
 &> 2 \left(\sum_k \left(\frac{d\gamma_k}{ds} \right)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i,j} \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $s = 0$ noktasının etrafında $d^2(r(\gamma(s))^2)/ds^2 > 0$ olur. Başka bir deyişle, $d(r(\gamma(s))^2)/ds$ bu aralıkta kesin artan bir fonksiyondur.

Adım 4) İddia: $\epsilon > 0$ olmak üzere $B_\epsilon = \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq \epsilon\}$ ve $S_\epsilon = \{v \in T_p M \mid \|v\| = \epsilon\}$ olsun. Bu durumda $\epsilon > 0$ yeterince küçükse ve $\gamma(s), \gamma(0) \in \text{Exp}_p(S_\epsilon)$ ve $d(r(\gamma))^2/ds|_{s=0} = 0$ koşullarını sağlayan bir jeodezik ise sadece γ 'ya bağlı bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, her $0 \neq s \in (-\delta, \delta)$ için $\gamma(s) \notin \text{Exp}_p(B_\epsilon)$ olur.

İddianın kanıtı : Adım 3'den dolayı $d(r(\gamma(s))^2)/ds$ bu aralıkta kesin artan bir fonksiyon olduğu için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $(-\delta, 0)$ aralığında $d(r(\gamma))^2/ds|_{s=0} < 0$ ve $(0, \delta)$ aralığında $d(r(\gamma))^2/ds|_{s=0} > 0$ olur. Aslında aynı sonuç $d(r(\gamma))/ds$ için de doğrudur. Böylece iddianın kanıtı tamamlanır.

Adım 5) İddia: $q, q', r(q), r(q') < \epsilon_0$ koşulunu sağlayan iki nokta ve γ bu iki noktayı birbirine bağlayan (uzunluğu $2\epsilon_0$ 'dan küçük olan) bir jeodezik olsun. Eğer ϵ_0 yeterince küçükse $r(\gamma)$ fonksiyonu en büyük değerini q ya da q' noktasında alır.

İddianın kanıtı : ϵ yukarıdaki gibi olmak üzere $B(q, 3\epsilon_0) \subseteq \text{Exp}_p(B_\epsilon)$ olacak şekilde bir $\epsilon_0 > 0$ seçelim. Bu durumda γ jeodeziği $\text{Exp}_p(B_\epsilon)$ küresinin içinde kalır. Şimdilik, $r(\gamma)$ fonksiyonun en büyük değerini uç değerlerde almadığını kabul edelim. Eğrinin tanımlandığı aralığı gerekirse öteleyerek en büyük değer $s = 0$ noktasında ulaşıldığını kabul edelim. O halde,

$$0 = \frac{d(r(\gamma(s)))}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d(r(\gamma(s)))^2}{ds^2} \Big|_{s=0}$$

olur. Diyelim ki, $l = r(\gamma(0))$ olsun. Bu durumda, $\gamma(0) \in \text{Exp}_p(S_l)$ olur. Şimdi $l < \epsilon$ olduğundan Adım 4'den dolayı, $\gamma(s) \notin B_l$, $0 \neq s \in (-\delta, \delta)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Başka bir deyişle, $s \neq 0$ için $r(\gamma(s)) > l$ çelişkisini elde etmiş olduk. O halde, $r(\gamma)$ fonksiyonu en büyük değerini iki uç noktasından birinde almalıdır.

Son olarak $\rho = \epsilon_0$ alırsak $B(p, \rho) = \text{Exp}_p(B_\rho)$ yuvarı jeodezik konveks olur. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 3.2.13. 1) $p \in (M, g)$ sabit bir nokta olsun. Eğer p noktasından geçen her jeodezik tüm gerçel eksene genişletilebiliyorsa M manifoldu (jeodezik) tamdır (bkz.[35], s. 498, Alıştırma 43). Bunu görmek için ilk önce manifoldun her noktasının (uzunluğu en küçük olan) bir jeodezik ile p noktasına bağlanabildiğini gösterebiliriz (bkz. Alıştırma 18). Dolayısıyla, $\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M$ üstel fonksiyonu örtendir ve M içindeki her sınırlı bölge $T_p M$ içindeki sınırlı bir bölgenin görüntüsü içindedir. O halde, M içindeki her sınırlı bölge $T_p M$ içindeki tıkHz bir bölgenin görüntüsü içindedir. Buradan M içindeki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu görürüz. Böylece kanıt tamamlanır.

2) (M, g) tam ama tıkHz olmayan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda öyle bir $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ jeodeziği vardır ki, bu jeodezik, üzerinde verilen her nokta çiftini birbirine bağlayan en kısa eğridir. Bunu görmek için ilk önce (M, g) manifoldunun sınırsız olduğunu göstermeliyiz. Bunu kanıtladıktan sonra bir $p \in M$ noktası sabitleyelim ve her pozitif n tam sayısı için $d(p, q_n) \geq n$ olacak şekilde bir $q_n \in M$ noktası ve bu noktadan geçen ve en kısa uzunluğa sahip bir $\gamma_n(sv_n) : \mathbb{R} \rightarrow M$ jeodeziği seçelim, öyle ki, $v_n \in S_\epsilon \subseteq T_p M$, yeterince küçük bir kürenin içinde kalsın. Şimdi $v_0 \in S_\epsilon$ vektörü (v_n) dizisinin bu tıkHz küre içindeki bir alt dizisinin limiti olsun. Aradığımız jeodeziğin $\gamma(s) = \text{Exp}_p(sv_0)$ eğrisi olduğunun gösterilmesini Alıştırma 19'da okuyucuya bırakıyoruz. (Ayrıca bkz.[35], s. 498, Alıştırma 44.)

3.2.2 Hacim Elemanı ve Yıldız Operatörü

Riemann metriği eğrilerin uzunluklarını hesaplamanın dışında da çok kullanışlıdır. Örneğin, $g_p = (,) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ teğet uzayı üzerinde simetrik ve pozitif bilinear form olduğundan Riemann metriği teğet demetinden eşteğit demetine doğal bir izomorfizma verir:

$$\bigcup_{p \in M} T_p M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p^* M,$$

$$v \mapsto v^* : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v^*(w) = g_p(v, w), \quad w \in T_p M.$$

Örneğin $\omega = \sum_i b_i(x) dx_i$ formuna karşılık gelen vektör alanını hesaplayalım: Bu vektör alanı $X = \sum_i a_i \frac{d}{dx_i}$, ise her $v \in T_p M$ için

$$w(p)(v) = g_p(X(p), v)$$

olacaktır. O halde, $v = \frac{d}{dx_j}$ alırsak

$$b_j(p) = \omega \left(\frac{d}{dx_j} \right) = g_p \left(X(p), \frac{d}{dx_j} \right) = \sum_i g_{ij}(p) a_i(p)$$

olur. Buradan, $a_i = \sum_j b_j g^{ij}$ ve dolayısıyla,

$$X = \sum_{i,j} b_j g^{ij} \frac{d}{dx_i}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.14. $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, yukarıdaki izomorfizma altında df 1-formuna karşılık gelen vektör alanına f fonksiyonunun gradyan vektörü denir ve $\text{grad}(f)$ veya ∇f ile gösterilir:

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{d}{dx_i}.$$

Öklit uzayında $g_{ij} = \delta_{ij}$ olduğundan $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d}{dx_i}$ olur.

Metrik ile elde edilen

$$T^*M \longrightarrow T_*M, \quad dx_j \mapsto X^j \doteq \sum_i g^{ij} \frac{d}{dx_i}$$

vektör uzayı izomorfizması T^*M üzerinde de bir metrik verecektir:

$$(dx_j, dx_k)_{T^*M} \doteq (X^j, X^k)_{T_*M} = \left(\sum_i g^{ij} \frac{d}{dx_i}, \sum_l g^{lk} \frac{d}{dx_l} \right)_{T_*M}$$

ve buradan

$$(dx_j, dx_k)_{T^*M} = \sum_{i,l} g^{ij} g^{lk} g_{il} = \sum_i g^{ij} \delta_{ik} = g^{kj}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, eşteğit vektör demeti üzerindeki metrik teğit demeti üzerindeki Riemann metriğinin tersinden başka bir şey değildir.

Bir vektör uzayı üzerindeki iç çarpım bu uzayın tensör çarpımlarına doğal olarak genişletilebilir. $(V, \cdot)$ iç çarpım uzayı ise $V \otimes V$ üzerindeki iç çarpım şu şekilde tanımlanır:

$$(v_1 \otimes u_1) \cdot (v_2 \otimes u_2) = \frac{1}{2}(v_1 \cdot v_2)(u_1 \cdot u_2).$$

Bu tanımlı tüm $V^{\otimes k}$ tensör çarpımlarına ve dolayısıyla değişmeli k -formlara genişletebiliriz. Bir örnek vermek gerekirse, $\omega = f dx_i \wedge dx_j$ ve $\nu = h dx_k \wedge dx_l$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nu &= (f(dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i)) \cdot (h(dx_k \otimes dx_l - dx_l \otimes dx_k)) \\ &= fh(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \omega \cdot \omega &= (f(dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i)) \cdot (f(dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i)) \\ &= f^2(g^{ii}g^{jj} - (g^{ij})^2) \end{aligned}$$

elde edilir ($g^{ii}g^{jj} - (g^{ij})^2 > 0$ olduğu açıktır, çünkü eşteğit uzayındaki iç çarpımın $\{dx_i, dx_j\}$ kümesinin gerdiği alt uzaya kısıtlaması da bir iç çarpım verir). Genel durumu alıştırımlara bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 20).

Uyarı 3.2.15. *Bu tanım $V \times V$ çarpım uzayında bir iç çarpım vermez.*

Şimdi dış formlar üzerinde tanımladığımız iç çarpımı kullanarak yıldız operatörünü tanımlayacağız. $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n -boyutlu yönlendirilmiş bir iç çarpım uzayında alınan herhangi $v_1, \dots, v_n$ (sıralı) vektörlerinin belirlediği paralel yüzünün işaretli hacmi şu şekilde tanımlanır: Bu vektör uzayının sıralı ortonormal bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanını alalım ve $v_i = \sum_j a_{ij}e_j$ yazalım, $i = 1, \dots, n$. Daha önce bu vektörlerin belirlediği cismin *işaretli hacmini* $\det(a_{ij})$ olarak tanımlamıştık. (a_{ij}) matrisi $\{v_1, \dots, v_n\}$ sıralı tabanından $\{e_1, \dots, e_n\}$ sıralı tabanına geçiş matrisidir. Eğer $(b_{ij}) = \langle v_i, v_j \rangle$ bu iç çarpımın $v_1, \dots, v_n$ sıralı tabanındaki matris gösterimi ise $\det(b_{ij}) = \det(a_{ij})^2$ olduğu kolayca görülür (bkz. Alıştırma 21).

Buna göre, eğer $x_1, \dots, x_n$ koordinat sisteminde Riemann metriği $g = (g_{ij})$ matrisi ile veriliyorsa hacim formu

$$dvol_{(M,g)} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

şeklinde tanımlanır. Aynı açık küme üzerinde bir başka yönlendirilmiş koordinat sistemi $(y_1, \dots, y_n) = \phi(x_1, \dots, x_n)$ ise, metriği ϕ yardımıyla $y_1, \dots, y_n$ koordinat sisteminde yazarsak

$$h_{ij} = \frac{1}{|\det(D\phi)|} g_{ij}$$

elde ederiz. Diğer taraftan,

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det(D\phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

olduğundan

$$\sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sqrt{\det(h_{ij})} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

olur. Dolayısıyla, hacim formu iyi tanımlıdır.

Örnek 3.2.16. $\mathbb{R}^3$ içinde türevlenebilir bir fonksiyonun grafiği olarak $z = f(x, y)$ ile verilen yüzeyi, içinde bulunduğu Öklit uzayının Riemann metriği ile düşünelim. Yüzeyin üstünde $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ koordinat sistemini alalım. Bu durumda, $\{(1, 0, f_x(x, y)), (0, 1, f_y(x, y))\}$, kümesi yüzeyin herhangi bir noktasındaki teğet uzayının bir tabanı olacaktır. Metriği bu tabanda yazarsak

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

matrisini elde ederiz. O halde, hacim elemanı

$$dvol = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx \wedge dy$$

formu olur (genel durum için Alıştırma 22'e bakınız).

Benzer şekilde iki boyutlu ve $r > 0$ yarıçaplı kürenin hacim formunu

$$(\theta, \phi) \mapsto (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi), \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$

küresel koordinatlarında yazarsak

$$dvol_{S_r^2} = r^2 \sin \phi d\theta \wedge d\phi$$

elde ederiz.

Şimdi Riemann metriğinin formlar üzerinde verdiği doğal iç çarpımı kullanarak yıldız operatörünü tanımlayacağız. (M^n, g) Riemann manifoldunun herhangi bir $\omega \in \Omega^k(M)$ formunu alalım. Bu formun yıldızı olarak adlandıracağımız $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ formu

$$\nu \wedge *\omega = (\omega \cdot \nu) dvol_{(M,g)}, \quad \nu \in \Omega^k(M),$$

eşitliği ile tanımlanır. Yıldız işlemi bir vektör uzayı homomorfizması verir:

$$* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M).$$

Bu operatör Riemann metriğine bağlı olsa da her metrik için

$$*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)} \omega, \quad \omega \in \Omega^k(M)$$

eşitliği sağlanır. Bunu görmek için verilen $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ teğet uzayının ortonormal bir tabanını alalım ve bu vektörleri teğet uzayının koordinat eksenleri olarak görelim, $x_1 \cdots, x_n$. $Exp_p : T_p M \rightarrow M$ yerel difeomorfizmasının p noktası etrafında vermiş olduğu koordinat sisteminde Riemann metriğini yazarsak $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ elde ederiz. Buradan, Riemann metriğinin hem eşteğet demetinde hem de türevlenebilir formlarda verdiği metriğin p noktasındaki matris gösterimlerinin birim matrisler olduğunu görürüz. Bu durumda,

$$*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

ve

$$*(dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) = (-1)^{k(n-k)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

elde edilir. Diğer taban elemanları için de aynı hesaplamayı yapabiliriz. Dolayısıyla, $*(\omega) = (-1)^{k(n-k)} \omega$ eşitliğini kanıtlamış olduk.

Örnek 3.2.17. $\mathbb{R}^4$ Öklit uzayında yıldız operatörünü yazalım. Bu uzay üzerinde $\{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3, \partial/\partial x_4\}$ tabanının verdiği yönlendirmeyi alalım. Yukarıdaki paragraftan dolayı

$$\begin{aligned} *(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_3 \wedge dx_4 \\ *(dx_1 \wedge dx_3) &= -dx_2 \wedge dx_4 \\ *(dx_1 \wedge dx_4) &= dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} *dx_1 &= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ *dx_2 &= -dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ *dx_4 &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de genel bir metrik için 1-formların yıldızını yerel koordinat sisteminde hesaplayalım. $\omega = \sum_i a_i dx_i$ formunun yıldızı $*\omega = \sum_i c_i d\hat{x}_i$ olsun ($d\hat{x}_i$ ile, daha önceden olduğu gibi, $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ $n-1$ -formunu gösteriyoruz). Tanımdan dolayı, her $\nu = \sum_i b_i dx_i$ 1-formu için

$$\nu \wedge *\omega = (\omega \cdot \nu) d\text{vol}_{(M,g)}$$

sağlanacaktır. Buradan

$$\left(\sum_i (-1)^{i-1} b_i c_i \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{i,j} a_i b_j g^{ij} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

elde ederiz. Bu eşitlik her ν için geçerli olduğundan

$$c_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\det g_{ij}} \left(\sum_j a_j g^{ij} \right)$$

olmalıdır. O halde, $*\omega$ formunu hesaplamış olduk. Bu eşitliği a_i için çözersek verilen bir $(n-1)$ -formun yıldızı olan 1-formu da hesaplamış oluruz:

$$a_i = \sqrt{\det g^{ij}} \left(\sum_j (-1)^{j-1} c_j g_{ij} \right) .$$

Son olarak $\omega = df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ alırsak

$$*(df) = \sqrt{\det g_{ij}} \sum_i (-1)^{i-1} \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \right) d\hat{x}_i$$

elde edilir.

Örnek 3.2.18 (E. Hopf'un Teoremi). *Türevlenebilir bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun Laplas'ı $\Delta f = *d * d(f)$ fonksiyonu olarak tanımlanır. $M = \mathbb{R}^n$ manifoldunu Öklit metriği ile düşünürsek $(g_{ij} = \delta_{ij})$ Laplas operatörünün*

$$\Delta f = *d * d(f) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

şeklinde verildiği görülür. Hopf'un teoremi, yönlendirilebilen bağlantılı tıkHz bir M manifoldu üzerinde, $\Delta f \geq 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların sabit fonksiyonlar olduğunu söyler. Bu örnekte bu teoremin bir kanıtını vereceğiz (bkz. [9], s. 85). İlk önce, Stokes Teoremi'nden her $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\int_M \Delta f \, d\text{vol}_{(M,g)} = \int_M d(*df) = \int_{\partial M=\emptyset} (*df) = 0$$

olduğunu görürüz. Diğer taraftan, bize $\Delta f \geq 0$ verilmiş olduğundan $\Delta f = 0$ elde ederiz. Şimdi de $f^2/2$ fonksiyonunun Laplas'ını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \Delta(f^2/2) &= *d * d(f^2/2) \\ &= *d(f * df) \\ &= *(df \wedge *df + f * d * df) \\ &= *(df \wedge *df) + f(*d * df) \\ &= \|\nabla f\|^2 + f \Delta f . \end{aligned}$$

Aslında, son eşitliğin ilk teriminin hesabını biraz daha detaylı yapabiliriz: Grad-

yan vektörünün norm karesi

$$\begin{aligned}
 \|\nabla f\|^2 = (\nabla f, \nabla f) &= \left(\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
 &= \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{kl} g_{il} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \\
 &= \sum_{i,j,k} g^{ij} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \\
 &= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j},
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, yukarıda elde ettiğimiz 1-formların yıldızının ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned}
 df \wedge *df &= \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_i (-1)^{i-1} \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} d\hat{x}_i \right) \\
 &= \sqrt{\det(g_{ij})} \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge \left(\sum_{i,j} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} d\hat{x}_i \right) \\
 &= \sqrt{\det(g_{ij})} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \|\nabla f\|^2 d\text{vol}_{(M,g)}
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi teoremin kanıtını bitirebiliriz:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_M \Delta(f^2/2) \\
 &= \int_M f (\Delta f) d\text{vol}_{(M,g)} + \int_M \|\nabla f\|^2 d\text{vol}_{(M,g)} \\
 &= 0 + \int_M \|\nabla f\|^2 d\text{vol}_{(M,g)},
 \end{aligned}$$

eşitliği bize $\nabla f = 0$ olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$0 = \nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{d}{dx_i}$$

denklemindeki (g^{ij}) matrisinin tersi olduğundan, her i için $\partial f / \partial x_i = 0$ sonucuna varırız. Son olarak manifold bağlantılı olduğundan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sabit olması gerektiğini görürüz.

3.3 Vektör Demetleri

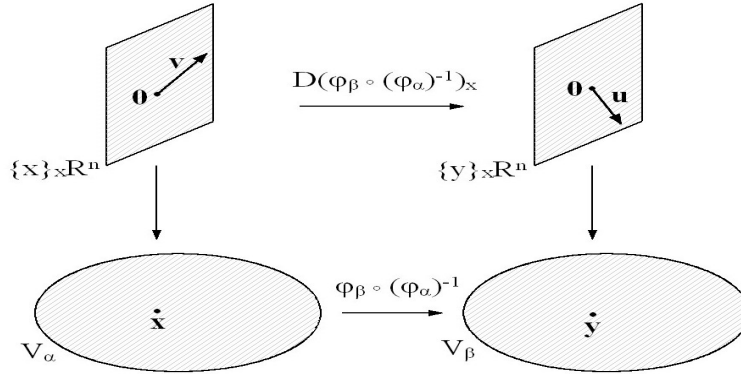
3.3.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde ele alacağımız vektör demetleri hem geometrinin hem de topolojinin temel konularındandır. Türevlenebilir bir manifoldun teğet demeti en doğal vektör demeti örneğidir. Yine teğet demetinden doğrusal cebir yöntemleri ile elde edilen eşteğet demeti de vektör demetlerinin teorisinde çok önemli bir yer tutar. Vektör demetlerinin tanımını vermeden önce (ko)teğet demetinin tanımını hatırlayalım: M atlası $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ olan türevlenebilir bir manifold olsun. Bu durumda, manifoldu

$$M = \cup_\alpha U_\alpha \simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha / x \sim (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)$$

şeklinde yazarsak teğet demetini de geçiş fonksiyonlarının türevlerini kullanarak aşağıdaki şekilde ifade etmiştik:

$$\begin{aligned} T_*M &= \cup_\alpha T_*U_\alpha \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha \times \mathbb{R}^n / (x, v) \sim ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x(v)) \end{aligned}$$



Şekil 3.2: Teğet demetinin koordinat fonksiyonlarıyla kuruluşu:

$$(x, v) \sim (y, u) = ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x(v))$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} T^*M &= \cup_\alpha T^*U_\alpha \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha V_\alpha \times \mathbb{R}^n / (x, (D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x)^*(\omega)) \sim ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), \omega) \end{aligned}$$

eşteğet uzayını manifoldun geçiş fonksiyonlarının türevlerinin duallerini kullanarak yazmıştık. Son olarak, formların geri çekme işlemini kullanarak manifold üzerindeki k -formların demetinin

$$\begin{aligned} Alt^k(M) &= \cup_\alpha Alt^k(T^*U_\alpha) \\ &\simeq \dot{\cup}_\alpha Alt^k(V_\alpha) / \sim \end{aligned}$$

şeklinde verildiğini görmüştük. Bu yapıların hepsi aşağıda tanımlayacağımız vektör demetlerine birer örnektir.

Tanım 3.3.1. $P : E^{m+k} \rightarrow M^m$ aşağıdaki özellikleri sağlayan türevlenebilir manifoldların türevlenebilir bir fonksiyonu olsun:

1. Her $p \in M$ için, $E_p = P^{-1}(p)$ k -boyutlu gerçel vektör uzayıdır;
2. M manifoldunun yerel sonlu ve sayılabilir bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü vardır öyle ki,
 - a) Her α için, bir $\phi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ difeomorfizması vardır,
 - b) Her α ve $p \in U_\alpha$ için,

$$\phi_{\alpha|E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$$

kısıtlanışı bir vektör uzayı izomorfizmasıdır.

Bu durumda $P : E^{m+k} \rightarrow M^m$ M -manifoldu üzerinde k -boyutlu bir gerçel vektör demeti olarak adlandırılır. M manifolduna vektör demetinin tabanı, E^{m+k} manifolduna vektör demetinin tüm uzayı ve E_p ters görüntüsüne vektör demetinin bir lifidir denir. Ayrıca, $P : E^{m+k} \rightarrow M^m$ fonksiyonuna vektör demetinin izdüşüm fonksiyonu ve

$$\phi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

difeomorfizmalarına da yerel çarpım fonksiyonları denir.

Herhangi bir V vektör uzayı için, $E = M \times V \rightarrow M$, $(p, v) \mapsto p$ şeklinde tanımlanan vektör demetine lifi V olan aşikar vektör demeti denir.

$P_1 : E_1 \rightarrow M$ ve $P_2 : E_2 \rightarrow M$ gibi iki vektör demeti arasında lifleri koruyan ve her lif üzerinde doğrusal bir izomorfizma olan bir $F : E_1 \rightarrow E_2$ difeomorfizmasına vektör demeti izomorfizması denir. Eğer lifleri koruyan bir $F : E_1 \rightarrow E_2$ türevlenebilir fonksiyonu her bir lif üzerinde bire bir doğrusal bir dönüşüm verirse $P_2 : F(E_1) \rightarrow M$ bir vektör demeti olur ve bu demet $P_1 : E_1 \rightarrow M$ demetine izomorftur. Bu vektör demetine $P_2 : E_2 \rightarrow M$ vektör demetinin bir alt vektör demeti denir.

Herhangi bir vektör demetinin

$$\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \psi_{\alpha\beta}(p)(v)), \quad (p, v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

yerel çarpım fonksiyonlarını kullanarak tanımlanan

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

fonksiyonlarını düşünelim. Bu fonksiyonlar her α, β, γ için, bir çeşit kohomoloji koşulu olan

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}$$

döngü koşulunu sağlar. Bu fonksiyonlara vektör demetinin bir *yapı fonksiyonları ailesi* denir. Diğer taraftan, döngü koşulunu sağlayan

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

fonksiyonlarını kullanarak bir başka vektör demeti kurabiliriz:

$$\tilde{E} = \bigcup (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / (p, v) \sim (p, \psi_{\alpha\beta}(p)(v)) .$$

Yerel çarpım fonksiyonlarını kullanarak bu vektör demetinin $P : E \rightarrow M$ vektör demetine izomorfik olduğunu görebiliriz (bkz. Alıştırma 24).

Herhangi bir $P : E \rightarrow M$ vektör demeti için $P \circ s = id_M$ koşulunu sağlayan fonksiyona *vektör demetinin kesiti* denir. Şimdi bu demetin bir $s : M \rightarrow E$ kesitini alalım. Bu kesitin yerel $\phi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ çarpım fonksiyonu altındaki yerel ifadesini $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ile gösterirsek, her α, β için, $\psi_{\alpha\beta}(s_\alpha) = s_\beta$ eşitliği sağlanır. Bir vektör demetinin kesitlerinin oluşturduğu küme doğal bir şekilde vektör uzayıdır (aslında bu küme, manifold üzerinde tanımlı türevlenebilir fonksiyonların oluşturduğu halka üzerinde bir modül oluşturur, bkz. Alıştırma 23) ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir.

$P : E \rightarrow M$ vektör demetine ait bir $\psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ yapı ailesi için $\psi_{\alpha\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq H \leq GL(k, \mathbb{R})$ olacak şekilde bir $H \leq GL(k, \mathbb{R})$ alt grubu varsa vektör demetinin *yapı grubu* H grubuna indirgenmiştir denir. Bir vektör demetinin grubu determinantı pozitif olan matrisler alt grubuna indirgenebiliyorsa bu vektör demetine *yönlendirilebilir vektör demeti* denir. Yönlendirilebilir bir manifoldun teğet demeti de yönlendirilebilirdir (bkz. Alıştırma 25).

Uyarı 3.3.2. 1) Yukarıdaki tanımda $\mathbb{R}^k$ yerine $\mathbb{C}^k$ alırsak karmaşık vektör demetlerinin tanımını elde ederiz. Karmaşık vektör demetlerinin doğal bir yönlendirmesi vardır (bkz. s. 166)

2) $P : T_*M \rightarrow M$ teğet ve $P : T^*M \rightarrow M$ eşteğet demetleri $k = m$ -boyutlu, ve $P : Alt^k(M) \rightarrow M$ ise $\binom{m}{k}$ -boyutlu gerçel vektör demetidir. Ayrıca, M karmaşık manifold olduğunda bu vektör demetleri de doğal olarak karmaşık vektör demetleri olurlar.

3) Herhangi bir manifold üzerine Riemann metriği koymak için kullandığımız metottan yararlanarak verilen bir vektör demeti üzerine iç çarpım koyabiliriz. Bu durumda vektör demetinin yapı grubunu ortogonal grup $O(k)$ 'ye indirgeyebiliriz: Vektör demetinin

$$\phi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

gibi bir yerel çarpım fonksiyonunu ele alalım. Vektör demetinin liflerdeki doğrusal izomorfizma ile her $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ lifine taşıyalım:

$$g_p(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}.$$

Her $i = 1, \dots, k$ için,

$$s_i : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad s_i(p) = (p, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$$

türevlenebilir kesitlerini tanımlayalım. Bu kesitlere Gram-Schmidt yöntemini uygulayarak her lifte ortonormal taban veren $\{r_1, \dots, r_k\}$ kesitlerini elde edelim. Şimdi yeni bir yerel çarpım fonksiyonu yazalım:

$$\phi_\alpha^0 : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad (p, v) \mapsto (p, g_p(v, r_1(p)), \dots, g_p(v, r_k(p))) .$$

Gram-Schmidt yönteminin ifadesi analitik olduğundan bu fonksiyon bir difeomorfizma ve çarpım fonksiyonudur. Bu çarpım fonksiyonlarına karşılık gelen yapı fonksiyonları $O(k)$ değerli olacaktır. Eğer manifold aynı zamanda yönlendirilebilir bir manifold ise yapı grubunu $SO(k)$ grubuna da indirgeyebiliriz.

Benzer şekilde, karmaşık bir vektör demeti üzerine de her zaman Hermityan bir yapı konabilir. Üzerinde metrik olan bir gerçel vektör demetinin yapı grubunu $GL(k, \mathbb{R})$ 'den $O(k)$ 'ye indirgeyen metot, benzer şekilde, üzerinde Hermityan metrik olan bir karmaşık vektör demetinin yapı grubunu $GL(k, \mathbb{C})$ 'den $U(k)$ 'e indirger.

Son olarak bu söylediklerimizin basit bir uygulamasını verelim: $U(1) = S^1 = SO(2)$ olduğundan her karmaşık doğru demeti yönlendirilmiş gerçel düzlem demeti olarak görülebilir. Tersine, her yönlendirilmiş bir gerçel düzlem demeti de bir karmaşık doğru demeti olarak görülebilir.

3.3.2 Vektör Demetleri Üzerinde İşlemler

Bu alt bölümde vektör demetleri üzerindeki işlemleri inceleyeceğiz. Bir manifold üzerindeki vektör demetlerini parametrize edilmiş (manifoldun noktaları ile) vektör uzayları olarak görebiliriz. O halde, vektör uzayları üzerindeki tüm işlemleri vektör demetlerine taşıyabiliriz. Bu bölümde genelde gerçel vektör demetleri ile çalışsak da aşağıdaki tanımladığımız tüm yapılar karmaşık vektör demetleri için de geçerlidir.

Rankları sırasıyla k_1 ve k_2 olan $E_1 \rightarrow M$ ve $E_2 \rightarrow M$ iki vektör demeti alalım. Bu demetlerin ortak bir açık örtü üzerinde verilen yapı fonksiyonları ($i = 1, 2$)

$$\psi_{\alpha\beta}^i : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k_i, \mathbb{R})$$

olsun.

Vektör Demetlerinin Toplamı : Bu iki vektör demetinin $E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$ toplamı, herhangi bir $p \in M$ noktasındaki lifi $E_{1p} \oplus E_{2p}$ tüm uzayı olan ve

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k_1 + k_2, \mathbb{R}), \quad p \mapsto \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\beta}^1(p) & 0 \\ 0 & \psi_{\alpha\beta}^2(p) \end{pmatrix}$$

yapı fonksiyonları ile verilen vektör demeti olarak tanımlanır.

Örnek 3.3.3. *Geometri ve topolojide çok önemli bir yer tutan normal demeti tanımlayalım: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $L \subseteq M$ bir alt manifold ise bu alt manifoldun normal demeti*

$$\nu(L) = \{(p, v) \in T_*M \mid p \in L, g_p(v, u) = 0, \text{ her } u \in T_pL \text{ için}\},$$

ile tanımlanır. Şimdi, $\nu(L)$ 'nin $T_*M|_L \rightarrow L$ vektör demetinin bir alt demeti olduğunu görelim. Yerel bir $(x_1, \dots, x_l, \dots, x_m)$ koordinat sisteminde L alt manifoldu $x_{l+1} = \dots = x_m = 0$ denklem sistemiyle verilsin. Bu durumda $(x_1, \dots, x_l, \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ fonksiyonları $T_*M|_L$ üzerinde bir koordinat sistemi verirler. Yukarıdaki uyarıda yaptığımız gibi bu vektör demetinin $s_i(p) = \partial/\partial x_i$ kesitlerine Gram-Schmidt yöntemini uygulayarak $r_1, \dots, r_m$ ortogonal kesitlerini elde edelim. Gram-Schmidt yönteminin ifadesinden dolayı $\{r_1, \dots, r_l\}$ tabanı T_*L 'nin geri kalan $\{r_{l+1}, \dots, r_m\}$ kısmı da $\nu(L)$ normal demetin tabanını verir. Dolayısıyla,

$$\nu(L)_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{m-l}, (p, v) \mapsto (p, g_p(v, r_{l+1}(p)), \dots, g_p(v, r_m(p)))$$

istenilen çarpım fonksiyonunu verir.

Aslında,

$$T_*M|_L \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^l \oplus \mathbb{R}^{m-l}, (p, v) \mapsto (p, g_p(v, r_1(p)), \dots, g_p(v, r_m(p)))$$

çarpım fonksiyonu $T_*M|_L = T_*L \oplus \nu(L)$ olduğunu gösterir. Başka bir deyişle, A_{T_*L} ve $B_{\nu(L)}$ sırasıyla $T_*L \rightarrow L$ ve $\nu(L) \rightarrow L$ vektör demetlerinin yapı matrisleriyse $T_*M|_L$ vektör demetinin yapı matrisi

$$\begin{pmatrix} A_{T_*L} & 0 \\ 0 & B_{\nu(L)} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Homomorfizmalar Demeti : Herhangi bir $p \in M$ noktasındaki lifi E_1 ve E_2 demetlerinin o noktadaki liflerinin $\text{hom}(E_{1p}, E_{2p})$ homomorfizmalar uzayı olan vektör demetini $\text{hom}(E_1, E_2) \rightarrow M$ ile göstereceğiz. Bu vektör demetinin yapı fonksiyonları

$$\psi_{\alpha\beta}^{\text{hom}(E_1, E_2)} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\text{hom}(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}), \mathbb{R})$$

$$\psi_{\alpha\beta}^{\text{hom}(E_1, E_2)}(p)(L) = \psi_{\alpha\beta}^{E_2}(p) \circ L \circ (\psi_{\alpha\beta}^{E_1}(p))^{-1}$$

ile verilir. Bunu şu şekilde görebiliriz: $u = \psi_{\alpha\beta}^{E_1}(p)(v)$, ve $w = L(v)$ ise

$$\psi_{\alpha\beta}^{\text{hom}(E_1, E_2)}(p)(L)((\psi_{\alpha\beta}^{E_1}(p))(v)) = \psi_{\alpha\beta}^{E_2}(p)(w)$$

olacaktır.

Tensör çarpımını oluşturan demetlerden ikincisini $E_2 = M \times \mathbb{R}$ aşıkâr vektör demeti alırsak $\text{hom}(E_1, E_2) \rightarrow M$ demeti $E_1 \rightarrow M$ vektör demetinin dual demeti olarak adlandırılır ve kısaca $E_1^* \rightarrow M$ olarak yazılır.

Vektör Demetlerinin Tensör Çarpımı : $E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ tensör çarpımı, herhangi bir $p \in M$ noktasındaki lifi $E_{1p} \otimes E_{2p}$ tensör çarpım uzayı olan ve

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k_1 k_2, \mathbb{R}), \quad p \mapsto \psi_{\alpha\beta}^1(p) \otimes \psi_{\alpha\beta}^2(p)$$

yapı fonksiyonları ile verilen vektör demeti olarak tanımlanır.

Karmaşık sayıları gerçel sayılar üzerinde iki boyutlu gerçel vektör uzayı olarak görebiliriz. O halde, $E_2 = M \times \mathbb{C} \rightarrow M$, $(p, z) \mapsto p$, iki boyutlu aşıkâr vektör demeti ise bu demetin yapı fonksiyonları birim matris ile verilir:

$$\psi_{\alpha\beta}^2 : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(2, \mathbb{R}), \quad p \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu özel halde, $E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ $2k_1$ -boyutlu karmaşık vektör demeti olur, $E_1 \rightarrow M$ vektör demetinin karmaşılaştırması olarak adlandırılır ve kısaca $E_1 \otimes \mathbb{C} \rightarrow M$ ile gösterilir.

1×1 -lik matrislerin tensör çarpımı da 1×1 -lik olduğundan gerçel (ya da karmaşık) bir boyutlu iki vektör demetinin tensör çarpımı yine bir boyutlu olacaktır. Bu işlem bir manifold üzerindeki doğru demetlerinin kümesini bir monoid yapar. Diğer taraftan, yapı fonksiyonları

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(1, \mathbb{F}), \quad (\mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C})$$

ile verilen herhangi bir $L \rightarrow M$ gerçel veya karmaşık doğru demetinin dualinin yapı fonksiyonları

$$\psi_{\alpha\beta}^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(1, \mathbb{F}), \quad (\mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C})$$

ters matrisler ile verileceğinden her doğru demetinin duali ile tensör çarpımı aşıkâr doğru demeti olacaktır. Dolayısıyla, doğru demetleri kümesi tensör çarpımı altında bir değişmeli grup oluştururlar (çarpma işlemi 1×1 -lik matrisler üzerinde değişmeli bir işlemdir). $O(1) = \mathbb{Z}_2$ ve $SO(1) = \{1\}$ olduğundan gerçel her $L \rightarrow M$ doğru demeti için $L \otimes L$ aşıkâr doğru demetidir. Dolayısıyla, bir manifold üzerindeki gerçel doğru demetlerinin oluşturduğu değişmeli grup bir 2-gruptur (birim eleman dışındaki her elemanın mertebesi ikidir).

Determinant Doğru Demeti: $E \rightarrow M$ rankı k -olan bir gerçel vektör demeti olsun. Bu demetin

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R}),$$

yapı fonksiyonlarının $\det : GL(k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} = GL(1, \mathbb{R})$ determinant fonksiyonu ile bileşkeleri,

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \det \circ \psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(1, \mathbb{R}),$$

rankı bir olan bir vektör demeti tanımlar. Bunu görmek için

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma}$$

döngü koşulunun determinantını almak yeterlidir. Determinant fonksiyonu bir grup homomorfizması olduğundan

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \circ \tilde{\psi}_{\beta\gamma} = \tilde{\psi}_{\alpha\gamma}$$

eşitliği elde edilir. Bu vektör demetine $E \rightarrow M$ demetinin determinanı denir ve genellikle $\det(E) \rightarrow M$ ile gösterilir. Aynı şekilde karmaşık vektör demetlerinin determinantlarını tanımlayabiliriz. Bir gerçel vektör demetinin yönlendirilebilir olması yapı grubunun $GL^+(k, \mathbb{R})$ alt grubuna indirgenmesine denk olduğundan yönlendirilebilir vektör demetlerinin determinantları aşikar doğru demetleridir (bkz. Alıştırma 28). Örnek 2.3.9'da her karmaşık matrisi determinanı pozitif olan gerçel bir matris olarak ele alabileceğimizi görmüştük. Başka bir deyişle $GL(k, \mathbb{C})$ grubu $GL^+(2k, \mathbb{R})$ 'nin bir alt grubudur. O halde, bir karmaşık vektör demetinin yapı fonksiyonlarının $GL(k, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2k, \mathbb{R})$ içermesi homomorfizması ile bileşkesini alarak bu vektör demetini gerçel rankı $2k$ olan yönlendirilmiş gerçel bir vektör demeti olarak görebiliriz.

Vektör Demetleri Üzerinde Karmaşık Yapılar: Şimdi de gerçel bir vektör demetin ne şekilde karmaşık bir demete dönüştürülebileceğini göreceğiz. Başka bir deyişle, rankı $2k$ olan yönlendirilmiş gerçel bir vektör demetinin $GL^+(2k, \mathbb{R})$ yapı grubunun

$$GL(k, \mathbb{C}) \subseteq GL^+(2k, \mathbb{R})$$

alt grubuna indirgenebilmesini sağlayan bir kriter vereceğiz. $\mathbb{R}^{2k}$ üzerinde bir karmaşık yapı ile karesi $J^2 = -Id$ olan bir $J : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ endomorfizmasını anlayacağız. Her çift boyutlu vektör uzayı üzerinde sayılamaz çoklukta karmaşık yapı olduğu açıktır (bkz. Alıştırma 29). Bir vektör demetinin her lifi üzerine, noktaya göre değişimi türevlenebilir olan, karmaşık yapılar koyabildiğimizi düşünelim. Başka bir deyişle, $E \rightarrow M$ rankı $2k$ olan bir vektör demeti olmak üzere

$$\text{hom}(E, E) \rightarrow M$$

demetinin her $p \in M$ için, $J_p^2 = -Id_E$ koşulunu sağlayan bir

$$J : M \rightarrow \text{hom}(E, E), \quad p \mapsto J_p : E \rightarrow E$$

kesitinin varlığını kabul edelim. Böyle yapılara vektör demeti üzerinde bir *karmaşık yapı* denir. Karmaşık yapıların varlığı genellikle cevabı zor olabilen (cebirsel) topolojik bir problemdir.

Şimdi bir karmaşık yapının $GL^+(2k, \mathbb{R})$ yapı grubunu $GL(k, \mathbb{C})$ grubuna indirgediğini görelim. Yerel bir $\phi_\alpha : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{2k}$ çarpım fonksiyonu altında demetin hiçbir noktada sıfır olmayan bir

$$x_1 : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{2k}$$

kesitini alalım. $y_1(p) \doteq J(p) \circ x_1(p)$ şeklinde tanımlanan kesiti düşünelim. $J_p^2 = -Id$ olduğundan her $p \in U_\alpha$ için, $\{x_1(p), y_1(p)\}$ kümesi E_p vektör uzayı içinde doğrusal bağımsızdır. Çünkü $c_1x_1(p) + d_1y_1(p) = 0$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları varsa, bu denkleme J_p uygulayarak $-d_1x_1(p) + c_1y_1(p) = 0$ denklemini elde ederiz. Bu iki denklemden kolay bir şekilde $(c_1^2 + d_1^2)x_1 = 0$ elde ederiz. $x_1(p) \neq 0$ şeklinde seçilmiş olduğundan $c_1 = d_1 = 0$ sonucuna varırız. Şimdi bir üçüncü $x_2 : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{2k}$ kesiti seçelim öyle ki, yine her noktada $\{x_1(p), y_1(p), x_2(p)\}$ kümesi E_p vektör uzayı içinde doğrusal bağımsız olsun (bu kolayca yapılabilir). Benzer şekilde, $y_2(p) \doteq J(p) \circ x_2(p)$ ile tanımlanan kesit bize yine her noktada doğrusal bağımsız $\{x_1(p), y_1(p), x_2(p), y_2(p)\}$ kümesini verecektir. Bunu görmek için bazı c_i, d_i $i = 1, 2$, gerçel sayıları için

$$c_1x_1(p) + d_1y_1(p) + c_2x_2(p) + d_2y_2(p) = 0$$

olduğunu varsayalım. Bu denkleme önce J_p uygulayarak

$$-d_1x_1(p) + c_1y_1(p) - d_2x_2(p) + c_2y_2(p) = 0$$

denklemini elde ederiz. Daha sonra ilk denklemi c_2 , ikinci denklemi de $-d_2$ ile çarpıp toplarsak

$$x_2(p) = \frac{(c_1c_2 + d_1d_2)x_1(p) + (c_2d_1 - c_1d_2)y_1(p)}{c_2^2 + d_2^2}$$

elde ederiz (bir önceki paragraftan dolayı $c_2^2 + d_2^2 \neq 0$ olduğunu biliyoruz). Fakat bu $\{x_1(p), y_1(p), x_2(p)\}$ kümesinin doğrusal bağımsız olmasıyla çelişir. Bu şekilde devam ederek, her noktada doğrusal bağımsız ve $y_i = J \circ x_i$ olan $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ kesitlerinin varlığını kabul edebiliriz.

Şimdi bu kesitleri kullanarak vektör demetimiz için yeni bir çarpım fonksiyonu yazabiliriz:

$$\phi_\alpha^0 : P^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{2k} = U_\alpha \times \mathbb{C}^k ,$$

$$(p, v) \mapsto (p, (a_1(p, v) + ib_1(p, v), \dots, a_k(p, v) + ib_k(p, v))) ,$$

öyle ki $a_i(p, v), b_i(p, v)$ gerçel sayıları

$$v = a_1(p, v)x_1(p) + b_1(p, v)y_1(p) + \dots + a_k(p, v)x_k(p) + b_k(p, v)y_k(p)$$

eşitliğinin tek çözümüdür ($a_i(p, v)$ ve $b_i(p, v)$ fonksiyonlarının türevlenebilir olduğu bu katsayıların Kramer kuralı kullanılarak yazılabilmesinin bir sonucudur). Bu çarpım fonksiyonları her noktada karmaşık doğrusaldır: Eğer $\phi_\alpha^0(p, v) = (p, w)$ ise $\phi_\alpha^0(p, J_p(v)) = (p, iw)$ olur. Çarpım fonksiyonlarının vereceği yapı fonksiyonlarının $GL(k, \mathbb{C})$ değerli olacağının kanıtını okuyucuya bırakıyoruz. Böylece kanıt tamamlanır.

Vektör Demetinin Geri Çekmesi: $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon ise N üzerindeki her vektör demetini bu fonksiyon yardımıyla M üzerine taşıyabiliriz: $P : E \rightarrow N$ bir vektör demeti olsun. Bu demetin f ile geri çekmesi $f^*(E) \rightarrow M$

$$f^*(E) = \{(p, v) \in M \times E \mid P(v) = f(p)\}$$

ile tanımlanır. $f^*(E) \rightarrow M$ demetinin çarpım ve yapı fonksiyonları $E \rightarrow N$ demetinin çarpım fonksiyonlarının uygun şekilde $f : M \rightarrow N$ ile bileşkesi olacaktır. Ayrıca geri çekme işlemi yukarıdaki tüm yapılarla uyumludur. Örneğin, $f^*(E_1 \oplus E_2) = f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$ olur; $E \rightarrow N$ üzerinde metrik veya karmaşık yapılar varsa bu yapılar geri çekme işlemi ile $f^*(E)$ demetinde de var olur (bkz. Alıştırma 30).

Evensel Demetler: Her gerçel veya karmaşık vektör demeti evrensel demet denilen bir demetin bir fonksiyon ile geri çekmesi ile elde edilebilir. Şimdi bunu ayrıntılarıyla açıklayalım: $\mathbb{F}$ gerçel veya karmaşık sayı cismini gösterebiliriz. Bu durumda $\mathbb{F}^n$ vektör uzayının tüm k -boyutlu ($k \leq n$) alt uzaylarının kümesini $Gr_{\mathbb{F}}(n, k)$ ile göstereceğiz. Grassmann manifoldu olarak bilinen bu küme üzerinde doğal bir manifold yapısı vardır. Aslında, tanımından dolayı $Gr_{\mathbb{F}}(n, 1) = \mathbb{F}P^{n-1}$ manifoldu olduğu açıktır. Genel durumda ise bu küme üzerine topolojik yapıyı şu şekilde koyacağız: $V = \mathbb{F}^n$ vektör uzayının bir W k -boyutlu alt uzayını ele alalım. V uzayı üzerine standart iç çarpımı koyalım ve uzayın bir $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormal tabanını seçelim öyle ki, tabanın ilk k -vektörü $\{v_1, \dots, v_k\}$ W alt uzayının bir tabanı olsun. Şimdi $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olsun. $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormal tabanını bir ortogonal matrisin sütunları olarak görebiliriz. Diğer taraftan, hem W alt uzayının hem de bu uzayın $W^\perp$ ortogonal tümleyeninin ayrı ayrı tabanlarını değiştirmek, W alt uzayının, $O(n)$ ortogonal matrisler uzayı içinde farklı temsilcilerini verecektir. O halde, $Gr_{\mathbb{R}}(n, k)$ kümesi ile $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ bölüm uzayı arasında bire bir eşleme vardır. Burada herhangi bir $(A, B) \in O(k) \times O(n-k)$ matris ikilisini $O(n)$ içinde

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

‘köşegen’ matrisi olarak görüyoruz. Bu eşleme sayesinde $Gr_{\mathbb{R}}(n, k)$ kümesini bir topolojik uzay olarak görebiliriz. Aslında $Gr_{\mathbb{R}}(n, 1)$ durumunda olduğu gibi bu topolojik küme üzerinde türevlenebilir bir yapı vardır ve bu yapıyla $O(n) \rightarrow Gr_{\mathbb{R}}(n, k)$ fonksiyonu türevlenebilir bir bölüm fonksiyonudur.

Grassmann manifoldu üzerinde doğal bir k -boyutlu vektör demeti vardır:

$$\xi_k = \{(v, V) \mid V \in Gr_{\mathbb{R}}(n, k), v \in V\} \rightarrow Gr_{\mathbb{R}}(n, k), (v, V) \mapsto V.$$

Projektif uzay özelinde olduğu gibi, $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ gömmesi yardımıyla, Grassmann manifoldlarını iç içe düşünebiliriz:

$$Gr_{\mathbb{R}}(n, k) \rightarrow Gr_{\mathbb{R}}(n+1, k), V \mapsto V \times \{0\}.$$

Son olarak n üzerinden limit alarak

$$Gr_{\mathbb{R}}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} Gr_{\mathbb{R}}(n, k)$$

Grassman uzayını ve onun üzerindeki (doğal) evrensel $\xi \rightarrow Gr_{\mathbb{R}}(k)$ k -boyutlu vektör demetini tanımlayabiliriz. Benzer yapıyı karmaşık $\mathbb{C}$ -cismi üzerinde de kurabileceğimiz açıktır.

Herhangi bir X topolojik uzayı üzerinde verilen k -boyutlu $E \rightarrow X$ vektör demeti uygun bir $f : X \rightarrow Gr_{\mathbb{F}}(k)$ fonksiyonu için $f^*(\xi)$ demetine izomorfiktir. Buradaki $f : X \rightarrow Gr_{\mathbb{F}}(k)$ fonksiyonuna $E \rightarrow X$ vektör demetinin bir sınıflandırma fonksiyonu denir. Demetlerin izomorfizma sınıfları ile demetlerin sınıflandırma fonksiyonlarının homotopi sınıfları arasında bire bir eşleme vardır. Bu alt bölümde ifade ettiğimiz sonuçların kanıtlarını burada sunmayacağız. Bu bilgilerin daha kapsamlı ve açık halini [29] nolu referansın 5. Bölümü'nde bulabilirsiniz. Diğer taraftan, $k = 1$ ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ durumunda 6. Ünite'nin sonunda bulunan Alıştırma 9 buradaki sonuçların kısmi kanıtlarını sunmaktadır.

Örnek 3.3.4. *Bu örnekte $\mathbb{C}P^1 \subseteq \mathbb{C}P^2$ alt manifoldunun normal demetini hesaplayacağız. $\nu(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^2 - \{[0 : 0 : 1]\}$ olmak üzere*

$$P : \nu(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1]$$

izdüşüm fonksiyonunu ele alalım.

$$U_0 = \mathbb{C}P^1 - \{[0 : 1]\} \quad \text{ve} \quad U_1 = \mathbb{C}P^1 - \{[1 : 0]\}$$

olmak üzere

$$P^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{C}, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto \left([z_0 : z_1], \frac{z_2}{z_0} \right)$$

ve

$$P^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{C}, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto \left([z_0 : z_1], \frac{z_2}{z_1} \right)$$

difeomorfizmaları rankı bir olan bir karmaşık vektör demeti tanımlar. Bu demetin tüm uzayı $\nu(\mathbb{C}P^1)$ olduğundan bu demet projektif doğrunun projektif düzlem içindeki normal demetidir. Bu alt manifoldun tüp komşuluğu olarak normal demetin tüm uzayını alabiliriz. Normal demetin $\psi_{01} : U_0 \cap U_1 \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^$ yapı fonksiyonu $\psi_{01}([z_0 : z_1 : z_2]) = z_1/z_0$ ile verilir. O halde, $U_0 \cap U_1$ açık kümesi üzerinde $z = z_0/z_1$ fonksiyonunu koordinat olarak seçersek yapı fonksiyonumuz $\psi_{01}(z) = 1/z$ olacaktır.*

Örnek 3.3.5. *Örnek 2.1.10'da ele aldığımız karmaşık projektif doğrunun karmaşık teğet demetinin inşasını hatırlayalım:*

$$T_*\mathbb{C}P^1 = T_*\mathbb{C} \dot{\cup} T_*\mathbb{C} / (x, v) \sim (\phi(x), \phi'(x)(v)) = (1/x, -v/x^2),$$

$$(x, v) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C} = T_*(\mathbb{C} - \{0\}).$$

Buna benzer olarak, her $k \in \mathbb{Z}$ için, $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ bir boyutlu karmaşık vektör demeti

$$\mathcal{O}(k) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \dot{\cup} \mathbb{C} \times \mathbb{C} / (x, v) \sim (1/x, v/x^k),$$

$(x, v) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda teğet demeti, $T_*\mathbb{CP}^1 = \mathcal{O}(2)$ olur. Diğer taraftan, eşteğet demeti ise

$$T^*\mathbb{CP}^1 = (T_*\mathbb{CP}^1)^* = \mathcal{O}(2)^* = \mathcal{O}(-2)$$

olacaktır.

Pozitif k tam sayıları için ise $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ karmaşık doğru demetinin bir kesiti

$$s : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathcal{O}(k), \quad s_0([z_0 : z_1]) = 1 + \frac{z_1^k}{z_0^k} \quad \text{ve} \quad s_1([z_0 : z_1]) = 1 + \frac{z_0^k}{z_1^k}$$

yerel kesitleri ile verilir (aşağıda derecesi k -olan her homojen polinom bir kesit verir ve tüm kesitler bunlardır; bkz. Alıştırma 31). Ayrıca negatif k tam sayıları için $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ vektör demetinin tek analitik kesiti sıfır kesitidir. Dolayısıyla, negatif k tam sayıları için bu demetin analitik kesitlerinin oluşturduğu vektör uzayının boyutu sıfır iken, pozitif k tam sayıları için bu boyut $k+1$ olur. Son olarak, $\mathcal{O}(0) = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}$ aşık demetinin kesitleri $s : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ şeklindeki fonksiyonlar olduğu için analitik kesitler sadece sabit fonksiyonlardır.

Son olarak yukarıdaki örnekte ele aldığımız normal demet $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ demetidir. Beşinci ünite de inceleyeceğimiz kesişim teorisi, bu normal demeti belirleyen $k = 1$ sayısı ile projektif düzlemde herhangi iki farklı doğrunun tek bir noktada kesişmesi arasındaki ilişkiyi açıklayacaktır. (Bkz. Örnek 5.2.4.2 ve Örnek 5.2.11.2.)

3.3.3 Vektör Demetleri Üzerinde Bağlantılar

Önceki kısımlarda M manifoldu üzerinde tanımlı bir Y vektör alanının bir başka X vektör alanı boyunca $\mathcal{L}_X Y$ Lie türevini tanımlamıştık. Şimdi Y vektör alanının tek bir $p \in M$ noktasındaki herhangi bir $v \in T_p M$ vektörü boyunca türevini tanımlamaya çalışalım. Lie türevinin tanımını doğrudan kullanamayız, çünkü Lie türevi her iki vektör alanının da $p \in M$ noktasının açık bir komşuluğunda tanımlı olmasını gerektirir. Oysa $v \in T_p M$ vektörü sadece bir noktada tanımlanmıştır ve bu vektörü, tanım kümesi bu noktanın açık komşuluğu olan bir vektör alanına genişletmenin doğal bir yöntemi yoktur. Diğer taraftan, manifold üzerinde Riemann metriği gibi fazladan bir yapı verilirse bu zorluğun üstesinden gelebiliriz: Bu noktadaki teğet uzayında tanımlı yerel $\text{Exp}_p : T_p M \rightarrow M$ difeomorfizmasını düşünelim. Her $v \in T_p M$ vektörü için,

$$D(\text{Exp}_p)(v) : T_v(T_p M) \simeq T_p M \rightarrow T_q M, \quad q = \text{Exp}_p(v),$$

türev izomorfizmasını kullanarak Y vektörünün p noktasının etrafındaki değerlerini birbiriyle karşılaştırabiliriz. Y vektörünün $q = \text{Exp}_p(v)$ noktasındaki $Y(q) \in T_q M$ değerini bu izomorfizma ile p noktasındaki

$$\tilde{Y}(v) \doteq [D(\text{Exp}_p)(v)]^{-1}(Y(q))$$

vektörüne taşıyalım. Şimdi Y vektör alanının $p \in M$ noktasında ve $v \in T_p M$ vektörü boyunca türevini

$$\nabla_v Y \doteq \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{Y}(tv)$$

ile tanımlayabiliriz.

Teorem 3.3.6. (M, g) bir Riemann manifoldu, $(x_1, \dots, x_n)$ bir yerel koordinat sistemi ve Γ_{ij}^k metriğin bu koordinatlardaki Christoffel sembolleri olsun. e_i ile $\frac{d}{dx_i}$ vektör alanını gösterirsek, e_j vektör alanının $p \in M$ noktasında ve $e_i(p)$ vektörü boyunca türevi

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$$

ile verilir.

Kanıt : $\tilde{Y}(tv) = [D(\text{Exp}_p)(tv)]^{-1}(Y(q))$ denklemini

$$[D(\text{Exp}_p)(tv)](\tilde{Y}(tv)) = (Y(\text{Exp}_p(tv)))$$

şeklinde yazalım ve her iki tarafın t 'ye göre türevini alalım. Bunun için ilk önce, $Y = e_j$ ve $v = e_i(p)$ olduğundan Teorem 3.1.7'in kanıtının ilk paragrafından dolayı $\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (Y(\text{Exp}_p(tv))) = 0$ olduğu kolayca görülür. O halde,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [D(\text{Exp}_p)(tv)](\tilde{Y}(0)) + [D(\text{Exp}_p)(0)] \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\tilde{Y}(tv)) \right) = 0$$

elde ederiz. $D(\text{Exp}_p)(0) = id$ ve dolayısıyla $\tilde{Y}(0) = Y(p)$ olduğundan

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\tilde{Y}(tv)) = - \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [D(\text{Exp}_p)(tv)] \right) (Y(p))$$

sonucuna ulaşırız. O halde, kanıtı tamamlamak için $\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [D(\text{Exp}_p)(tv)]$ türevini hesaplamalıyız. Bunu yapmak için $p \in M$ noktasından başlayan ve $y \in T_p M$ vektörü boyunca ilerleyen jeodeziği

$$\gamma(t, p, y) : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad t \mapsto \gamma(t, p, y) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

ile gösterelim. O halde,

$$\gamma(t, p, y) = \gamma(1, p, ty) = \text{Exp}_p(ty)$$

denkleminin t 'ye göre türevini alarak

$$\dot{\gamma}(t, p, y) = \frac{d}{dt}(\text{Exp}_p(ty)) = D(\text{Exp}_p(ty)) \cdot y$$

elde edilir. Tekrar türev alırsak

$$\ddot{\gamma}(t, p, y) = \frac{d}{dt}[D(\text{Exp}_p(ty))] \cdot y \quad (*)$$

buluruz. $D(\text{Exp}_p(ty))$ matrisini $D(ty) = [d_{lm}(ty)]$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}[D(\text{Exp}_p(ty))] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D(ty)) = [\nabla d_{lm} \cdot y]$$

olur. Diğer taraftan, $\nabla d_{lm} = (d_{lm}^1, \dots, d_{lm}^n)$ gradyan vektörü olmak üzere yukarıdaki eşitliği

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}[D(ty)] = \left[\sum_k d_{lm}^k y_k \right]_{(l,m)}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde yukarıdaki $(*)$ eşitliğini, $t = 0$ alarak,

$$\ddot{\gamma}(0, p, y) = \left[\sum_{km} d_{lm}^k y_k y_m \right]_{(l)}$$

şeklinde yazdıktan sonra jeodezik denklemini kullanırsak, her l için,

$$-\sum_{km} \Gamma_{km}^l y_k y_m = \sum_{km} d_{lm}^k y_k y_m$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik her $y = (y_1, \dots, y_n) \in T_p M$ vektörü için doğru olduğundan $d_{lm}^k = -\Gamma_{km}^l$ elde ederiz. Son olarak

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\tilde{Y}(tv)) = - \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}[D(\text{Exp}_p)(tv)] \right) (Y(p))$$

denkleminde $Y = e_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^t$ ve $y = v = e_i(p)$ alarak

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} e_j &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\tilde{e}_j(te_i(p))) = - \left(\frac{d}{dt}|_{t=0}[D(\text{Exp}_p)(te_i(p))] \right) (e_j) \\ &= [\Gamma_{il}^k]_{(k,l)} [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^t \\ &= \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k, \end{aligned}$$

buluruz ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Yukarıda

$$\tilde{Y}(v) \doteq [D(\text{Exp}_p)(v)]^{-1}(Y(q))$$

olmak üzere

$$\nabla_v Y \doteq \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{Y}(tv)$$

ile tanımladığımız türev alma işlemine (M, g) Riemann manifoldunun *Riemann bağlantısı* denir. Bu tanımlı Y vektör alanı yerine manifold üzerinde tanımlı bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna uygularsak fonksiyonun $p \in M$ noktasında ve $v \in T_p M$ vektörü boyunca türevini elde ederiz:

$$\nabla_v f = v(f) .$$

X ve Y (M, g) Riemann manifoldu üzerinde vektör alanları olsun. Bu durumda

$$(\nabla_X Y)(p) \doteq \nabla_{X(p)} Y, \quad p \in M,$$

ile tanımlanan vektör alanını $\nabla_X Y$ ile göstereceğiz. Tanımlardan ve kanıtın içindeki ifadelerden yararlanarak aşağıdaki sonucu kolayca elde ederiz.

Sonuç 3.3.7. X, Y, X_i ve Y_i (M, g) Riemann manifoldu üzerinde vektör alanları ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

1. $\nabla_X(f Y) = f \nabla_X Y + X(f) Y,$
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$
3. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad \text{ve}$
4. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2.$

(M, g) manifoldunun Γ_{ij}^k Christoffel sembollerine ayrıca Riemann bağlantısının Christoffel sembolleri de denir.

Uyarı 3.3.8. (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki Riemann bağlantısını $E = T^*M \rightarrow M$ vektör demetinin kesitlerinin oluşturduğu $\Gamma(E)$ vektör uzayından $E \otimes T^*M$ vektör demetinin kesitlerinin oluşturduğu $\Gamma(E \otimes T^*M)$ vektör uzayına bir doğrusal fonksiyon olarak görebiliriz:

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M), \quad Y \mapsto (\nabla Y : X \mapsto \nabla_X Y) ,$$

öyle ki, her $Y \in \Gamma(E)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için,

$$\nabla(fY) = f \nabla Y + Y \otimes df$$

Leibniz kuralı sağlanır.

Riemann bağlantısını bu şekilde ifade etmek teğet demeti üzerinde tanımladığımız Riemann bağlantısını çok daha genel bir kavramın özel hali yapar: $E \rightarrow M$ herhangi bir vektör demeti olmak üzere yukarıdaki uyarıda verilen Leibniz kuralını sağlayan her doğrusal

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M)$$

homomorfizmasına $E \rightarrow M$ demeti üzerinde bir *bağlantı* denir. Vektör demetinin, manifoldun bir U açık kümesinde $x_1, \dots, x_n$ koordinat sisteminde verilen bir $\{s_\alpha\}$ çatısını (manifoldun U açık kümesi üzerinde tanımlı ve her noktada doğrusal bağımsız olan yerel kesitler) alalım. $e_i(p) = \frac{d}{dx_i}$ vektör alanları için

$$\nabla_{e_i} s_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta$$

eşitliğini sağlayan

$$\Gamma_{i\alpha}^\beta : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına bağlantının bu koordinat sistemindeki *Christoffel sembolleri* denir. $X = \sum_i a_i(p) e_i$ ve $s(p) = \sum_\alpha f_\alpha(p) s_\alpha(p)$ gibi rastgele bir vektör alanı ve kesit alalım. Bağlantının özelliklerini kullanarak bu kesitin türevini

$$\begin{aligned} \nabla_X s &= \nabla_{\sum_i a_i(p) e_i} \sum_\alpha f_\alpha s_\alpha \\ &= \sum_{i\alpha} a_i (f_\alpha \nabla_{e_i} s_\alpha + s_\alpha e_i(f_\alpha)) \\ &= \sum_{i\alpha} a_i \left(f_\alpha \sum_\beta \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\beta + s_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i\alpha\beta} \Gamma_{i\alpha}^\beta a_i f_\alpha s_\beta + \sum_\alpha X(f_\alpha) s_\alpha \end{aligned}$$

olarak hesaplayabiliriz. Dolayısıyla, vektör demeti üzerindeki bağlantı Christoffel sembolleri ile tamamen belirlenir.

Bu hesaplamaların bir sonucu olarak aynı demet üzerindeki iki bağlantının farkının bir tensör olduğunu görürüz:

$$(\nabla_X^1 - \nabla_X^2)(fs) = f((\nabla_X^1 - \nabla_X^2)(s)) .$$

Dolayısıyla, bir vektör demeti üzerindeki tüm bağlantıları, bir tanesini taban bağlantı olarak seçerek, bir afin uzay olarak görebiliriz.

Teğet demetinde olduğu gibi, çarpım fonksiyonlarını ve birimin ayrışımını kullanarak her vektör demetine bir Riemann metriği koyabiliriz. Yine benzer şekilde bu metriğin Christoffel sembollerini yazarak vektör demeti üzerinde bir bağlantı inşa edebiliriz.

Yukarıdaki gösterimi kullanarak bazı $\omega_\alpha^\beta \in \Omega^1(U)$ 1-formları için,

$$\nabla s_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta$$

yazabiliriz. Aslında vektör demeti üzerinde bir bağlantı, bu demetin kesitlerinin oluşturduğu vektör uzayının endomorfizmalarında değer alan 1-form olarak tanımlanabilir:

$$\omega = \sum_{i,\alpha,\beta} \Gamma_{i\alpha}^\beta s_\alpha^* \otimes s_\beta \otimes dx_i .$$

Bu forma *bağlantı 1-formu* denir.

Vektör demetinin U açık kümesi üzerinde bir başka yerel $\{s'_1, \dots, s'_r\}$ çatısını alalım. Bu iki çatı arasındaki doğrusal taban değiştirme matrisini $g : U \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ ile gösterelim:

$$s'_j = s_1 g_{1j} + \dots + s_r g_{rj} = \sum_l s_l g_{lj} .$$

Bu durumda bu iki çatıya karşılık gelen bağlantı formları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

Önerme 3.3.9. *Bağlantının $\{s'_1, \dots, s'_r\}$ çatısına karşılık gelen $\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_j^k]$ 1-formu için $\tilde{\omega} = g^{-1}\omega g + g^{-1} dg$ eşitliği sağlanır (dg ile g fonksiyon matrisinin her elemanının dış türevi alınarak elde edilen matrisi gösteriyoruz).*

Kanıt : Doğrudan tanımları kullanarak

$$\begin{aligned} \nabla s'_j &= \nabla \left(\sum_l s_l g_{lj} \right) \\ &= \sum_l (g_{lj} \nabla s_l + s_l \otimes dg_{lj}) \\ &= \sum_l \left(g_{lj} \left(\sum_k \omega_l^k s_k \right) + s_l \otimes dg_{lj} \right) \\ &= \sum_{lk} g_{lj} \omega_l^k s_k + \sum_l s_l \otimes dg_{lj} \\ &= \sum_{lk} g_{lj} \omega_l^k \left(\sum_m s'_m g_{km}^{-1} \right) + \sum_{lm} s'_m g_{lm}^{-1} \otimes dg_{lj} \\ &= \sum_{lkm} g_{km}^{-1} \omega_l^k g_{lj} s'_m + \sum_{lm} g_{lm}^{-1} \otimes dg_{lj} s'_m \\ &= \sum_m \left(\sum_{kl} g_{km}^{-1} \omega_l^k g_{lj} + \sum_l g_{lm}^{-1} \otimes dg_{lj} \right) s'_m \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu kanıtı bitirir. $\square$

Örnek 3.3.10. Bir manifoldun teğet demeti üzerinde verilen bir ∇ bağlantısı ve $X = \sum_i a_i(p) e_i$ ve $Y = \sum_j b_j(p) e_j$ gibi iki vektör alanı verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k (a_i b_j - a_j b_i) e_k + \sum_j (X(b_j) - Y(a_j)) e_j \\ &= [X, Y] + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k (a_i b_j - a_j b_i) e_k \\ &= [X, Y] + \sum_{ijk} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) a_i b_j e_k ,\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitliği kullanarak

$$T(X, Y) \doteq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \sum_{ijk} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) a_i b_j e_k$$

ile tanımlanan $T(X, Y)$ tensörüne bağlantının burulma tensörü denir (bkz. Alıştırma 32). Eğer bağlantı simetrik, başka bir deyişle, her i, j, k için, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, ise $T = 0$ olduğu açıktır. Özel halde, tüm Riemann bağlantıları simetrik olduğundan bu bağlantıların burulma tensörü sıfırdır.

Burulma tensörünün geometrisini bir örnek üzerinde inceleyelim. Koordinatları x_1, x_2 olan $M = \mathbb{R}^2$ düzleminin teğet demetinde aşağıdaki Christoffel sembolleri ile verilen bağlantıyı alalım: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ olmak üzere $\Gamma_{12}^1(x_1, x_2) = \cos r^2$, $\Gamma_{12}^2(x_1, x_2) = \sin r^2$, ve tüm diğer semboller sıfır olsun. Yine e_i ile $\frac{d}{dx_i}$ vektör alanını düşünürsek, $X = e_1$ ve $Y = e_2$ vektör alanları olmak üzere

$$T(X, Y)(x_1, x_2) = (\cos r^2) e_1 + (\sin r^2) e_2$$

olarak hesaplanır. O halde, bu iki vektör alanının burulma tensörü merkezden geçen doğrular boyunca dönen bir vektör alanı verir. Ayrıca bu iki vektör alanı için, $[X, Y] = 0$ olduğundan $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olur ve dolayısıyla düzlemin her noktasında $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$ 'dir.

Uyarı 3.3.11. $\nabla, E \rightarrow M$ vektör demeti üzerinde herhangi bir bağlantı olsun. Eğer bu bağlantı bir Riemann bağlantısı olsaydı fonksiyonlar üzerinde de tanımlı olurdu ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\nabla(f) = df$ ile verilirdi (bkz. sayfa 174). Şimdi bize verilen ∇ bağlantısının da fonksiyonlar üzerinde bir Riemann bağlantısı gibi tanımlanmış olduğunu kabul edelim (bkz. Alıştırma 33). Bu durumda ∇ bağlantısını $E^* \rightarrow M$ dual vektör demetine taşıyabiliriz. Gösterim kolaylığı açısından bağlantıyı dual demet üzerinde de yine ∇ ile göstereceğiz: Eğer $s \in \Gamma(E)$ ve $\alpha \in \Gamma(E^*)$ birer kesit iseler $f \doteq \alpha(s)$ manifold üzerinde türevlenebilir bir fonksiyondur. Bağlantının Leibniz kuralını sağlamasını beklediğimizden dolayı

$$df = \nabla(f) = \nabla(\alpha(s)) = (\nabla\alpha)(s) + \alpha(\nabla s)$$

eşitliğinden dual vektör demeti üzerindeki bağlantının Christoffel sembollerini şu şekilde hesaplayabiliriz. Yine $(x_1, \dots, x_n)$ manifold üzerinde yerel bir koordinat sistemi, $e_i = \frac{d}{dx_i}$, $(s_1, \dots, s_k)$ vektör demetinin yerel bir çatısı ve $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ dual vektör demetinin $\alpha_l(s_j) = \delta_{jl}$ koşulunu sağlayan bir çatısı olsun. Eğer Γ_{ij}^k vektör demetinin bu çatıdaki Christoffel sembolleri ise, $\nabla_{e_i} s_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k s_k$, yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} 0 = e_i(\alpha_l(s_j)) &= (\nabla_{e_i} \alpha_l)(s_j) + \alpha_l(\nabla_{e_i} s_j) \\ &= (\nabla_{e_i} \alpha_l)(s_j) + \alpha_l\left(\sum_k \Gamma_{ij}^k s_k\right) \\ &= (\nabla_{e_i} \alpha_l)(s_j) + \sum_k \Gamma_{ij}^k \delta_{lk} \\ &= (\nabla_{e_i} \alpha_l)(s_j) + \Gamma_{ij}^l, \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, $\nabla_{e_i} \alpha_l = -\sum_j \Gamma_{ij}^l \alpha_j$ olur. Başka bir deyişle, dual demetin Christoffel sembolleri $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ise, $\nabla_{e_i} \alpha_j = \sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k \alpha_k$,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$$

olur. Çarpım kuralını tekrar kullanarak bağlantıyı bu vektör demetlerinin tensör çarpımlarına da genişletebiliriz. Bunun bir uygulamasını aşağıda görelim.

Önerme 3.3.12. ∇ bir (M, g) Riemann manifoldunun (Riemann) bağlantısı ise $\nabla g = 0$ 'dır. Diğer taraftan, bu koşulu sağlayan simetrik tek bağlantı Riemann bağlantısıdır.

Kanıt : ∇ Riemann bağlantısı olmak üzere $\{e_1 = d/dx_1, \dots, e_n = d/dx_n\}$ yerel çatısı için bağlantı formunun Christoffel sembolleri Γ_{ij}^k olsun:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Bu durumda, dual vektör demetinin Christoffel sembolleri $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$ olacaktır. Önermenin kanıtını yapmak için her e_k için

$$\nabla_{e_k} \left(\sum_{ij} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \right) = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Çarpım kuralını uygulayarak

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_k} \left(\sum_{ij} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \right) &= \sum_{ij} [(\nabla_{e_k} g_{ij}) dx_i \otimes dx_j \\
&\quad + g_{ij} (\nabla_{e_k} dx_i) \otimes dx_j + g_{ij} dx_i \otimes (\nabla_{e_k} dx_j)] \\
&= \sum_{ij} g_{ij}^k dx_i \otimes dx_j \\
&\quad + \sum_{ijl} g_{ij} \tilde{\Gamma}_{ki}^l dx_l \otimes dx_j + \sum_{ijl} g_{ij} \tilde{\Gamma}_{kj}^l dx_i \otimes dx_l \\
&= \sum_{ij} g_{ij}^k dx_i \otimes dx_j \\
&\quad - \sum_{ijl} g_{ij} \Gamma_{kl}^i dx_l \otimes dx_j - \sum_{ijl} g_{ij} \Gamma_{kl}^j dx_i \otimes dx_l ,
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda kanıtın birinci bölümünü tamamlamak için

$$g_{ij}^k = \sum_l g_{lj} \Gamma_{ki}^l + g_{il} \Gamma_{kj}^l$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\sum_l g_{lj} \Gamma_{ki}^l + g_{il} \Gamma_{kj}^l &= \sum_l g_{lj} \left(\frac{1}{2} \sum_m g^{lm} (g_{km}^i + g_{im}^k - g_{ki}^m) \right) \\
&\quad + \sum_l g_{il} \left(\frac{1}{2} \sum_m g^{lm} (g_{km}^j + g_{jm}^k - g_{kj}^m) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_m \delta_{jm} (g_{km}^i + g_{im}^k - g_{ki}^m) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_m \delta_{im} (g_{km}^j + g_{jm}^k - g_{kj}^m) \\
&= \frac{1}{2} (g_{kj}^i + g_{ij}^k - g_{ki}^j) + \frac{1}{2} (g_{ki}^j + g_{ji}^k - g_{kj}^i) \\
&= g_{ij}^k .
\end{aligned}$$

Kanıtın ikinci bölümü okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır (Alıştırma 34).
□

Benzer yöntemlerle aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.13. $P : E \rightarrow M$ türevlenebilir manifold üzerinde bir vektör demeti, $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$, manifold üzerinde yerel bir koordinat sistemi ve $\{s_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, r$, demetin bu koordinat sistemi üzerindeki bir çatısı olsun.

Demet üzerinde bir g metriği ve bir Γ bağlantısı alalım. Bu durumda Γ bağlantısının metriği koruması için gerek ve yeter koşul, her i, α, β için,

$$g_{\alpha\beta}^i = \sum_{\gamma} g_{\gamma\beta} \Gamma_{i\alpha}^{\gamma} + g_{\alpha\gamma} \Gamma_{i\beta}^{\gamma}$$

olmasıdır.

Ayrıca,

$$\Gamma_{i\alpha}^{\gamma} \doteq \frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\gamma\beta} g_{\alpha\beta}^i$$

bu denklemin bir çözümünü verdiğinden demet üzerinde seçilen her iç çarpım için bu iç çarpımla uyumlu bir bağlantının var olduğunu görürüz.

Kanıt : İkinci ifadenin kanıtını tamamlamak için bağlantı formunu belirleyen

$$\Gamma_{i\alpha}^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\gamma\beta} g_{\alpha\beta}^i$$

ifadesinin koordinat ve çarpım fonksiyonlarının seçiminden bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Bunun için E manifoldu üzerine bir Riemann metriği koyalım ve bu metrik yardımıyla teğet demetini $\ker(DP)$ ve bunun direkt tümleyeninin toplamı şeklinde yazalım:

$$T_*E = \ker(DP : T_*E \rightarrow T_*M) \oplus H \simeq E \oplus H .$$

Bu yazımda E ile $\ker(DP)$ demetini doğal şekilde yer değiştiriyoruz. Daha sonra E manifoldu üzerine koyduğumuz Riemann metriğini bir $\tilde{g}$ metriği ile değiştirelim, öyle ki $\tilde{g}|_E = g$ olsun ve her $(u, v) \in \ker(DP) \times H$ için $\tilde{g}(u, v) = 0$ eşitliği sağlansın. Buna göre her i ve α için, $\tilde{g}_{i\alpha} = 0$ olur. M manifoldunun koordinat seçimi ve demetin bir çarpım fonksiyonu E manifoldunun bir koordinat sistemi seçimine karşılık gelecektir. Dolayısıyla, bu metriğin belirlediği metrik bağıntısı, diyelim ki $\tilde{\nabla}$ olsun, M üzerindeki koordinat sistemi ile E demetinin çarpım fonksiyonu seçiminden bağımsızdır. Bu bağıntının $\ker(DP) \simeq E$ üzerine dik izdüşüm fonksiyonu ile birleşimi E üzerinde bir bağlantı tanımlayacaktır (bkz. Alistırma 35). Eğer $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^{\gamma}$ bu bağıntının yukarıda bahsedilen şekilde seçilmiş bir koordinat sistemindeki Christoffel sembolleri ise

$$\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} \tilde{g}^{\gamma\beta} (\tilde{g}_{i\beta}^{\alpha} + \tilde{g}_{\alpha\beta}^i - \tilde{g}_{i\alpha}^{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\gamma\beta} g_{\alpha\beta}^i$$

olacaktır. Dolayısıyla, kanıt tamamlanır. $\square$

Vektör demetleri üzerindeki metriklerin ve bağlantıların eğriliklerini ve kohomolojik özelliklerini Ünite 6'da ele alacağız. Fakat daha önce türevlenebilir formlarda tanımladığımız dış türevi, üzerinde bir bağlantı formu verilmiş olan

tensör değerli formlara taşınmamız gerekiyor. Eğer $\nu \in \Omega^r(M)$ türevlenebilir bir form ve $s \in \Gamma(E)$, üzerinde bir ∇ bağlantısı verilmiş olan, $E \rightarrow M$ vektör demetinin bir kesiti ise, bu kesitin dış türevi şu şekilde tanımlanır:

$$d^\nabla : \Gamma(\Omega^r(M) \otimes E) \rightarrow \Gamma(\Omega^{r+1}(M) \otimes E) ,$$

$$d^\nabla(\nu \otimes s) \doteq d\nu \otimes s + (-1)^r \nu \wedge \sum_j dx_j \otimes \nabla_j s .$$

Şimdi de bu tanımlı kullanarak herhangi bir $s = \sum f_k s_k$ kesiti için $(d^\nabla \circ \nabla)(s)$ bileşkesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} (d^\nabla \circ \nabla)(s) &= d^\nabla(\nabla s) \\ &= d^\nabla \left(\sum_k (df_k \otimes s_k + f_k \nabla s_k) \right) \\ &= d^\nabla \left(\sum_{k,i} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i \otimes s_k + \sum_{k,i,l} f_k \Gamma_{ik}^l dx_i \otimes s_l \right) \\ &= d^\nabla \left(\sum_{i,l} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} dx_i \otimes s_l + \sum_{i,l,k} f_k \Gamma_{ik}^l dx_i \otimes s_l \right) \\ &= \sum_{i,l} d^\nabla \left(\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_k f_k \Gamma_{ik}^l \right) dx_i \otimes s_l \right) \\ &= \sum_{i,l,j} \left(\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l + f_k \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right) \right) dx_j \wedge dx_i \otimes s_l \\ &\quad - \sum_{i,l,j,m} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_k f_k \Gamma_{ik}^l \right) dx_i \wedge dx_j \otimes \Gamma_{jl}^m s_m \\ &= \sum_{i,j,k,l} f_k \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \otimes s_l \\ &\quad - \sum_{i,j,k,l,m} f_k \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m dx_i \wedge dx_j \otimes s_m \\ &= \sum_{i,j,k,l} \frac{f_k}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \otimes s_l \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l,m} \frac{f_k}{2} \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right) dx_i \wedge dx_j \otimes s_l \\ &= F^\nabla(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. En son adımdaki terim eğrilik (formudur),

$$F^\nabla \in \Gamma(\Omega^2(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \text{hom}(E, E)) \simeq \Gamma(\Omega^2(M) \otimes E^* \otimes E) ,$$

ve

$$\Omega_k^l = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \left(\sum_m \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right) \right) dx_i \wedge dx_j$$

olmak üzere

$$F^\nabla = \sum_{kl} \Omega_k^l s_k^* \otimes s_l$$

ile verilir.

3.3.4 Poincaré Yarı Düzlemi

Bu alt bölümde Poincaré Yarı Düzlemi'ni tanımlayıp bu manifoldun jeodeziklerini belirleyeceğiz. Poincaré Yarı Düzlemi, üzerindeki Riemann metriği

$$g(x, y) = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}$$

ile verilen

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

yarı düzlemdir. Bu yüzeyin jeodeziklerini incelemekten önce genel bir sonuç kanıtlayacağız (bkz. [35], s. 488, Alıştırma 27 ve 41).

Yardımcı Teorem 3.3.14. $\gamma : [a, b] \rightarrow (M^n, g)$ türevlenebilir bir eğri ve $p : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $t \mapsto s = p(t)$ bir difeomorfizma olsun. γ eğrisinin bir jeodezik olması için gerek ve yeter koşul $c = \gamma \circ p$ eğrisinin yerel bir koordinat sisteminde

$$\frac{d^2 c_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} = \frac{dc_k}{dt} \frac{p''(t)}{p'(t)}$$

denklemini sağlamasıdır. Ayrıca c eğrisi

$$\frac{d^2 c_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} = \frac{dc_k}{dt} \mu(t)$$

denklemini sağlayan herhangi bir eğri ise c bir jeodeziğin tekrar parametrize edilmiş halidir.

Kanıt : $\gamma = (x_1, \dots, x_n)$ ve $c_i = x_i \circ p$ olmak üzere $c = (c_1, \dots, c_n)$ ile verilsin. İlk önce $s = p(t)$ fonksiyonun bir difeomorfizma olduğunu ve $\gamma(s)$ 'nin bir jeodezik olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki jeodezik denklemi sağlanır:

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2}(s) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(s)) \frac{dx_i}{ds}(s) \frac{dx_j}{ds}(s) = 0 .$$

Diğer taraftan, $p'(t) \neq 0$ olduğunu kullanarak $(p(t))$ bir difeomorfizma olduğu için türevi her noktada sıfırdan farklıdır)

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{p'(t)} \frac{dc_k}{dt}$$

elde ederiz. Tekrar türev alarak

$$\frac{d^2x_k}{ds^2} = \frac{1}{(p'(t))^2} \left(\frac{d^2c_k}{dt^2} - \frac{dc_k}{dt} \frac{p''(t)}{p'(t)} \right)$$

bulunur. Bu ifadeleri yukarıdaki jeodezik denkleminde yerine koyarsak teoremin ifadesindeki denklemi elde ederiz. Diğer taraftan, c teoremin ifadesindeki denklemi sağlıyorsa γ eğrisinin bir jeodezik olduğu kolayca görülür.

İkinci ifadenin kanıtı için, $M'(y) = \mu(y)$ olmak üzere (başka bir deyişle, $M(y)$ fonksiyonu $\mu(y)$ için bir ters türev fonksiyonu olsun)

$$p(t) = \int_{t_0}^t e^{M(y)} dy$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca, $p'(t) \neq 0$ olduğu için $p(t)$ bir difeomorfizmadır. Artık birinci kısmı kullanarak kanıtı bitirebiliriz. $\square$

Şimdi bu yardımcı teoremi kullanarak Poincaré Yarı Düzlemi'nin tüm jeodeziklerini belirleyebiliriz. Bunu üç adımda yapacağız.

Adım 1) İlk önce bu metriğin Christoffel sembollerini hesaplayalım. $\beta = \{e_1 = \frac{d}{dx}, e_2 = \frac{d}{dy}\}$ olmak üzere

$$2(\nabla_{e_1} e_1, e_1) = \nabla_{e_1}(e_1, e_1) = \nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{1}{y^2} = 0$$

olduğundan $\Gamma_{11}^1 = 0$ bulunur. Benzer şekilde

$$2(\nabla_{e_2} e_1, e_1) = \nabla_{e_2}(e_1, e_1) = \nabla_{\frac{d}{dy}} \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{y^3}$$

olduğundan $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -1/y$ elde ederiz. Yine

$$0 = \nabla_{e_1}(e_1, e_2) = (\nabla_{e_1} e_1, e_2) + (e_1, \nabla_{e_1} e_2)$$

eşitliğinden $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = 1/y$ olarak bulunur. Son olarak benzer şekilde, $\Gamma_{22}^2 = -1/y$ ve $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$ olarak hesaplanır.

Adım 2) C merkezi $(c, 0)$ noktasında ve yarıçapı $R > 0$ olan yarı çember olsun. Bu eğrinin $t \mapsto (t, \gamma(t)) = (t, \sqrt{R^2 - (t - c)^2})$ parametrizasyonunu düşünelim. Türev alarak

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{(t - c)}{\sqrt{R^2 - (t - c)^2}} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{R^2}{\gamma(t)^3}$$

eşitliklerini elde ederiz. O halde,

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma'(t)}{t-c} - \frac{\gamma'(t)^2}{\gamma(t)} &= \frac{-1}{\gamma(t)} - \frac{(t-c)^2}{\gamma(t)^3} \\
 &= -\frac{\gamma(t)^2 + (t-c)^2}{\gamma(t)^3} \\
 &= \frac{-R^2}{\gamma(t)^3} \\
 &= \frac{d^2\gamma}{dt^2}
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bu eğrinin bir jeodezik olduğunu göstereceğiz. Bunun için yukarıdaki yardımcı teoremin ikinci kısmını kullanacağız. Şimdi

$$\mu(t) = -\frac{2\gamma'(t)}{\gamma(t)}$$

alalım ve eğrimizin $c(t) = (c_1(t), c_2(t)) = (t, \gamma(t))$ koordinatlarının

$$\frac{d^2c_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} = \frac{dc_k}{dt} \mu(t), \quad k = 1, 2,$$

denklemlerini sağladığını gösterelim:

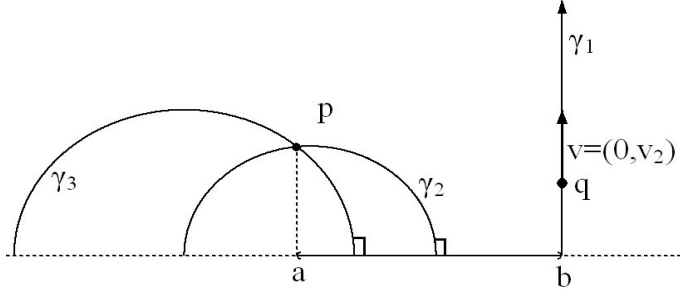
$$\begin{aligned}
 \frac{d^2c_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(c(t)) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} &= -\frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t) \\
 &= -2 \frac{\gamma'}{\gamma} \\
 &= \frac{dc_1}{dt} \mu(t).
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde diğer koordinat için de

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2c_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(c(t)) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} &= \frac{\gamma'}{t-c} - \frac{(\gamma')^2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} - \frac{(\gamma')^2}{\gamma} \\
 &= -\frac{1}{\gamma} - \frac{(2\gamma')^2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \\
 &= \gamma' \mu(t). \\
 &= \frac{dc_2}{dt} \mu(t)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle uygun şekilde parametrize edildiklerinde bu yarı çemberler birer jeodeziktir. Benzer şekilde y -eksenine paralel doğrular da, $t \mapsto (a, bt)$, ($b > 0$), birer jeodeziktir.

Adım 3) $p \in \mathbb{H}$ herhangi bir nokta ve $v \in T_p\mathbb{H}$ herhangi bir teğet vektörü olsun. Eğer $v = (v_1, v_2) = (0, v_2)$ şeklinde bir vektör ise, bu durumda $t \mapsto (0, v_2 t)$ jeodeziği (p, v) ikilisinden geçen tek jeodeziktir. Diğer taraftan, $v_1 \neq 0$ ise merkezi x -ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember (p, v) ikilisinin üzerinden geçecektir. Son olarak, her (p, v) ikilisi tek bir jeodezik belirlediği



Şekil 3.3: Hiperbolik yarı düzlemde çeşitli jeodezikler. Bir ucu (a, b) açık aralığında olan ve p noktasından geçen tüm jeodezikler γ_1 jeodeziğine paraleldir.

için Poincaré Yarı Düzlemi'nin tüm jeodezikleri yarı çemberler ve y -eksenine paralel doğrulardır.

Bu jeodeziklerin uzunluklarının sonsuz olduğu kolayca görülebilir (bkz. Alıştırma 36). O halde, Uyarı 3.2.13.1'den dolayı Poincaré Yarı Düzlemi tam bir metrik uzaydır.

Ünite 6.1'de bir Riemann metriğine karşılık gelen eğrilik tensörünün bileşenleri tanımlanacaktır (bkz. s. 306). Buna göre Poincaré metriğinin eğrilik tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$R_{121}^2 = R_{212}^1 = -\frac{1}{y^2}, \quad R_{111}^1 = R_{222}^2 = 0.$$

Ricci tensörü ise şöyledir:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = R_{121}^2 = -\frac{1}{y^2} \\ R_{12} &= 0 \\ R_{21} &= 0 \\ R_{22} &= R_{212}^1 + R_{222}^2 = R_{212}^1 = -\frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

Yine aynı bölümde tanımlayacağımız, sayısal eğrilik ve Gauss eğriliği

$$S = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} = -2, \quad \kappa = -1$$

sabitleri olarak hesaplanır (bkz. s. 319).

Alıştırma 37 bu düzlemde Öklit'in beşinci kabulünün sağlanmadığını göstermektedir.

3.3.5 Normal Demet ve Tüp Komşuluk Teoremi

(M, g) bir Riemann manifold ve $L \subseteq M$ kapalı bir alt manifold olsun. Aşağıdaki ifade ile tanımlanan

$$\nu(L) = \{(p, v) \in T_*M \mid p \in L, g_p(v, u) = 0, \text{ for all } u \in T_pL\}$$

teğet vektörler kümesine L alt manifoldunun M içindeki *normal demeti* denir ve $\nu(L)$ ile gösterilir. Normal demet T_*M teğet demetinin bir alt manifoldudur. Ayrıca normal demetin $\{(p, v) \in \nu(L) \mid v = 0\}$ alt kümesi L 'ye difeomorfik bir alt manifoldudur (bkz. Örnek 3.3.3 ve Alıştırma 38). Bu alt manifoldda *normal demetin sıfır kesiti* de denir.

Teorem 3.3.15 (Tüp Komşuluk Teoremi). (M, g) , $L \subseteq M$ ve $\nu(L)$ yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda L sıfır kesitinin öyle bir $L \subset U \subseteq \nu(L)$ açık komşuluğu vardır ki, $Exp : T_*M \rightarrow M$ üstel fonksiyonun bu komşuluğa kısıtlanması $L \subseteq V \subseteq M$ gibi bir açık komşuluğa bir difeomorfizma verir:

$$Exp : U \longrightarrow V, (p, v) \mapsto Exp_p(v), (p, v) \in \nu(L) .$$

Eğer L tıkkız bir manifold ise yeterince küçük $\epsilon > 0$ sayıları için,

$$U = \{(p, v) \in \nu(L) \mid \|v\| < \epsilon\}$$

şeklinde seçilebilir.

Kanıt: Örnek 3.3.3'den dolayı $\nu(L)$ manifoldunun $(p, 0)$ noktasındaki teğet uzayını T_pM teğet uzayı ile eşleyebiliriz:

$$T_{(p,0)}\nu(L) \longrightarrow T_pL \oplus \nu_p(L) \simeq T_pM .$$

Ayrıca yine daha önceki bölümlerden

$$D(Exp_p)_0 = Id_{T_pM}$$

olduğunu biliyoruz (bkz. s. 146). O halde, her $(p, 0) \in \nu(L)$ noktası için $DExp_{(p,0)} = Id_{T_pM}$ olacaktır. Bu durumda Ters Fonksiyon Teoremi'nden $Exp : \nu(L) \rightarrow M$ fonksiyonunun her $(p, 0) \in \nu(L)$ noktası etrafında bir difeomorfizma olduğu sonucuna varırız.

İddia: L manifoldunun verilen her tıkkız K alt kümesi için öyle bir $\epsilon_K > 0$ sayısı vardır ki, $Exp : \nu(L) \rightarrow M$ fonksiyonunun

$$U_{\epsilon_K} \doteq \{(p, v) \in \nu(L) \mid p \in K, \|v\| < \epsilon_K\}$$

alt kümesine kısıtlanması bire birdir.

Kanıt: Böyle bir sayının var olmaması durumunda $x_n, y_n \in K$ olmak üzere

$$\lim_n \|v_n\| = 0 = \lim_n \|u_n\|$$

ve

$$\text{Exp}(x_n, v_n) = \text{Exp}(y_n, u_n)$$

koşullarını sağlayan $(x_n, v_n) \neq (y_n, u_n) \in \nu(L)$ dizileri vardır. Tıkızlık koşulundan dolayı (x_n) dizisini bir alt dizisi ile değiştirerek bu dizinin yakınsak olduğunu kabul edebiliriz, $\lim_n x_n = x_0 \in K$. Diğer taraftan, (y_n) dizisinin bu alt diziye karşılık gelen alt dizisinin başka bir alt dizisi de yakınsak olacaktır. O halde, tekrar alt dizilere geçerek hem $\lim_n x_n = x_0 \in K$ hem de $\lim_n y_n = y_0 \in K$ olduğunu kabul edebiliriz. Fakat, Exp fonksiyonu sürekli olduğundan

$$x_0 = \text{Exp}(x_0, 0) = \lim_n \text{Exp}(x_n, v_n) = \lim_n \text{Exp}(y_n, u_n) = \text{Exp}(y_0, 0) = y_0$$

elde ederiz. Bu ise Exp fonksiyonunun yerel olarak bire bir olması ile çelişir ve böylece iddianın kanıtı tamamlanır.

Şimdi de L sıfır kesitini tıkız alt kümelerinin bir birleşimi olarak yazalım:

$$L = \cup_{n \geq 1} K_n, \quad K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1}), \quad n \geq 1.$$

İlk önce $n = 1$ için bir $\epsilon_1 > 0$ sayısı seçelim, öyle ki

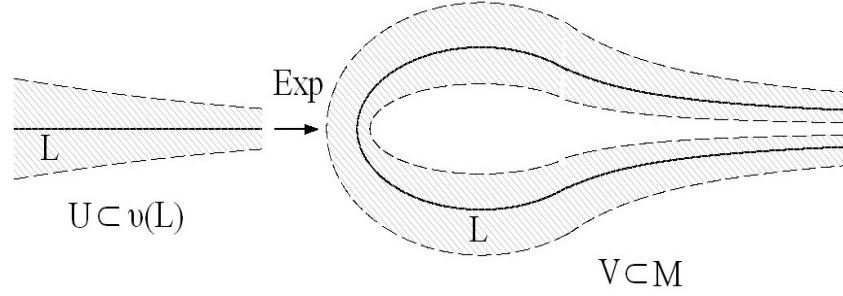
$$U_1 \doteq \{(p, v) \in \nu(L) \mid p \in K_1, \|v\| < \epsilon_1\}$$

alt kümesi üzerinde Exp fonksiyonu bire bir olsun. Daha sonra, $n = 2$ için $\epsilon_2 > 0$ sayısı seçelim öyle ki, bu sefer Exp fonksiyonu $U_1 \cup U_2$ üzerinde bire bir olsun (burada U_i alt kümesi benzer şekilde $U_i \doteq \{(p, v) \in \nu(L) \mid p \in K_i, \|v\| < \epsilon_i\}$ olarak tanımlanmıştır). Bunun yapılabileceği yukarıdaki iddianın kanıtına benzer şekilde görülebilir. Bu şekilde devam ederek öyle bir $\epsilon_n > 0$ sayısı seçelim ki Exp fonksiyonu $U_1 \cup \dots \cup U_n$ üzerinde bire bir olsun. Dolayısıyla, Exp fonksiyonu

$$U_0 \doteq \cup_{n \geq 1} U_n \subseteq \nu(L)$$

açık alt kümesi üzerinde bire birdir. Ne U_i alt kümeleri ne de U_0 birleşimi açık alt kümelerdir. Diğer taraftan, her $n \geq 1$ için, $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$ olduğundan $U \doteq \text{Int}(U_0)$ açık alt kümesi $L \subseteq \nu(L)$ alt manifoldunu içerir. Son olarak, Exp fonksiyonu sıfır kesit üzerindeki her nokta etrafında yerel olarak bir difeomorfizma olduğundan, Exp fonksiyonu U açık kümesinden görüntüsüne istediğimiz difeomorfizmayı verecektir. $\square$

Teorem 3.3.15'in gösterimini kullanarak biraz daha ilerleyebiliriz. $\pi : T_*M \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonunun $U \subseteq \nu(L)$ alt manifolduna kısıtlanışını yine $\pi : U \rightarrow L$ ile gösterelim. Bu durumda $P = \pi \circ \text{Exp}^{-1} : V \rightarrow L$ bileşke fonksiyonu şu şekilde karakterize edilebilir: Her $q \in V$ için, L üzerinde tek bir $P(q)$ noktası vardır, öyle ki, q noktası L alt manifoldunu dik şekilde p noktasında kesen ve tamamen V içinde kalan tek bir jeodezik eğri üzerinde bulunur. Bu gözlem P izdüşüm fonksiyonunun aşağıdaki geometrik yorumunu verir.



Şekil 3.4: Tüp Komşuluk

Sonuç 3.3.16. $L \subseteq M$ alt manifoldu aynı zamanda kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda her $q \in V$ ve $p \in L$ için, $d(p, q) \geq d(q, P(q))$ olur ve eşitlik sadece $p = P(q)$ olması durumunda sağlanır. Başka bir deyişle, $P(L)$ üzerinde q noktasına en yakın tek bir nokta vardır ve o nokta $P(q)$ noktasıdır.

Kanıt: İlk önce q noktası etrafındaki $R = d(q, P(q))$ yarıçaplı kapalı jeodezik yuvarı düşünelim: $B = \text{Exp}_q(B[0, R])$, (burada $B[0, R]$ ile $T_q M$ teğet uzayındaki orijin merkezli ve R yarıçaplı kapalı yuvarı gösteriyoruz). Bu durumda $P(q) \in B$ olur. $L \cap B$ kapalı kümesinin q noktasına en yakın noktası p olsun. Şimdi kanıtın anlaşılmasını kolaylaştırmak için M manifoldunun düz metriğe sahip $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayı olduğunu kabul edelim. O halde, eğer $R_1 = d(p, q)$ ise $B_1 = \text{Exp}_q(B[0, R_1])$ yuvarı L alt manifolduna p noktasında teğet olacaktır. Dolayısıyla, p noktasını q noktasına bağlayan doğru parçası (jeodezik) L alt manifolduna çapraz olur. Fakat, P fonksiyonunun tanımından dolayı L üzerinde bu özelliğe sahip tek nokta $P(q)$ noktasıdır. Diğer bir deyişle, $p = P(q)$ olmalıdır ve dolayısıyla, bu özel durumda kanıt tamamlanır. Genel durumda ise Exp_q^{-1} difeomorfizması ile $T_q M$ teğet uzayına geri gidelim. Bu durumda p noktasını q noktasına bağlayan jeodezik yine bir doğru parçası olacaktır. O halde, yine $B[0, R_1] \subseteq T_q M$ yuvarı $\text{Exp}_q^{-1}(L) \subseteq T_q M$ alt manifolduna teğet olur. Başka bir deyişle, orijinden çıkan doğru $\text{Exp}_q^{-1}(L) \subseteq T_q M$ alt manifolduna çapraz olacaktır. Son olarak Gauss Yardımcı Teoremi uygulayarak p noktasını q noktasına bağlayan jeodeziğin L alt manifolduna çapraz olduğunu görürüz ve kanıt özel durumda olduğu şekilde tamamlanır. $\square$

Örnek 3.3.17. $L \subseteq M = \mathbb{R}^N$ Öklit uzayının bir alt manifoldu olsun. Metrik düz olduğundan M 'nin jeodezikleri sadece doğrulardır. Dolayısıyla, tüp komşuluktan L 'ye giden $P = \pi \circ \text{Exp}^{-1} : V \rightarrow L$ izdüşüm fonksiyonu aslında dik izdüşüm fonksiyonudur.

Teorem 3.3.15'in bir uygulaması olarak ileride çokça kullanacağımız türevlenebilir fonksiyonlarla yaklaşım teoremini kanıtlayacağız. Türevlenebilir manifoldlar Öklit uzaylarına gömülebildiği için manifoldların topolojisi metrikle-

nebilirdir. Dolayısıyla, iki manifold arasındaki sürekli fonksiyonların arasındaki uzaklıktan bahsedebiliriz.

Teorem 3.3.18. *M ve N türevlenebilir manifoldlar olmak üzere $C^\infty(M, N)$ türevlenebilir fonksiyonlar uzayı $C^0(M, N)$ sürekli fonksiyonlar uzayı içinde yoğundur. Her sürekli $f : M \rightarrow N$ fonksiyonuna homotopik olan bir türevlenebilir $g : M \rightarrow N$ fonksiyonu vardır. Ayrıca iki türevlenebilir fonksiyon sürekli bir fonksiyon ile homotopik ise bu fonksiyonlar türevlenebilir bir fonksiyon ile de homotopiktir.*

Kanıt : $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ve $N \subseteq \mathbb{R}^n$ olduğunu kabul edelim. $M \subseteq \mu \subseteq \mathbb{R}^m$ ve $N \subseteq \nu \subseteq \mathbb{R}^n$ tüp komşuluklar ve $P : \nu \rightarrow N$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Bu tüp komşuluğun verilen bir $q \in N$ noktasındaki kalınlığı en az $2\epsilon_q$ olsun. Başka bir deyişle, $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayında $B(q, 2\epsilon_q) \subseteq \nu$ olacak şekilde $\epsilon_q > 0$ seçelim. M manifoldunun her birinin kapanışı tıkHz olan yerel sonlu bir açık örtüsünü ve bu örtü ile uyumlu bir birimin ayrışımını alalım:

$$M \subseteq \cup_\alpha U_\alpha, \quad \rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1, \quad p \in M.$$

$f : M \rightarrow N$ sürekli bir fonksiyon olsun. Stone-Weierstrass Teoremi'ni kullanarak her α için bir $g_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ polinom fonksiyonu seçelim öyle ki, her $p \in U_\alpha$ için $\|f(p) - g_\alpha(p)\| < \epsilon_{f(p)}$ olsun (U_α kümesinin kapanışının tıkHz olduğunu kullanıyoruz) (bkz. s. 109, [37]). $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(p) = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) g_\alpha(p)$ toplam fonksiyonu olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|f(p) - g(p)\| = \left\| \sum_\alpha \rho_\alpha(p)(f(p) - g_\alpha(p)) \right\| < \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(p) \right) \epsilon_{f(p)} = \epsilon_{f(p)}$$

elde ederiz. O halde, $g(M) \subseteq \nu$ olur ve dolayısıyla $h = P \circ g : M \rightarrow N$ türevlenebilir bileşke fonksiyonundan bahsedebiliriz. P fonksiyonun geometrik özelliklerinden $\|f(p) - h(p)\| < 2\epsilon_{f(p)}$ olduğu açıktır (bkz. Sonuç 3.3.16). $\epsilon_q > 0$, $q \in N$, sayılarını istediğimiz kadar küçük seçebildiğimiz için, $C^\infty(M, N)$ türevlenebilir fonksiyonlar uzayının $C^0(M, N)$ sürekli fonksiyonlar uzayı içinde yoğun olduğunu kanıtlamış olduk. Diğer taraftan, her $t \in [0, 1]$ için

$$\|f(p) - [(1-t)f(p) + th(p)]\| = \|t(f(p) - h(p))\| < 2\epsilon_{f(p)}$$

olduğundan

$$F : M \times [0, 1] \rightarrow \nu, \quad F(p, t) = (1-t)f(p) + th(p),$$

çizgisel homotopisini tanımlayabiliriz. Bu durumda, $(P \circ F)(p, 0) = f(p)$ ve $(P \circ F)(p, 1) = h(p)$ olduğundan $P \circ F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ bileşke fonksiyonu istenilen sürekli homotopiyi verir.

Teoremin ikinci kısmı için, sürekli bir $G : M \times [0, 1] \rightarrow N$ fonksiyonu ile homotopik olan türevlenebilir $h_i : M \rightarrow N$, $i = 1, 2$, fonksiyonları

alalım. Kanıtı tamamlamak için bu iki türevlenebilir fonksiyonun türevlenebilir bir $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ fonksiyonu ile homotopik olduğunu göstermemiz gerekiyor. $G(p, i) = h_i(p)$ fonksiyonları türevlenebilir olduğuna göre öyle açık bir $M \times \{0, 1\} \subseteq U \subseteq M \times [0, 1]$ kümesi ve türevlenebilir $\phi : U \rightarrow N$ fonksiyonu vardır ki, her $(p, t) \in U$ için, $G(p, t) = \phi(p, t)$ olur. Teoremin ilk bölümünde verdiğimiz kanıtı kullanarak G homotopisine istenildiği kadar yakın ve homotopik olan türevlenebilir bir $\psi : M \times [0, 1] \rightarrow N$ homotopisi bulabiliriz. $V = M \times [0, 1] - M \times \{0, 1\}$ açık kümesi olmak üzere $M \times [0, 1]$ manifoldunun $\{U, V\}$ açık örtüsü ile uyumlu bir $\{\rho_U, \rho_V\}$ birimin ayrışımı seçelim. Bu durumda

$$P \circ (\rho_U G + \rho_V \psi) : M \times [0, 1] \rightarrow N ,$$

$$(p, t) \mapsto P(\rho_U(p, t) G(p, t) + \rho_V(p, t) \psi(p, t)) , (p, t) \in M \times [0, 1],$$

istenilen türevlenebilir homotopiyi verecektir. $\square$

Bu teoremin bir uygulaması için Sayfa 236'e bakınız.

3.4 Alıştırmalar

1. Uyarı 3.1.4'de verilen vektör alanlarının akışları hakkındaki ifadeleri kanıtlayınız.
2. İki vektör alanının bileşkesinin her zaman bir vektör alanı olmadığını örneklerle gösteriniz.
3. Önerme 3.1.6'nın kanıtını genel durum için veriniz.
4. Önerme 3.1.8 ve Önerme 3.1.9'u kanıtlayınız.
5. Sürekli bir $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $k \geq 1$ tam sayısı için

$$\int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu fonksiyon sabit sıfır fonksiyonudur, gösteriniz.

6. Standart Riemann metriği ile düşündüğümüz gerçel eksenden sıfır noktasını çıkaralım. Bu manifold üzerindeki hiçbir $\gamma(t)$ jeodeziğinin tüm $t \in \mathbb{R}$ değerleri için tanımlı olamayacağını gösteriniz.
7. Türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde bir g -Riemann metriği alalım. Bu metriği koruyan vektör alanlarına Killing vektör alanları denir. İki Killing vektör alanının Lie parantezinin de bir Killing vektör alanı olduğunu Sonuç 3.1.10'u kullanarak gösteriniz.

8. Tıkız bir M^n manifoldu üzerinde sadece iki tane ve yozlaşmış kritik noktası olan bir fonksiyon varsa bu manifoldun S^n küresine homeomorfik olduğunu gösteriniz (İkinci Ünite'de yer alan Alıştırma 26'yı ve Teorem 3.1.3'ü kullanınız). Aslında bu homeomorfizma bir nokta haricinde difeomorfizma olarak da seçilebilir. Bu sonuç 6. Ünite'de ele alacağımız Milnor'un egzotik küreleri konusunun son adımı olacak. (İki farklı çözüm için [27] ve [39] (sayfa 23) numaralı kaynaklara bakınız.) Bu sonuç *Reeb'in Küre Teoremi* diye anılır ve Georges Reeb'in 1946 yılında yayınladığı [32] makalesinin bir sonucudur.
9. Sayfa 118'deki hesaplamaları kullanarak birim küre üzerindeki $(\mathbb{R}^3$ 'ten gelen) standart Riemann metriğinin stereografik koordinatlarda

$$4 \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ile verildiğini gösteriniz. Bu metriğin merkezden geöen jeodeziklerinin doğrular olduğunu gösteriniz. Döndürmelerin $(SO(3))$ 'ün elemanlarının) metriği koruduğunu kullanarak kürenin verilen bir noktasından geöen her joedeziğin bir büyük çember olduğunu kanıtlayınız. Son olarak yarıçapı $r > 0$ olan kürenin Gauss eğriliğinin her noktada $1/r$ olduğunu gösteriniz.

10. Karmaşık düzlemin alt uzayları olan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ Hiperbolik yarı düzlem ile $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ birim diski $z \mapsto w \doteq \frac{iz + 1}{z + i}$ holomorfik dönüşümü altında izomorfiktirler. Analitik fonksiyonlar türevlerinin sıfırdan farklı olduğu yerde açı koruyandır (konformal). Dolayısıyla, bu dönüşüm açıları korur. Hiperbolik yarı düzlemdeki metriği bu dönüşüm ile birim diske taşırsak

$$4 \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

metriğini elde ederiz. Hiperbolik düzlemin bu modeline *Poincaré Disk Modeli* denir. Bu modelde jeodeziklerin birim çemberi dik açılarda kesen çemberler olduğunu gösteriniz. Karmaşık analizden hatırladığınız Möbius transformasyonları kullanırsanız jeodezik denklemini çözmenize gerek kalmaz. Poincaré Diski üzerindeki metriğin alan formunu hesaplayınız.

11. S_0 üzerinde standart düz metrik $(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ olan düzlemi, S_1 Alıştırma 9'da üzerindeki metriğin açık ifadesini yazdığımız birim küreyi ve son olarak S_{-1} hiperbolik yarı düzlemi (bkz. Ünite 3.3.4) gösterebiliriz. Bu yüzeylerin $\kappa_S(p)$ Gauss eğriliği, yüzeyin her noktasında, sırasıyla 0, 1 ve -1 'dir. Yüzeyler üzerindeki alan formunu dA ile gösterelim. Bu yüzeylerden herhangi biri üzerinde alınan ve iç açıları α_i , $i = 1, 2, 3$,

olan her T jeodezik üçgen için (kenarları jeodeziklerin parçaları olan üçgen)

$$\int_T \kappa(p) dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

olduğunu gösteriniz. Bu sonucu jeodezik çokgenlere genişletiniz.

Gauss bu sonucu yüzey üzerindeki herhangi bir metrik için kanıtlamıştır.

12. Örnek 3.2.3'dekine benzer şekilde özel doğrusal grup $SL(n)$ manifoldunun jeodeziklerini belirleyiniz.
13. Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki bir noktada tanımlanan üstel fonksiyonun sıfır vektöründeki türevinin birim dönüşüm olduğunu gösteriniz: $D(\text{Exp}_p)_0 = \text{Id}_{T_p M}$ (bkz. s. 146).
14. Uyarı 3.2.6'da verilen genelleştirilmiş Gauss Yardımcı Teoremi'ni kanıtlayınız.
15. Öklit uzayındaki herhangi bir U kapalı yuvarı üzerinde bir g Riemann metriği alalım. Bu durumda öyle $M, m > 0$ pozitif gerçel sayıları vardır ki, bu yuvar içindeki her $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eğrisi için

$$m L_e(\gamma) \leq L_g(\gamma) \leq M L_e(\gamma)$$

olur. (Burada $L_e(\gamma)$ ve $L_g(\gamma)$ ile γ eğrisinin Öklit ve g metriklerine göre uzunlukları gösterilmiştir. Ayrıca bkz. Teorem 7, s. 428 [35].) Bunun bir sonucu olarak bir manifold üzerindeki her Riemann metriğinin aynı (jeodezik) topolojiyi ürettiğini gösteriniz.

16. Sonuç 3.2.9'u kanıtlayınız.
17. Aşağıdaki ifade gerçel sayıların bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu, $C([a, b])$, vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlar:

$$(f, g) \doteq \int_a^b f(t) g(t) dt, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Bu iddianın kanıtında açık olmayan tek nokta

$$(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

önermesidir. Bunu görmek için

$$F(s) \doteq \int_a^s f^2(t) dt, \quad s \in [a, b],$$

fonksiyonunun da sabit sıfır fonksiyonu olduğunu gözlemleyip Analizin Temel Teoremi'ni kullanmak yeterlidir. Şimdi Önerme 3.2.10'da kullanılan Schwarz eşitsizliği iç çarpım uzaylarının genel bir özelliği olur. Bu ifadeleri kanıtlayınız.

18. Herhangi bir (M, g) Riemann manifoldunun sabit bir $p \in M$ noktasını alalım. Bu noktadan geçen her jeodeziğın tüm gerçel ekseninde tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda, manifoldun her $q \in M$ noktasının bu noktaya uzunluğı en kısa olan bir jeodezik ile bağlanabildiğini gösteriniz. Bu birkaç adımda yapılabilir. İlk nce, Riemann metriğinin manifold üzerinde verdiğı metriğı $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ile gösterelim ve bu metrikte p 'den q 'ya olan uzaklık $r = d(p, q) > 0$ olsun. Ayrıca $p \in M$ noktasındaki üstel fonksiyonun $B[0, \epsilon] \subset T_p M$ yuvarına kısıtlanması, görüntüsüne bir difeomorfizma olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ seçelim. Bu yuvarın sınırı, $S(\epsilon) \doteq \partial B[0, \epsilon] \subset T_p M$, tıkız olduğu için

$$d(p_0, q) = d(\text{Exp}_p(S(\epsilon)), q)$$

olacak şekilde bir $p_0 \in S(\epsilon)$ noktası seçebiliriz. Ayrıca $\text{Exp}_p(ev) = p_0$ olacak şekilde bir $v \in T_p M$ birim vektörü seçelim. Son olarak $\gamma(t) \doteq \text{Exp}_p(tv)$, $t \in \mathbb{R}$ jeodeziğı için $d(\gamma(t), q) = r - t$ olduğunu gösteriniz. Böylece, $d(\gamma(r), q) = 0$ olacağı için $q = \gamma(r)$ elde edilecektir.

Son adım için biraz ipucu verelim:

$$t_0 = \sup\{t \in [0, r] \mid d(\gamma(t), q) = r - t\}$$

sayısını tanımlayalım. Eğer $t_0 = r$ ise kanıt tamamlanır. Eğer $t_0 < r$ ise $p_1 = \gamma(t_0)$ olsun ve öyle bir $\delta > 0$ seçelim ki $B[p_1, \delta]$ içindeki herhangi iki nokta en kk uzunluğā sahip bir jeodezik ile birbirine bağlanabilsin. Bu durumda $\gamma([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ en kısa uzunluğā sahip bir jeodeziktir. Eğer $p_2 = \gamma(t_0 + \delta)$ noktası ise $d(p, p_2) \leq t_0 + \delta$ olacaktır, çünkü $\gamma([0, t_0 + \delta])$ jeodeziğinin uzunluğı $t_0 + \delta$ kadardır. Ayrıca, $d(p, q) = r$ olduğu için $d(p_2, q) \geq r - t_0 - \delta$ olur.

Diğerk taraftan, $d(p_1, q) = r - t_0$ eşitliğini ve d metriğı için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$r - t_0 - \delta \geq d(p_2, q)$$

elde edilir. Bu ise t_0 'ın seçimi ile çelişir. Böylece kanıt tamamlanır.

19. Uyarı 3.2.13.2'nin kanıtını tamamlayınız.
20. Uyarı 3.2.15'e bir örnek veriniz. Ayrıca bu uyarının üstünde iddia edildiğı üzere, vektör uzayları üzerinde verilen i çarpımların bu uzayların tensör çarpımlarına doğal olarak genişletilebileceğini gösteriniz.
21. Uyarı 3.2.15'in altındaki paragraftaki iddiayı kanıtlayınız.
22. rnek 3.2.16'ya benzer şekilde $\mathbb{R}^n$ içinde türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğı olarak $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ ile verilen hiper yüzeyi, içinde

bulunduğu Öklit uzayının Riemann metriği ile düşünelim. Bu metriğe karşılık gelen hacim elemanın

$$dvol = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_{n-1}}^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

olduğunu gösteriniz.

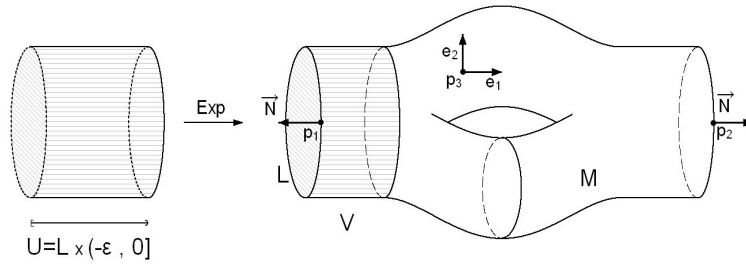
23. Verilen bir $P : E \rightarrow M$ vektör demetinin tüm kesitlerinin oluşturduğu $\Gamma(E)$ kümesinin $C^\infty(M)$ halkası üzerinde bir modül oluşturduğunu gösteriniz.
24. Verilen bir vektör demetinin yapı fonksiyonlarını kullanarak elde edilen vektör demetinin başlangıçtaki demete izomorfik olduğunu gösteriniz.
25. Yönlendirilebilir bir manifoldun teğet vektör demetinin yönlendirilebilir bir demet olduğunu gösteriniz.
26. Yönlendirilebilir vektör demetlerinin toplamalarının da yönlendirilebilir olduğunu gösteriniz.
27. Herhangi bir $P : E \rightarrow M$ vektör demeti için $E \oplus E \rightarrow M$ demetinin doğal bir yönlendirmesi olduğunu şu şekilde gösteriniz: Eğer $Q : F \rightarrow M$ bir başka vektör demeti ve $H : E \rightarrow F$ vektör demetleri izomorfizması ise $H \oplus H : E \oplus E \rightarrow F \oplus F$ yön koruyan bir izomorfizmadır (burada E ve F demetlerinin yönlendirilebilir olması gerekmemektedir!). Benzer fikirler ile her türevlenebilir M manifoldu için, M manifoldu yönlendirilemez olsa dahi, $M \times M$ ve T_*M manifoldlarının doğal yönlendirmeleri olduğunu gösteriniz.
28. Yönlendirilebilir bir vektör demetinin determinantının aşıkâr doğru demeti olduğunu gösteriniz.
29. İki ve dört boyutlu gerçel vektör uzayları üzerindeki tüm karmaşık yapıları belirleyiniz. Boyutu $2n \geq 4$ olan bir gerçel vektör uzayı üzerinde sayılamaz çoklukta karmaşık yapı olduğunu gösteriniz.
30. Vektör demetleri üzerinde incelediğimiz tüm işlem ve yapıların geri çekme işlemi ile yer değiştirebileceğini gösteriniz. Örneğin, yönlendirilebilir bir demet geri çekildiğinde yine yönlendirilebilir bir demet elde edilir. Benzer şekilde, demetlerin toplam veya tensör çarpımlarının geri çekmesi de demetlerin geri çekmelerinin toplam veya tensör çarpımlarıdır.
31. Örnek 3.3.5 içinde yaptığımız tüm iddiaları kanıtlayınız.
32. Burulma tensörünün gerçekten bir tensör olduğunu gösteriniz.

33. Uyarı 3.3.11'i göz önünde bulundurarak şunu kanıtlayınız: ∇ manifold üzerindeki $M \times \mathbb{R}$ aşık ar vektör demeti üzerinde bir bağlantı olsun. Bu durumda bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı vardır öyle ki, her $f \in C^\infty(M)$ için

$$\nabla(f) = df + \lambda f$$

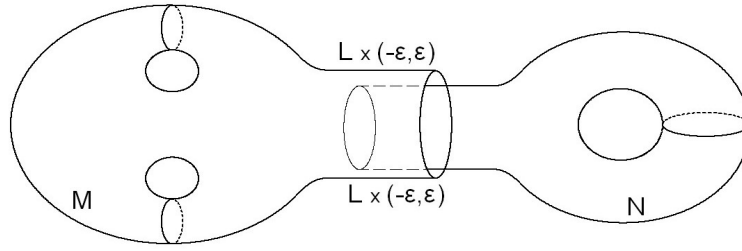
olur. (Eğer bağlantı bir Riemann metriğinden elde edilmişse $\lambda = 0$ olduğunu görmüştük; bkz. s. 174.)

34. Önerme 3.3.12'nin kanıtını tamamlayınız.
35. Sonuç 3.3.13'ün kanıtının içinde bahsedilen dik izdüşüm yardımıyla tanımlanan ifadenin gerçekten bir bağlantı olduğunu gösteriniz.
36. Poincaré Yarı Düzlemi'nin jeodeziklerinin sonsuz uzunlukta olduğunu gösteriniz.
37. Poincaré Yarı Düzlem geometrisinin Öklit'in beşinci kabulünü sağlamadığını gösteriniz (bkz. Şekil 3.3).
38. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $L \subseteq M$ kapalı bir alt manifold olmak üzere $\nu(L)$ normal demetinin T_*M içinde bir alt manifold olduğunu gösteriniz. Ayrıca normal demetin sıfır kesitinin L manifolduna difeomorfik bir alt manifold olduğunu gösteriniz.
39. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $L \subset \partial M$, manifoldun sınırının bir tıkkız ve bağlantılı bir bileşeni olsun. Tüp Komşuluk Teoremi'nin kanıtını takip ederek aşağıdaki ifadeyi kanıtlayınız: Öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır ki, Riemann metriğinin vermiş olduğu $Exp : \nu(L) \rightarrow M$ üstel fonksiyonunun $U = L \times (-\epsilon, 0]$ alt kümesine kısıtlanması $V = Exp(U)$ görüntüsüne bir difeomorfiktir.



Şekil 3.5: $Exp : U \rightarrow V \subset M$

Bu sonucu kullanarak birer sınır bileşenleri difeomorfik olan iki manifolddu bu sınır bileşenleri boyunca birbirine yapıştırarak bir başka manifold elde ederiz. Aşağıdaki şekle (Şekil 3.6)bakarak detayları yazma işini size bırakıyoruz.



Şekil 3.6: $M \supset L \times (-\epsilon, \epsilon) \sim L \times (-\epsilon, \epsilon) \subset N$, $(x, t) \sim (x, -t)$

“İnsanlara hiçbir şey öğretemezsiniz; sadece kendi kendilerine keşfetmeleri için yardım edebilirsiniz.”

-Galileo Galilei

4

De Rham Kohomoloji

Bu ünite de türevlenebilir manifoldlar üzerindeki türevlenebilir formların oluşturduğu De Rham kohomoloji gruplarını hesaplayarak bunların bazı geometrik ve topolojik sonuçlarını inceleyeceğiz. Homoloji ve kohomoloji teorileri modern geometri ve topolojinin en etkili araçlarından. Aslında homoloji ve kohomoloji topolojik uzaylar kategorisinden değişmeli gruplar (veya halkalar) kategorisine birer fonktor olarak ele alabiliriz. Homoloji genellikle sadece değişmeli bir grup ya da vektör uzayı iken kohomoloji doğal bir şekilde halka (cebir) yapısına sahiptir ve bu sebeple daha etkili bir araçtır. Bazı durumlarda kohomoloji, manifoldlar ve daha genelde topolojik uzaylar üzerinde belirli topolojik veya geometrik yapıların varlığına engel olarak karşımıza çıkar. Bunun dışında kohomoloji ve homoloji sınıflandırma problemlerinde de çok kullanışlıdır. Şöyle ki, topolojik nesneleri karşılaştırmak cebirsel nesnelere nazaran genelde daha zor bir iştir. Bu nedenle homoloji ve kohomoloji fonktörleri oldukça yararlıdır. Bir örnek vermek gerekirse, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ topolojik uzaylarının homeomorfik olmadıklarını (ko)homoloji kullanmadan kanıtlamayı deneyebilirsiniz (bkz. Sonuç 4.3.15). Bu ve sonraki ünitelerde bunun bir çok örneğini ayrıntılı biçimde ele alacağız.

De Rham Kohomolojisinin topolojik manifoldlardaki karşılığı tekil kohomolojidir. De Rham Kohomolojisi ile ilgili olarak ele alacağımız hemen hemen her konunun tekil kohomolojide karşılığı vardır. Tekil (ko)homoloji konusunda en kapsamlı ve yaygın kullanılan kitaplardan bazıları [19], [6], [30] ve [13] numaralı referanslardır.

İki, üç ve dört boyutlu türevlenebilir manifoldların topoloji ve geometrileri ayrı ayrı çalışma alanları oluşturmaktadır. Bu konuları kapsayan kaynaklardan birkaçı [14], [21] ve [4] numaralı referanslardır.

4.1 De Rham Kohomoloji

4.1.1 De Rham Kohomolojisinin Tanımı

Her bir A_k ($k \in \mathbb{Z}$) değişmeli bir grup (ya da vektör uzayı) olmak üzere

$$(A_*, d_*) : \quad \cdots \xrightarrow{d_{k-2}} A_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} A_k \xrightarrow{d_k} A_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots$$

şeklindeki bir grup (vektör uzayı) homomorfizmaları dizisinde herhangi ardışık iki homomorfizmanın bileşkesi sıfır oluyorsa, $d_{k+1} \circ d_k = 0$, A_k 'lere *zincir grupları* ve bu diziye de bir *zincir yapısı* denir. Bir zincir yapısı için

$$\text{Im}(d_{k-1} : A_{k-1} \rightarrow A_k) \subseteq \ker(d_k : A_k \rightarrow A_{k+1})$$

olduğu kolayca görülür. Bu zincir yapısının kohomolojisi

$$H^k(A_*, d_*) \doteq \frac{\ker(d_k : A_n \rightarrow A_{k+1})}{\text{Im}(d_{k-1} : A_{k-1} \rightarrow A_k)}$$

bölüm grubu olarak tanımlanır.

Sayfa 97'de türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde tanımlı bir $\omega \in \Omega^k(M)$ k -formunun $d\omega = 0$ olması durumunda kapalı form ve $d\nu = \omega$ olacak şekilde bir $\nu \in \Omega^{k-1}(M)$ ($k-1$)-formunun var olması durumunda da tam form olarak adlandırıldığını görmüştük. Yine $d^2 = 0$ olduğundan her tam formun aynı zamanda kapalı olduğunu söylemiştik. Buna göre M manifoldunun üzerindeki

$$(\Omega^*(M), d_*) : \quad \cdots \xrightarrow{d_{k-2}} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots$$

vektör uzayı zincir yapısına manifoldun *De Rham* zincir yapısı ve yapının k 'inci kohomolojisi de manifoldun k 'inci *De Rham kohomolojisi* denir. Bu kohomoloji vektör uzayı $H_{DR}^k(M)$ ile gösterilir. Tanımından anlaşılacağı gibi $H_{DR}^k(M)$ manifold üzerindeki kapalı k -formların oluşturduğu vektör uzayının tam k -formların oluşturduğu vektör uzayına bölümüdür. Başka bir deyişle,

$$H_{DR}^k(M) \doteq \frac{\ker(d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{Im}(d_{k-1} : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))}$$

manifold üzerinde kapalı olan fakat tam olmayan türevlenebilir k -formların oluşturduğu vektör uzayıdır. Dolayısıyla, eğer bu vektör uzayı sıfır vektör uzayı ise manifold üzerindeki her kapalı k -form tamdır. Kapalı bir ω k -formunun kohomolojide belirlediği sınıf $[\omega] \in H_{DR}^k(M)$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.1. Her bağlantılı M manifoldu için $H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}$ olur.

Kanıt : $[\phi] \in H_{DR}^0(M)$ olsun. $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ kapalı bir 0-form olduğundan her yerel koordinat sisteminde

$$0 = d\phi = \sum_i^{\dim(M)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i$$

olacaktır. O halde, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu yerel olarak sabittir. Fakat, M manifoldu bağlantılı olduğundan ϕ bir sabite eşit olmalıdır. Diğer taraftan, manifold üzerindeki her sabit fonksiyon kapalı bir 0-form verecektir. $\square$

M manifoldunun sonlu tane topolojik bileşeni varsa, $M = \dot{\cup}_{i=1}^k M_i$ kolayca her $n \geq 0$ için, $H_{DR}^n(M) = \oplus_{i=1}^k H_{DR}^n(M_i)$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla, sıfırcı kohomoloji, manifoldun bağlantılı bileşenlerinin sayısını verir. Böylece kohomolojinin manifoldların topolojik özelliklerini yansıtan cebirsel nesneler olduğunun ilk örneğini görmüş olduk.

$F : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir bir fonksiyonu olsun. $F^* \circ d = d \circ F^*$ olduğundan F^* kapalı formları kapalı, tam formları da tam formlara geri çekecektir. Ayrıca F^* formlar üzerindeki vektör uzayı yapısını koruduğundan, F^* kohomoloji vektör uzayları arasında bir doğrusal homomorfizma verir:

$$F^* : H_{DR}^n(N) \rightarrow H_{DR}^n(M), \quad [\omega] \mapsto [F^*(\omega)].$$

Diğer taraftan, F^* dış çarpımı koruduğu için

$$F^* : H_{DR}^*(N) = \oplus H_{DR}^n(N) \rightarrow \oplus H_{DR}^n(M) = H_{DR}^*(M)$$

bir $\mathbb{R}$ -cebir homomorfizmasıdır: $[\omega], [\nu] \in H_{DR}^*(N)$ olmak üzere

$$F^*([\omega] \wedge [\nu]) = F^*([\omega]) \wedge F^*([\nu]).$$

Aşağıdaki önermenin kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 1).

Önerme 4.1.2. $F : M \rightarrow N$ ve $G : N \rightarrow L$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir fonksiyonları olsun. Bu durumda, $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ olur. Ayrıca, eğer $1_M : M \rightarrow M$ manifoldun birim fonksiyonu ise 1_M^* homomorfizması da $H_{DR}^*(M)$ kohomoloji cebirinin birim fonksiyonu olur.

Bu önermenin içeriği De Rham kohomoloji cebirleri türevlenebilir manifoldlar kategorisinden gerçel sayılar üzerindeki cebirlere bir fonktor verir şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 4.1.3. 1) M n -boyutlu bir manifold ise M üzerindeki her n -form kapalı olacaktır, çünkü M üzerinde sıfırdan başka $(n+1)$ -form yoktur.

2) $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $\omega = f(x) dx$ I üzerinde bir 1-form olsun. O halde, eğer $F(x)$ f 'nin bir ters türevi ise (örneğin, $a \in I$ olmak üzere, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ olarak alabiliriz) $dF = \omega$ olacağından ω tamdır ve dolayısıyla $H_{DR}^1(I) = 0$ olur.

3) U düzlemin açık bir alt kümesi ve

$$\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy \in \Omega^1(U)$$

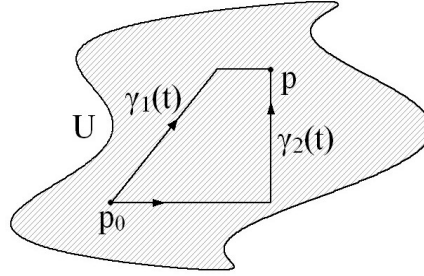
bu küme üzerinde bir 1-form olsun. $d\omega = (g_x - f_y) dx \wedge dy$ olduğundan bu formun kapalı olması $f_y = g_x$ koşuluna denktir. Diğer taraftan, bu formun tam olması $d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy = \omega$ olacak şekilde bir $\phi \in \Omega^0(U)$ fonksiyonunun var olmasına denktir. Şimdi bu türevlenebilir formu U kümesi üzerinde bir diferansiyel denklem gibi görelim:

$$f dx + g dy = 0 .$$

Diferansiyel denklemler dersinden hatırlayacağımız gibi eğer ω formu kapalıysa ve U açık kümesi basit bağlantılı ise (U bölgesinin içinde hiç boşluk yoksa) bu diferansiyel denklem tam diferansiyel denklem olarak adlandırılır ve çözümü de $\phi(x, y) = C$ şeklinde verilir. Dolayısıyla, eğer U basit bağlantılı bir küme ise $H_{DR}^1(U) = 0$ olacaktır. Daha sonra tekrar ele alacak olsak da, $\phi(x, y)$ fonksiyonunun nasıl bulunduğunu gösterelim: U içinde sabit bir $p_0 \in U$ noktası seçelim. Verilen herhangi $p \in U$ noktası için $\phi(p)$ şu şekilde tanımlanır: İlk önce $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $\gamma(a) = p_0$ ve $\gamma(b) = p$ olacak şekilde bir eğri alalım. Şimdi

$$\phi(p) = \int_a^b \gamma^*(\omega)$$

olarak tanımlansın. Green Teoremi'nden (bkz. s. 111) dolayı, ω kapalı 1-form olduğu için bu integral bu iki noktayı birleştiren eğrinin seçiminden bağımsızdır. Son olarak eğriyi aşağıdaki şekildeki gibi seçerek Analizin Temel Teoremi'nden $\phi_x = f$ ve $\phi_y = g$ olduğunu kolayca görürüz ($\phi_x = f$ için $\gamma_1(t)$ ve $\phi_y = g$ için $\gamma_2(t)$).



Şekil 4.1: $\phi_x = f$ ve $\phi_y = g$ olduğunu görmek için kullanılan eğriler

4) Daha önceki bölümlerde de ele aldığımız

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$$

formu kapalıdır ($d\omega = 0$) fakat tam değildir. Çünkü eğer $d\phi = \omega$ ise $\phi = \tan^{-1}(y/x) + C$ olur, fakat bu fonksiyon $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ kümesinin her noktasında tanımlı değildir. O halde, $H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$ kohomoloji vektör uzayı sıfırdan farklıdır (bkz. Önerme 4.1.5 ve Örnek 4.2.5).

Aşağıdaki önerme kapalı formlar için bir tam olmama kriteri oluşturur.

Önerme 4.1.4. *M sınırı olmayan tıkHz yönlendirilebilir n-boyutlu bir manifold ve $\omega \in \Omega^n(M)$ olsun. Eğer ω bir tam form ise*

$$\int_M \omega = 0$$

olur. Dolayısıyla, M üzerinde integrasyon

$$H_{DR}^n(M) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad [\nu] \mapsto \int_M \nu$$

iyi tanımlı bir vektör uzayı homomorfizması verir.

Kanıt : $\omega \in \Omega^n(M)$ bir tam form olsun. O halde $\omega = d\nu$ olacak şekilde bir $\nu \in \Omega^{n-1}(M)$ formu vardır. Şimdi Stokes Teoremi'nden

$$\int_M \omega = \int_M d\nu = \int_{\partial M} \nu = \int_{\emptyset} \nu = 0$$

elde ederiz.

İkinci kısmın kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 2). $\square$

Buraya kadar verdiğimiz bilgilerin ışığında bir boyutlu manifoldların kohomolojilerini hemen hemen hesaplamış durumdayız:

$$H_{DR}^0(\mathbb{R}) = H_{DR}^0(S^1) = \mathbb{R};$$

her $k > 1$ için $H_{DR}^k(\mathbb{R}) = H_{DR}^k(S^1) = 0$ ve $H_{DR}^1(\mathbb{R}) = 0$ olur. O halde, şu ana kadar hesaplanmamış tek kohomoloji grubu çemberin birinci kohomolojisi: $H_{DR}^1(S^1)$.

Önerme 4.1.5. *Çemberin birinci kohomolojisinden gerçel sayıları tanımlanan*

$$I : H_{DR}^1(S^1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad [\nu] \mapsto \int_{S^1} \nu,$$

integral homomorfizması bir izomorfizmadır.

Kanıt : $\omega = \frac{x dy - y dx}{2\pi} \in \Omega^1(S^1)$ formunu

$$P : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta),$$

fonksiyonu ile geri çekersek $P^*(\omega) = d\theta/(2\pi)$ elde ederiz. Bu durumda

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$$

olduğundan $I : H_{DR}^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ homomorfizması örtendir. Şimdi de bu homomorfizmanın çekirdeğini hesaplayalım: $\nu \in \Omega^1(S^1)$ için $I([\nu]) = 0$ olsun. $P^*(\nu) = f(\theta) d\theta$ olacak şekilde bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu seçelim. $\nu(P(\theta)) = \nu(P(\theta + 2\pi))$ olduğundan f fonksiyonu 2π ile periyodiktir: Her $\theta \in \mathbb{R}$ için, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\theta) = \int_0^\theta f(t) dt$ fonksiyonu f için bir ters türevdir: $dF = F'(\theta) d\theta = f(\theta) d\theta = P^*(\nu)$. Diğer taraftan,

$$0 = I([\nu]) = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(t) dt \\ &= \int_0^\theta f(t) dt + \int_\theta^{\theta+2\pi} f(t) dt \\ &= F(\theta) + \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= F(\theta) \end{aligned}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, $F(\theta)$ fonksiyonu $F = \tilde{F} \circ P$ olacak şekilde bir $\tilde{F} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verir. Buna göre,

$$P^*(d\tilde{F}) = d(P^*(\tilde{F})) = d(\tilde{F} \circ P) = dF = P^*(\nu)$$

ve dolayısıyla $P^*(\nu - d\tilde{F}) = 0$ olur. Son olarak, $P : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ yerel olarak her nokta yakınında bir difeomorfizma olduğundan son eşitlik ancak $\nu - d\tilde{F} = 0$ olması durumunda sağlanır. Başka bir deyişle $[\nu] = [d\tilde{F}] = 0$ olmalıdır. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 4.1.6. İleride her boyuttaki küre için aynı sonucu kanıtlayacağız: $n > 0$ olmak üzere $H_{DR}^0(S^n) = H_{DR}^n(S^n) = \mathbb{R}$ ve her $k \neq 0, n$ için $H_{DR}^k(S^n) = 0$ 'dır. Fakat kanıt oldukça farklı olacaktır (bkz. Örnek 4.3.8).

Örnek 4.1.3'den dolayı $H_{DR}^1(D^2) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu sonucu yukarıdaki önerme ile birleştirebilirsek ilginç geometrik ve topolojik sonuçlar elde ederiz.

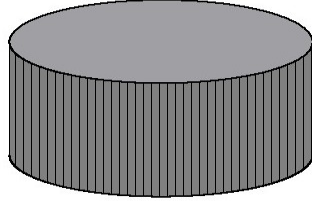
Tanım 4.1.7. X topolojik bir uzay ve $A \subseteq X$ alt uzay ve $r : X \rightarrow A$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için, $r(x) = x$ oluyorsa A alt uzayına X 'in bir küçültmesi ve $r : X \rightarrow A$ fonksiyonuna da küçültme fonksiyonu denir

Teorem 4.1.8. Öklit uzayındaki iki boyutlu yuvardan sınırına hiçbir türevlenebilir $r : D^2 \rightarrow S^1$ küçültme fonksiyonu yoktur.

Kanıt : Kanıtlamak istediğimiz iddianın tersine bir $r : D^2 \rightarrow S^1$ küçültme fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, eğer $i : S^1 \rightarrow D^2$ içirme fonksiyonunu gösterirse $r \circ i : S^1 \rightarrow S^1$ bileşke fonksiyonu S^1 çemberinin birim fonksiyonu olur. O halde, kohomoloji düzeyinde verilen

$$(r \circ i)^* : H_{DR}^1(S^1) = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} = H_{DR}^1(S^1)$$

homomorfizması da birim dönüşümdür. Fakat $H_{DR}^1(D^2) = 0$ olduğundan $i^* : H_{DR}^1(D^2) \rightarrow H_{DR}^1(S^1)$ homomorfizması da aşık olacaktı. Bu durum yukarıdaki bileşke homomorfizmasının birim dönüşüm olması ile açık bir şekilde çelişir. Sonuç olarak böyle bir küçültme fonksiyonu yoktur. $\square$



Şekil 4.2: Teorem 4.1.8 sayesinde davulun derisi gergin bir şekilde kalabiliyor!

Sonuç 4.1.9. Her türevlenebilir $f : D^2 \rightarrow D^2$ fonksiyonun en az bir sabit noktası vardır.

Kanıt : Diyelim ki $f : D^2 \rightarrow D^2$ sabit noktası olmayan bir fonksiyon olsun. O halde, her $x \in D^2$ için, $f(x) \neq x$ olur. Her $x \in D^2$ için $f(x)$ noktasından başlayan ve x noktasından geçen ışının diskin sınırını kestiği noktayı $r(x)$ ile gösterelim. Bu şekilde tanımlanan $r : D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$ fonksiyonun türevlenebilir olduğu kolayca görülür (bkz. Alıştırma 3). Ayrıca bu fonksiyonun tanımından dolayı her $x \in \partial D^2$ için, $r(x) = x$ olacaktır. Başka bir deyişle, $r : D^2 \rightarrow S^1$ bir küçültme fonksiyonudur. Fakat bu yukarıdaki teoremle çelişir. Dolayısıyla, $f(x) = x$ olacak şekilde en az bir $x \in D^2$ noktası vardır. $\square$

Uyarı 4.1.10. İki boyutlu disk için kanıtladığımız bu sonuç aslında her boyuttaki disk için doğrudur. Üst boyutlardaki kanıt yukarıda verdiğimiz kanıtın aynıdır. Bir boyutlu disk için ise kanıt Ara Değer Teoremi'nin basit bir uygulamasıdır. Aslında yukarıdaki iki sonuç sürekli fonksiyonlara da genellenebilir (bkz. Örnek 5.1.8).

4.2 Poincaré Yardımcı Teoremi

Bu bölümde Poincaré Yardımcı Teoremi diye bilinen aşağıdaki sonucu kanıtlayacağız ve daha sonra da bu sonucun bir kaç uygulamasını vereceğiz.

Yardımcı Teorem 4.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere türevlenebilir her M manifoldu için

$$H_{DR}^*(M \times I) = H_{DR}^*(M)$$

olur.

Kanıt : $Pr : M \times I \rightarrow M$ ilk bileşene izdüşüm fonksiyonu ve $a \in I$ herhangi bir sabit nokta olmak üzere

$$i_a : M \rightarrow M \times I, \quad x \mapsto (x, a), \quad x \in M,$$

içerme fonksiyonu olsun. Kanıtın yerel yapısından dolayı manifoldu bir koordinat komşuluğu olarak alacağız: $M \times I = U \times I$, $x_1, \dots, x_n$, U üzerindeki koordinatlar ve t de I aralığı üzerindeki koordinat olsun. Bu durumda $U \times I$ çarpım manifoldu üzerindeki her k -form şu iki tipteki terimlerin sonlu bir toplamıdır: I ve J uzunlukları sırasıyla $k-1$ ve k olan toplu endeksler olmak üzere

$$f(x, t) dx_I \wedge dt \quad \text{ve} \quad g(x, t) dx_J.$$

Şimdi

$$P(f(x, t) dx_I \wedge dt) = (-1)^{k-1} \left(\int_a^t f(x, s) ds \right) dx_I$$

ve $P(g(x, t) dx_J) = 0$ ile tanımlanan

$$P : \Omega^k(M \times I) \rightarrow \Omega^{k-1}(M \times I)$$

doğrusal dönüşümünü düşünelim (bu dönüşümün koordinat sisteminin seçiminin bağımsız olduğunun gösterilmesini alıştırma bırakıyoruz; bkz. Alıştırma 4). Bu dönüşüm dış türev dönüşümünün tam tersi bir şekilde formların derecesini bir azaltmaktadır. Bu integral dönüşümü dış türev dönüşümünün tersi gibi gözükse de formlardaki hesaplamalar biraz farklı sonuçlar verir. Aslında doğrudan basit bir hesaplama

$$(d \circ P + P \circ d)(f(x, t) dx_I \wedge dt) = f(x, t) dx_I \wedge dt$$

ve

$$(d \circ P + P \circ d)(g(x, t) dx_J) = (g(x, t) - g(x, a)) dx_J$$

olduğunu görürüz. Son olarak bu formları $i_a \circ Pr : M \times I \rightarrow M \times I$ bileşkesi ile geri çekelim:

$$(Pr^* \circ i_a^*)(f(x, t) dx_I \wedge dt) = 0$$

ve

$$(Pr^* \circ i_a^*)(g(x, t) dx_J) = g(x, a) dx_J.$$

O halde her $\omega \in \Omega^k(M \times I)$ için,

$$(d \circ P + P \circ d)(\omega) = \omega - (Pr^* \circ i_a^*)(\omega)$$

olur.

Şimdi $\omega \in \Omega^k(M \times I)$ kapalı bir form olsun. Bu durumda

$$[\omega] - (Pr^* \circ i_a^*)[\omega] = [d(P(\omega))] + [P(d\omega)] = 0$$

olduğundan $Pr^* \circ i_a^*$ bileşke homomorfizması kohomoloji seviyesinde birim dönüşümdür. Diğer taraftan, $(Pr \circ i_a) : M \rightarrow M$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğu için $i_a^* \circ Pr^*$ bileşke homomorfizması da kohomoloji seviyesinde birim dönüşümdür. Başka bir deyişle,

$$Pr^* : H_{DR}^k(M \times I) \rightarrow H_{DR}^k(M)$$

ve

$$i_a^* : H_{DR}^k(M) \rightarrow H_{DR}^k(M \times I)$$

homomorfizmaları birbirlerinin tersidir ve dolayısıyla her ikisi de izomorfizmadır. $\square$

Bu sonucu art arda kullanarak aşağıdaki sonucu buluruz.

Sonuç 4.2.2. Her $k \geq 0$ tam sayısı ve türevlenebilir M manifoldu için

$$H_{DR}^*(M \times \mathbb{R}^k) = H_{DR}^*(M)$$

olur. Ayrıca her $i > 0$ için, $H_{DR}^i(\mathbb{R}^k) = 0$ 'dır.

Önerme 4.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olmak üzere

$$i_a^* : H_{DR}^k(M \times I) \rightarrow H_{DR}^k(M)$$

homomorfizması $a \in I$ noktasının seçiminden bağımsızdır.

$$\text{Kanıt : } \omega = \sum_{\|I\|=k-1} f_I(x, t) dx_I \wedge dt + \sum_{\|J\|=k} g_J(x, t) dx_J \in \Omega^k(M \times I)$$

kapalı bir form olsun. O halde

$$\begin{aligned} 0 = d\omega = \sum_{\|I\|=k-1} \sum_i \frac{\partial f_I(x, t)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dt + \sum_{\|J\|=k} \sum_i \frac{\partial g_J(x, t)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J \\ + \sum_{\|J\|=k} \frac{\partial g_J(x, t)}{\partial t} dt \wedge dx_J \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bu formu $\frac{\partial}{\partial t}$ vektör alanı ile daraltırsak

$$(-1)^{k-1} \sum_{\|I\|=k-1} \sum_i \frac{\partial f_I(x, t)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I = \sum_{\|J\|=k} \frac{\partial g_J(x, t)}{\partial t} dx_J$$

eşitliğini buluruz. Diğer taraftan, ω formunu i_t fonksiyonu ile geri çekip t -değişkenine göre $t = a$ noktasında türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=a}(i_t^*(\omega)) &= \sum_{\|J\|=k} \frac{\partial g_J(x, a)}{\partial t} dx_J \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{\|I\|=k-1} \sum_i \frac{\partial f_I(x, a)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \\ &= (-1)^{k-1} d \left(\sum_{\|I\|=k-1} f_I(x, a) dx_I \right) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Başka bir deyişle, $i_t^*(\omega)$ formunun t -değişkenine göre türevi bir tam formdur. Dolayısıyla, $[i_t^*(\omega)]$ kohomoloji sınıfı t -değerinden bağımsızdır. $\square$

M ve N türevlenebilir manifoldlar, I bir aralık, $a, b \in I$, ve $F : M \times I \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyona $f(x) = F(x, a)$ ve $g(x) = F(x, b)$ fonksiyonları arasında bir *homotopi* denir. Bazen sadece f ve g *homotopiktir* de denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir. $f = F \circ i_a$ ve $g = F \circ i_b$ olduğu için yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak

$$f^* = g^* : H_{DR}^*(N) \rightarrow H_{DR}^*(M)$$

olduğunu görürüz. X, Y topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $g \circ f \simeq 1_X$ ve $f \circ g \simeq 1_Y$ birim dönüşümlerine homotopikler ise bu uzaylara *homotopi denk uzaylar* denir. Yukarıda kanıtladığımız sonuçlara göre M ve N türevlenebilir fonksiyonlar aracılığıyla homotopi denk türevlenebilir manifoldlar ise bu manifoldların kohomoloji grupları izomorfiktir.

Uyarı 4.2.4. *Rastgele seçilen $a < c < d < b \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları için her biri içermeye fonksiyonun ürettiği homomorfizma olan şu homomorfizmalar dizisini düşünelim:*

$$H_{DR}^*(\mathbb{R} \times M) \xrightarrow{f} H_{DR}^*([a, b] \times M) \xrightarrow{g} H_{DR}^*((a, b) \times M) \xrightarrow{h} H_{DR}^*([c, d] \times M)$$

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlara göre $g \circ f$ ve $h \circ g$ bileşkeleri izomorfizmadır, çünkü her ikisi de difeomorfizmalara homotopiktir. Dolayısıyla, g homomorfizması hem örten hem de bire birdir. Başka bir deyişle, g bir izomorfizmadır. O halde, bu dizideki tüm homomorfizmalar birer izomorfizmadır.

Örnek 4.2.5. *I herhangi bir aralık ve $P : S^1 \times I \rightarrow S^1$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, yukarıda kanıtladığımız sonuçları kullanarak,*

$$P^* : H_{DR}^*(S^1) \rightarrow H_{DR}^*(S^1 \times I)$$

homomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu görürüz. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f : S^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad (x, t) \mapsto (tx),$$

bir difeomorfizma olduğundan $H_{DR}^k(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) = H_{DR}^k(S^n)$ elde edilir.

Şimdi de Örnek 2.3.13'de ele aldığımız Möbius Şeridi'nin, MB , kohomolojisi hesaplayalım:

$$MB = \mathbb{R} \times [0, 1] / (x, y) \sim (x + 1, 1 - y).$$

$C = \{(x, y) \in MB \mid y = 1/2\}$ alt manifoldunun çembere difeomorfik olduğu kolayca görülür. $f : C \rightarrow MB$, $(x, 1/2) \mapsto (x, 1/2)$ içermesi ve $g : MB \rightarrow C$, $(x, y) \mapsto (x, 1/2)$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Bu durumda $g \circ f = 1_C$ ve $f \circ g \simeq 1_{MB}$ olduğu görülür:

$$F : MB \times [0, 1] \rightarrow MB, \quad F((x, y), t) = (x, t/2 + (1 - t)y),$$

olarak tanımlanırsa $F((x, y), 0) = (x, y)$ ve $F((x, y), 1) = (x, 1/2)$ olacağından $f \circ g$ Möbius Şeridi'nin birim fonksiyonuna homotopik olacaktır. O halde, $f^* : H_{DR}^*(MB) \rightarrow H_{DR}^*(C)$ bir izomorfizmadır.

Bu bölümde son olarak iki boyutlu kürenin kohomolojisi hesaplayacağız. Kullanacağımız hesaplama yöntemi bir sonraki bölümün temel konusu olacağı için bu kanıt ayrıca önemlidir.

Teorem 4.2.6. *Kürenin ikinci kohomolojisinden gerçel sayılara tanımlanan*

$$I : H_{DR}^2(S^2) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad [\nu] \mapsto \int_{S^2} \nu,$$

integral homomorfizması bir izomorfizmadır.

Kanıt : Bir önceki bölümde $\omega_0 = x \, dy \wedge dz - y \, dx \wedge dz + z \, dx \wedge dy$ olmak üzere

$$\int_{S^2} \omega_0 = 4\pi$$

olduğunu görmüştük. Dolayısıyla, integral homomorfizması örtendir. Şimdi de $\int_{S^2} \omega = 0$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega^2(S^2)$ (kapalı) 2-formu alalım. Kanıtın tamamlanması için bu formun tam olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $N = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > -1/2\}$ ve $S = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 1/2\}$ alt kümelerini düşünelim. Her iki alt küme de iki boyutlu yuvara difeomorfiktir ve $H_{DR}^2(D^2) = 0$ olduğundan ω formunun bu açık kümelere kısıtlamaları tam formdur. Başka bir deyişle, $\omega|_N = d\nu_N$ ve $\omega|_S = d\nu_S$ olacak şekilde $\nu_N \in \Omega^1(N)$ ve $\nu_S \in \Omega^1(S)$ 1-formları vardır. $R_t = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > t\}$ kümesi olmak üzere her $t \in (-1/2, 1/2)$ için

$$0 = \int \omega = \int_{\overline{R}_t} \omega + \int_{S^2 - R_t} \omega = \int_{\overline{R}_t} d\nu_N + \int_{S^2 - R_t} d\nu_S$$

olduğundan Stokes Teoremi'ni kullanarak

$$\int_{z=t} \nu_N - \nu_S = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan, $z = t$ çemberinden $N \cap S$ silindrine giden içirme fonksiyonu kohomolojide izomorfizma verdiği için $\nu_N - \nu_S = df$ olacak şekilde bir $f : N \cap S \rightarrow \mathbb{R}$ 0-formu vardır. Bu fonksiyonu tüm S alt manifoldunun türevlenebilir bir fonksiyonuna genişletelim. Şimdi

$$\nu(p) \doteq \begin{cases} \nu_N(p) & , \quad p \in N \\ \nu_S(p) + df(p) & , \quad p \in S \end{cases}$$

formunu tanımlayalım. $N \cap S$ ara kesit kümesi üzerinde

$$\nu_S + df = \nu_S + (\nu_N - \nu_S) = \nu_N$$

olduğundan ν küre üzerinde iyi tanımlanmış bir 1-formdur. Son olarak

$$\begin{aligned} d\nu(p) &= \begin{cases} d\nu_N(p) & , \quad p \in N \\ d\nu_S(p) + d^2f(p) & , \quad p \in S \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega|_N(p) & , \quad p \in N \\ \omega|_S(p) & , \quad p \in S \end{cases} \\ &= \omega(p) \end{aligned}$$

olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

4.3 Hesaplamalar ve Uygulamalar

Bu bölümde ilk önce, sadece çemberin ve bir delikli düzlemin kohomolojisini kullanarak bazı topolojik değişmezler tanımlayıp hesaplamalar yapacağız. Daha sonra, manifoldların kohomolojilerini hesaplamakta çokça kullanılan Mayer-Vietoris dizisi yardımıyla bazı temel manifoldların kohomolojilerini hesaplayacağız.

4.3.1 Sarılma, Dönme ve Geçişme Sayıları

Poincaré Yardımcı Teoremi'nin sonucu olarak

$$H_{DR}^k(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = H_{DR}^k(S^1 \times \mathbb{R}^1) \simeq H_{DR}^k(S^1)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, bir boyutlu

$$H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq H_{DR}^1(S^1)$$

kohomoloji grubu $\omega = \frac{x dy - y dx}{2\pi(x^2 + y^2)} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ kapalı formuyla üretilir. $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ türevlenebilir bir fonksiyon ise bu fonksiyonun *sarılma*

sayısı $\int_{S^1} f^*(\omega)$ ile tanımlanır ve $\omega(f)$ ile gösterilir. Bu sayı her zaman bir tam sayıdır ve aslında $f(S^1)$ eğrisinin düzlemin merkezi etrafında kaç defa sarıldığını gösterir. Saat yönünün tersi istikametinde sarılma pozitif, saat yönünde ise sarılma negatif tam sayılara karşılık gelir. Aslında

$$P : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow S^1, (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|},$$

izdüşüm fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonunun sarılma sayısı, $P \circ f : S^1 \rightarrow S^1$ bileşkesinin derecesinden başka bir şey değildir, çünkü f ile $P \circ f$ fonksiyonları homotopiktir (bkz. Teorem 4.3.22). Ayrıca Alıştırma 19 kullanılarak f fonksiyonunun homotopi sınıfının sadece sarılma sayısı ile belirlendiği kolayca gösterilebilir. Şekil 4.3 Stokes Teoremi'ni kullanarak bu sayının nasıl hesaplanabileceğini göstermektedir. Şekil 4.3a sarılma sayısı iki olan bir eğrinin görüntüsüdür. Bu eğrinin sarılma sayısının gerçekten iki olduğunu taralı bölgelere Stokes Teoremi'ni uygulayarak görebiliriz: Taralı bölgeler orijini içermediği için

$$\int_{\partial R_i} \omega = \int_{R_i} d\omega = 0$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\int_{S^1} f^*(\omega) = \int_{C=f(S^1)} \omega = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} \omega$$

elde edilir. Son iki integral orijin C_3 ve C_4 eğrilerinin dışında kaldığı için sıfıra eşit olur. Diğer taraftan ilk iki integral Stokes teoreminden dolayı yarıçapı yeterince küçük S_r^1 çemberi boyunca integraline eşit olacaktır. O halde, sarılma sayısı

$$\int_{S^1} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} \omega = 2 \int_{S_r^1} \omega = 2$$

olarak bulunur.

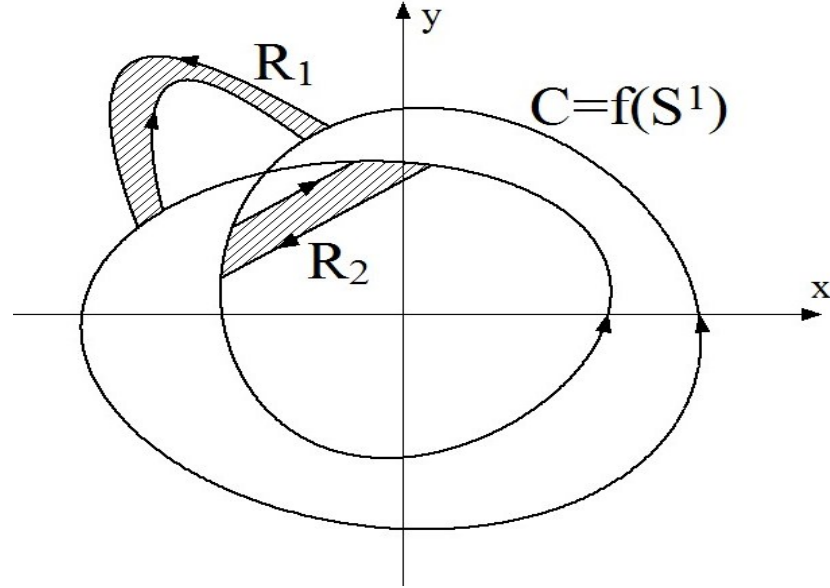
Örnek 4.3.1. Herhangi bir $n \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için,

$$f : S^1 \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 - \{0\}, f(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos n\theta, \sin n\theta),$$

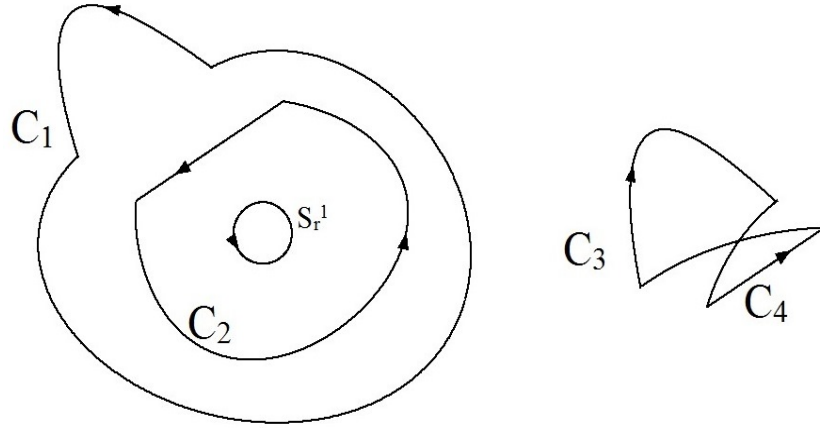
ile tanımlanan fonksiyonun sarılma sayısı n olacaktır: Doğrudan hesap yaparak $f^*(\omega) = n\omega$ olduğu kolayca görülür ve dolayısıyla,

$$\omega(f) = \int_{S^1} f^*(\omega) = n \int_{S^1} \omega = n$$

olarak elde edilir.



(a) Sarılma sayısı iki olan bir eğri: $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere
 $x(t) = (3 + \sin(t + 10)) \cos 2t$, $y(t) = -(4 + \cos(t + 3)) \sin 2t$



(b) Sarılma sayısının Stokes (Greens') Teoremi'nin yardımıyla hesaplanması

Şekil 4.3

$\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir daldırma fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun teğet doğrusu-
sunu veren

$$\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}, \sigma(\theta) = \dot{\gamma}(\theta)$$

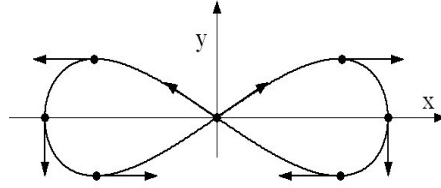
Gauss gönderiminin sarılma sayısına γ eğrisinin *dönme sayısı* denir ve $Rot(\gamma)$ ile gösterilir. Dolayısıyla, bir daldırma fonksiyonun dönme sayısı bu eğrinin teğetinin eğri üzerinde hareket ederken saat yönünün tersi istikametinde kaç tur döndüğünü söyler. Aşağıdaki örnekte çeşitli eğrilerin dönme sayıları verilmiştir.

Örnek 4.3.2. 1) $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(p) = p$ daldırma fonksiyonun dönme sayısı birdir (bkz. Şekil 2.1).

2) $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(x, y) = (y, xy)$ daldırma fonksiyonun dönme sayısının sıfır olduğu şekilden görülür (Şekil 4.4). Bu sayıyı doğrudan tanımını kullanarak da hesaplayabiliriz: Fonksiyonu $\gamma(\theta) = (\sin \theta, \sin \theta \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, olarak yazarsak $\sigma(\theta) = \dot{\gamma}(\theta) = (\cos \theta, \cos 2\theta)$, buluruz ve dolayısıyla

$$\sigma^*(\omega) = \frac{\cos 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin 2\theta}{2\pi (\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta)} d\theta$$

elde ederiz.



Şekil 4.4: Teğet vektörler pozitif y -eksenine hiçbir zaman paralel olmadığı için eğri üzerinde hareket ederken teğet vektörleri merkez etrafında tam bir dönüş yapmamaktadır. Dolayısıyla, eğrinin dönme sayısı sıfırdır.

O halde, eğrinin dönme sayısı

$$\begin{aligned} Rot(\gamma) &= \int_{S^1} \sigma^*(\omega) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin 2\theta}{2\pi (\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta)} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin 2\theta}{2\pi (\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta)} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. En son eşitlik integrali alınan ifadenin tek fonksiyon olmasının sonucudur.

3) Kutupsal koordinatlarda $r = \sin 3\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, ile verilen eğrinin parametrik ifadesi

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\theta) = (\sin 3\theta \cos \theta, \sin 3\theta \sin \theta)$$

gibidir ve Şekil 4.5'ten dönme sayısının iki olduğu kolayca görülür. Hesap yaparsak

$$\sigma(\theta) = \dot{\gamma}(\theta) = (2 \cos 4\theta + \cos 2\theta, 2 \sin 4\theta - \sin 2\theta)$$

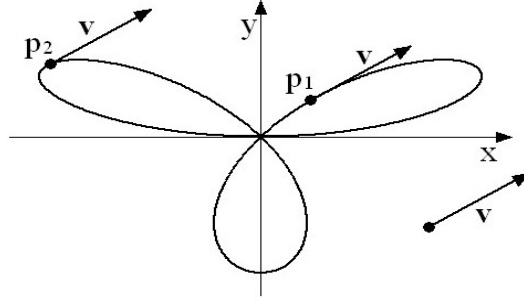
olarak buluruz ve dolayısıyla

$$\sigma^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{14 + 4 \cos 6\theta}{5 + 4 \cos 6\theta} d\theta$$

elde ederiz. Bu durumda, eğrinin dönme sayısı

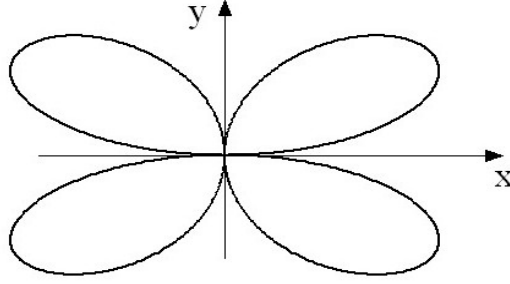
$$\begin{aligned} \text{Rot}(\gamma) &= \int_{S^1} \sigma^*(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{14 + 4 \cos 6\theta}{5 + 4 \cos 6\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{12\pi} \int_0^{6\pi} \frac{14 + 4 \cos \phi}{5 + 4 \cos \phi} d\phi \\ &= \frac{3}{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{14 + 4 \cos \phi}{5 + 4 \cos \phi} d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{14 + 4 \cos \phi}{5 + 4 \cos \phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{18 + 10u^2}{(9 + u^2)(1 + u^2)} du \\ &= 2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sondan ikinci eşitlik $u = \tan(\phi/2)$ değişken dönüşümü yardımıyla elde edilmiştir.

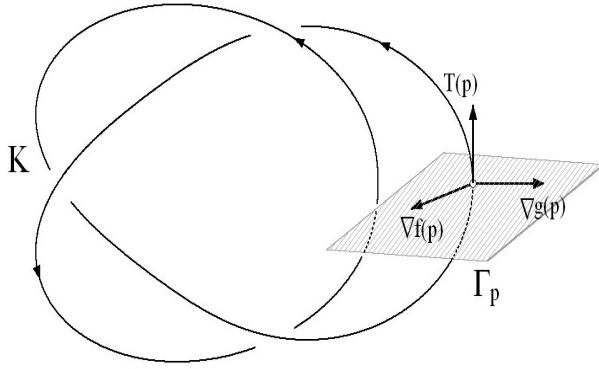


Şekil 4.5: Dönme sayısı iki olan bir eğri: $r = \sin 3\theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Eğrinin, düzlemde verilen hemen hemen her vektöre paralel olan tam olarak iki teğet vektörü olduğuna dikkat ediniz!

4) Kutupsal koordinatlarda $r = \sin 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ile verilen eğrinin dönme sayısının üç olduğu Şekil 4.6'dan kolayca görülür. İntegral ile dönme sayısının hesaplanması ise alıştırma olarak sizlere bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 6).



Şekil 4.6: Dönme sayısı üç olan bir eğri: $r = \sin 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



Şekil 4.7: Trefoil düğümü: $x(t) = (4 + \cos 3t) \cos 2t$, $y(t) = (4 + \cos 3t) \sin 2t$ ve $z(t) = \sin 3t$, $t \in [0, 2\pi]$. Bu düğüm $[(x^2 + y^2 + z^2) + 15]^2 = 64(x^2 + y^2)$ ile verilen torusun içinde oturmaktadır (bkz. Örnek 2.3.5). İki boyutlu resim ise düğümün $(x, y, z) \mapsto (x, y + 0.5z)$ doğrusal dönüşümü altındaki görüntüsüdür.

Aşağıdaki önerme dönme sayısının daldırma fonksiyonun topolojik özelliklerini yansıttığının bir delilidir. Kanıtı için Do Carmo'ya bakabilirsiniz ([10], s. 460, Teorem 2).

Önerme 4.3.3. *Eğer herhangi bir daldırma fonksiyonu aslında bir gömme fonksiyonu ise bu fonksiyonun dönme sayısı her zaman ± 1 olur.*

$H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$ kohomolojisinin son bir uygulaması olarak S^3 içindeki iki düğümün geçişme sayısından bahsedeceğiz. $i: S^1 \rightarrow S^3$ türevlenebilir bir gömme fonksiyonu olsun. Bu gömme fonksiyonunun $K = i(S^1)$ görüntüsüne bir *düğüm* denir. $K \subset S^3$ alt manifoldu $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gibi iki türevlenebilir fonksiyonun ortak sıfırı olsun,

$$K = \{p \in S^3 \mid f(p) = 0 = g(p)\},$$

öyle ki, her $p \in K$ için, $\{\nabla f(p), \nabla g(p), T(p) \doteq \dot{i}(t_0)\}$ ($i(t_0) = p$) kümesi $T_p S^3$ vektör uzayı için pozitif bir taban olsun (bu üçlü sağ el kuralına uysun). Bu durumda

$$\omega_K = \frac{f dg - g df}{2\pi (f^2 + g^2)} \in \Omega^1(S^3 - K)$$

formuna K düğümünün *geçişme formu* denir. Şimdi küreden bir nokta çıkararak düğümün $\mathbb{R}^3$ içinde kaldığını kabul edelim. $p \in K$ herhangi bir nokta olmak üzere, Γ_p bu noktadan geçen ve $\nabla f(p)$, $\nabla g(p)$ vektörlerine paralel olan düzlem olsun. Bu düzlem üzerindeki her bir $q \in \Gamma_p$ noktasını

$$q - p = u \nabla f(p) + v \nabla g(p)$$

şeklinde yazarak Γ_p düzlemi üzerinde u, v doğrusal koordinat sistemini elde ederiz. Bu doğrusal koordinat sistemini $f, g : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının verdiği koordinat sistemi ile değiştirelim. Bu durumda

$$f(q) = f(u, v) = f(p + u \nabla f(p) + v \nabla g(p))$$

ve

$$g(q) = g(u, v) = g(p + u \nabla f(p) + v \nabla g(p))$$

fonksiyonlarının doğrusal u, v koordinatlara göre türevlerinden oluşan Jakobiye matrisi

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \nabla f(p) \cdot \nabla f(p) & \nabla g(p) \cdot \nabla f(p) \\ \nabla f(p) \cdot \nabla g(p) & \nabla g(p) \cdot \nabla g(p) \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Bu matrisin determinanı $0 < \theta < \pi$ iki gradyan vektörü arasındaki açı olmak üzere

$$\det(J) = \|\nabla f(p)\|^2 \|\nabla g(p)\|^2 - (\nabla f(p) \cdot \nabla g(p))^2 = \|\nabla f(p)\|^2 \|\nabla g(p)\|^2 \sin^2 \theta$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, $x = f$ ve $y = g$, doğrusal u, v koordinatlarıyla aynı yönlendirmeye sahip bir başka koordinat sistemi verir. Ayrıca, ω_K formunun bu düzleme kısıtlanması ise

$$\omega_K = \frac{x dy - y dx}{2\pi (x^2 + y^2)} \in \Omega^1(\Gamma_p - \{p\})$$

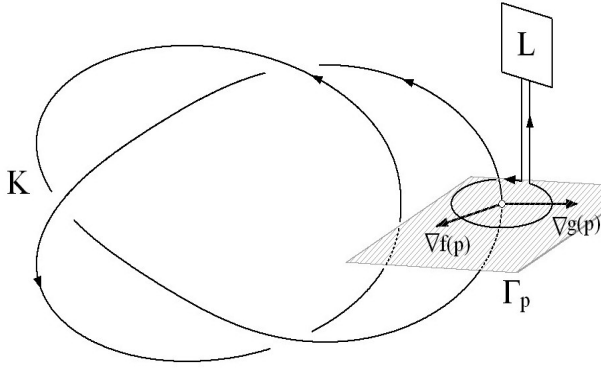
formu olacaktır.

Eğer $j : S^1 \rightarrow S^3$, $L \doteq j(S^1)$, $L \cap K = \emptyset$, olacak şekilde bir başka yönlendirilmiş düğüm ise

$$\int_L \omega_K$$

gerçek sayısına bu iki yönlendirilmiş düğümün *geçişme sayısı* denir ve $l(K, L)$ ile gösterilir. Şekil 4.8 ve Stokes Teoremi'ni kullanarak bu sayının her zaman bir tam sayı olduğunu görürüz. Bu sayı L düğümünün K düğümü etrafında saat yönünün tersi istikametindeki dönme sayısından başka bir şey değildir. Yönlendirilmiş düğümlerin geçişme sayısının simetrik olduğu kolayca görülür:

$$l(K, L) = l(L, K) .$$



Şekil 4.8: L düğümü ile Trefoil'in geçişme sayısını Stokes Teoremi'ni yardımıyla bulabiliriz. Bunun için L düğümünün belli bölümlerini $\mathbb{R}^3 - K$ içinde hareket ettirerek yandaki şekildeki gibi Γ_p düzleminin içine itebiliriz. Geçişme sayısını veren integralin bu düzlem içinde kalan kısmı ise düzlemin merkezi etrafındaki sarılma sayısı olacaktır.

Gauss geçişme sayısını farklı bir şekilde tanımlamıştır: $i, j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yukarıdaki ayrık düğümler olsun. Bu durumda

$$\phi : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}, (s, t) \mapsto i(s) - j(t)$$

ve

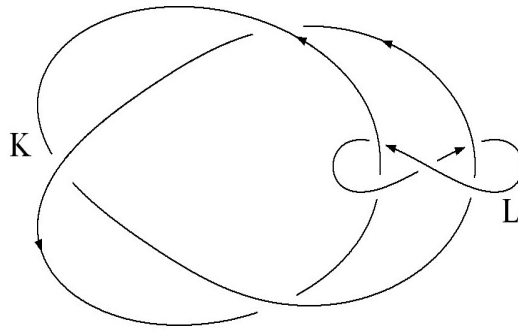
$$\omega_3 = \frac{x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

olmak üzere

$$\pm \int_{S^1 \times S^1} \phi^*(\omega_3)$$

gerçel sayısı bu iki düğümün geçişme sayısıdır (bkz. Alıştırma 7).

Uyarı 4.3.4. 1) Bir düzlem ile birbirinden ayrılan iki düğümün geçişme sayısının sıfır olduğu kolayca görülür. Şekil 4.9'da verilen örnek ise bunun tersinin doğru olmadığını gösterir.



Şekil 4.9: Geçişme sayısı sıfır olan iki düğüm: $l(K, L) = 0$.

2) $K = \{p \in S^3 \mid f(p) = 0 = g(p)\}$ ve $\epsilon^2 + \nu^2 > 0$ koşulunu sağlayan yeterince küçük ϵ ve ν sayıları için $K_{\epsilon, \nu} = \{p \in S^3 \mid f(p) = \epsilon, g(p) = \nu\}$

ile veriliyorsa ($K_{\epsilon,\nu}$ düğümü K 'nin bir ötelemesi ise) $l(K_{\epsilon,\nu}, K)$ geçişme sayısını hesaplayalım.

$$l(K_{\epsilon,\nu}, K) = \int_K \omega_{K_{\epsilon,\nu}} = \int_K \frac{(f - \epsilon) dg - (g - \nu) df}{2\pi ((f - \epsilon)^2 + (g - \nu)^2)} = 0$$

integrali açık bir şekilde sıfıra eşittir, çünkü K üzerinde $df = dg = 0$ 'dır. Bu düğümü kendisini kesmeyecek şekilde itince geçişme sayısı sıfırdan farklı değerler alabilir. Aslında, geçişme sayısı istediğimiz tam sayıya eşit olacak şekilde düğümü itebiliriz (bkz. Alıştırma 8).

3) Son olarak geçişme sayısını hesaplamamanın bir diğer yolunu daha verelim:

$$K = \{p \in S^3 \mid f(p) = 0 = g(p)\} \subset S^3$$

düğümünün L düğümünü kesmeyen yeterince küçük bir tüp komşuluğunun sınırı $T^2 = \partial N$ olsun ($N = \{p \in S^3 \mid f^2(p) + g^2(p) \leq \epsilon^2\}$). Bu durumda

$$l(K, L) = \pm \int_{T^2} \omega_K \wedge \omega_L$$

olur. Bunu görmek için T^2 torusunu $T^2 = K_{\epsilon,0} \times S^1$ şeklinde yazalım. $l(K_{\epsilon,0}, L) = l(K, L)$ ve $l(K, S^1) = \pm 1$ olduğundan

$$\int_{T^2} \omega_K \wedge \omega_L = \pm \int_{K_{\epsilon,0}} \omega_L \cdot \int_{S^1} \omega_K = \pm l(K, L) \cdot 1 = \pm l(K, L)$$

elde edilir (bkz. Alıştırma 8).

Geçişme sayısının bir genellemesi için 5. Ünite'deki Alıştırma 8'e bakabilirsiniz.

4.3.2 Mayer-Vietoris Dizisi

$$(A_*, d_*) : \quad \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

şeklindeki bir grup (vektör uzayı) zincir yapısı olsun. Eğer herhangi bir n tam sayısı için, $\text{Im}(d_{n-1} : A_{n-1} \rightarrow A_n) = \ker(d_n : A_n \rightarrow A_{n+1})$ ($H^n(A_*, d_*) = 0$) ise bu yapıya n 'inci seviyede tamdır denir. Eğer her n için $H^n(A_*, d_*) = 0$ ise bu zincire tam zincir denir.

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

şeklinde bir tam zincire kısa tam dizi veya yapı denir.

Uyarı 4.3.5. Yukarıda verdiğimiz dizinin daha kısıası sadece bir izomorfizmadır. Başka bir deyişle,

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul $f : A \rightarrow B$ homomorfizmasının bir izomorfizma olmasıdır. Benzer şekilde,

$$\dots \xrightarrow{d_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

tam dizisinde $d_{n-1} = 0 = d_{n+1}$ olması için gerek ve yeter koşul d_n homomorfizmasının bir izomorfizma olmasıdır.

Verilen iki (A_*, d_*^A) ve (B_*, d_*^B) zincir yapıları arasındaki bir

$$f^* = (f_n : A_n \rightarrow B_n)$$

homomorfizmalar dizisi her n için,

$$d^B \circ f_n = f_{n+1} \circ d^A$$

koşulunu sağlıyorsa bu homomorfizmalar dizisine *zincir fonksiyonu* (*homomorfizması*) denir.

$f^* : (A_*, d_*^A) \rightarrow (B_*, d_*^B)$ ve $g^* : (B_*, d_*^B) \rightarrow (C_*, d_*^C)$ iki zincir fonksiyonu olsun. Eğer her n için

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$$

bir kısa tam dizi oluyorsa

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f^*} B_* \xrightarrow{g^*} C_* \rightarrow 0$$

zincir fonksiyonları dizisine *kısa tam zincir yapıları dizisi* denir.

Her $f^* : (A_*, d_*^A) \rightarrow (B_*, d_*^B)$ zincir fonksiyonu kohomoloji düzeyinde homomorfizma verir: $f^* : H^n(A_*) \rightarrow H^n(B_*)$. Burada tek dikkat edilmesi gereken nokta her n için

$$d^B \circ f_n = f_{n+1} \circ d^A$$

olduğundan kohomoloji düzeyinde $f^*([a]) \doteq [f^*(a)]$ şeklinde tanımlanan homomorfizmanın iyi tanımlı olduğudur. Bu basit alıştırmayı okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 9). Şimdi bu bölümde çokça kullanacağımız cebirsel bir sonucu verelim.

Teorem 4.3.6.

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f^*} B_* \xrightarrow{g^*} C_* \rightarrow 0$$

bir kısa tam zincir yapıları dizisi olsun. Bu durumda kohomoloji düzeyinde

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(A_*) \xrightarrow{f^*} H^n(B_*) \xrightarrow{g^*} H^n(C_*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A_*) \xrightarrow{f^*} \dots$$

şeklinde bir uzun tam dizi vardır.

Kanıt : Kanıtın büyük bir bölümü aşağıdaki şekilde bulunan okları takip etmekten ibarettir. f^* ve g^* homomorfizmalarının neden iyi tanımlı olduğu ve dizinin tam dizi olduğunun gösterilmesi okuyucuya bırakılmıştır. Kanıtın içinde açık olmayan tek kısım

$$\delta : H^n(C_*) \rightarrow H^{n+1}(A_*)$$

bağlantı homomorfizmasının tanımlanmasıdır. Bu kısmın kanıtı teoremin geri kalanın kanıtlanmasında izlenebilecek yolu da göstermektedir. Aşağıdaki değişmeli şekli düşünelim.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \rightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & B_n & \xrightarrow{g} & C_n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \rightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} \rightarrow 0 \end{array}$$

Herhangi bir $[c] \in H^{n-1}(C_*)$ elemanı alalım. $g : B_{n-1} \rightarrow C_{n-1}$ örten olduğu için $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B_{n-1}$ vardır. Diyagramın sağ üst dikdörtgeni değişmeli olduğundan $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$ elde edilir. O halde, $f(a) = d(b)$ olacak şekilde bir $a \in A_n$ vardır. $a \in A_n$ elemanının kapalı olduğunu ($d(a) = 0$) şu şekilde görebiliriz: $f(d(a)) = d(f(a)) = d^2(b) = 0$ ve $f : A_{n+1} \rightarrow B_{n+1}$ bire bir olduğundan $d(a) = 0$ elde edilir. Son olarak $\delta([c]) \doteq [a]$ şeklinde tanımlanır. Elbette bunun iyi tanımlı bir homomorfizma olduğunun gösterilmesi de gerekmektedir. Bunu da kanıtın geri kalanı gibi okuyucuya bırakıyoruz. $\square$

Bu cebirsel sonucu manifoldların De Rham kohomolojilerini hesaplamak için kullanacağız. Mayer-Vietoris dizisi diye adlandırılan bu sonuç iki açık kümenin birleşimi olarak ifade edilen bir manifoldun kohomolojisini bu alt kümelerinin kohomoloji grupları cinsinden ifade etmektedir: M türevlenebilir bir manifold ve $M = U \cup V$ bu manifoldun iki açık kümenin birleşimi olarak yazılımı olsun. $i_U : U \rightarrow M$, $i_V : V \rightarrow M$ ve $j_U : U \cap V \rightarrow U$, $j_V : U \cap V \rightarrow V$ ile içermeye fonksiyonlarını gösterelim.

Teorem 4.3.7. Her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$0 \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i_U^* \oplus i_V^*} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

dizisi tamdır ve dolayısıyla

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(M) \xrightarrow{i_U^* \oplus i_V^*} H_{DR}^k(U) \oplus H_{DR}^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H_{DR}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

şeklinde bir uzun tam dizi vardır.

Kanıt : Bir önceki teoremden dolayı tek yapmamız gereken

$$0 \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i_U^* \oplus i_V^*} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

dizisinin tam olduğunu göstermektir.

$M = U \cup V$ olduğundan M üzerindeki bir formun hem U hem de V alt kümelerine kısıtlamaları sıfır ise bu form M üzerinde de sıfır olacaktır. Dolayısıyla, $i_U^* \oplus i_V^*$ homomorfizması bire birdir.

$$(i_U, i_V) \circ j_U = (i_U, i_V) \circ j_V$$

eşitliğinden dolayı $\text{Im}(i_U^* \oplus i_V^*) \subseteq \ker(j_U^* - j_V^*)$ olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, $j_U^*(\omega_U) - j_V^*(\omega_V) = 0$ olacak şekilde $\omega_U \in \Omega^k(U)$ ve $\omega_V \in \Omega^k(V)$ varsa

$$\omega(p) = \begin{cases} \omega_U(p) & , \quad p \in U \\ \omega_V(p) & , \quad p \in V \end{cases}$$

ile tanımlanan $\omega \in \Omega^k(M)$ formu için $(i_U^* \oplus i_V^*)(\omega) = (\omega_U, \omega_V)$ olacaktır. Dolayısıyla, $\ker(j_U^* - j_V^*) \subseteq \text{Im}(i_U^* \oplus i_V^*)$ ve $\ker(j_U^* - j_V^*) = \text{Im}(i_U^* \oplus i_V^*)$ elde edilir. Son olarak $j_U^* - j_V^*$ homomorfizmasının örten olduğunu gösterelim. Bunun için bir $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ formu alalım. $M = U \cup V$ açık örtüsü ile uyumlu bir $\{\rho_U, \rho_V\}$ birimin ayrışımı alalım. ρ_U fonksiyonu U dışında sıfırdır. Bu durumda, $\rho_U \omega \in \Omega^k(U \cap V)$ formunun tanım kümesini bu formu $V - (U \cap V)$ üzerinde sıfır tanımlayarak genişletirsek $\rho_U \omega$ formunu $\Omega^k(V)$ içinde düşünebiliriz. Benzer şekilde $\rho_V \omega \in \Omega^k(U)$ olacaktır. O halde, $(j_U^* - j_V^*)(\rho_V \omega, -\rho_U \omega) = (\rho_U + \rho_V) \omega = \omega$ eşitliğini elde ederiz. Başka bir deyişle, $j_U^* - j_V^*$ homomorfizması örten dir. $\square$

Bu kanıtın ana fikrini bir önceki bölümde verilen $H_{DR}^2(S^2) = \mathbb{R}$ sonucunun kanıtında da görmüştük.

Örnek 4.3.8. Bu örnekte n -boyutlu S^n küresinin kohomoloji gruplarını hesaplayacağız. Aşında n endeksi üzerine tümevarım yöntemi ile

$$H_{DR}^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = 0 \text{ veya } n \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olduğunu kanıtlayacağız. Örnek 4.1.5'de $n = 1$ durumunu zaten görmüştük. Fakat kanıtın bütünlüğünü bozmamak için bu bilgiyi kullanmayalım. $U = S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}$ ve $V = S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$ olmak üzere $S^n = U \cup V$ olarak yazalım. Bu durumda U ve V alt uzayları $\mathbb{R}^n$ 'ye ve $U \cap V$ ara kesiti de $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ manifolduna difeomorfik olacaktır. O halde, her $k > 0$ için $H_{DR}^k(U) = 0 = H_{DR}^k(V)$ ve $H_{DR}^k(U \cap V) = H_{DR}^k(S^{n-1} \times \mathbb{R}) = H_{DR}^k(S^{n-1})$ olduğunu görürüz (son eşitlik Poincaré Yardımcı Teoremi'nden elde edilir). Şimdi Mayer-Vietoris dizisinin bir parçasını yazalım:

$$\dots \rightarrow H_{DR}^{k-1}(S^n) \rightarrow H_{DR}^{k-1}(U) \oplus H_{DR}^{k-1}(V) \rightarrow H_{DR}^{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(S^n) \rightarrow$$

$$H_{DR}^k(U) \oplus H_{DR}^k(V) \rightarrow \cdots$$

İlk önce, $k = 1$ durumuna bakalım:

$$0 \rightarrow H_{DR}^0(S^n) \rightarrow H_{DR}^0(U) \oplus H_{DR}^0(V) \rightarrow H_{DR}^0(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^1(S^n) \rightarrow 0.$$

Buradan açık bir şekilde $H_{DR}^1(S^1) = \mathbb{R}$ ve $n > 1$ için $H_{DR}^1(S^n) = 0$ olduğunu görürüz. Yukarıdaki diziyi $n = 1, k > 1$ için tekrar yazarsak

$$0 \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(S^1) \rightarrow 0$$

ve dolayısıyla $H_{DR}^k(S^1) = 0$ elde ederiz. O halde, tümevarımın $n = 1$ başlangıç koşulunun sağlandığını göstermiş olduk.

Şimdi $n > 1$ durumunu ele alalım. S^n bağlantılı olduğundan $H_{DR}^0(S^n) = \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz; dolayısıyla $k > 0$ alabiliriz. Bu durumda $k \neq n$ olduğu zaman, tümevarım hipotezinden dolayı, yukarıdaki dizi

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^{k-1}(U) \oplus H_{DR}^{k-1}(V) \rightarrow 0 \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(S^n) \rightarrow 0 \cdots$$

haline gelecektir. Başka bir deyişle $H_{DR}^k(S^n) = 0$ olur. Diğer taraftan $k = n > 1$ ise dizi

$$0 \rightarrow H_{DR}^{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(S^n) \rightarrow 0 \cdots$$

haline geleceğinden $H_{DR}^{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(S^n)$ homomorfizması bir izomorfizma olacaktır. Başka bir deyişle, $n > 1$ için $H_{DR}^n(S^n) = \mathbb{R}$ olduğunu görürüz. Böylece kanıt tamamlanır.

Daha önce $H_{DR}^1(S^1) = \mathbb{R}$ olmasının bazı topolojik sonuçlarını görmüştük (bkz. Teorem 4.1.8, Sonuç 4.1.9). Bu sonuçların n -boyutlu küre S^n için genellemeleri alıştırılmalarda verilmiştir (bkz. Alıştırma 10 ve 11).

Örnek 4.3.9. Bu örnekte yine tümevarım yöntemiyle

$$H_{DR}^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olduğunu göstereceğiz. $\mathbb{C}P^1 = S^2$ için bu sonucu yukarıdaki örnekte gördük. Şimdi $n > 1$ olduğunu kabul edelim. $p = [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{C}P^n$ noktasının $U = \{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_n \neq 0\}$ komşuluğu ve $V = \mathbb{C}P^n - \{p\}$ kümeleri açık bir şekilde tüm projektif uzayı örter. U açık kümesinin $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ manifolduna

$$[z_0 : \cdots : z_n] \mapsto (z_0/z_n, \dots, z_{n-1}/z_n)$$

fonksiyonu ile difeomorfik olduğunu zaten biliyoruz. O halde, $U \cap V$ ara kesit kümesi de $\mathbb{R}^{2n} - \{(0, \dots, 0)\} = S^{2n-1} \times \mathbb{R}$ manifolduna difeomorftir. V kümesinin kohomolojisini hesaplayabilmek için

$$P_t([z_0 : \cdots : z_n]) = [z_0 : \cdots : z_{n-1} : tz_n], \quad t \in [0, 1],$$

ile verilen $P_t : V \rightarrow V$ homotopisini düşünelim. $t = 1$ değeri için $P_1 = 1_V$, birim dönüşümdür. Diğer taraftan,

$$P_0(V) = H = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid z_n = 0\} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$$

olur. Eğer $i : H \rightarrow V$ içermeye fonksiyonunu gösterirse $P_0 \circ i = 1_H$ olacaktır. Ayrıca $P_t : V \rightarrow V$ fonksiyonu $P_1 = 1_V$ birim dönüşümünden $P_0 = i \circ P_0$ fonksiyonuna bir homotopi verir. Başka bir deyişle, V ile $H = \mathbb{CP}^{n-1}$ homotopi denk manifoldlardır ve dolayısıyla, her k için $i^* : H_{DR}^k(V) \rightarrow H_{DR}^k(H)$ bir izomorfizmadır (bkz. s. 206).

Şimdi, $\mathbb{CP}^n = U \cup V$ için Mayer-Vietoris dizisini yazalım:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{DR}^{k-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(\mathbb{CP}^n) \rightarrow H_{DR}^k(U) \oplus H_{DR}^k(V) \rightarrow \\ H_{DR}^k(S^{2n-1}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Yine $H_{DR}^0(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{R}$ olduğu için $k > 0$ alabiliriz. O halde, $0 < k \leq 2n - 2$ ise dizi

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{\delta} H_{DR}^k(\mathbb{CP}^n) \rightarrow 0 \oplus H_{DR}^k(H) \rightarrow 0 \cdots$$

haline gelecektir. Dolayısıyla, $H_{DR}^k(\mathbb{CP}^n) \rightarrow H_{DR}^k(H) = H_{DR}^k(\mathbb{CP}^{n-1})$ bir izomorfizma olur. Benzer şekilde $k = 2n - 1$ için dizi

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^{2n-2}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^{2n-1}(\mathbb{CP}^n) \rightarrow 0 \oplus H_{DR}^{2n-1}(\mathbb{CP}^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

şeklinde olacaktır. Fakat boyutu aşmasından dolayı $H_{DR}^{2n-1}(\mathbb{CP}^{n-1}) = 0$ olduğu için $H_{DR}^{2n-1}(\mathbb{CP}^n)$ vektör uzayı da sıfır olmalıdır. Son olarak $k = 2n$ alırsak dizi

$$0 \rightarrow H_{DR}^{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{DR}^{2n}(\mathbb{CP}^n) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \cdots$$

olacağından $H_{DR}^{2n}(\mathbb{CP}^n) = H_{DR}^{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{R}$ elde ederiz. Böylece kanıt tamamlanmış oldu. Aslında $i : \mathbb{CP}^{n-1} = H \rightarrow \mathbb{CP}^n$ içermeye fonksiyonunun kohomolojide, $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$ için, izomorfizma verdiğini de gördük.

Örnek 2.3.25'den dolayı

$$\int_{\mathbb{CP}^n} \omega_{FS}^n > 0$$

olacağından, her $0 \leq k \leq n$ için, ω_{FS}^k kohomoloji grubunun üretici olacaktır. Aslında aynı nedenlerden dolayı, eğer $i : M^n \rightarrow \mathbb{CP}^N$ bir tıkHz karmaşık alt manifold ise her $0 \leq k \leq n$ için,

$$i^* : H_{DR}^{2k}(\mathbb{CP}^N) \rightarrow H_{DR}^{2k}(M)$$

homomorfizması bire bir olacaktır. Dolayısıyla, her $0 \leq k \leq n$ için, $H_{DR}^{2k}(M)$ kohomoloji grubu sıfırdan farklıdır.

Örnek 4.3.10. Bu örnekte $S^3 \times S^1$ çarpım manifoldunun kohomolojisini hesaplayacağız (S^1 'i düzlemdeki birim çember olarak alalım). $U = S^3 \times (S^1 - \{(-1, 0)\})$ ve $V = S^3 \times (S^1 - \{(1, 0)\})$ açık kümeleri olmak üzere $S^3 \times S^1 = U \cup V$ yazabiliriz. Bu durumda U ve V kümeleri S^3 manifolduna ve $U \cap V$ kümesi de $S^3 \times \{(0, -1), (0, 1)\}$ manifolduna homotopi denktir. O halde, her k için,

$$H_{DR}^k(U) = H_{DR}^k(S^3) = H_{DR}^k(V) \text{ ve } H_{DR}^k(U \cap V) = H_{DR}^k(S^3) \oplus H_{DR}^k(S^3)$$

olur. Şimdi Mayer-Vietoris dizisini kullanalım; örneğin ikinci kohomoloji grubunu hesaplamak için,

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{DR}^2(S^3 \times S^1) \rightarrow H_{DR}^2(U) \oplus H_{DR}^2(V) \rightarrow \cdots$$

yazarsak dizinin bu kısmının ilk ve son terimleri sıfır olduğu için

$$H_{DR}^2(S^3 \times S^1) = 0$$

olduğunu görürüz. Benzer şekilde,

$$H_{DR}^k(S^3 \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = 0, 1, 3, 4 \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olduğunun gösterilmesini alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

Örnek 2.1.14'de tanımlamış olduğumuz bu karmaşık ve tıkHz manifoldun karmaşık doğrusal uzaya gömülemeyeceğini görmüştük (bkz. Örnek 2.3.24). Şimdi ise bu manifoldun ikinci kohomoloji grubunun sıfır olduğunu gördük. O halde, bir önceki örnekten dolayı bu manifold aynı zamanda hiçbir karmaşık projektif uzayın da bir alt manifoldu olamaz!

Yukarıda kullandığımız tekniği kullanarak, $m \neq n$ için

$$H_{DR}^k(S^n \times S^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = 0, m, n, m+n \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

ve

$$H_{DR}^k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = 0, 2n \\ \mathbb{R}^2 & , \quad k = n \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olduğunu görebiliriz (bkz. Alıştırma 12). Bir sonraki üniteye göreceğimiz Künneth Formülü (bkz. Sonuç 5.3.5) çarpım manifoldlarının kohomolojilerini hesaplamanın oldukça pratik bir metodudur.

Uyarı 4.3.11. Bir önceki üniteye gördüğümüz Tüp Komşuluk Teoremi'ni ve Mayer-Vietoris kohomoloji dizisini kullanarak tıkHz manifoldların kohomolojilerinin sonlu boyutlu olduğunu gösterebiliriz (bkz. Alıştırma 13 ve Sonuç 4.4.4).

4.3.3 Tıkız Destekli Kohomoloji

Herhangi bir M manifoldunun üzerinde tanımlı tüm tıkız destekli türevlenebilir k -formlar $\Omega^k(M)$ vektör uzayı içinde bir alt uzay oluştururlar. Bu alt uzayı $\Omega_c^k(M)$ ile göstereceğiz. Diğer taraftan, M manifoldunun tıkız destekli her $\omega \in \Omega_c^k(M)$ formunun dış türevi de tıkız destekli olacağından bu vektör uzayları dış türev dönüşümü ile birlikte $(\Omega_c^*(M), d^*)$ zincir yapısını verir. Bu yapının kohomolojisine *tıkız destekli De Rham Kohomolojisi* denir ve $H_c^*(M)$ ile gösterilir. Eğer manifoldun kendisi tıkız ise $\Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$ ve dolayısıyla $H_c^*(M) = H_{DR}^*(M)$ olacağından bu kohomoloji sadece tıkız olmayan manifoldlar açısından önem taşır. Örneğin, De Rham kohomolojinin birbirinden ayıramadığı farklı boyutlardaki Öklit uzaylarını bu kohomoloji ile ayırabiliriz.

Uyarı 4.3.12. $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir düzgün bir fonksiyonu ise her tıkız kümenin ters görüntüsü tıkız olacaktır. Dolayısıyla, $f^* : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ iyi tanımlı bir homomorfizma olur. Benzer şekilde, eğer

$$f_t : M \times [0, 1] \rightarrow N$$

türevlenebilir düzgün bir homotopi ise f_0 ve f_1 fonksiyonlarının kohomolojide verdikleri homomorfizmalar aynı olacaktır.

Örnek 4.3.13. $M = \mathbb{R}$ manifoldunun tıkız destekli kohomolojisini hesaplayalım. Gerçek eksen üzerinde dış türevi sıfır olan fonksiyonların sadece sabit fonksiyonlar olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan tıkız bir bölgenin dışında sıfır olan tek sabit fonksiyon sıfır fonksiyonudur. Başka bir deyişle, $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$ olur. Birinci kohomolojiyi hesaplamak için ise

$$\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [w] \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega,$$

integral homomorfizmasını düşünelim. Bu homomorfizmanın iyi tanımlı olduğunu şu şekilde görebiliriz: $\mathbb{R}$ üzerinde tıkız destekli bir $\omega = f(x) dx$ formu alalım. Eğer bu form için $dF = F'(x) dx = f(x) dx = \omega$ olacak şekilde bir $F \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$ varsa yeterince büyük her m gerçel sayısı için $F(m) = 0 = F(-m)$ olacaktır. O halde,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla, integral homomorfizması iyi tanımlıdır. Diğer taraftan eğer

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$$

ise $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ fonksiyonu $dF = \omega$ koşulunu sağlayan tıkız destekli bir fonksiyon olacaktır. Dolayısıyla, integral homomorfizması bire birdir. Bu homomorfizmanın örten olduğu ise kolayca görülür. O halde, $H_c^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olur.

Teorem 4.3.14. M türevlenebilir bir manifold olmak üzere her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) = H_c^k(M)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : Poincaré Yardımcı Teoremi'nin kanıtında olduğu gibi M manifoldunun her $U \subseteq M$ koordinat sistemi için $U \times \mathbb{R}$ açık kümesi $M \times \mathbb{R}$ manifoldu için bir koordinat sistemi verecektir. Ayrıca $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki her form bu tip koordinat sistemlerinde tıkHz olarak desteklenen formların bir toplamıdır. Dolayısıyla, bu tipteki koordinat sistemlerinde desteklenen formlarla çalışarak genellikten hiçbir şey kaybetmeyiz.

$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tıkHz destekli ve gerçel eksen üzerindeki integrali bire eşit olan türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Şimdi iki tane vektör uzayı homomorfizması tanımlayalım:

$$\Psi : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}), \quad \Psi(f(x) dx_K) = \rho(t)f(x) dt \wedge dx_K,$$

ve

$$\Phi : \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^k(M),$$

$$\Phi(f(x, t) dt \wedge dx_K) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt \right) dx_K \quad \text{ve} \quad \Phi(f(x, t) dx_K) = 0.$$

Burada M manifoldu üzerindeki yerel koordinat sistemi x ile gösterilirken, t gerçel eksen üzerindeki koordinatı göstermektedir. Poincaré Yardımcı Teoremi'nde olduğu gibi bu homomorfizmaların iyi tanımlılığı gösterilmelidir (bkz. Alıştırma 4).

$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun seçiminden dolayı $\Phi \circ \Psi = 1_{\Omega_c^k(M)}$ olduğu kolayca görülür.

Herhangi bir $\nu = g(x) dx_K \in \Omega_c^k(M)$ formu için,

$$\begin{aligned} \Psi(d\nu) &= \Psi(dg \wedge dx_K) \\ &= \rho(t) dt \wedge dg \wedge dx_K \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} d(\Psi(\nu)) &= d(\rho(t)g(x) dt \wedge dx_K) \\ &= \rho(t) (dg \wedge dt \wedge dx_K) \\ &= -\rho(t) (dt \wedge dg \wedge dx_K) \\ &= -\Psi(d\nu) \end{aligned}$$

elde edilir. Başka bir deyişle, $d \circ \Psi = -\Psi \circ d$ olur ve dolayısıyla bu homomorfizma kohomoloji düzeyinde $\Psi : H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ homomorfizmasını verir.

Şimdi de herhangi bir $\omega = f(x, t) dt \wedge dx_K \in \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ formu için,

$$\begin{aligned}\Phi(d\omega) &= \Phi(d(f(x, t) \wedge dt \wedge dx_K)) \\ &= \Phi(df \wedge dt \wedge dx_K) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (df \wedge dx_K) dt\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}d(\Phi(\omega)) &= d\left(\left(\int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt\right) dx_K\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (df \wedge dx_K) dt \\ &= -\Phi(d\omega)\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak eğer $\omega = f(x, t) dx_K \in \Omega_c^k(M \times \mathbb{R})$ ise, tanımdan dolayı $\Phi(\omega) = 0$ olacaktır. Ayrıca,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_K + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_K$$

olur. Buradan da

$$\Phi(d\omega) = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t} dt\right) dx_K = 0$$

elde edilir (son eşitlik $f(x, t)$ fonksiyonun tıkHz destekli olmasının bir sonucudur). Sonuç olarak yine, $d \circ \Phi = -\Phi \circ d$ olduğundan bu homomorfizma da kohomoloji düzeyinde $\Phi : H_c^k(M, \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^k(M)$ homomorfizmasını verir. O halde, kohomoloji düzeyinde de $\Phi \circ \Psi = 1_{H_c^k(M)}$ eşitliği korunur.

Şimdi de $\Psi \circ \Phi = 1_{H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})}$ eşitliğini göstermeye çalışalım:

$$\omega = \sum_{\|I\|=k} f_I(x, t) dt \wedge dx_I + \sum_{\|J\|=k+1} g_J(x, t) dx_J \in \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$$

kapalı bir form olsun. O halde

$$\begin{aligned}\omega - (\Psi \circ \Phi)(\omega) &= \sum_{\|I\|=k} \left[f_I(x, t) - \rho(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f_I(x, t) dt \right) \right] dt \wedge dx_I \\ &\quad + \sum_{\|J\|=k+1} g_J(x, t) dx_J\end{aligned}$$

elde ederiz. $h_I(x, t) = f_I(x, t) - \rho(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f_I(x, t) dt \right)$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $x \in M$ için,

$$\int_{\mathbb{R}} h_I(x, t) dt = 0$$

olduğundan

$$H_I(x, t) = \int_{-\infty}^t h_I(x, s) ds$$

fonksiyonu tıkHz destekli olacaktır. Ayrıca $d\omega = 0$ olduğundan

$$\sum_{\|I\|=k} \frac{\partial f_I}{\partial x_j}(x, t) dx_j \wedge dx_I = \sum_{\|J\|=k+1} \frac{\partial g_J}{\partial t}(x, t) dx_J$$

olacaktır. Biraz hesap yaparak

$$\begin{aligned} d \left(\sum_{\|I\|=k} H_I(x, t) dx_I \right) &= \sum_{\|I\|=k} \left[f_I(x, t) - \rho(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f_I(x, t) dt \right) \right] \\ &\quad dt \wedge dx_I + \sum_{\|I\|=k} \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial h_I(x, s)}{\partial x_j} ds \right) dx_j \wedge dx_I \\ &= \omega - (\Psi \circ \Phi)(\omega) - \sum_{\|J\|=k+1} g_J(x, t) dx_J \\ &\quad + \sum_{\|I\|=k} \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial h_I(x, s)}{\partial x_j} ds \right) dx_j \wedge dx_I \end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci toplamı ayrıca inceleyelim:

$$\begin{aligned} \sum_{\|I\|=k} \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial h_I(x, s)}{\partial x_j} ds \right) dx_j \wedge dx_I &= \sum_{\|I\|=k} \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial f_I(x, s)}{\partial x_j} ds \right) \\ &\quad dx_j \wedge dx_I + \sum_{\|I\|=k} \left(\int_{-\infty}^t \rho(s) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_I(x, r)}{\partial x_j} dr \right) ds \right) dx_j \wedge dx_I \\ &= \int_{-\infty}^t \left(\sum_{\|I\|=k} \frac{\partial f_I(x, s)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \rho(s) \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\|I\|=k} \frac{\partial f_I(x, r)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) dr \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^t \left(\sum_{\|J\|=k+1} \frac{\partial g_J}{\partial t}(x, s) dx_J \right) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \rho(s) \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\|J\|=k+1} \frac{\partial g_J}{\partial t}(x, r) dx_J \right) dr \right) ds \\ &= \sum_{\|J\|=k+1} g_J(x, t) dx_J \end{aligned}$$

olur. Bunu bir önceki paragraf ile birleştirirsek

$$\omega - (\Psi \circ \Phi)(\omega)$$

formunun tam olduğunu görürüz. Başka bir deyişle,

$$\Psi \circ \Phi = 1_{H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})}$$

eşitliğini kanıtlamış olduk. Böylece teoremin kanıtı tamamlanır. $\square$

Örnek 4.3.13'deki fikirleri de kullanarak bu teoremin kolay birkaç sonucunu hemen yazabiliriz.

Sonuç 4.3.15. Her n doğal sayısı için,

$$\int_{\mathbb{R}^n} : H_c^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

integral homomorfizması bir izomorfizmadır. Ayrıca, her $m \neq n$ doğal sayısı için

$$H_c^m(\mathbb{R}^n) = 0$$

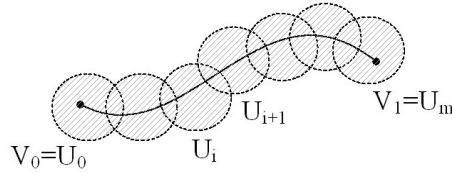
olur.

Sonuç 4.3.16. Yönlendirilebilir, bağlantılı her n -boyutlu M manifoldu için,

$$\int_M : H_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

integral homomorfizması bir izomorfizmadır. Özel olarak, eğer M tıkmaz ise $H_{DR}^n(M) = \mathbb{R}$ olur.

Kanıt : Manifoldu her biri $\mathbb{R}^n$ difeomorfik yönlendirilmiş koordinat sistem-



Şekil 4.10: Sonuç 4.3.16'nın kanıtında kullandığımız koordinat sistemleri zinciri.

leri ile kaplayarak manifold üzerindeki her formu bu koordinat sistemleri içinde tıkmaz olarak desteklenen formların toplamı olarak yazabiliriz. Şimdi iki farklı koordinat sistemi içinde tıkmaz olarak desteklenen iki n -form alalım: $\omega_i \in \Omega^n(V_i)$, $i = 0, 1$, $V_i \cong \mathbb{R}^n$ $\int_M \omega_1 = 1$ olsun. Bu iki kümeden seçilen iki noktayı sürekli bir eğri ile bağlayalım. Daha sonra bu eğriyi $U_0 = V_0$, $U_m = V_1$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$,

$i = 0, \dots, m-1$, olacak şekilde koordinat sistemleriyle örtelim (eğri tıkız olduğu için sonlu tane koordinat komşuluğu ile bunu yapabiliriz). $H_c^n(U_0) = \mathbb{R}$ olduğu için $U_0 \cap U_1$ içinde tıkız olarak desteklenen bir ν formu vardır ki $[\omega_0] = [\nu] \in H_c^n(M)$ olur. Bu şekilde devam ederek $[\omega_0] = [\mu]$ olacak şekilde U_l içinde desteklenen bir μ formu vardır. O halde, $[\omega_0] = (\int_M \omega_0) [\omega_1]$ olur. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.3.17. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ yıldız şeklinde açık bir küme ise

$$H_c^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olur.

Kanıt : Yukarıdaki sonuçtan dolayı sadece $0 \leq k < n$ olduğu durumu incelemek yeterlidir. U içinde bir noktayı başlangıç noktası seçelim ve bu nokta etrafında yarıçapı sonlu bir $B(0, r)$ yuvarı alalım. Herhangi bir $\omega \in \Omega_c^k(U)$ kapalı formu alalım. $1 > a \in \mathbb{R}$, bu formun desteklendiği tıkız $K \subseteq U$ kümesi için, $a \cdot K \doteq \{ax \mid x \in K\} \subseteq B(0, r)$ koşulunu sağlayan bir pozitif sayı olsun.

$$\phi : U \times [a, 1] \rightarrow U, \quad \phi_t(x) = tx, \quad (x, t) \in U \times [a, 1],$$

homotopisi düzgün bir fonksiyon olduğundan $\phi_a(x)$ ve $\phi_1(x) = id_U$ difeomorfizmaları U kümesinin tıkız destekli kohomoloji grupları arasında aynı homomorfizmayı verecektir. Bu durumda, $\phi_a(K) \subseteq B(x, r)$ olduğundan ω formunun desteğinin $B(0, r)$ yuvarı içinde kaldığını kabul edebiliriz. Fakat, bu yuvar $\mathbb{R}^n$ 'e difeomorfik olduğundan ω tam form olmalıdır. $\square$

Tıkız Destekli Bağlı Kohomoloji Dizisi. $U \subseteq M$ açık bir alt küme ise U içinde tıkız desteklenen her türevlenebilir fonksiyon $M - U$ üzerine sıfır olarak genişletilerek M üzerinde tıkız olarak desteklenen bir fonksiyon olarak görülebilir. Dolayısıyla, $\Omega_c^k(U)$ vektör uzayını $\Omega_c^k(M)$ 'nin bir alt uzayı olarak görebiliriz. O halde, her k için

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U) \rightarrow \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)/\Omega_c^k(U) \rightarrow 0$$

bir tam dizisi vardır. Şimdi Teorem 4.3.6'yı kullanarak kohomoloji düzeyinde

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M) \rightarrow H_c^n(M, U) \rightarrow H_c^{n+1}(U) \rightarrow \dots$$

şeklinde bir uzun tam dizi elde ederiz. Bu dizinin içindeki $H_c^*(M, U)$ terimi $(\Omega_c^*(M)/\Omega_c^*(U), d^*)$ zincir kompleksinin kohomolojisi ve *tıkız destekli bağlı kohomoloji* olarak adlandırılır. Bu dizi özellikle, $L \subset M$ bir alt manifold olmak üzere, $U = M - L$, olduğu durumda ilginç topolojik sonuçlar verir. Bu topolojik sonuçlara geçmeden önce $H_c^k(M, M - L)$ kohomolojisini hesaplayalım.

Teorem 4.3.18. M manifold ve $L \subseteq M$ bir alt manifold olmak üzere, her $k \geq 0$ için,

$$H_c^k(M, M - L) \xrightarrow{\cong} H_c^k(L)$$

geri çekme homomorfizması bir izomorfizmadır.

Kanıt : $L \subseteq U \subseteq M$ ile L alt manifoldunun bir açık tüp komşuluğunu gösterelim ve $P : U \rightarrow L$ bu komşuluğun izdüşüm fonksiyonu olsun (bkz. Teorem 3.3.15 ve Sonuç 3.3.16). $\rho : M \rightarrow [0, 1]$, U içinde desteklenen ve L 'nin bir kapalı K komşuluğunda bire eşit olan türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu kapalı komşuluğun tümleyenini $V = M - K$ ile gösterelim.

Şimdi herhangi bir $[\nu] \in H_c^k(L)$ sınıfı alalım. Bu durumda

$$\omega = \rho P^*(\nu) \in \Omega_c^k(M)$$

L alt manifolduna kısıtlaması ν olan bir k -form olur. Bu formun kendisi kapalı bir form olmasa da V açık kümesinin dışında kapalı bir form olacaktır, çünkü bu küme üzerinde ρ fonksiyonu bire eşittir. O halde,

$$\omega = \rho \omega + (1 - \rho) \omega$$

yazarsak $[\omega] \in H_c^k(M, M - L)$ olacağından, $i : L \rightarrow M$ içerme fonksiyonu olmak üzere, $i^* : H_c^k(M, M - L) \rightarrow H_c^k(L)$ homomorfizması örtendir.

Bu homomorfizmanın bire bir olduğunu göstermek için, L alt manifolduna kısıtlaması sıfır olan bir $[\omega] \in H_c^k(M, M - L)$ kohomoloji sınıfı alalım. Gerekirse U silindirik komşuluğunu küçülterek $\omega \in \Omega_c^k(U)$ olduğunu kabul edebiliriz. $P^* : H_{DR}^k(U) \rightarrow H_{DR}^k(L)$ bir izomorfizma olduğundan $d\nu = P^*(\omega)$ olacak şekilde bir $\nu \in \Omega^{k-1}(U)$ formu vardır. Bu durumda $\rho\nu \in \Omega_c^k(\text{Int}(K))$ formu $\text{Int}(K)$ açık kümesi üzerinde halen $d(\rho\nu) = \omega$ eşitliğini sağlayacaktır. Başka bir deyişle, $H_c^k(M, M - L)$ kohomoloji grubu içinde $[\omega] = 0$ 'dır ve böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi tıkmaz destekli kohomolojinin bir sonucu olarak Jordan Kapalı Eğri Teoremi'nin genel halini kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.3.19. $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ içinde n -boyutlu, bağlantılı, yönlendirilebilir ve tıkmaz bir alt manifold olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^{n+1} - M$ biri sınırlı diğeri sınırsız iki bileşenden oluşur. Her iki bileşenin de kapanışları sınırı M olan sınırlı manifoldlardır.

Kanıt : $U = \mathbb{R}^{n+1} - M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}, U) \rightarrow H_c^{n+1}(U) \rightarrow H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \\ H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

tam dizisini düşünelim. Daha önceki hesaplamaları kullanarak

$$H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}) = 0, H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}$$

ve

$$H_c^n(\mathbb{R}^{n+1}, U) = H_c^n(M) = \mathbb{R}, \quad H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, U) = H_c^{n+1}(M) = 0$$

olduğunu görürüz. O halde,

$$H_c^{n+1}(U) = \mathbb{R}^2$$

olmalıdır. Başka bir deyişle, $U = \mathbb{R}^{n+1} - M$ açık kümesinin V_1 ve V_0 gibi iki bağlantılı bileşeni vardır. M manifoldu tıkHz olduğundan yarıçapı sonlu bir yuvarın içinde kalacaktır. Diğer taraftan bu yuvarın dışı, bağlantılı olduğundan, bu iki bileşenden birinin içinde kalacaktır, diyelim ki V_1 olsun. O halde, V_1 sınırsız ve V_0 ise sınırlı olacaktır. Teoremin son bölümünün kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 14). $\square$

Yukarıdaki teoremden $n = 1$ alalım. O halde, her türevlenebilir kapalı $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eğrisi düzlemi iki parçaya ayırır. Bunlardan biri sınırlı diğeri ise sınırsızdır. Bu klasik sonuç Jordan Kapalı Eğri Teoremi olarak bilinir.

Örnek 4.3.20. $L = K_1 \cup \dots \cup K_r \subset \mathbb{R}^3 = M$ r -tane ayrık türevlenebilir düğümün birleşimi olsun. $U = M - L$ alalım ve

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_c^n(U) \rightarrow H_c^n(M) \rightarrow H_c^n(M, U) \rightarrow H_c^{n+1}(U) \rightarrow \dots$$

tıkHz destekli bağıl kohomoloji dizisini yazalım. Basit bir şekilde şu sonuca varırız:

$$\begin{aligned} H_c^0(\mathbb{R}^3 - L) &= 0; \\ H_c^1(\mathbb{R}^3 - L) &= H_{DR}^0(L) = \mathbb{R}^r; \\ H_c^2(\mathbb{R}^3 - L) &= H_{DR}^1(L) = \mathbb{R}^r; \\ H_c^3(\mathbb{R}^3 - L) &= H_c^3(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}; \\ H_c^i(\mathbb{R}^3 - L) &= 0, \quad i > 3. \end{aligned}$$

$K \subset \mathbb{R}^n$ içinde tıkHz bir alt manifold olsun. Bu durumda $\dim(K) \leq k - 1$ olur, çünkü eğer $\dim(K) = n$ ise $K \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt küme olur. Diğer taraftan, K tıkHz olduğu için aynı zamanda kapalı bir alt kümedir. Fakat $\mathbb{R}^n$ bağlantılı olduğundan $K = \mathbb{R}^n$ elde ederiz ki, bu da K 'nın tıkHzlığı ile çelişir.

Şimdi tıkHz destekli bağıl kohomoloji dizisini kullanarak aşağıdaki sonucu kolayca kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.3.21 (Alexander Dualite Teoremi). $K \subset \mathbb{R}^n \simeq S^n - \{p\} \subset S^n$, $n \geq 2$, içinde tıkHz bir alt manifold olsun. O halde,

$$\begin{aligned} H_c^0(\mathbb{R}^n - K) &= 0; \\ H_c^i(\mathbb{R}^n - K) &= H_{DR}^{i-1}(K), \quad i = 1, \dots, n-1; \end{aligned}$$

$$H_c^n(\mathbb{R}^n - K) = H_{DR}^{n-1}(K) \oplus \mathbb{R};$$

ve benzer şekilde

$$H_c^0(S^n - K) = 0;$$

$$H_c^1(S^n - K) = H_{DR}^0(K)/\mathbb{R};$$

$$H_c^i(S^n - K) = H_{DR}^{i-1}(K), \quad i = 2, \dots, n-1;$$

$$H_c^n(S^n - K) = H_{DR}^{n-1}(K) \oplus \mathbb{R}.$$

Tıkız Destekli Kohomoloji için Mayer-Vietoris Dizisi. Bu bölümü tıkız destekli kohomoloji için Mayer-Vietoris dizisini vererek bitireceğiz. Bu dizi daha önce De Rham kohomolojisi için verdiğimiz Mayer-Vietoris dizisinden farklılık gösterir. Bunun nedeni açık bir kümeyi bir manifolda gömen fonksiyonun düzgün bir fonksiyon olmayabileceği ve dolayısıyla da herhangi bir $U \subseteq M$ açık kümesi için

$$i^* : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^k(U)$$

kısıtlanmış fonksiyonunun iyi tanımlı olmayacağıdır. Diğer taraftan, eğer bir manifold $M = U \cup V$ şeklinde açık kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \xrightarrow{i_U \oplus i_V} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow{j_U - j_V} \Omega_c^k(M) \rightarrow 0$$

dizisinin tam olduğu kolayca görülür (i_U, i_V, j_U, j_V homomorfizmaları içermek fonksiyonlarının doğal olarak verdikleri homomorfizmalardır). Aslında sadece son homomorfizmanın örten olduğunun gösterilmesi çok kolay olmayabilir. Bunu göstermek için $M = U \cup V$ açık örtüsüyle uyumlu bir $\{\rho_U, \rho_V\}$ birimin ayrışımını seçelim. Şimdi her $\omega \in \Omega_c^k(M)$ için $\omega = \rho_U \omega + \rho_V \omega$, $\rho_U \omega \in \Omega_c^k(U)$ ve $\rho_V \omega \in \Omega_c^k(V)$ olacağından homomorfizma örtendir.

Bu dizi bize aşağıdaki uzun tıkız destekli kohomoloji tam dizisini verir:

$$\dots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Bu dizide fonksiyonlar ile bu fonksiyonların tıkız destekli kohomolojide verdikleri homomorfizmalar aynı yönde gitmektedirler. Bundan dolayı tıkız destekli De Rham kohomoloji *kovaryant* funktordur. Diğer taraftan, homomorfizmaların fonksiyonların tersine gittiği De Rham Kohomolojisi ise *kontravaryant* bir funktordur. Her iki kohomolojinin Mayer-Vietoris dizilerini kullanarak bir sonraki bölümde Poincaré İzomorfizması'nın bir kanıtını vereceğiz (bkz. Teorem 4.4.1).

Düzgün Fonksiyonların Derecesi. $f : M \rightarrow N$ n -boyutlu, türevlenebilir, yönlendirilmiş bağlantılı manifoldların düzgün bir fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$f^* : H_c^n(N) \rightarrow H_c^n(M)$$

bir boyutlu gerçel vektör uzaylarının homomorfizması olacaktır. Manifoldların üzerinde $[\omega_M] \in H_c^n(M)$ ve $[\omega_N] \in H_c^n(N)$ gibi integralleri bire eşit olan kohomoloji sınıfları seçelim. $f^*([\omega_N]) = \lambda [\omega_M]$ olacak şekilde seçilen $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına $f : M \rightarrow N$ fonksiyonun *derecesi* denir ve $\deg(f)$ ile gösterilir. Eğer $f : M \rightarrow M$ ise her $a \in H_c^n(M)$ için $f^*(a) = \deg(f) a$ olacaktır.

Aslında düzgün fonksiyonların derecesi tamamen geometrik bir şekilde de tanımlanabilir: $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu düzgün olduğu için N içindeki her noktanın ters görüntüsü tıkız bir küme olacaktır. Sard Teoremi'ni kullanarak bu fonksiyonun $q \in N$ gibi bir düzgün değerini alalım. Bu durumda $f^{-1}(q)$ M manifoldunun sıfır boyutlu bir alt manifoldu olacaktır. Bu alt manifold tıkız olduğu için sonlu sayıda noktadan ibarettir.

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$$

olsun. $f : M \rightarrow N$ fonksiyonunun türevi her p_i noktasında izomorfizma olacağından bu türev fonksiyonun $p_i \in M$ noktasındaki (M 'nin yönü sayesinde) yönlendirilmiş tabanı $q \in N$ noktasının yönlendirilmiş bir tabanına gönderecektir. Bu yönlendirme N manifoldunun bu noktasındaki yönlendirmesiyle uyumlu ise f fonksiyonun p_i noktasındaki *yerel derecesi* " $+1$ ", eğer uyumlu değilse " -1 "dir denir ve $\deg(f)_{p_i} = +1$ veya $\deg(f)_{p_i} = -1$ olarak yazılır. Şimdi, bu iki derece kavramının aslında aynı olduğunu gösterelim.

Teorem 4.3.22. $f : M \rightarrow N$ n -boyutlu, türevlenebilir, yönlendirilmiş bağlantılı manifoldların düzgün bir fonksiyonu, $q \in N$ noktası bu fonksiyonun düzgün bir değeri ve $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$ olsun. Bu durumda

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{p_i}$$

olur ve dolayısıyla $\deg(f)$ bir tam sayıdır.

Kanıt : Her p_i noktası etrafında bir U_i komşuluğu alalım öyle ki

$$f : U_i \rightarrow f(U_i) \doteq V_i$$

bir difeomorfizma olsun. $q \in V \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_k$ bağlantılı açık bir komşuluk olmak üzere U_i kümelerini $f^{-1}(V) \cap U_i$ ara kesiti ile yer değiştirerek her $i = 1, \dots, k$ için, $f : U_i \rightarrow V$ kısıtlamasının bir difeomorfizma olduğunu kabul edebiliriz. Her U_i kümesi de bağlantılı olacaktır. $\omega \in \Omega_c^n(V) \subseteq \Omega_c^n(N)$ integrali bire eşit olan bir form olsun. Bu durumda her $i = 1, \dots, k$ için,

$$\int_{U_i} f^*(\omega) = \deg(f)_{p_i} \left(\int_V \omega \right) = \deg(f)_{p_i}$$

olacaktır. Son olarak,

$$\deg(f) = \int_M f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \left(\int_{U_i} f^*(\omega) \right) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{p_i}$$

kanıtı bitirir. $\square$

Aşağıdaki teoremin kanıtını okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 15).

Teorem 4.3.23. $f : M \rightarrow N$ ve $g : N \rightarrow K$ bağlantılı, yönlendirilmiş, türevlenebilir manifoldların düzgün fonksiyonları olsun. O halde, aşağıdaki iddialar doğrudur.

1. Düzgün homotopiler fonksiyonların derecesini korur. Dolayısıyla, eğer $h : M \rightarrow M$ birim fonksiyona homotopik ise $\deg(h) = 1$ olur.
2. $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$
3. Eğer f örten değilse $\deg(f) = 0$ 'dır.
4. Eğer $f : M \rightarrow N$ yönü koruyan n -katlı bir örtü uzayı fonsiyonu ise $\deg(f) = n$ 'dir.

Yukarıdaki teoremde eğer manifoldlardan herhangi biri yönlendirilebilir değilse tam sayı değerli derece yerine mod 2 değerli dereceden bahsedebiliriz. Detaylar Ünite 5 Alıştırma 17'da okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek 4.3.24. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(t) = nt$, $n \in \mathbb{Z}$, fonksiyonu için

$$\deg(f) = \text{sgn}(n)$$

olduğu halde bu fonksiyonun $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ çemberi üzerinde verdiği

$$\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1, e^{it} \mapsto e^{int}$$

fonksiyonun derecesi n 'ye eşittir, çünkü bu fonksiyon yönü koruyan n -katlı bir örtü uzayı fonksiyonudur.

Benzer şekilde $A \in M(n, \mathbb{Z})$ tam sayı katsayılı bir matris ve

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

ise kolayca $A^*(\omega) = \det(A) \omega$ olduğu görülür. Başka bir deyişle,

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

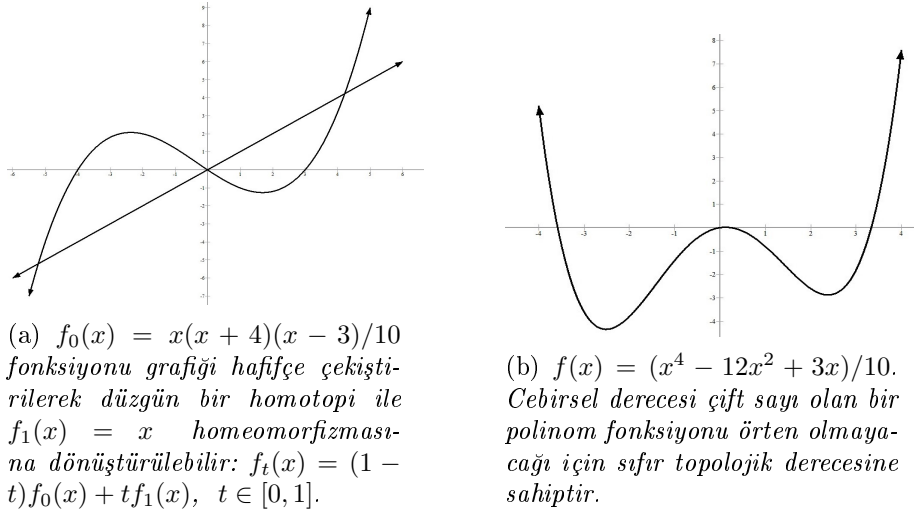
doğrusal dönüşümü hacim formunu $\det(A)$ katına çıkarır. Bu dönüşümün, n -boyutlu torus $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ üzerinde vermiş olduğu dönüşümün derecesi de $\det(A)$ 'ya eşittir (bkz. Alıştırma 16).

2) $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derecesi n olan bir polinom fonksiyonu olsun:

$$P(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0.$$

Eğer n bir çift sayı ise

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$$



Şekil 4.11

olduğu için, $P(x)$ fonksiyonu örten değildir ve yukarıdaki teoremden dolayı derecesi sıfırdır. Şimdi de $P(x)$ polinomunun derecesinin tek olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

olduğu için $P(x)$ polinomu örtendir. Diğer taraftan, $P'(x)$ türev fonksiyonu derecesi çift olan bir polinomdur. $[-C, C]$ aralığı $P'(x) = 0$ denkleminin tüm çözümlerini içeren bir aralık olsun. O halde, her $x \notin [-C, C]$ için $P'(x) > 0$ olur. Dolayısıyla, bu aralığın dışında $P(x)$ kesin artan bir fonksiyondur. $P(x)$ polinomunun tüm yerel maksimum ve minimum değerleri $P([-C, C])$ aralığında olacaktır. Dolayısıyla, her $L \notin P([-C, C])$ değeri için $P(x_0) = L$ olacak şekilde tek bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Son olarak, $P'(x_0) > 0$ olduğundan $\deg(P) = 1$ elde edilir. Başka bir deyişle, monik $P(x)$ polinomunun fonksiyon derecesi bu polinomun derecesinin $(\text{mod } 2)$ 'deki değerine eşittir. Monik polinomu -1 ile çarparsak derecesini de -1 ile çarpmış oluruz (bkz. Alıştırma 17).

3) $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $F(z) = z^n$, fonksiyonun sıfır dışında hiçbir kritik noktası yoktur. Dolayısıyla, $F(0) = 0$ dışındaki her değer bu fonksiyonun düzgün bir değeridir.

$$F^{-1}(1) = \{\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

ve karmaşık doğrusal fonksiyonlar yönü koruduğundan bu fonksiyonun her bir ζ_k noktasındaki yerel derecesi $+1$ olacaktır. O halde, $\deg(F) = n$ olmalıdır.

Şimdi de $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derecesi n olan bir karmaşık polinom fonksiyonu olsun:

$$P(z) = z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

Eğer

$$|z| \geq R = 2(1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|)$$

ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|z|^n &\geq \frac{1}{2}R|z|^{n-1} \geq (1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|) |z|^{n-1} \\ &\geq |a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_1z| + |a_0| \\ &\geq |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0| \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$P_t : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0)$$

homotopisi, her $|z| \geq R$ için,

$$|P_t(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$$

eşitsizliğini sağlar. Başka bir deyişle,

$$|P_t(z)| \leq C \Rightarrow |z| \leq \max\{R, \sqrt[n]{2C}\}$$

önermesi doğrudur. Bu durumda P_t , $P_0 = F$ ile $P_1 = P$ arasında düzgün bir homotopi olur. Dolayısıyla, $\deg(P) = \deg(F) = n$ elde edilir.

Polinomun derecesi pozitif ise yukarıdaki teoremden dolayı $P(z)$ örten olmalıdır. Başak bir deyişle, $P(z_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $z_0 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısı vardır. Dolayısıyla, Cebirin Temel Teoremi'ni kanıtlamış olduk.

Benzer bir sonuç kuaterniyon cebiri için Eilenberg ve Niven tarafından 1944 yılında kanıtlanmıştır (bkz. Ünite 6, Alıştırma 20 ve [12]).

Uyarı 4.3.25. Karmaşık $f(z) = z$ ve $g(z) = z^2$ polinomlarının dereceleri farklı olduğu için $P_t(z) = tz^2 + (1-t)z$ çizgisel homotopisi düzgün bir fonksiyon olamaz. Gerçekten de, $P_t^{-1}(0)$ ters görüntüsü sınırsız

$$\{(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, 1] \mid t(1 - z) = 1\}$$

kümesini içerir.

Eğer $g(z) = z^3$ seçseydik yukarıdaki küme

$$\{(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, 1] \mid t(1 - z^2) = 1\}$$

olurdu ki, bu küme de tıkHz değildir. Fakat polinomları gerçel sayılara kısıtlarsak aynı küme tıkHz olacaktır.

Örnek 4.3.26. 1) $\tau : S^n \rightarrow S^n$, $\tau(x) = -x$, ters kutupsal difeomorfizması sadece tek boyutlu kürelerde yönü korur. Dolayısıyla,

$$\deg(\tau) = (-1)^{n+1}$$

eşitliği sağlanır.

2) (θ, z) küre üzerindeki kutupsal koordinatlar ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f : S^2 \rightarrow S^2, (x, y, z) \mapsto (Re((x + iy)^n), Im((x + iy)^n), z),$$

fonksiyonunun derecesi n olur. Bunu görmek için, $\omega = d\theta \wedge dz$ hacim formu olmak üzere $f^*(\omega) = n\omega$ olduğunu görmek yeterlidir.

Benzer şekilde her $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, tam sayı çifti için, $\deg(f) = m$ olacak şekilde bir $f : S^n \rightarrow S^n$ fonksiyonu vardır. Aslında yönlendirilmiş ve tıkHz her manifolddan aynı boyuttaki küreye derecesi bir olan bir fonksiyon vardır (bkz. Alıştırma 18).

3) Her $n > 1$ tam sayısı için, türevlenebilir her $f : S^{2n} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ fonksiyonunun derecesi sıfırdır: ω_{FS} karmaşık projektif uzay üzerindeki Fubini-Study formu ise ω_{FS}^n projektif uzay üzerinde bir hacim formudur. Diğer taraftan, $H_{DR}^2(S^{2n}) = 0$ olduğu için

$$f^*([\omega_{FS}]^n) = (f^*([\omega_{FS}]))^n = 0$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\deg(f) = 0$ sonucuna varırız.

Aslında bu örnek bize derecesi sıfırdan farklı her $f : M^{2n} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ fonksiyonun kohomolojide bire bir homomorfizma verdiğini gösterir. Dolayısıyla, eğer $\deg(f) \neq 0$ ise, her $0 \leq k \leq n$ için, $H_{DR}^{2k}(M) \neq 0$ olmalıdır.

Bir önceki ünite de gördüğümüz Teorem 3.3.18 sayesinde türevlenebilir tıkHz manifoldlar arasındaki sürekli fonksiyonların derecesini de tanımlayabiliriz. Boyutları aynı olan tıkHz M ve N türevlenebilir manifoldları arasında sürekli bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu alalım. Teorem 3.3.18 bu fonksiyonun türevlenebilir bir $g : M \rightarrow N$ fonksiyonuna homotopik olduğunu ve böyle iki fonksiyonun da türevlenebilir bir homotopi ile birbirine bağlanabileceğini göstermişti. Dolayısıyla, sürekli $f : M \rightarrow N$ fonksiyonun derecesini homotopik olduğu herhangi bir türevlenebilir fonksiyonun derecesi olarak tanımlayabiliriz:

$$\deg(f) \doteq \deg(g) .$$

Önerme 4.3.27. Yukarıdaki $f : M \rightarrow N$ sürekli fonksiyonu yönlendirilmiş tıkHz manifoldların bir homeomorfizması ise derecesi ± 1 'dir. Örtlen olmayan sürekli bir fonksiyonun derecesi ise sıfırdır. Dolayısıyla, bu homeomorfizmaya homotopik her sürekli fonksiyon örtlen olmalıdır.

Kanıt : Bu homeomorfizmaya ve tersine homotopik olan iki türevlenebilir fonksiyon alalım,

$$f \simeq g : M \rightarrow N \text{ ve } f^{-1} \simeq h : N \rightarrow M .$$

O halde, türevlenebilir $h \circ g : M \rightarrow M$ fonksiyonu M manifoldunun birim fonksiyonuna sürekli bir homotopi ile homotopiktir. Yukarıdaki paragraftan

dolayı bu sürekli homotopiyi türevlenebilir bir homotopi ile değiştirebiliriz. Şimdi Teorem 4.3.23'ü kullanarak

$$1 = \deg(h \circ g) = \deg(h) \deg(g)$$

ve dolayısıyla $\deg(g) = \deg(h) = \pm 1$ elde ederiz. Böylece ilk kısmın kanıtı tamamlanır.

İkinci kısmın kanıtını şu şekilde yapabiliriz. Eğer bir $k : M \rightarrow N$ sürekli fonksiyonu örten değilse her iki manifold da tıkHz olduğundan $N - k(M)$ boş olmayan açık bir kümedir. Bu açık küme bir yuvar içerdiği için (manifoldları Öklit uzaylarına gömülü alabiliriz ve dolayısıyla onları metrik uzay olarak kabul edebiliriz) k fonksiyonuna homotopik olan ama örten olmayan bir $l : M \rightarrow N$ türevlenebilir fonksiyonu bulabiliriz. Dolayısıyla, Teorem 4.3.23'den dolayı $\deg(k) = \deg(l) = 0$ elde ederiz ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 4.3.28. Şimdi yukarıdaki önermenin bir uygulamasını görelim. Türevlenebilir manifoldların sürekli fonksiyonlarına türevlenebilir fonksiyonlara dönüştürme işlemi bazı kayıplara neden olabilir. Bunu bir örnek ile açıklamaya çalışalım: Birbirine homeomorfik olup difeomorfik olmayan dört boyutlu tıkHz türevlenebilir manifoldların var olduğunu biliyoruz (bkz. Örnek 3.33, s. 160, [1]. Ayrıca bkz. [14]). O halde, M_1 ve M_2 homeomorfik ama difeomorfik olmayan tıkHz, bağlantılı, yönlendirilmiş türevlenebilir iki manifold ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bu manifoldlar arasında bir homeomorfizma olsun. $g : M_1 \rightarrow M_2$ bu homeomorfizmaya homotopik türevlenebilir bir fonksiyon ise $\deg(g) = \deg(f) = \pm 1$ olacağından g fonksiyonu da örten olmalıdır. Eğer g bir daldırma fonksiyonu ise Ters Fonksiyon Teoremi'nden dolayı g her nokta etrafında yerel bir difeomorfizma olmalıdır. Fakat f bire bir olduğundan ve g fonksiyonu da f 'e istenildiği kadar yakın seçilebileceğinden g fonksiyonu da bire bir olmalıdır. Başka bir deyişle, g bir difeomorfizma olmalıdır. O halde, g fonksiyonun daldırma olmadığı noktalar her zaman vardır.

Bu bölümü aşağıdaki iki önerme ile bitireceğiz.

Önerme 4.3.29. $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki, $f^{-1}(\partial D^n) = \partial D^n$ koşulu sağlansın. $\text{Int}(D^n) = D^n - \partial D^n \approx \mathbb{R}^n$ difeomorfizması altında

$$\deg(\partial f : \partial D^n \rightarrow \partial D^n) = \deg(\text{Int}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

olur.

Kanıt : İlk önce $f^{-1}(\partial D^n) = \partial D^n$ koşulundan dolayı

$$\text{Int}(f) : \text{Int}(D^n) \rightarrow \text{Int}(D^n)$$

fonksiyonun iyi tanımlı ve düzgün bir fonksiyon olduğunu belirtelim. Şimdi, $U = \text{Int}(D^n) \subseteq D^n$ açık alt kümesi için tıkHz destekli kohomoloji dizisini yazalım:

$$0 = H_c^{n-1}(D^n) \rightarrow H_c^{n-1}(D^n, \text{Int}(D^n)) \rightarrow H_c^n(\text{Int}(D^n)) \rightarrow H_c^n(D^n) = 0 .$$

Yukarıda yaptıklarımızdan dolayı $H_c^n(Int(D^n)) = H_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$ olduğu için $H_c^{n-1}(D^n, Int(D^n)) \simeq \mathbb{R}$ elde ederiz. O halde bu dizi bize aşağıdaki değişmeli diyagramı verir:

$$0 \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial D^n) \longrightarrow H_c^n(Int(D^n)) \longrightarrow 0$$

$$\downarrow (\partial f)_* \qquad \downarrow Int(f)_*$$

$$0 \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial D^n) \longrightarrow H_c^n(Int(D^n)) \longrightarrow 0 .$$

Son olarak $(\partial f)_* = \times \deg(\partial f)$ ve $Int(f)_* = \times \deg(Int(f))$ olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 4.3.30. Herhangi bir $f : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ fonksiyonu alalım. Bu durumda

$$g_t : D^n \times [0, 1] \rightarrow D^n, (x, t) \mapsto (1 - t + t\|x\|^2)f(x)$$

homotopisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $g_0 = f$;
2. Her $t \in [0, 1]$ için, $g_t|_{\partial D^n} = f|_{\partial D^n}$;
3. $g_1^{-1}(\partial D^n) = \partial D^n$.

O halde, yukarıdaki önermeden dolayı $g_1 : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (D^n, \partial D^n)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \deg(\partial f : \partial D^n \rightarrow \partial D^n) &= \deg(\partial g_1 : \partial D^n \rightarrow \partial D^n) \\ &= \deg(Int(g_1) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

elde ederiz. Ashında bu üç koşulu sağlayan her g_t homotopisi için aynı sonucu elde ederiz.

Önerme 4.3.31. Derecesi sıfır olan her $f : S^n \rightarrow S^n$ fonksiyonu bir sabite homotopiktir.

Kanıt : N ve S harfleri birim kürenin kuzey ve güney kutuplarını gösterebilir. Genellikle hiç kaybetmeden $N \in S^n$ noktasının bir düzgün değer olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun derecesi sıfır olduğundan $f^{-1}(N) = \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ olduğunu kabul edebiliriz öyle ki, f fonksiyonu her bir p_i noktası etrafında yönü koruyan, q_i etrafında da yönü ters çeviren bir difeomorfizma olur. Küre üzerinde standart Riemann metriğini alalım. $p \in \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ olmak üzere

$$g = Exp_N^{-1} \circ f \circ Exp_p : \mathbb{R}^n \simeq T_p S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \simeq T_N S^n$$

orijin etrafında bir difeomorfizma verecektir (her iki teğet uzayı üzerindeki iç çarpım da $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart iç çarpımdır). g fonksiyonun tanımlı olduğu bir $B(0, r_0)$ yuvarı alalım. $\rho([0, r_0/4]) = \{0\}$ ve $\rho([3r_0/4, r_0]) = \{1\}$ koşullarını sağlayan azalan ve türevlenebilir bir $\rho : [0, r_0] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu seçelim. $L = Dg(0)$ merkezdeki türev fonksiyonu, $t \in [0, 1]$ ve $b_t(x) = \rho(t + (1 - t)\|x\|)$ olmak üzere,

$$g_t : B(0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto b_t(x) g(x) + (1 - b_t(x)) L(x)$$

homotopisini tanımlayalım. Homotopinin uç noktaları, $g_1 = g$ ve $g_0 = \rho(\|x\|) g(x) + (1 - \rho(\|x\|)) L(x)$ şeklindedir. Her $t \in [0, 1]$ ve $\|x\| \geq 3/4$ için $g_t(x) = g(x)$ olduğundan bu homotopi f fonksiyonunu $B[0, 3r_0/4]$ yuvarı dışında değiştirmeyecektir. Diğer taraftan, eğer $\|x\| \leq 1/4$ ise $g_0(x) = L(x)$ olur. Başka bir deyişle, g ve dolayısıyla f bu küçük disk içinde homotopi yardımıyla L doğrusal fonksiyonuna dönüşmüştür.

Sabit bir $t \in [0, 1]$ değeri için Dg_t türevini hesaplayalım:

$$Dg_t(x) = L + (g(x) - L) \nabla(b_t(x)) + b_t(x) (Dg(x) - L).$$

$\|x\|$ yeterince küçük olduğunda hem $g(x) - L$ hem de $Dg(x) - L$ fonksiyonları çok küçük değerler alacaktır, çünkü $L = Dg(0)$ türev fonksiyonudur. O halde, L doğrusal bir izomorfizma olduğundan g_t fonksiyonu orijin etrafında halen bir difeomorfizmadır.

Şimdi, türevin tanımını kullanarak g fonksiyonunu

$$g(x) = Dg(0)(x) + a(x) \|x\|$$

şeklinde yazalım. Aslında $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0$ olduğundan $r_0 > 0$ yarıçapını her $x \in B(0, r_0)$ için, $L(x) \geq 2\|a(x)\|\|x\|$ olacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda, yuvarın herhangi bir x_0 noktası için $g_t(x_0) = 0$ olursa

$$|b_t(x_0)| \|a(x_0)\| \|x_0\| \geq 2 \|a(x_0)\| \|x_0\|$$

elde ederiz. Diğer taraftan, $|b_t(x)| \leq 1$ olduğundan $x_0 = 0$ veya $a(x_0) = 0$ olmalıdır. Fakat, $a(x_0) = 0$ olması durumunda da $L(x_0) = 0$ olacağından yine $x_0 = 0$ elde ederiz. Başka bir deyişle, her $t \in [0, 1]$ için 0 değeri g_t için düzgün bir değerdir ve $g_t^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ eşitliği sağlanır.

Tüm bunların sonucu olarak, f fonksiyonunu bir homotopi ile değiştirerek her bir $p \in \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ noktasının etrafındaki bir yuvarda doğrusal bir fonksiyon ile verildiğini kabul edebiliriz ($p \in S^n$ ve $N \in S^n$ noktaları etrafında *Exp* (jeodezik sprej) fonksiyonlarının verdiği koordinat sistemlerini alıyoruz).

Şimdi doğrusal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operatörünü ortogonal bir operatör ile değiştireceğiz: Bunun için ilk önce L operatörünün

$$L = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$$

matris gösteriminin sütunlarına homotopiler yardımıyla Gram-Schmidt işlemi uygulayacağız. Örneğin, matrisin ilk sütununu

$$t \mapsto t \frac{C_1}{\|C_1\|} + (1-t) C_1, \quad t \in [0, 1]$$

homotopisi ile birim vektör yapacağız. Daha sonra ikinci sütunu

$$t \mapsto C_2 - t \langle C_1, C_2 \rangle C_1, \quad t \in [0, 1]$$

homotopisi ile değiştirerek birinci sütun ile dik konuma getireceğiz. Daha sonra tekrar ikinci sütunu birim vektöre dönüştüreceğiz ve bu şekilde devam ederek L operatörünü $GL(n, \mathbb{R})$ grubu içinde ortogonal bir matrise homotopi ile bağlayacağız. Önceki paragraflarda yapılabilecek benzer şekilde f fonksiyonunu bir homotopi ile değiştirerek, fonksiyonun her bir $p \in \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ noktasının etrafındaki bir yuvarda ortogonal doğrusal bir dönüşüm ile verildiğini kabul edebiliriz. Bu noktaların etrafında ayrı ayrı seçtiğimiz r_0 'ların en küçüğünü r_1 ile gösterelim. O halde, her bir $p \in \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ noktası için

$$f|_{B[0, r_1]} : B[0, r_1] \rightarrow S^n$$

kısıtlanışı izometrik şekilde p noktasından geçen jeodezik çemberleri N noktasından geçen jeodezik çemberlere gönderir. Başka bir deyişle, bu kısıtlanış fonksiyonları $O(n)$ izometri grubunun elemanları ile temsil edilirler.

Bu arada f fonksiyonunu homotopi ile değiştirmeye devam edelim öyle ki,

1) $B[p, r_1]$ yuvarları üzerinde f hiç değişmesin;

2) $B[p, 2r_1] - B[p, r_1]$ arasında f fonksiyonu jeodezikler boyunca yeterince hızlı giderek $B[p, 2r_1]$ yuvarlarının sınırında $S \in S^n$ değerini alsın: Her bir $p \in \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k\}$ için, $f(\partial B[p, 2r_1]) = \{S\}$ olsun (r_1 sayısını yeterince küçük seçerek bu yuvarların ayrık olduğunu kabul ediyoruz);

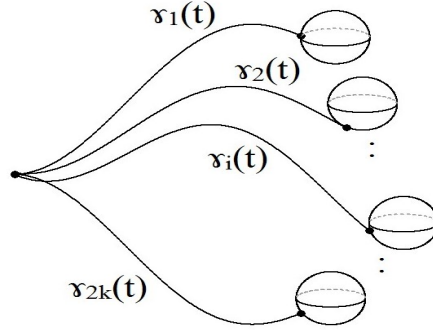
3) f fonksiyonu bu yuvarlar dışında hiçbir zaman $N \in S^n$ değerini almadığından ve $S^n - \{N\} \simeq \mathbb{R}^n$ alt uzayı S noktasına büzülebileceğinden f fonksiyonun, yuvarların dışındaki bölgede bir homotopi ile değiştirilerek $B[p, 2r_1]$ yuvarları dışında sabit S değeri aldığını kabul edebiliriz.

Bu durumda $f : S^n \rightarrow S^n$ fonksiyonu bir noktaya bazı γ_i eğrileri ile bağlanmış k -tane küreden oluşan bir X bölüm uzayından S^n 'ye giden sürekli bir fonksiyon verir (bkz. Şekil 4.12). Ayrıca $\pi : S^n \rightarrow X$ bölüm fonksiyonu ve $\tilde{f} : X \rightarrow S^n$ ise f 'nin bölüm uzayında ürettiği fonksiyonu gösterebiliriz. O halde, $f = \tilde{f} \circ \pi$ olur. Bölüm uzayındaki her bir küre ters işaretli iki disk simetrik şekilde içermektedir. $\tilde{f}$ fonksiyonu kürenin alt ve üst yarısında, D_{i-}^n ve D_{i+}^n , birbirine göre ters işaretli olduğundan

$$\tilde{f}_{D_{i-}^n} = \tilde{f}_{D_{i+}^n} \circ A_i$$

olacak şekilde bir $A_i \in O(n) - SO(n)$ matrisi bulabiliriz. Fonksiyon ekvator üzerinde sabit S değerini aldığından A_i matrisini türevlenebilir bir eğri ile

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$$



Şekil 4.12: Bölüm uzayının temsili resmi

dönüşümünün matrisine bağlayarak $\tilde{f}$ fonksiyonunu homotopi ile öyle değiştirebiliriz ki

$$\tilde{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(-x_0, x_1, \dots, x_n)$$

olur. Bu durumda, $t \in [0, 1]$ ve $(x_0, y) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$H_t(x_0, y) = \begin{cases} \tilde{f}(x_0, y) & , \quad t \leq x_0 \leq 1 \\ \tilde{f}(t, y) & , \quad 0 \leq x_0 \leq t \\ \tilde{f}(t, y) & , \quad -t \leq x_0 \leq 0 \\ \tilde{f}(x_0, y) & , \quad -1 \leq x_0 \leq t \end{cases}$$

homotopisi $\tilde{f}$ fonksiyonunu bölüm uzayının her bir küresinde N değerini alan fonksiyona dönüştürür. Bu sırada $\tilde{f}$ fonksiyonun γ_i eğrileri üzerindeki görüntüleri homotopi ile değiştirerek S noktasından N noktasına giden eğrilere dönüştürür. Sonuç olarak $\tilde{f}$ ve dolayısıyla f fonksiyonu sürekli bir homotopi altında görüntü kümesi küre üzerinde S noktasını N noktasına bağlayan k -tane eğri olan bir sürekli fonksiyona dönüşür. Bu homotopiyi kendisine yeterince yakın türevlenebilir bir homotopi ile değiştirerek f fonksiyonun örten olmayan bir fonksiyona homotopik olduğunu görürüz. O halde, son bir türevlenebilir homotopi yardımıyla fonksiyonun sabite homotopik olduğunu görürüz. $\square$

Bu kanıtın daha iyi anlaşılabilmesi için $f : S^1 \rightarrow S^1$ durumunu ipuçları vererek alıştırımlara bırakacağız (bkz. Alıştırma 19).

Uyarı 4.3.32. 1) $f : M \rightarrow S^n$ bağlantılı, tıkız ve yönlendirilmiş bir manifolddan küreye derecesi sıfır olan türevlenebilir bir fonksiyon ve $p \in S^n$ bu fonksiyonun düzgün bir değeri olsun. Fonksiyonu bir homotopi ile değiştirerek $f^{-1}(p)$ kümesinin bir $D^n \subseteq M$ diskinin içinde kaldığını kabul edebiliriz (uygun tıkız destekli vektör alanlarının ürettiği akışlarla ters görüntüdeki sonlu noktayı ortak bir diske taşıyarak yapılabilir). Bu durumda $F(M - D^n) \neq S^n$ olacağından fonksiyon bu diskin dışında bir sabite homotopik olur. O halde, f

fonksiyonu $M/(M - D^n) \approx S^n$ bölüm uzayından küreye bir fonksiyon verir. Şimdi yukarıdaki teoremi kullanarak bu son fonksiyonun ve dolayısıyla f fonksiyonunun bir sabite homotopik olduğunu görürüz.

2) $f : M \rightarrow S^n$ bağlantılı, tıkHz ve yönlendirilemeyen bir manifolddan küreye türevlenebilir bir fonksiyon ve $p \in S^n$ bu fonksiyonun düzgün bir değeri olsun. Yine fonksiyonu bir homotopi ile değiştirerek $f^{-1}(p)$ kümesinin bir $D^n \subseteq M$ diskinin içinde kaldığını kabul edebiliriz. Ayrıca ters görüntü kümesindeki noktaların işaretlerini istediğimiz gibi seçebiliriz, çünkü her noktadan geçen türevlenebilir ve yönü ters çeviren bir kapalı eğri vardır. Dolayısıyla, diskin içindeki noktaların işaretlerini uygun şekilde seçip fonksiyonu homotopi ile değiştirerek verilen herhangi $q_1, q_2 \in f^{-1}(p)$ ters görüntü çiftini eleyebiliriz. O halde, fonksiyonun derecesi $f^{-1}(p)$ kümesinin eleman sayısı çift ise sıfır, tek ise bir olmalıdır.

3) Yukarıdaki kanıtları biraz daha ilerleterek derecesi aynı olan iki $f_1 : M \rightarrow S^n$ ve $f_2 : M \rightarrow S^n$ fonksiyonun homotopik olduğunu gösterebiliriz (bkz. Alıştırma 20).

Yukarıda bahsettiğimiz sonuçlar için en iyi kitaplardan birisi [16] numaralı kaynaktır.

4.4 Poincaré İzomorfizması

Bu bölümde ilk olarak, Poincaré İzomorfizma Teoremi olarak bilinen ve yönlendirilebilir manifoldların, tümleyen boyutlu De Rham kohomoloji vektör uzayları arasında doğal bir izomorfizmanın varlığını gösteren teoremi vereceğiz. Daha sonra, bu izomorfizmayı kullanarak manifoldların topolojilerine dair önemli sonuçlar kanıtlayacağız.

M bağlantılı, yönlendirilmiş, n -boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun ve $0 \leq k \leq n$ bir tam sayı olsun. Bu durumda, her $\omega \in \Omega_c^k(M)$ ve $\nu \in \Omega^{n-k}(M)$ formları için $\omega \wedge \nu \in \Omega_c^n(M)$ formu da tıkHz destekli olacağından

$$\int_M \omega \wedge \nu$$

integrali iyi tanımlı olacaktır. Aslında bu integral bize bilineer bir form verir:

$$H_c^k(M) \times H_{DR}^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\nu]) \mapsto \int_M \omega \wedge \nu.$$

Bu form sayesinde kohomoloji vektör uzayları ve dualleri arasında aşağıdaki doğal doğrusal fonksiyonu yazabiliriz:

$$D_M : H_{DR}^k(M) \longrightarrow (H_c^{n-k}(M))^*, \quad (D_M([\nu]))([\omega]) = \int_M \omega \wedge \nu.$$

Aşağıda D_M Poincaré homomorfizmasının bir izomorfizma olduğunu göstereceğiz.

Eğer vektör uzayları sonlu boyutlu ise, D_M 'nin izomorfizma olmasının

$$H_c^k(M) \times H_{DR}^{n-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\nu]) \mapsto \int_M \omega \wedge \nu$$

bilineer formunun yozlaşmamış (dejenere olmayan) olmasına denk olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.4.1 (Poincaré İzomorfizması). M yönlendirilmiş, bağlantılı, türevlenebilir n -boyutlu bir manifold olmak üzere, her $0 \leq k \leq n$ için,

$$D_M : H_{DR}^k(M) \longrightarrow (H_c^{n-k}(M))^*, \quad (D_M([\nu]))([\omega]) = \int_M \omega \wedge \nu$$

doğrusal homomorfizması bir izomorfizmadır. Eğer manifold tıkHz ise Poincaré izomorfizması

$$D_M : H_{DR}^k(M) \longrightarrow (H_{DR}^{n-k}(M))^*$$

halini alır.

Kanıtı geçmeden önce sık sık başvuracağımız aşağıdaki cebirsel sonucu verelim (kanıtı kolay olduğu için okuyucuya bırakılmıştır, bkz. Alıştırma 21).

Yardımcı Teorem 4.4.2 (Beşli Yardımcı Teorem). *Satırları tam dizi ve içindeki her bir dikdörtgeni değişmeli olan*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & A_4 & \rightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & B_4 & \rightarrow & B_5 \end{array}$$

vektör uzay ve homomorfizmalarının oluşturduğu diyagramı düşünelim. Eğer, f_1, f_2, f_4 ve f_5 birer izomorfizma ise f_3 de bir izomorfizmadır.

Teorem 4.4.1'in Kanıtı : Kanıt beş adımdan oluşmaktadır.

Adım 1) Teorem $M = \mathbb{R}^n$ için doğrudur: $k \neq n$ olduğu zaman $H_c^k(M) = 0 = (H_{DR}^{n-k}(M))^*$ olacağından sadece $k = n$ durumunu incelememiz yeterlidir. Manifold üzerinde tıkHz destekli ve integrali bire eşit bir ω formu seçelim. Bu durumda $0 \neq [\omega] \in H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$ elemanı kohomolojinin bir üretici olacaktır. $[1] \in H_{DR}^0(M) \simeq \mathbb{R}$ grubunun üretici olan ve sabit bir değerini alan fonksiyonun kohomoloji sınıfı ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge 1 = 1$$

olacağından bu adımın kanıtı tamamlanmış olur. $\mathbb{R}^n$ ile bu küme içindeki açık ve yıldız biçimindeki bir kümenin kohomoloji grupları izomorfik olacağından

bu adım $\mathbb{R}^n$ içindeki her konveks açık küme için de kanıtlanmış olur (bkz. Sonuç 4.3.17).

Adım 2) $L^k(M)$ ile $(H_c^k(M))^*$ dualini gösterelim. $U, V \subseteq M$ açık kümeler olmak üzere $U \cup V$ tıkkız destekli kohomoloji ve De Rham kohomolojisinin duali için Mayer-Vietoris dizilerinin oluşturduğu şu diyagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_{DR}^k(U \cup V) & \rightarrow & H_{DR}^k(U) \oplus H_{DR}^k(V) & \rightarrow & H_{DR}^k(U \cap V) & \rightarrow & H_{DR}^{k+1}(U \cup V) & \rightarrow \\ & \downarrow D & & \downarrow D \oplus D & & \downarrow D & & \downarrow D & \\ \rightarrow & L^{n-k}(U \cup V) & \rightarrow & L^{n-k}(U) \oplus L^{n-k}(V) & \rightarrow & L^{n-k}(U \cap V) & \rightarrow & L^{n-k-1}(U \cup V) & \dots \end{array}$$

Tüm düşey homomorfizmalar Poincaré homomorfizmalarını göstermektedir. Bu adımda diyagramdaki tüm dikdörtgenlerin işaretli-değişmeli olduğunu göstereceğiz. İlk iki dikdörtgen için kanıt çok açıktır, çünkü tüm yatay fonksiyonlar içermeye fonksiyonlarından elde edilmiştir.

Son dikdörtgenin işaretli-değişmeli olduğunu görebilmek için bağlantı homomorfizmalarının nasıl tanımlandığını hatırlamamız gerekmektedir: İlk önce

$$\delta : H_c^{n-k-1}(U \cup V) \rightarrow H_c^{n-k}(U \cap V)$$

homomorfizmasının nasıl tanımlandığını görelim. $[\omega] \in H_c^{n-k-1}(U \cup V)$ olsun. Teorem 4.3.6'daki Zig-Zag homomorfizmasının tanımından $\omega = \xi - \mu$ olacak şekilde sırasıyla U ve V içinde tıkkız destekli ξ ve μ formları vardır, öyle ki $\delta([\omega]) = [d\xi] = [d\mu]$ olur.

Diğer taraftan,

$$\delta : H_{DR}^k(U \cap V) \rightarrow H_{DR}^{k+1}(U \cup V)$$

ise şu şekilde tanımlanır. Herhangi bir $[a] \in H_{DR}^k(U \cap V)$ sınıfı alalım. Bu durumda, $a = b - c$ olacak şekilde, $b \in \Omega^k(U)$ ve $c \in \Omega^k(V)$ formları vardır. Aslında De Rham kohomolojinin Mayer-Vietoris dizisinin kanıtından bu formların sadece $U \cap V$ açık kümesinde desteklendiğini görürüz. Son olarak, bağlantı homomorfizması

$$\delta(a) \doteq \begin{cases} db & U \text{ üzerinde} \\ dc & V \text{ üzerinde} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu durumda,

$$\delta^*(D([a]))([\omega]) = \int_{U \cap V} \delta(\omega) \wedge a = \int_{U \cap V} d\xi \wedge (b - c)$$

olur. Diğer taraftan,

$$D([\delta([a]))([\omega]) = \int_{U \cup V} \omega \wedge \delta(a) = \int_{U \cup V} (\xi - \mu) \wedge \delta(a)$$

olur. Ayrıca, b ve c formlarının aslında $U \cap V$ içinde desteklendiğini aklımızda tutarak son integrali açarsak

$$\begin{aligned} \int_{U \cup V} (\xi - \mu) \wedge \delta(a) &= \int_U \xi \wedge \delta(a) - \int_V \mu \wedge \delta(a) \\ &= \int_U \xi \wedge db - \int_V \mu \wedge dc \\ &= \int_{U \cap V} \xi \wedge db - \int_{U \cap V} \mu \wedge dc \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi de, $U \cap V$ manifoldunun sınırının olmamasını, integralleri alınan $\xi \wedge db$, $\mu \wedge dc$ formlarının $U \cap V$ içinde tıkHz destekli olduklarını ve

$$d(\xi \wedge b) = d\xi \wedge b + (-1)^k \xi \wedge db, \quad d(\mu \wedge c) = d\mu \wedge c + (-1)^k \mu \wedge dc$$

eşitliklerini Stokes Teoremi'nde kullanarak, son integralin

$$(-1)^{k+1} \int_{U \cap V} d\xi \wedge b - (-1)^{k+1} \int_{U \cap V} d\mu \wedge c = (-1)^{k+1} \int_{U \cap V} d\xi \wedge (b - c)$$

olduğunu görürüz. Bu, kanıtı bitirir. $\square$

O halde, Poincaré homomorfizması U , V ve $U \cap V$ açık kümeleri için birer izomorfizma ise, Adım 2 ve Beşli Yardımcı Teorem sayesinde $U \cup V$ açık kümesi için de bir izomorfizmadır.

Adım 3) Teorem ayrık bir $\{U_\alpha \subseteq M\}$ açık küme koleksiyonunun her bir elemanı için doğru ise bu kümelerin $U = \cup U_\alpha$ birleşimi için de doğrudur: $H_{DR}^k(U) = \Pi_\alpha H_{DR}^k(U_\alpha)$ direkt çarpımına izomorfiktir. Diğer taraftan, $H_c^k(U) = \oplus_\alpha H_c^k(U_\alpha)$ direkt toplamına ve dolayısıyla, duali de yine $L^k(U) = \Pi_\alpha L^k(U_\alpha)$ direkt çarpımına eşittir.

Adım 4) Teorem her $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi için doğrudur. Bunun için önce topolojik bir sonuç kanıtlayacağız.

İddia: $\mathbb{R}^n$ içindeki her açık küme U ve V gibi iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir öyle ki, U , V ve $U \cap V$ her biri sonlu tane $\mathbb{R}^n$ içindeki dikdörtgen bölgenin birleşimi olan açık kümelerin ayrık bir birleşimidir.

İddianın kanıtı: Yardımcı Teorem 2.2.1'den dolayı her manifold, dolayısıyla da $\mathbb{R}^n$ içindeki her açık küme $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, koşulunu sağlayan bir (K_n) tıkHz alt kümeler dizisinin birleşimi olarak yazılabilir. Şimdi K_1 tıkHz kümesini sonlu tane açık dikdörtgen ile örtelim öyle ki her bir dikdörtgen $\text{Int}(K_2)$ içinde kalsın. Bu dikdörtgenler $R_1, \dots, R_{i_1}$ olsun. Daha sonra, $K_2 - \text{Int}(K_1)$ tıkHz bölgesini örten ve $\text{Int}(K_3)$ içinde kalan sonlu tane $S_1, \dots, S_{j_1}$ açık dikdörtgeni seçelim. Bu şekilde devam edelim. Son olarak, U

ve V kümelerini $U = \cup R_i$ ve $V = \cup S_j$ olarak tanımlarsak iddianın kanıtı tamamlanmış olur.

İddiayı kabul ederek bu adımın kanıtını bitirelim. R_1 açık bir dikdörtgen ise $\mathbb{R}^n$ 'e difeomorfik olacağından teorem R_1 için doğrudur (Adım 1). Şimdi teoremin k tane açık dikdörtgenin birleşimi için doğru olduğunu kabul edelim. Bu birleşimi A ile gösterelim ve $B = R_{k+1}$ bir başka açık dikdörtgen olsun. Bu durumda $A \cap B$ yine k -tane açık dikdörtgenin birleşimi olacaktır. O halde teorem A , B ve $A \cap B$ için doğrudur. Son olarak, Adım 2'den dolayı teorem $A \cup B$ için de doğru olur. Dolayısıyla, tümevarımdan dolayı teorem her sonlu sayıda açık dikdörtgenin birleşimi için kanıtlanmış olur. Bu durumda Adım 4, İddia'nın ve Adım 3'ün bir sonucudur.

Adım 5) Önceki adımın içindeki iddianın kanıtını takip ederek şunu gösterebiliriz: M manifoldu U ve V gibi iki açık kümenin birleşimi olarak yazılabilir öyle ki, U , V ve $U \cap V$ her biri sonlu tane $\mathbb{R}^n$ içindeki açık kümenin birleşimi olan açık kümelerin ayrık bir birleşimidir. Bu durumda önceki adımlardan dolayı, teorem U , V ve $U \cap V$ için doğru olacağından $M = U \cup V$ için de doğru olacaktır. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Uyarı 4.4.3. *Teoremin topolojik sonuçlarına geçmeden önce doğrusal cebire ait bir önermeyi hatırlayalım: Herhangi bir V vektör uzayının ikinci dualine izomorfik olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın sonlu boyutlu olmasıdır (bkz. Alıştırma 22). O halde, tıkHz her M manifoldu için Poincaré izomorfizmasından dolayı*

$$H_{DR}^k(M) \simeq (H_{DR}^{n-k}(M))^* \simeq ((H_{DR}^k(M))^*)^* \simeq (H_{DR}^k(M))^{**}$$

sağlanacağından bu manifoldun tüm kohomoloji vektör uzaylarının sonlu boyutlu olması gerektiğini görürüz (Tüp Komşuluk Teoremi ve Mayer-Vietoris kohomoloji dizisi bu sonucun başka bir kanıtını verir; bkz. Uyarı 4.3.11 ve Alıştırma 13).

Sonuç 4.4.4. *Bağılantılı tıkHz bir manifoldun tüm De Rham kohomoloji vektör uzayları sonlu boyutludur.*

Sonuç 4.4.5. M^n *bağılantılı bir manifold olmak üzere $H_{DR}^n(M) = \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter koşul manifoldun sınırsız, tıkHz ve yönlendirilebilir olmasıdır. Eğer manifold tıkHz değilse ya da yönlendirilebilir değilse $H_{DR}^n(M) = 0$ olur.*

Kanıt : Sonuç 4.3.16'ten dolayı tıkHz ve yönlendirilebilir manifoldlar için $H_{DR}^n(M) = \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz. Manifold yönlendirilebilir ama tıkHz değilse $H_c^0(M) = 0$ olduğundan Poincaré izomorfizması bize $H_{DR}^n(M) = 0$ sonucunu verir. Eğer manifold yönlendirilebilir değilse, yönü ters çeviren bir eğri boyunca ilerleyerek bir koordinat diski üzerinde tanımlı bir formun ters işaretlisi ile aynı kohomoloji sınıfını temsil ettiğini görürüz. Bu durumda yine $H_{DR}^n(M) =$

0 elde edilir. Son olarak, eğer manifold yönlendirilebilir sınırlı ve tıkHz ise, yönlendirilebilir tıkHz ve sınırsız $W = M \cup_{\partial M} (-M)$ manifoldu için (bkz. Ünite 3, Alıştırma 39) Mayer-Vietoris dizisini yazarsak

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{DR}^{n-1}(\partial M) \rightarrow H_{DR}^n(W) \rightarrow H_{DR}^n(M) \oplus H_{DR}^n(-M) \rightarrow \\ H_{DR}^n(\partial M) = 0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat, $H_{DR}^n(W) \simeq \mathbb{R}$ ve $H_{DR}^n(M) \simeq H_{DR}^n(-M)$ olduğundan $H_{DR}^n(M) = 0$ olması gerektiğini görürüz. $\square$

Örnek 4.4.6. *TıkHz olmayan $M = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ manifoldunun birinci De Rham kohomolojisi sonsuz boyutludur. Her $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ için*

$$\omega_{m,n} = \frac{x dy - y dx}{2\pi ((x-m)^2 + (y-n)^2)} \in \Omega^1(M)$$

şeklinde tanımlanan formlar kapalıdır ve doğrusal bağımsız bir küme oluştururlar. Aslında daha fazlasını söyleyebiliriz. Bu manifold için $H_c^1(M)$ sayılabilir bir tabana sahip sonsuz boyutlu bir vektör uzayı iken, $H_{DR}^1(M)$ ve bunun duali tabanı sayılamaz büyüklükte bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla, tıkHz olmayan manifoldlar için $H_c^k(M)$ ve $(H_{DR}^{n-k}(M))^*$ izomorfik olmayabilir (bkz. Alıştırma 23).

Örnek 4.4.7. $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ bir delikli diskin birinci kohomolojisinin üreticinin $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ olduğunu görmüştük. Bu elemanın Poincaré dualini veren $\nu = D_M(\omega) \in H_c^1(M)$ formu, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\rho : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $\int_0^\infty \rho(r) dr = 1$ koşulunu sağlayan tıkHz destekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\nu = \rho(r) dr = \rho(r) \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Gerçekten de

$$\int_M \nu \wedge \omega = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r)}{2\pi r^3} (x dx + y dy) \wedge (x dy - y dx) = 1$$

olur. Benzer şekilde $K = \{f = 0, g = 0\} \subseteq S^3$ ile verilen bir düğümün geçişme formunun $\omega_K = \frac{f dg - g df}{2\pi(f^2 + g^2)} \in H_{DR}^1(S^3 - K)$ Poincaré duali

$$\nu = \rho(\sqrt{f^2 + g^2}) \frac{f df + g dg}{\sqrt{f^2 + g^2}} \wedge ds$$

formunun skaler katıdır. Buradaki ds 1-formu $\nabla(f) \times \nabla(g)$ vektör dış çarpımının metrik dualidir.

Tanım 4.4.8. $H_{DR}^k(M)$ De Rham kohomoloji vektör uzayı sonlu boyutlu olan bir M türevlenebilir manifoldunun k 'inci Betti sayısı $b_k(M) \doteq \dim(H_{DR}^k(M))$ olarak tanımlanır. Eğer M manifoldunun tüm kohomoloji grupları sonlu boyutlu ise manifoldun Euler karakteristiği Betti sayılarının

$$\chi(M) \doteq \sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k b_k(M)$$

değişmeli toplamı olarak tanımlanır.

Betti sayıları ve dolayısıyla Euler karakteristiği manifoldun difeomorfizma değişmezleridir. Mayer-Vietoris tam dizisi kullanılarak elde edilen aşağıdaki sonuç Euler karakteristiğinin aslında bir çeşit ölçüm olduğunu göstermektedir. (Ayrıca bkz. Alıştırma 25)

Sonuç 4.4.9. M türevlenebilir bir manifold ve U ve V bu manifoldun tüm Betti sayıları sonlu olan iki açık kümesi olsun. Eğer $U \cap V$ ve $U \cup V$ açık kümelerinin tüm Betti sayıları da sonlu ise

$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

olur.

Kanıt : Her terimi sonlu boyutlu ve sadece sonlu tanesi sıfır vektör uzayından farklı olan vektör uzaylarının bir

$$\dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \xrightarrow{\delta_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

tam dizisini alalım. Her A_i (benzer şekilde B_i, C_i) için

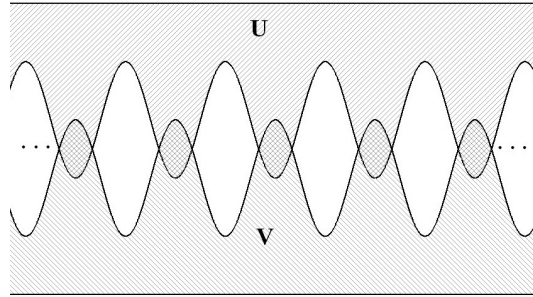
$$\dim A_i = \dim \operatorname{Im} f_i + \dim \ker f_i$$

olduğu açıktır. $\chi(A) = \sum_i (-1)^i \dim A_i$ olarak tanımlansın (benzer şekilde $\chi(B)$ ve $\chi(C)$ 'yi de tanımlayalım). Yukarıdaki dizinin tamlığından dolayı $\operatorname{Im} \delta_i = \ker f_{i+1}$, $\ker \delta_i = \operatorname{Im} g_i$, ve $\operatorname{Im} f_i = \ker g_i$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} \chi(C) + \chi(A) &= \sum_i (-1)^i [(\dim \operatorname{Im} \delta_i + \dim \ker \delta_i) \\ &\quad + (\dim \operatorname{Im} f_i + \dim \ker f_i)] \\ &= \sum_i (-1)^i [(\dim \ker f_{i+1} + \dim \operatorname{Im} g_i) \\ &\quad + (\dim \ker g_i + \dim \ker f_i)] \\ &= \sum_i (-1)^i (\dim \operatorname{Im} g_i + \dim \ker g_i) \\ &\quad + \sum_i (-1)^i (\dim \ker f_i + \dim \ker f_{i+1}) \\ &= \chi(B) + 0 = \chi(B) \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak U ve V açık kümelerinin Mayer-Vietoris dizisinde $A_i \doteq H_{DR}^i(U \cup V)$, $B_i \doteq H_{DR}^i(U) \oplus H_{DR}^i(V)$, ve $C_i \doteq H_{DR}^i(U \cap V)$, olarak kanıtı tamamlarız. $\square$

Uyarı 4.4.10. Öklit düzleminin aşağıdaki şekilde verilen açık alt kümeleri için $\chi(U) = 1 = \chi(V)$ olduğu halde $U \cap V$ ve $U \cup V$ açık kümelerinin Euler Karakteristikleri iyi tanımlı değildir, çünkü $H_{DR}^0(U \cap V)$ ve $H_{DR}^1(U \cup V)$ sonsuz boyutludur (bkz. Şekil 4.13).



Şekil 4.13: U ve V basit bağlantılı oldukları halde birleşim ve kesişimleri oldukça karmaşık bir topolojiye sahip olabilirler.

Diğer taraftan U , V , $U \cap V$, $U \cup V$ açık kümelerinin herhangi üçünün Euler karakteristikleri iyi tanımlı ise dördüncünün Euler karakteristiği de iyi tanımlıdır.

Poincaré izomorfizmasının kolay bir sonucunu aşağıda veriyoruz (bkz. Alıştırma 24).

Sonuç 4.4.11. M tek boyutlu yönlendirilebilir sınırı olmayan tıkHz bir manifold ise $\chi(M) = 0$ olur.

Bu sonuç yönlendirilemeyen tıkHz tek boyutlu manifoldlar için de doğrudur. Kanıtı için biraz daha beklememiz gerekiyor (bkz. Sonuç 5.3.10).

Diğer taraftan M^{4n+2} boyutlu yönlendirilebilir tıkHz bir manifold ise kolayca $\chi(M) \equiv b_{2n+1}(M) \pmod{2}$ olduğunu görebiliriz. Poincaré izomorfizmasının sonucu olarak

$$H^{2n+1}(M) \times H^{2n+1}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\nu]) \mapsto \int_M \omega \wedge \nu$$

bilineer formunun yozlaşmamış (dejenere olmayan) olduğunu biliyoruz. Ayrıca $(2n+1)$ tek sayı olduğu için bu bilineer form ters simetriktir. Son olarak, sadece çift boyutlu gerçel vektör uzayları yozlaşmamış ters simetrik bilineer form taşıyabildikleri için $b_{2n+1}(M)$ çift sayı olmalıdır. O halde aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk:

Sonuç 4.4.12. M boyutu $4n + 2$ olan yönlendirilebilir sınırı olmayan tıkkız bir manifold ise $\chi(M)$ bir çift sayıdır.

Uyarı 4.4.13. Yukarıdaki sonucun hipotezindeki $\dim(M) = 4n + 2$ koşulu kaldırılamaz çünkü (gerçel) dört boyutlu $\mathbb{CP}^2$ karmaşık projektif düzlemin Euler sayısı üçtür.

4.5 Alıştırmalar

1. Önerme 4.1.2'yi kanıtlayınız.
2. Önerme 4.1.4'ün kanıtını tamamlayınız.
3. Sonuç 4.1.9'un kanıtında tanımlanan $r : D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$ fonksiyonun türevlenebilir olduğunu gösteriniz.
4. Yardımcı Teorem 4.2.1'in kanıtında tanımlanan

$$P : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R})$$

doğrusal dönüşümünün manifold üzerinde seçilen yerel koordinat sisteminden bağımsız olduğunu ve dolayısıyla iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ üzerinde kapalı bir $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ 1-formu alalım, öyle ki her $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ için

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} \quad \text{ve} \quad |g(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Stokes Teoremi'ni kullanarak bu formun tam olduğunu gösteriniz. Aslında bu sonuç daha genel durumda da doğrudur: $s \in \mathbb{R}$ ve $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmak üzere, her $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ için

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{R^s} \quad \text{ve} \quad |g(x, y)| \leq \frac{1}{R^s}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Eğer $s \neq 1$ ise ω formu tamdır, kanıtlayınız.

6. Kutupsal koordinatlarda $r = \sin 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ile verilen eğrinin dönme sayısının üç olduğunu gösteriniz.
7. İki ayrık düğümün geçişme sayısının sayfa 215'de Gauss'un tanımladığı sayı ile aynı olduğunu kanıtlayınız.
8. Uyarı 4.3.4.2 ve 4'teki iddiaları kanıtlayınız.
9. Verilen bir $f^* : (A_*, d_*^A) \rightarrow (B_*, d_*^B)$ zincir fonksiyonunun kohomoloji düzeyinde homomorfizma verdiğini gösteriniz (bkz. s. 217):

$$f^* : H^n(A_*) \rightarrow H^n(B_*) , \quad f^*([a]) \doteq [f^*(a)], \quad a \in A_n .$$

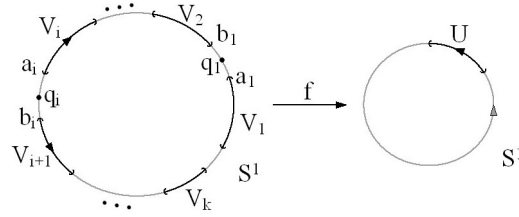
10. Öklit uzayındaki n -boyutlu yuvardan sınırına hiçbir türevlenebilir $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ küçültme fonksiyonu yoktur, gösteriniz (bkz. Teorem 4.1.8).
11. Her türevlenebilir $f : D^n \rightarrow D^n$ fonksiyonun en az bir sabit noktası vardır, gösteriniz (bkz. Sonuç 4.1.9).
12. Mayer-Vietoris kohomoloji dizisini kullanarak $S^n \times S^m$ manifoldunun kohomolojilerini hesaplayınız.
13. Tüp Komşuluk Teoremi'ni ve Mayer-Vietoris kohomoloji dizisini kullanarak tıkHz manifoldların tüm kohomolojilerinin sonlu boyutlu olduğunu kanıtlayabiliriz. Bunun için manifoldu, diyelim ki M^m olsun, bir Öklit uzayına gömelim: $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$. Manifoldu, $\mathbb{R}^n$ içinde sonlu tane açık konveks alt küme ile örtelim, öyle ki bu kümelerin birleşimi manifoldun bir tüp komşuluğunu oluştursun: $M \subset U_1 \cup \dots \cup U_N \subset \mathbb{R}^n$. O halde, bu konveks kümelerin birleşiminin kohomolojisi manifoldun kohomolojisine eşittir. Son olarak, Mayer-Vietoris dizisini ve tümevarım metodunu kullanarak sonlu tane açık konveks kümenin birleşiminin kohomolojisinin sonlu boyutlu olduğunu gösteriniz. (Bkz. Uyarı 4.3.11 ve Sonuç 4.4.4.)
14. Teorem 4.3.19'un kanıtını tamamlayınız.
15. Teorem 4.3.23'i kanıtlayınız.
16. Örnek 4.3.24.1'in içindeki iddiayı kanıtlayınız.
17. Sıfırdan farklı gerçel

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad \text{ve} \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

polinomlarının doğrusal $f_t(x) = (1-t)p(x) + tq(x)$, $t \in [0, 1]$, homotopisini düşünelim. Bu homotopinin düzgün olması için gerek ve yeter koşulun $\deg(p(x)) = \deg(q(x)) \pmod{2}$ ve $a_n b_m > 0$ olduğunu kanıtlayınız.

18. Yönlendirilmiş ve tıkHz her manifolddan aynı boyuttaki küreye derecesi bire eşit olan bir fonksiyonun varlığını kanıtlayınız.
19. Derecesi sıfır olan türevlenebilir her $f : S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonunun bir sabite homotopik olduğunu gösteriniz. Bunu fonksiyonun düzgün bir değerinin ters görüntüsünü ele alarak şu şekilde yapınız: Fonksiyonun bir $p \in S^1$ düzgün değeri etrafında küçük bir $p \in U \subseteq S^1$ aralığı alalım. Bu aralığın ters görüntüsü her biri bu aralığa f fonksiyonu ile difeomorfik olan sonlu sayıdaki $V_1, \dots, V_k$ aralıklarından oluşacaktır. Ayrıca aralıkların çember üzerinde ardışık şekilde dizildiğini kabul edebiliriz. Ardışık V_i ve V_{i+1} aralıklarının arasında kalan aralığın, diyelim ki $[a_i, b_i]$ olsun, tam orta noktasını q_i olarak adlandıralım. Şimdi f fonksiyonunun her

bir V_i ve $[a_i, b_i]$ aralıklarına kısıtlanışlarını uygun bir homotopi yardımıyla doğrusal fonksiyonlara dönüştürelim. Elde ettiğimiz fonksiyona yine f diyelim. Bu fonksiyon, eğer ardışık V_i ve V_{i+1} aralıklarında ters yerel derecelere sahipse, $[a_i, a_{i+1}]$ aralığında sabit olacaktır. Bu durumda fonksiyonu $V_i \cup [a_i, a_{i+1}] \cup V_{i+1}$ birleşiminde yine bir homotopi yardımıyla sabit fonksiyona dönüştürebiliriz, öyle ki, homotopinin her adımı bu aralığı U kümesinin kapanışının içine gönderir. Fonksiyonun derecesi sıfır olduğu için bu işlemi tekrar ederek sonunda sabit bir fonksiyona ulaşırız. Bu sonucu kullanarak çemberden çembere giden fonksiyonların



Şekil 4.14: Fonksiyonun V_i ve V_{i+1} açık kümeleri üzerindeki yerel derecelerinin sırasıyla -1 ve $+1$ olduğu durum.

homotopi sınıflarının bir grup oluşturduğunu ve grubun tam sayılar grubuna, $[f : S^1 \rightarrow S^1] \mapsto \deg(f)$, derece fonksiyonu ile izomorfik olduğunu kanıtlayınız.

20. Boyutu $n \geq 0$ olan bir manifold üzerinde tanımlı ve dereceleri eşit herhangi iki türevlenebilir (sürekli) $f_1 : M \rightarrow S^n$ ve $f_2 : M \rightarrow S^n$ fonksiyonlarının homotopik olduklarını gösteriniz.
21. Beşli Yardımcı Teorem olarak bilinen Yardımcı Teorem 4.4.2'yi kanıtlayınız.
22. Herhangi bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayının dualine izomorfik olması için sonlu boyutlu olması gerektiğini gösteriniz. İpucu: Vektör uzayının sonsuz elemanlı bir $\beta = \{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ Hamel tabanı varsa, her $A \subseteq \Lambda$ alt kümesi için taban elemanları üzerinde

$$f_A : V \rightarrow \mathbb{F}, \quad f_A(v_\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda \in A \\ 0 & , \lambda \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyonların oluşturduğu sayılamaz kümenin dual uzay içinde doğrusal bağımsız olduğunu gösteriniz.

23. Örnek 4.4.6'nın içinde geçen iddiaları kanıtlayınız.
24. Tek boyutlu tıkHz ve yönlendirilebilir bir manifoldun Euler karakteristiğinin sıfır olduğunu gösteriniz.

25. M herhangi bir manifold ve $\{L_i\}$ bu manifoldun kapalı alt manifoldlarının sonlu bir ailesi olsun, öyle ki, bu aile kesişimler altında kapalı olsun ve yine bu ailenin birbirini içermeyen herhangi iki L_i, L_j elemanı çapraz kesişsin (çapraz kesişimin tanımı için 5. Ünite'ye bakınız). Bu ailenin ürettiği en küçük Boolean cebirinin (başka bir deyişle B kümesinin elemanları ile onların tümleyenlerinin sonlu birleşimleri) elemanlarının topolojik bileşenlerinin oluşturduğu ailenin ürettiği Boolean cebirini de $\mathcal{B}$ gösterelim.

Bu yapıyı bir örnekle açıklayalım: $M = \mathbb{R}^2$ ve $L = x$ -ekseni olsun. Tek elemanlı $B = \{L\}$ ailesinin ürettiği Boolean cebiri $\{\emptyset, L, \mathbb{R}^2 - L, \mathbb{R}^2\}$ olduğu halde $\mathcal{B}$ üst ve alt yarı düzlemleri de içermektedir.

- (a) $M = S^2$ birim küresi ve $B = \{S^0, S^1\}$ olmak üzere $\mathcal{B}$ cebirinin tüm elemanlarını listeleyiniz. İki boyutlu küre için oluşturduğunuz yapıyı $S^n, \mathbb{R}P^n$ ve $\mathbb{C}P^n$ manifoldlarına genişletiniz.
- (b) Euler karakteristiği açık kümeler üzerinde toplamsal olsa da genelde toplamsal değildir. Örneğin, $M = \mathbb{R}$ ve $L = \{0\}$ alt manifoldunu düşünelim. $M = L \cup (M - L)$ ayrık birleşimi için

$$\chi(M) = 1 \neq 3 = 1 + 2 = \chi(L) + \chi(M - L)$$

olur ve dolayısıyla Euler karakteristiği toplamsal değildir.

- (c) Herhangi bir M manifoldun tıkız destekli Euler karakteristiği $\chi_c(M) \doteq \sum_i (-1)^i H_c^i(M)$ ile tanımlanır (toplamın sonlu olması koşulu altında). $U \subseteq M$ açık bir alt küme olmak üzere

$$\chi_c(M - U) \doteq \sum_i (-1)^i H_c^i(M, U)$$

ile tanımlanır. şimdi yukarıdaki örneği tekrar ele alalım:

$$\chi_c(M) = -1 = 1 - 2 = \chi(L) + \chi(M - L) .$$

Aslında tıkız destekli bağlıl kohomoloji dizisi sayesinde kolayca

$$\chi_c(M) = \chi_c(U) + \chi_c(M - U)$$

olduğu gösterilebilir.

- (d) Eğer χ_c fonksiyonu $\mathcal{B}$ cebirinin her elemanı üzerinde sonlu bir değer alıyorsa, χ_c fonksiyonun bu cebir üzerinde toplamsal olduğunu gözlemleyiniz.
- (e) A değişmeli bir grup ve $\phi : M \rightarrow A$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her $a \in A$ için $\phi^{-1}(a) \in \mathcal{B}$ oluyorsa bu fonksiyonun M üzerinde (tıkız destekli) Euler karakteristiğine göre integrali

$$\int_M \phi d_{\chi_c} \doteq \sum_{a \in A} \chi_c(\phi^{-1}(a)) a ,$$

toplama olarak tanımlanır (yine toplamın sonlu olduğu durumda). $A = \mathbb{Z}$ olması durumunda $\int_M 1 d\chi_c = \chi_c(M)$ olduğunu gösteriniz.

- (f) M manifoldu gerçel cebirsel bir küme (herhangi bir $\mathbb{R}^N$ içinde sonlu tane polinomun ortak sıfırlarının kümesi) ise $\mathcal{B}$ cebirini M kümesinin yarı cebirsel alt kümelerinin (polinom eşitsizlikleri ile tanımlanan alt kümeler) ailesi olarak seçebiliriz. Tıkız desteki kohomoloji aile üzerinde toplamsal olacaktır. Bunu kullanarak cebirsel geometrik birçok sonucu elde etmek mümkündür.

Euler karakteristiğinin bir ölçüm olarak kullanılabileceği üzerine ilk makale Oleg Viro tarafından yazılmıştır ([40]). Bu fikirlerin birçok uygulamasını da içeren önemli bir kaynak olarak [17] numaralı referansı da vermeliyiz. Bu makalelerde bahsedilen integral tekniğinin birçok uygulamasını bulabilirsiniz.

- (g) Biraz cebirsel topoloji bilen okuyucularımıza şu hatırlatmayı yapalım: Tıkız destekli tekil kohomoloji kullanarak yukarıda yaptıklarımızı CW-kompleks yapısına sahip topolojik uzaylara genişletebiliriz.

“Bir konuyu açıklığa kavuşturup tam anlamıyla bitirdiğim zaman, o konudan uzaklaşırım. Bu sayede tekrar karanlıklara dalebilirim.”

-Carl Friedrich Gauss

5

Kesişim Teorisi

Bu ünite de türevlenebilir manifoldların topolojik özelliklerini alt manifoldları yardımıyla anlamaya çalışacağız. Bunu yapmak için alt manifoldların kesişim teorisini kullanacağız. Alt manifoldların kesişim teorisini de Sard Teoremi’nin bir uygulaması olan dik kesişim teorisi ile kuracağız. Alt manifoldların kesişimini kohomoloji sınıfları yardımıyla ifade edeceğiz ve bunu kullanarak Euler karakteristik sınıfını tanımlayacağız. Euler sınıfını vektör alanlarının sıfırları ile ilişkilendireceğiz. Bu konularla ilgili en iyi kaynaklardan birisi [16] numaralı kitaptır. Euler sınıfının Riemann yüzeylerine uygulaması olarak Riemann-Hurwitz ve Hurwitz teoremlerini vereceğiz. Bu teoremler cebirsel eğriler konusunun da klasik sonuçlarıdır. Cebirsel geometri konusunda daha kapsamlı kaynaklar için [15], [18] ve [13] numaralı referanslara bakabilirsiniz.

5.1 Çapraz Kesişim

Tanım 5.1.1. $f : K \rightarrow M$ ve $g : L \rightarrow M$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir fonksiyonları olsun. Eğer $f(p) = g(q)$ koşulunu sağlayan her $(p, q) \in K \times L$ ikilisi için

$$(Df)_p(T_p K) + (Dg)_q(T_q L) = T_{f(p)} M$$

koşulu sağlanıyorsa bu iki fonksiyon çapraz kesişiyor deriz ve bunu $f \pitchfork g$ şeklinde gösteririz.

Uyarı 5.1.2. 1) Eğer $\dim(K) + \dim(L) < \dim M$ ise $f \pitchfork g$ olması için gerek ve yeter koşul f ve g fonksiyonlarının görüntülerinin ortak noktası olmamasıdır:

$$f \pitchfork g \Leftrightarrow f(K) \cap g(L) = \emptyset .$$

2) Eğer $L = \{q_1, \dots, q_k\}$ sonlu noktadan oluşan bir manifold ise, $f \pitchfork g$ olması her $g(q_i) \in M$ noktasının f için düzgün bir değer olmasına denktir. Dolayısıyla, bu durumda $f \pitchfork g$ ise $\{p \in K \mid f(p) \in g(L)\}$ kümesi K içinde bir alt manifolddur.

Sard Teoremi'nin bir sonucu olan aşağıdaki teorem, çapraz kesişimin temel özelliklerini tasvir etmesi açısından önemlidir. Kısaca söylemek gerekirse teorem fonksiyonların çapraz kesişmesinin kararlı bir durum olduğunu göstermektedir.

Teorem 5.1.3. $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $g : L \rightarrow \mathbb{R}^n$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir fonksiyonları olsun. Bu durumda ölçümü sıfır olan öyle bir $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi vardır ki, her $w \in \mathbb{R}^n - C$ için,

$$f_w(x) \doteq f(x) + w, \quad x \in K,$$

olmak üzere $f_w \pitchfork g$ olur.

Eğer K tıkmaz bir manifold ve $g : L \rightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün bir fonksiyon ise C kümesi ölçümü sıfır olan kapalı bir küme olur. Ayrıca, bu durumda eğer başlangıçta $f \pitchfork g$ ise, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, her $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| < \delta$ için, yine $f_w \pitchfork g$ olur.

Kanıt : $g - f : K \times L \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(g - f)(x, y) = g(y) - f(x)$, ile tanımlanan fonksiyonunun kritik değerlerinin kümesini C ile gösterelim. Bu durumda, herhangi bir $w \in \mathbb{R}^n$ noktasının bu fonksiyonun bir kritik değeri olması tam olarak,

$$D(g - f)_{(p,q)} : T_{(p,q)}K \times L \rightarrow T_w\mathbb{R}^n,$$

türev fonksiyonunun örten olmadığı, fakat $w = g(q) - f(p)$ koşulunu sağlayan bir $(p, q) \in K \times L$ ikilisinin varlığına denktir. O halde, $w \in \mathbb{R}^n - C$ ise $w = g(q) - f(p)$ koşulunu sağlayan her $(p, q) \in K \times L$ ikilisi için

$$D(g - f_w)_{(p,q)} = (Dg)_q - (Df_w)_p = (Dg)_q - (Df)_p = D(g - f)_{(p,q)}$$

türev fonksiyonu örten dir. Diğer bir deyişle, $w \in \mathbb{R}^n - C$ koşulu $f_w \pitchfork g$ koşuluna denktir.

Eğer K tıkmaz bir manifold ve $g : L \rightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün bir fonksiyon ise $g - f$ fonksiyonu da düzgün olur. Diğer taraftan, $g - f$ fonksiyonunun kritik noktalar kümesi kapalıdır, çünkü her türevlenebilir fonksiyonun kritik noktalarının kümesi kapalı bir kümedir. O halde, bu kapalı kümenin $g - f$ düzgün fonksiyonu altındaki görüntüsü olan C kritik değerler kümesi de kapalıdır. Son olarak, eğer başlangıçta $f \pitchfork g$ ise $0 \in \mathbb{R}^n$ vektörü kapalı $C \subseteq \mathbb{R}^n$ alt kümesinin dışındadır. O halde, sıfır vektörünün bir $B(0, \delta)$ komşuluğu da C 'nin dışında kalacaktır. $\square$

Uyarı 5.1.4. Yukarıdaki teoremin ikinci kısmındaki sonucu biraz daha kuvvetlendirebiliriz. $w : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun:

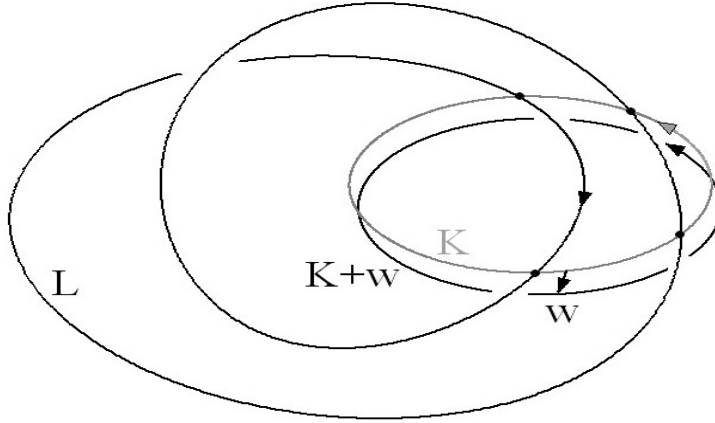
1) C kümesi yine $g - f$ fonksiyonunun kritik değerler kümesi olmak üzere $w(K) \cap C = \emptyset$ olsun;

2) $N(f(K))$, $f(K)$ görüntü kümesinin tıkHz bir komşuluğu olmak üzere, her $(p, q) \in K \times (L \cap N(f(K)))$ için, $\|Dw\|_p < \|D(g-f)\|_{(p,q)}$ eşitsizliği sağlansın. (Aslında $f \pitchfork g$ olduğunu kabul ettiğimiz için sıfır sabit fonksiyonuna yeterince C^1 -yakın her fonksiyon bu koşulu sağlar.) Bu durumda, $f_w = f + w$ fonksiyonu g fonksiyonuna yine çapraz olacaktır.

Örnek 5.1.5. $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iki türevlenebilir fonksiyon ve $K = f(S^1)$, $L = g(S^1)$ görüntü kümeleri olsun. O halde, yukarıdaki önermeden dolayı ölçümü sıfır olan tıkHz bir $C \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi dışındaki her, $w \in \mathbb{R} - C$, vektörü için $K + w = \{x + w \mid x \in K\}$ olmak üzere

$$(K + w) \cap L = \emptyset$$

olur. C kümesinin ölçümü sıfır olduğundan w vektörü istenildiği kadar küçük seçilebilir. Başka bir deyişle, K ve L kümelerinden birini istediğimiz kadar küçük bir vektör boyunca öteleyerek bu iki kümenin kesişmemesini sağlayabiliriz.



Şekil 5.1: K ve L dört ayrı noktada kesişirken $K + w$ ve L kesişmiyor.

Teorem 5.1.3 $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir türevlenebilir manifold alındığında da doğrudur.

Sonuç 5.1.6. $f : K \rightarrow M$ ve $g : L \rightarrow M$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir fonksiyonları olsun. Eğer $g : L \rightarrow M$ düzgün bir fonksiyon ise,

$\tilde{f}$ fonksiyonuna istediğimiz kadar yakın ve aynı zamanda homotopik öyle bir $f : K \rightarrow M$ fonksiyonu vardır ki $f \pitchfork g$ olur.

Ayrıca, eğer başlangıçta $f \pitchfork g$ ise, f fonksiyonuna yeterince yakın her $\tilde{f}$ fonksiyonu da $\tilde{f} \pitchfork g$ koşulunu sağlar.

Kanıt : M manifoldunu $\mathbb{R}^m$ 'ye difeomorfik $\{\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ koordinat komşulukları ile örtelim. Daha sonra, K manifoldunu her bir elemanının kapanışı tıkız olan yerel sonlu ve sayılabilir bir $\{U_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ açık örtüsü ile örtelim öyle ki, her bir $f(\overline{U}_k)$ bir $V_{i(k)}$ 'nin içinde kalsın. Yine her bir k için aşağıdaki koşulları sağlayan türevlenebilir $\rho_k : M \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonları seçelim:

1. Her k için, $\rho_k(U_k) = \{1\}$ ve
2. $f(\text{supp}(\rho_k))$ kapanışı tıkız olan ve $V_{i(k)}$ içinde kalan bir alt küme olsun.

Şimdi $k = 1$ için,

$$f_1 = f_{w_1}(p) = \begin{cases} \phi_{k(i)}^{-1}(\phi_{k(i)}(f(p)) + \rho_1(p)w_1) & , \quad p \in \text{supp}(\rho_1), \\ f(p) & , \quad p \notin \text{supp}(\rho_1) , \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon g ile U_1 üzerinde dik kesişecek şekilde istediğimiz kadar küçük bir $w_1 \in \mathbb{R}^m$ vektörü seçelim. Yukarıdaki uyarıdan dolayı öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $\|f_1 - h\|_{\overline{U}_1} < \delta$ koşulunu sağlayan her $h : K \rightarrow M$ fonksiyonu $\overline{U}_1$ üzerinde g 'ye çapraz olur. O halde, f_1 fonksiyonunu $\overline{U}_2$ üzerinde yeterince küçük bir vektör ile öteleyerek elde edeceğimiz f_2 fonksiyonu $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ üzerinde g 'ye dik hale gelecektir. $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ tıkız olduğu için aynı oyunu tekrar ederek tanımlayacağımız f_3 fonksiyonu $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \overline{U}_3$ üzerinde g 'ye çapraz olacaktır. Tümevarım yöntemi ile her n için, $\overline{U}_1 \cup \dots \cup \overline{U}_n$ üzerinde g 'ye çapraz olan ve f 'ye istediğimiz kadar yakın bir f_n bulabiliriz. Elde ettiğimiz (f_n) fonksiyon dizisinin kuruluşundan dolayı, her U_n için öyle bir k_n doğal sayısı vardır ki, her $k \geq k_n$ ve $p \in U_n$ için, $f_n(p) = f_k(p)$ olur. O halde,

$$\tilde{f} = \lim_k f_k$$

fonksiyonu aradığımız fonksiyondur.

İkinci kısmın kanıtı benzer fikirlerle yapılabileceğinden okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 1). $\square$

Uyarı 5.1.2.2'nin bir genellemesi olan aşağıdaki teoremden $g : L \rightarrow M$ fonksiyonunu bir gömme fonksiyonu olarak alacağız. Ayrıca bu durumda, $f \pitchfork g$ yerine $f \pitchfork L$ yazacağız.

Teorem 5.1.7. $f : K \rightarrow M$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $L \subseteq M$ kapalı bir alt manifold olsun. Eğer $f \pitchfork L$ ise $f^{-1}(L) \subseteq K$ ters görüntüsü $\dim(K) + \dim(L) - \dim(M)$ boyutlu bir alt manifolddur.

Ayrıca K sınırı olan bir manifold ve $f|_{\partial K} \pitchfork L$ ise $f^{-1}(L) \subseteq K$ ters görüntüsü sınırı olan bir manifold olur öyle ki,

$$\partial f^{-1}(L) = (\partial K) \cap f^{-1}(L)$$

olur.

Kanıt : $L^l \subseteq M^m$ kapalı bir alt manifold olduğu için her $q \in L$ noktası etrafında M için öyle bir $(y_1, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_m)$ koordinat sistemi seçebiliriz ki, L alt manifoldu $y_{l+1} = \dots = y_m = 0$ denklem sisteminin çözümü olur. Şimdi de $U \subseteq K^k$ üzerinde bir $(x_1, \dots, x_k)$ koordinat sistemi seçelim öyle ki

$$(y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k)) = f(x_1, \dots, x_k)$$

olsun. O halde, bu koordinat sisteminde

$$f^{-1}(L) = \{x = (x_1, \dots, x_k) \mid f_{l+1}(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$$

ile verilir. Aynı koordinat sisteminde tanımlı

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}, \quad x \mapsto g(x) = (f_{l+1}(x), \dots, f_m(x)),$$

fonksiyonunu düşünelim. $f \pitchfork L$ çapraz kesişme koşulu $0 \in \mathbb{R}^{m-l}$ noktasının $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-l}$ fonksiyonu için bir düzgün değer olmasına denktir. Son olarak, $f^{-1}(L)$ manifoldu bu koordinat sisteminde tam olarak $g^{-1}(0)$ ters görüntüsüne eşit olduğundan $f^{-1}(L) \subseteq K$ boyutu $k - (m - l) = k + l - m$ olan bir alt manifolddur. Böylece ilk kısmın kanıtı tamamlanır.

Teoremin ilk kısmından dolayı, $f^{-1}(L) \cap (K - \partial K)$ ve $f^{-1}(L) \cap \partial K$ ara kesitleri sırasıyla $(k + l - m)$ ve $(k + l - m - 1)$ -boyutlu manifoldlardır. Yine de $f^{-1}(L) \cap \partial K$ manifoldunun $f^{-1}(L)$ 'nin sınırı olduğunu göstermeliyiz. Bunun için herhangi bir $p \in \partial K \cap f^{-1}(L)$ sınır noktası etrafında koordinat sistemi seçelim:

$$\mathbb{H}^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

$f|_{\partial K} \pitchfork L$ olduğundan $f_{l+1}(x), \dots, f_m(x)$ fonksiyonlarının $x_2, \dots, x_k$ değişkenlerine göre kısmi türevlerinden oluşan matrisin rankı $m - l$ 'dir. Genellikle bir şey kaybetmeden bu matrisin son $(m - l) \times (m - l)$ 'lik alt matrisinin tersinin var olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$(x_1, \dots, x_k) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{l+k-m}, f_{l+1}, \dots, f_m)$$

fonksiyonu bir difeomorfizma olur ve dolayısıyla da yeni bir koordinat sistemi tanımlar. Bu yeni koordinat sisteminde $f^{-1}(L) \simeq g^{-1}(0)$ ters görüntüsü tam olarak

$$\{(x_1, \dots, x_{l+k-m}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^k\} \simeq \mathbb{H}^{l+k-m}$$

olduğundan kanıt tamamlanır. $\square$

Örnek 5.1.8. *Bu örnekte D^n diskinden sınırına sürekli bir küçültme fonksiyonunun var olmadığını göstereceğiz. Tersine böyle bir küçültme fonksiyonun varlığını kabul edelim: $r : D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$. Bu fonksiyonun türevlenebilir bir $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ yaklaşımını alalım. Küçültme fonksiyonu diskin sınırında birim fonksiyon olduğundan türevlenebilirdir ve dolayısıyla türevlenebilir yaklaşımının da sınırda birim fonksiyon olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca bu türevlenebilir yaklaşımın da bir küçültme fonksiyonu olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi bu türevlenebilir küçültme fonksiyonun bir düzgün $p \in S^{n-1}$ değerini seçelim. Bu durumda $C = f^{-1}(p)$ sınırı olan tıkHz ve 1-boyutlu bir alt manifolddur. Yukarıdaki teoremi ve f 'nin sınırda birim fonksiyon olmasını kullanarak, $\partial C = f^{-1}(p) \cap S^{n-1} = \{p\}$ elde ederiz. Fakat bir boyutlu tıkHz bir manifoldun sınırı tek bir noktadan oluşamaz; dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde, $r : D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$ gibi bir küçültme fonksiyonu yoktur.*

5.2 Alt Manifoldların Kesişimi ve Poincaré Duali

Bu bölümde alt manifoldların kesişim teorisini kuracağız. Daha sonra bu teoriyi kohomoloji ve Poincaré dualiği ile ilişkilendireceğiz ve son olarak bu teoremin bir uygulaması olarak bazı manifoldların kohomoloji cebirlerinin çarpım yapılarını alt manifoldların kesişimleri yardımıyla inceleyeceğiz.

Manifoldların kesişim teorisini bir önceki bölümde incelediğimiz çapraz kesişim ve Alt Ünite 2.3.5 yardımıyla oluşturacağız. Alt Ünite 2.3.5'te incelediğimiz vektör uzaylarının kesişim teorisini doğrudan teğet uzaylara uygulayarak alt manifoldların kesişimlerinin yönünü belirleyeceğiz: $L^l, K^k \subseteq M^m$ yönlendirilmiş bir manifoldun yönlendirilmiş kapalı alt manifoldları olsun. Eğer $f : L \rightarrow M$ ve $g : K \rightarrow M$ içermeye fonksiyonları çapraz kesişiyorsa $L \cap K$ ara kesiti M manifoldunun $(k+l-m)$ -boyutlu yönlendirilmiş bir alt manifoldu olur. Eğer yönlendirmeleri dikkate almazsak $L \cap K$ sadece $(k+l-m)$ -boyutlu bir alt manifold olur.

Eğer bu iki alt manifold çapraz kesişmiyorsa ikisinden birini hafifçe oynatarak çapraz kesişir pozisyona getirebiliriz. Farklı oynatmalardan elde edilecek çapraz kesişimlerin temel değişmezini aşağıdaki önermede açıklayacağız.

Önerme 5.2.1. *$f : L \rightarrow M$ ve $g : K \rightarrow M$ iki kapalı alt manifold olsun. Ayrıca $f_i : L \rightarrow M$, $i = 0, 1$, f içermeye fonksiyonuna homotopik ve g 'ye çapraz olan iki fonksiyon olsun. Bu durumda $(k+l-m)$ -boyutlu $f_0(L) \cap g(K)$ ve $f_1(L) \cap g(K)$ alt manifoldları $(k+l-m+1)$ boyutlu bir W manifoldunun sınırı olurlar. Eğer L , K ve M yönlendirilmiş manifoldlar ise W manifoldu da yönlendirilmiş olarak seçilebilir öyle ki,*

$$\partial W = (f_1(L) \cap g(K)) \cup -(f_0(L) \cap g(K))$$

olur.

Kanıt : Kanıt önceki bölümün sonuçlarından kolayca elde edilir. İkinci kısmın kanıtı için, f_0 ve f_1 fonksiyonlarını birbirine bağlayan ve g 'ye çapraz

olan bir $F : K \times [0, 1] \rightarrow M$ homotopi fonksiyonu seçelim. Bu durumda $W = F^{-1}(g(K))$ olacaktır. Yönlendirmelerle ilgili ifadenin kanıtını okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 2). $\square$

Kapalı K ve L alt manifoldlarından birinin tıkHz ve $k + l = m$ olması durumunda ara kesiti sayısal bir değişmez ile ifade edebiliriz: Bir boyutlu, tıkHz, bağlantılı sınırlı bir manifoldun sınırı iki noktadan oluşur. Eğer manifold yönlendirilmiş ise sınır noktaları da ters işaretli olarak yönlendirilir. Bu durumda önceki önermeden şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.2.2. *Bir önceki önermede olduğu gibi L ve K kapalı alt manifoldlarının boyutlarının toplamı $k + l = m$ ve ikisinden biri tıkHz ise, $f_0(L) \cap g(K)$ ve $f_1(L) \cap g(K)$ çapraz kesişimleri sonlu sayıda noktadan oluşur. W ise bir boyutlu tıkHz bir manifolddur. Ayrıca eğer manifoldlar yönlendirilmiş ise W ve dolayısıyla sınırı da yönlendirilmiş olacaktır. $Int(f_i(L), g(K))$, $i = 0, 1$, ile bu ara kesiti oluşturan noktaların işaretli toplamını gösterirsek*

$$Int(f_0(L), g(K)) = Int(f_1(L), g(K))$$

olur. Yönlendirmeleri dikkate almazsak (örneğin, manifoldlardan biri yönlendirilemiyorsa)

$$Int(f_0(L), g(K)) \equiv Int(f_1(L), g(K)), \quad (Mod\ 2)$$

($\mathbb{Z}_2$ değerli kesişim sayısı) elde ederiz.

Yukarıdaki sonuçla iyi tanımlı olduğunu gösterdiğimiz $Int(f_i(L), g(K))$ sayısına $f(L)$ ve $g(K)$ alt manifoldlarının *kesişim sayısı* denir ve kısaca $Int(K, L)$ ile gösterilir.

Uyarı 5.2.3. 1) *Eğer K , L veya M manifoldu yönlendirilemez ise bazı özel durumlar dışında sadece (Mod 2) kesişim sayısından bahsedebiliriz (bkz. Uyarı 5.3.1.3 ve Örnek 5.3.2.3).*

2) *Eğer $K = L$ ise $Int(K, K)$ sayısına K alt manifoldunun kendisi ile kesişim sayısı denir.*

3) *Vektör uzaylarının yönlendirmelerini hatırlayarak*

$$Int(K, L) = (-1)^{kl} Int(L, K)$$

elde ederiz ($m = k + l$ olduğunu kabul ediyoruz). Dolayısıyla, eğer $m = 2k$ ve k tek sayı ise $Int(K, K) = 0$ olur.

Örnek 5.2.4. 1) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $L = S^1 \times \{p\}$ ve $K = \{q\} \times S^1$ alt manifoldlar olmak üzere $L \cap K = \{(p, q)\}$ tek noktada çapraz kesişirler. O halde, $Int(L, K) = \pm 1$ olur (yönlendirmelere bağlı olarak işaret değişir). $Int(L, L) = 0$ olduğu da kolayca görülür (ayrıca bkz. Alıştırma 3).

2) $M = \mathbb{CP}^2$ karmaşık projektif düzlemde bir $L = \mathbb{CP}^1$ doğrusu alalım. L alt manifoldunun kendisi ile kesişimini almak için bu doğruyu biraz oynatarak başka bir doğru elde edelim. İki farklı doğru tek bir noktada dik kesişecektir. Tüm doğruları karmaşık yönlendirmeleriyle düşünürsek kesişimin işareti pozitif olacaktır. Dolayısıyla, $\text{Int}(L, L) = 1$ olacaktır. Örnek 5.2.11.3'de karmaşık homojen polinomların sıfırları olarak ifade edilen alt manifoldların kesişim sayısını hesaplayacağız.

3) Şimdi de gerçel projektif uzayı ele alalım: $M = \mathbb{RP}^2$ ve $L = \mathbb{RP}^1$ olsun. M yönlendirilemeyen bir manifold olduğu için sadece $\mathbb{Z}_2$ değerli kesişimden bahsedebiliriz. Bir önceki örneğe benzer şekilde $\text{Int}(L, L) = 1$ olur. (Bkz. Ayrıca Alıştırma 16)

4) $M = S^2$ iki boyutlu kürenin üzerindeki herhangi iki tıkHz eğrinin kesişimi her zaman sıfırdır! Aslında bu $H_{DR}^1(S^2) = 0$ kohomolojisinin ve Teorem 5.2.6'nın bir sonucudur.

Tanım 5.2.5. $L^l \subseteq M^m$ yönlendirilmiş bir manifoldun yönlendirilmiş ve kapalı bir alt manifoldu olsun. Bu durumda Stokes Teoremi'nden dolayı

$$\phi : H_c^l(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_L \omega,$$

bir homomorfizma verir (ω tıkHz destekli olduğu için bu formun kapalı L alt manifolduna kısıtlanması da tıkHz desteklidir). O halde,

$$D_M : H_{DR}^{m-l}(M) \longrightarrow (H_c^l(M))^*, (D_M([\nu]))([\omega]) = \int_M \omega \wedge \nu,$$

Poincaré izomorfizmasından dolayı bir ve yalnız bir $[\nu_L] \in H_{DR}^{m-l}(M)$ sınıfı vardır, öyle ki, her $[\omega] \in H_c^l(M)$ için,

$$\int_L \omega = \phi([\omega]) = \int_M \omega \wedge \nu_L$$

olur. Bu forma $L \subseteq M$ alt manifoldunun Poincaré duali denir.

Teorem 5.2.6. M^m yönlendirilmiş bir manifold ve L^l yönlendirilmiş kapalı bir alt manifold olsun. Bu durumda $[\nu_L] \in H_{DR}^{m-l}(M)$ bu alt manifoldun Poincaré duali olmak üzere, her yönlendirilmiş tıkHz $K^{m-l} \subseteq M$ alt manifoldu için

$$\text{Int}(L, K) = \int_K \nu_L$$

olur.

Kanıt : $K^k \subseteq M$ yönlendirilmiş tıkHz bir alt manifold olsun ($k = m - l$). Şimdi M manifoldu üzerine bir Riemann metriği koyalım ve $K \subseteq M$ alt manifoldunun normal demetine bu metriği kısıtlayalım. Tüp Komşuluk Teoremi'nden normal demetin sıfır kesitinin bir $K \subseteq V \subseteq N(K)$ açık komşuluğunun

$K \subseteq U \subseteq M$ alt manifoldunun bir açık komşuluğuna difeomorfik olduğunu biliyoruz. K alt manifoldu tıkHz olduğundan sıfır kesitinin uygun bir $\epsilon > 0$ komşuluğunun V içinde kalmasını sağlayabiliriz. Normal demeti aşağıdaki gibi yazalım:

$$N(K) = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \mathbb{R}^{m-k}) / (x, y) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)(y)), (x, y) \in U_{\alpha} \times \mathbb{R}^{m-k},$$

öyle ki, her iki manifold da yönlendirilmiş olduğu için geçiş fonksiyonları $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow SO(m-k)$, şeklinde olsun. Her α için, $U_{\alpha} \times \mathbb{R}^{m-k}$ üzerindeki $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k})$ koordinat sistemini kullanarak $\omega_{\alpha} = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{m-k}$ formunu oluşturalım. Geçiş fonksiyonları $SO(m-k)$ değerli olduğu için $g_{\alpha\beta}^*(\omega_{\beta}) = \omega_{\alpha}$ olacaktır. Dolayısıyla, bu formlar bize $N(K)$ normal demeti üzerinde bir ω $(m-k)$ -formu tanımlar. Bu formun kapalı olduğu kolayca görülür. Şimdi aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu seçelim:

- 1) Her $t \in [0, \epsilon/2]$ için $\rho(t) = 1$, ve
- 2) her $t > \epsilon$ için $\rho(t) = 0$, olsun.

O halde, $\rho(\|y\|^2) : N(K) \rightarrow [0, 1]$ türevlenebilir bir fonksiyondur ($\|y\|$ ile $y = (y_1, \dots, y_{m-k})$ vektörünün normal demetin üzerindeki iç çarpıma göre normunu gösteriyoruz). Ayrıca bu fonksiyon sadece y değişkenine bağlı olduğundan $\rho(\|y\|^2) \omega$ formu $N(K)$ üzerinde kapalıdır. Form V dışında tamamen sıfır olduğundan bu formun difeomorfizma altındaki görüntüsü de, U dışında sıfır tanımlanarak, tüm M manifolduna genişletilebilir. Formun normal demetin bir $\{x_0\} \times \mathbb{R}^{m-k}$ lifi üzerindeki integralinin değeri

$$a = \int_{\{x_0\} \times \mathbb{R}^{m-k}} \rho(\|y\|^2) \omega$$

olsun. Şimdi $\mu_K = \frac{1}{a} \rho(\|y\|) \omega \in \Omega^{m-k}(M)$ kapalı formunu ele alalım ve

$$Int(K, L) = \int_L \mu_K$$

olduğunu gösterelim. K manifoldunun tıkHz olmasından ve ρ fonksiyonunun seçiminden dolayı bu form tıkHz desteklidir: $\mu_K \in \Omega_c^{m-k}(M)$.

$i_0 : L \rightarrow M$ içermek fonksiyonunu küçük bir $i_t : [0, 1] \times L \rightarrow M$ homotopisi ile değiştirelim öyle ki, $K \cap i_1(L)$ olsun. Stokes Teoremi'nden dolayı

$$\int_L \mu_K = \int_{i_0(L)} \mu_K = \int_L i_0^*(\mu_K) = \int_L i_1^*(\mu_K) = \int_{i_1(L)} \mu_K$$

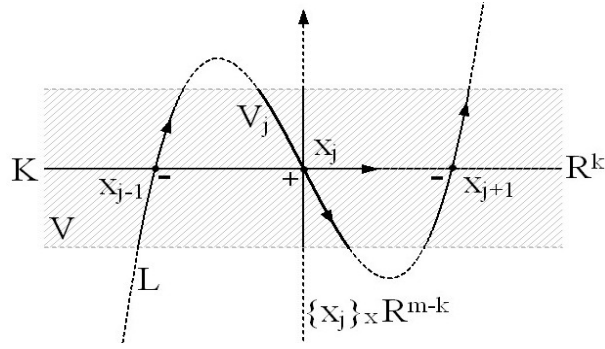
olacaktır. L ve $i_1(L)$ alt manifoldlarının Poincaré duallerinin de aynı olacağı açıktır (bkz. Tanım 5.2.5). Dolayısıyla, K ve L alt manifoldlarının çapraz kesiştiklerini kabul edebiliriz. Diğer taraftan, L kapalı ve K tıkHz olduğundan

$$L \cap K = \{x_1, \dots, x_s\}$$

kümesi sonlu olacaktır. İntegralini aldığımız μ_K formu K alt manifoldunun U komşuluğu dışında sıfır değeri alacağı için integrali difeomorfizma yardımıyla normal demetin sıfır kesitinin V komşuluğuna taşıyabiliriz. Her bir kesişim noktası bir çapraz kesişim olduğundan $\epsilon > 0$ sayısını yeterince küçük seçerek $L \cap V$ manifoldunun her bir V_j topolojik bileşenini, $\{x_j\} \times \mathbb{R}^{m-k} \cap V$ lif parçasında tanımlı türevlenebilir bir fonksiyonun grafiği olarak görebiliriz. Ayrıca,

$$V_j \rightarrow \{x_j\} \times \mathbb{R}^{m-k} \cap V$$

difeomorfizmasının yönlendirmeyi koruması için gerek ve yeter koşul x_j kesişim noktasının $\text{sgn}(x_j)$ işaretinin pozitif olmasıdır. O halde, yine Stokes



Şekil 5.2: L ve K manifoldlarının x_{j-1} , x_j ve x_{j+1} noktalarındaki kesişim işareti sırasıyla $-$, $+$, $-$ 'dir.

Teoremi'nden

$$\int_L \mu_K = \int_{L \cap U} \mu_K = \sum_j \text{sgn}(x_j) \int_{\{x_j\} \times \mathbb{R}^{m-k} \cap V} \mu_K$$

elde ederiz. Son olarak

$$\int_{\{x_j\} \times \mathbb{R}^{m-k} \cap V} \mu_K = 1$$

olduğundan

$$\int_L \mu_K = \sum_j \text{sgn}(x_j) = \text{Int}(K, L)$$

sonucuna varırız. Bu eşitliği L alt manifoldunun ν_L Poincaré dual formu yardımıyla

$$\text{Int}(K, L) = \int_L \mu_K = \int_M \mu_K \wedge \nu_L = \int_V \mu_K \wedge \nu_L$$

olarak yazalım. Son olarak, V komşuluğu yerel olarak $W \times \mathbb{R}^l$ şeklinde yazılabildiği ($W \subseteq K$ açık bir küme olmak üzere) ve yine her $x \in W$ için

$$\int_{\{x\} \times \mathbb{R}^{m-k} \cap V} \mu_K = 1$$

olduğundan

$$\int_V \mu_K \wedge \nu_L = (-1)^{kl} \int_K \nu_L$$

elde ederiz. Böylece kanıt tamamlanır:

$$\text{Int}(L, K) = (-1)^{kl} \text{Int}(K, L) = \int_K \nu_L .$$

□

Uyarı 5.2.7. Yukarıdaki teoremden oluşturduğumuz $[\mu_L]$ sınıfının da her $[\omega] \in H_c^l(M)$ için,

$$\phi([\omega]) = \int_L \omega = \int_M \omega \wedge \mu_L$$

eşitliğini sağladığını görmek zor değildir. Dolayısıyla, $[\mu_L] = [\nu_L]$ olmalıdır. Buna rağmen Teorem 5.2.6'da verilen

$$\text{Int}(L, K) = \int_K \nu_L$$

özellığının $[\nu_L]$ sınıfını tamamen belirlediğini göstermiş değiliz. Kolayca görüleceği üzere bunun için şu ifadeyi kanıtlamak yeterli olurdu: Kapalı bir $\omega \in \Omega^k(M)$ formunun tam olması için gerek ve yeter koşul her tıkHz $K^k \subseteq M$ yönlendirilmiş alt manifoldu için $\int_K \omega = 0$ integralinin sıfır olmasıdır. Fakat bu iddia doğru değildir. Diğer taraftan her $f : K^k \rightarrow M$ türevlenebilir fonksiyonu için $\int_K f^*(\omega) = 0$ ise ω formu tamdır (burada K^k sadece yönlendirilmiş tıkHz bir manifolddur; M içinde bir alt manifold olması gerekmiyor). En son yazdığımız iddia tekil homolojinin bir konusudur ve Steenrod Temsil Teoremi (Representability Theorem) olarak bilinir (bkz. Corollary 15.3, s.49, [8]).

Bundan sonra $L \subseteq M$ alt manifoldunun Poincaré dualini $[\mu_L]$ ile göstereceğiz.

Uyarı 5.2.8. $F : K \times [0, 1] \rightarrow M$ sürekli fonksiyonu $F_0 : K \rightarrow M$ ile $F_1 : K \rightarrow M$ türevlenebilir gömme fonksiyonları arasında bir homotopi olsun. Bir önceki bölümün sonuçlarını kullanarak, homotopinin uç fonksiyonlarını değiştirmeden, homotopiyi türevlenebilir hale getirebiliriz. O halde, homotopinin uç fonksiyonlarının verdiği $F_0(K)$ ve $F_1(K)$ alt manifoldları için $\mu_{F_0(K)} = \mu_{F_1(K)}$ olur.

Örnek 5.2.9. 1) $M = \mathbb{R}^n$ veya S^n ise, her $1 \leq k < n$ için $H_{DR}^k(M) = 0$ olduğundan, boyutlarının toplamı n olan pozitif boyutlu biri tıkHz diğeri kapalı herhangi yönlendirilmiş iki alt manifoldun kesişim sayısı her zaman sıfırdır.

2) M tıkHz ve yönlendirilmiş bir manifold ve $p \in M$ olmak üzere $K = \{p\}$ tek noktadan oluşan bir alt manifold ise $\mu_K \in H_{DR}^n(M)$ formu için $\int_M \mu_K = 1$ olur, çünkü K ile $L = M$ alt manifoldları sadece p noktasında kesişirler.

Aşağıdaki teoremin kanıtını, yukarıdaki sonuçların kanıtlarına benzer olduğundan, okuyucuya bırakıyoruz.

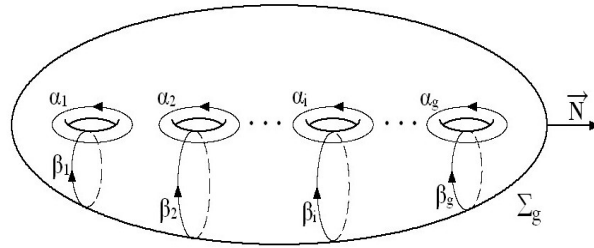
Teorem 5.2.10. $K^k, L^l \subseteq M^m$ çapraz kesişen iki kapalı alt manifold ve $\mu_K \in \Omega^{m-k}(M)$ ile $\mu_L \in \Omega^{m-l}(M)$ bu alt manifoldların Poincaré dualleri olsun. Bu durumda $\mu_K \wedge \mu_L \in \Omega^{2m-k-l}(M)$ formu da $K \cap L$ alt manifoldunun Poincaré duali olur. Diğer taraftan, $i : K \rightarrow M$ içermeye fonksiyonu ise $i^*(\mu_L) \in H_{DR}^{m-l}(K)$ kohomoloji sınıfı $K \cap L \subseteq K$ alt manifoldunun Poincaré duali olur.

Bu sonuçları kullanarak bazı manifoldların kohomoloji halkalarını hesaplayabiliriz.

Örnek 5.2.11. 1) Σ_g ile aşağıdaki resimde verilen g -cinsli (İng. genus g olan) yönlendirilebilen yüzeyi gösterelim. Yüzey bağlantılı olduğundan $b_0(\Sigma_g) = 1$ ve yönlendirilebilir olduğundan $b_2(\Sigma_g) = 1$ olur. Yüzey dış normal vektör ile yönlendirilmiş olsun. Bu durumda, yüzeyin oklarla yönlendirilmiş bir boyutlu α_i ve β_i , $i = 1, \dots, g$, alt manifoldlarının Poincaré dualleri $a_i = D(\alpha_i)$, ve $b_i = D(\beta_i)$, olmak üzere $a_i a_j = b_i b_j = 0$ olur, çünkü bu sınıflara karşılık gelen alt manifoldlar hiç kesişmiyorlar. Benzer şekilde, $[\nu] \in H_{DR}^2(\Sigma_g) \simeq \mathbb{R}$ manifold üzerindeki integrali bire eşit olan bir üreteç ise, her $i, j = 1, \dots, g$ için, $a_i b_j = \delta_{ij} \nu$ elde ederiz. O halde, $[a_i]$ ve $[b_i]$ kohomoloji sınıfları doğrusal bağımsızdırlar. Başka bir deyişle, $b_1(\Sigma_g) \geq 2g$ olur. Aslında, $b_1(\Sigma_g) = 2g$ 'dir. Bunu tümevarım ile hesaplayabiliriz: $g = 1$ için $b_1(\Sigma_1) = b_1(T^2) = 2$ olduğunu biliyoruz. Tümevarım adımı için Σ_{g+1} yüzeyini Σ_g ve $\Sigma_1 = T^2$ yüzeylerinin bağlantılı toplamı olarak yazalım. Mayer-Vietoris dizisi yardımıyla kanıtı bitirebiliriz (bkz. Alıştırma 4). Bu durumda yüzeyin kohomoloji cebiri

$$H_{DR}^*(\Sigma_g) = \mathbb{R}[x_i, y_i; i = 1, \dots, g] / (x_i x_j, y_i y_j, x_i y_j - \delta_{ij})$$

değişmeli bölüm cebirine izomorftir.



Şekil 5.3: $\mathbb{U}_g$ boyutlu Öklit uzayı içinde dış normal vektör ile yönlendirilmiş cinsi g olan yüzey. $\text{Int}(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, g$.

2) $H = \{z_0 = 0\}$ ile $\mathbb{CP}^n$ karmaşık projektif uzayının $2n-2$ boyutlu alt manifoldunu gösterelim. $H = \mathbb{CP}^{n-1}$ olduğu kolayca görülür. $a \in H_{DR}^2(\mathbb{CP}^n)$

bu H alt manifoldun Poincaré dualini gösterebilir. H alt manifoldunun kendisi ile çapraz kesişimi $H \frown H = \mathbb{C}P^{n-2}$ olur. Benzer şekilde bu alt manifoldun kendisi ile k -defa çapraz kesişimi de

$$H \frown \cdots \frown H = \mathbb{C}P^{n-k}$$

olacaktır. $\mathbb{C}P^0 = \{pt\}$ tek noktadan oluşan bir alt manifold olacağından

$$\int_{\mathbb{C}P^n} a^n = 1$$

elde edilir. O halde, $[a]^k \in H_{DR}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{R}$ kohomoloji grubunun bir üreticidir. Başka bir deyişle, kohomoloji cebiri

$$H_{DR}^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}[a]/(a^{n+1})$$

polinom cebirine izomorfiktir.

3) $f(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ derecesi $d \geq 1$ olan homojen bir polinom olsun. Eğer $0 \in \mathbb{C}$ bu polinomun bir düzgün değeri ise $f^{-1}(0)$ ters görüntüsü $\mathbb{C}^3$ içinde karmaşık iki boyutlu ve tıkkı olmayan bir alt manifold olacaktır. Diğer taraftan, bu manifoldun projektivizasyonu

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

karmaşık projektif düzlem içinde bir boyutlu bir alt manifold olur (bkz. Alıştırma 5). Bu durumda C 'ye tekil noktası olmayan derecesi d olan karmaşık projektif eğri denir. Altıncı Ünite'de bu karmaşık eğrinin cinsi

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

olan yönlendirilebilir yüzey olduğunu göreceğiz. Manifold karmaşık olduğundan doğal bir yönlendirmesi vardır. Bu karmaşık eğrinin rastgele bir karmaşık projektif doğru, diyelim ki H olsun, ile kesişimi d noktadan oluşacaktır (çünkü derecesi d olan karmaşık bir polinomun genelde tam olarak d tane kökü vardır). Bu durumda, karmaşık kesişimler her zaman pozitif olduğundan $C \frown H = d$ olur. O halde, Teorem 5.2.6'i kullanarak, H alt manifoldunun Poincaré duali $a \in H_{DR}^*(\mathbb{C}P^2)$ olmak üzere, C alt manifoldunun Poincaré dualinin $da \in H_{DR}^*(\mathbb{C}P^2)$ olduğunu görürüz. Bu ise dereceleri d_1 ve d_2 olan iki eğrinin kesişiminin $d_1 d_2$ olmasını gerektirir (Teorem 5.2.6). Son yazdığımız sonuç cebirsel geometride Bézout Teoremi olarak anılır. Burada sadece tekil noktası olmayan eğriler için ifade ettiğimiz bu teorem çok daha genel durumlarda da geçerlidir. Bunun için [13, 15, 18] numaralı referanslara bakabilirsiniz.

5.3 Vektör Demetleri ve Poincaré-Hopf Teoremi

5.3.1 Vektör Demetlerinin Euler Karakteristiği

M manifoldu üzerinde rankı k -olan yönlendirilmiş bir $E^{m+k} \rightarrow M^m$ vektör demetinin sıfır kesitini $L \simeq M$ ile gösterelim. Sıfır kesitinin kendisi (aslında, hafif oynatılmış hali olan $\tilde{L}$) ile çapraz kesişimi

$$K = L \cap \tilde{L} \subseteq L = M \subseteq E$$

olsun. Boyutu $2m - (m + k) = m - k$ olan K manifoldunu $L = M$ 'nin bir alt manifoldu olarak görürsek bu alt manifoldun $[\mu_K] \in H_{DR}^k(M)$ Poincaré dualine vektör demetinin *Euler karakteristik sınıfı* denir ve $e(E)$ ile gösterilir. Aslında, $s : M \rightarrow E$ vektör demetinin türevlenebilir bir kesiti ise bu kesitin $s(M)$ görüntüsü ile sıfır kesitinin çapraz kesişimini K alt manifoldu olarak alabiliriz (Sonuç 5.1.6'dan dolayı s kesiti hafifçe oynatılarak bu her zaman yapılabilir). Bu tanımdan yönlendirilmiş izomorfik vektör demetlerinin Euler sınıflarının aynı olacağı açıktır.

Uyarı 5.3.1. 1) Eğer M tıkmaz, yönlendirilebilir bir manifold ve $E \rightarrow M$ rankı $k = m$ olan bir vektör demeti ise $e(E) \in H_{DR}^m(M) \simeq \mathbb{R}$ Euler karakteristik sınıfını bu sınıfın manifold üzerindeki integrali ile eşleyebiliriz:

$$e(E) \leftrightarrow \int_M e(E) .$$

Bu integralin değeri olan sayı vektör demetinin sıfır kesitinin kendisi ile çapraz kesişimi olacağından bir tam sayı olmalıdır. Euler sınıfı ve Euler sayısı için genelde aynı gösterimi kullanacağız. Bu tam sayı vektör demetinin Euler sayısı olarak adlandırılır. M manifoldunun teğet demetinin Euler sayısına kısaca manifoldun Euler sayısı da denir. Eğer $k = m$ bir tek sayı ise Euler sayısı kesitin kendisi ile çapraz kesişimi olduğundan bu sayı sıfır olmalıdır.

2) Bir vektör demetinin hiç sıfırı olmayan bir kesiti varsa Euler sınıfı sıfırdır. O halde, paralellenebilir her manifoldun teğet demetinin Euler sınıfı (sayısı) sıfırdır.

3) $L^1 \subseteq M^{2l}$ yönlendirilmiş bir manifoldun yönlendirilemeyen bir tıkmaz alt manifoldu olsun. Bu alt manifoldun başka bir alt manifold ile kesişim sayısı tanımlı olmasa da kendisi ile kesişim sayısı iyi tanımlıdır. Bunu görmek için bu alt manifoldu, her adımı bir gömme fonksiyonu olan bir $F_t : L \rightarrow M$, $t \in [0, \epsilon]$, homotopisi ile çok az hareket ettirerek elde edilen $F_\epsilon(L) = \tilde{L}$ manifoldu ile sonlu sayıda noktada çapraz kesiştirelim. $F_0(p) = F_\epsilon(q) \in M$ bir kesişim noktası olsun. Homotopi manifoldu çok az hareket ettirdiği için $p \in L$ ve $q \in \tilde{L}$ noktalarının aynı koordinat sisteminde kaldığını kabul edebiliriz. Bu durumda bu koordinat sistemi üzerine konulan her yönlendirme bu iki noktadaki $T_p L$ ve $T_q \tilde{L}$ teğet uzaylarını yönlendirecektir. Koordinat komşuluğu

üzerine konan yönlendirmeyi değiştirince her iki teğet uzayının yönlendirmesi aynı anda değişeceği için

$$T_p L \oplus T_q \tilde{L}$$

toplam vektör uzayı üzerindeki yönlendirme değişmeyecektir. Başka bir deyişle

$$T_p L \oplus T_q \tilde{L}$$

toplam vektör uzayı koordinat sisteminin yönlendirmesinden bağımsız olarak bir yönlendirmeye sahiptir. Bu yönlendirmeyi $T_{F_0(p)}M$ teğet uzayının yönlendirmesi ile karşılaştırarak kesişim noktasının işaretini belirleriz. Bu işaretlerin toplamı kesişim sayısını verecektir. (Bkz. Örnek 5.3.2.3.)

Örnek 5.3.2. 1) $M = T^2 = S^1 \times S^1$ ve $E = T_*T^2 \rightarrow T^2$ teğet demeti olsun. $X(\theta_1, \theta_2) = \frac{d}{d\theta_1}$ vektör alanı sıfır olmayan bir $s : T^2 \rightarrow T_*T^2$ kesiti verecektir. O halde, bu vektör demetinin Euler sınıfı (ve dolayısıyla Euler sayısı) sıfırdır. Aslında her T^n -torusu paralellenebilir olduğundan teğet demetlerinin Euler sınıfları sıfırdır.

2) Örnek 2.1.10.2'de ele aldığımız karmaşık projektif doğrunun, $\mathbb{CP}^1 = S^2$, (karmaşık) teğet demetinin Euler sayısını hesaplayalım. Daha önce, teğet demetinin

$$T_*\mathbb{CP}^1 = T_*\mathbb{C} \dot{\cup} T_*\mathbb{C} / (x, v) \sim (1/x, -v/x^2),$$

olduğunu ve $s_1(x) = -s_2(x) = \frac{1+x^2}{2}$ ifadesi ile verilen $s : \mathbb{CP}^1 \rightarrow T_*\mathbb{CP}^1$ vektör alanının i ve $-i$ olmak üzere iki tane sıfırı olduğunu görmüştük. Bu fonksiyonların sıfırlarının olduğu noktalardaki türevleri sıfırdan farklı olduğu için teğet demetinin sıfır kesiti bu kesit ile dik kesişir. Ayrıca, bu demetin sıfır kesiti ile yine aynı demetin yukarıdaki fonksiyonlar ile verilen kesiti $T_*\mathbb{CP}^1$ karmaşık manifoldunun karmaşık alt manifoldları olduğundan, her iki kesişim noktasının işareti de pozitifdir. O halde, $S^2 = \mathbb{CP}^1$ iki boyutlu küresinin teğet demetinin Euler sayısı ikidir. Benzer şekilde, Örnek 3.3.5'de tanımladığımız

$$O(k) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \dot{\cup} \mathbb{C} \times \mathbb{C} / (x, v) \sim (1/x, v/x^k),$$

$(x, v) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C}$, karmaşık doğru demetinin, $k \geq 0$ olmak üzere her homojen polinom kesitinin k -tane karmaşık kökü vardır ve dolayısıyla bu demetin Euler sayısı k 'dir.

3) Uyarı 5.3.1.3'te tanımladığımız yönlendirilemeyen manifoldların kendisi ile kesişim sayısına bir örnek verelim. Her M manifoldunun T_*M teğet demetinin doğal bir yönlendirmesi vardır (manifold yönlendirilemez olsa bile): Bunu görmek için manifold üzerinde bir $(x_1, \dots, x_n)$ koordinat sistemi alalım ve T_*M teğet demeti üzerinde, $y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonlarının verdiği koordinat sistemini düşünelim. Manifold üzerindeki $(x_1, \dots, x_n)$ koordinat sistemini değiştirsek dahi $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ koordinat sisteminin verdiği yönlendirme değişmez (bkz. Alıştırma 11).

Şimdi $\mathbb{R}P^2$ gerçel projektif uzayını S^2 küresinin ters kutupsal simetriye bölümü olarak görelim. Bu durumda bir önceki örnekte verdiğimiz teğet demeti kesiti gerçel projektif uzayın teğet demetinin bir kesitini verir. Küre üzerindeki vektör alanının iki sıfırı projektif uzayda tek bir sıfır noktasına indirgenir. Son olarak, bölüm fonksiyonu yerel bir difeomorfizma olduğundan kesişimin işareti korunur. Başka bir deyişle, gerçel projektif düzlemin Euler sayısı $e(\mathbb{R}P^2) = 1$ 'dir.

Dolayısıyla, bu örnek bize yönlendirilemeyen manifoldların Euler sınıfları olmasa da Euler sayılarının iyi tanımlı olduğunu göstermektedir.

4) Şimdi de $\mathbb{R}P^2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ alt manifoldunun kendisi ile kesişim sayısını bulalım. Karmaşık projektif düzlemi karmaşık yapısından elde ettiğimiz yönlendirme ile düşüneceğiz. $(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2)$ yerel koordinat sisteminde bulunan herhangi bir $p \in \mathbb{R}P^2$ noktasında karmaşık düzlemin teğet uzayını karmaşık yönlendirmesiyle düşünelim:

$$T_p \mathbb{C}P^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right\rangle.$$

Bu durumda bir alt uzay olarak

$$T_p \mathbb{R}P^2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle$$

olacaktır. Karmaşık projektif düzlemin her bir teğet uzayı aslında bir karmaşık vektör uzayı olduğundan gerçel projektif düzlemin teğet vektörlerini karmaşık i -sayısıyla çarparak normal demetin vektörlerini elde ederiz. Aslında bu bize teğet demetinden normal demete bir izomorfizma verir:

$$T_* \mathbb{R}P^2 \rightarrow \nu_{\mathbb{R}P^2}, \quad \left(p, v = a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \mapsto \left(p, iv = a \frac{\partial}{\partial y_1} + b \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$$

Bu vektör demetler izomorfizmasını Tüp Komşuluk Teoremi ile birleştirerek gerçel projektif uzayın teğet demetinden $\mathbb{R}P^2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ alt manifoldunun bir komşuluğuna difeomorfizma elde ederiz. Yönlendirmeleri karşılaştırarak bunun yönü değiştirdiğini görürüz. O halde, $\mathbb{R}P^2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ alt manifoldunun kendisi ile kesişim sayısı -1 'dir. (Alıştırma 12 yönlendirilemeyen yüzeylerin kendileri ile negatif sayıda kesiştiği örnekler verecektir).

5) Bir önceki örnekteki hesabı bir de alt manifoldu hareket ettirip kendisiyle doğrudan kesiştirerek yapalım.

$$\phi_t : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2, \quad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : e^{it} z_1 : e^{2it} z_2]$$

difeomorfizma ailesi (bu bir vektör alanı akışıdır)

$$\mathbb{R}P^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid \operatorname{Im}(z_i) = y_i = 0, i = 0, 1, 2\}$$

gerçek projektif uzayı

$$\mathbb{RP}_t^2 = \{[x_0 : e^{it}x_1 : e^{2it}x_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\}$$

alt manifolduna gönderir. Bu iki manifold

$$[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$$

noktalarında çapraz kesişirler. Şimdi çok küçük ve pozitif t -değerleri için, bu üç noktadaki kesişim sayılarını ayrı ayrı hesaplayalım:

[1:0:0]: $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ koordinat komşuluğunda parametrizasyonları

$$(x_1/x_0, x_2/x_0) \quad \text{ve} \quad (e^{it}x_1/x_0, e^{2it}x_2/x_0)$$

ile verilen bu iki alt manifold, üzerindeki koordinatlar $(z_1/z_0, z_2/z_0)$ olan karmaşık düzlemde kesişirler. İki manifoldun bu noktadaki teğet uzaylarını yan yana koyarsak

$$(x_1/x_0, x_2/x_0, e^{it}x_1/x_0, e^{2it}x_2/x_0)$$

koordinatlarına karşılık gelen vektörleri buluruz. Oysa, aynı noktadaki karmaşık yönlendirme

$$(x_1/x_0, e^{it}x_1/x_0, x_2/x_0, e^{2it}x_2/x_0)$$

ile uyumludur. Bu iki yönlendirme ters olduğundan bu noktadaki kesişimin işareti -1 'dir.

[0:1:0]: $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ koordinat komşuluğunda ise bu iki alt manifold

$$(x_0/x_1, x_2/x_1) \quad \text{ve} \quad (e^{-it}x_0/x_1, e^{it}x_2/x_1)$$

ile parametrelendirilirler. İki manifoldun bu noktadaki teğet uzaylarını yan yana koyarsak

$$(x_0/x_1, x_2/x_1, e^{-it}x_0/x_1, e^{it}x_2/x_1)$$

koordinatlarına karşılık gelen vektörleri buluruz. Diğer taraftan, aynı noktadaki karmaşık yönlendirme

$$(x_0/x_1, -e^{-it}x_0/x_1, x_2/x_1, e^{it}x_2/x_1)$$

ile uyumludur. Bu iki yönlendirme aynı olduğundan bu noktadaki kesişim 1 'dir.

[0:0:1]: Benzer şekilde $U_2 = \{z_2 \neq 0\}$ koordinat komşuluğunda bu iki alt manifold

$$(x_0/x_2, x_1/x_2) \quad \text{ve} \quad (e^{-2it}x_0/x_2, e^{it}x_1/x_2)$$

ile parametrelendirilir ve üzerindeki koordinatlar $(z_0/z_2, z_1/z_2)$ olan karmaşık düzlemde kesişirler. İki manifoldun bu noktadaki teğet uzaylarını yan yana koyarsak

$$(x_0/x_2, x_1/x_2, e^{-it}x_0/x_2, e^{it}x_1/x_2)$$

koordinatlarına karşılık gelen vektörleri buluruz. Bu noktadaki karmaşık yönlendirme

$$(x_0/x_2, -e^{-2it}x_0/x_2, x_1/x_2, -e^{-it}x_1/x_2)$$

ile uyumludur. Bu iki yönlendirme yine ters olduğundan bu noktadaki kesişim -1 'dir.

O halde, kesişim sayısı $-1 + 1 - 1 = -1$ 'dir.

Pozitif yerine negatif (küçük) t -değeri için kesişimleri hesaplırsak bu üç noktanın işaretleri sırasıyla 1 , -1 ve -1 olurdu, dolayısıyla toplam yine -1 olarak kahrıldı.

Yukarıdaki örneklerin hepsinde teğet demetlerin Euler sayılarının, manifoldların Euler karakteristiklerine (Bkz Tanım 4.4.8) eşit olduğunu gördük. Poincaré-Hopf Teoremi olarak bilinen Teorem 5.3.9 bunun bir tesadüf olmadığını gösterecektir. Bu teoremin kanıtını Bott ve Tu'nun *Differential Forms in Algebraic Topology* ([5]) adlı kitabındaki kanıtı model alarak yapacağız. Morse teoresini (bkz. [28, 39]) kullanan bir kanıt için Madsen ve Tornehave'nin *From Calculus to Cohomology* ([24]) adlı kitabına bakabilirsiniz. Bu teorem ayrıca, türevlenebilir manifoldların üçgenlenebilir olmasından faydalanılarak da kanıtlanabilir. Fakat bizim alt yapımız bu iki yöntem için de uygun değildir. Bir sonraki bölümde Poincaré-Hopf Teoremi'ni kanıtlamak için ihtiyaç duyacağımız bir takım sonuçları göreceğiz.

5.3.2 Gysin Tam Dizisi

Bu bölümde önceki bölümlerin bir uygulaması olarak verilen yönlendirilmiş bir $\pi : E^{m+r} \rightarrow M^m$ vektör demetinin tabanının, lifinin ve tüm uzayının kohomolojilerinden oluşan ve *Gysin tam dizisi* olarak bilinen tam diziyi kuracağız. Bu diziyi kurmak için, ilk önce tıkHz destekli kohomoloji bölümünde kanıtladığımız

$$H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) = H_c^k(M)$$

izomorfizmasını hatırlayalım (bkz. Teorem 4.3.14). Bu izomorfizma, tıkHz destekli ve gerçel eksen üzerindeki integrali bire eşit olan türevlenebilir $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon yardımıyla ,

1. $\Psi : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$, $\Psi(f(x) dx_K) = \rho(t)f(x) dt \wedge dx_K$, ve
2. $\Phi : \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^k(M)$,

$$\Phi(f(x, t) dt \wedge dx_K) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt \right) dx_K \quad \text{ve} \quad \Phi(f(x, t) dx_K) = 0,$$

homomorfizmaları tarafından verilir. $\mathbb{R}$ üzerindeki tıkHz destekli $\rho(t) dt$ 1-formunu $\mathbb{R}^r$ üzerindeki tıkHz destekli $\rho(t_1^2 + \cdots + t_r^2) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r$ r -formu ile değiştirerek

$$H_c^{k+r}(M \times \mathbb{R}^r) = H_c^k(M)$$

izomorfizmasını elde ederiz.

Aslında bu kanıt bize daha genel olarak, vektör demetinin dikey tıkHz destekli kohomolojisi ile demetin tabanının De Rham kohomolojisi arasında da bir izomorfizma verir:

$$H_{vc}^{k+r}(M \times \mathbb{R}^r) = H_{DR}^k(M).$$

(Dikey tıkHz destekli kohomoloji grubu, desteğinin her bir lif ile kesişimi tıkHz olan $\omega \in \Omega(E)$ formlarının oluşturdukları alt uzay olarak tanımlanır.)

Şimdi M manifoldunu bu demetin sıfır kesiti ve dolayısıyla bir alt manifoldu olarak görelim ve $[\mu_M] \in H_{DR}^r(E)$ ile bu alt manifoldun Poincaré dualini gösterelim (bkz. Teorem 5.2.6). $\mu_M \in \Omega^r(E)$ formu kuruluşu itibarıyla lif yönünde tıkHz desteklidir ve demetin her bir lifi boyunca integrali bire eşittir. Başka bir deyişle μ_M formuyla dış çarpım almak bize Thom İzomorfizması olarak bilinen

$$H_{DR}^k(M) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^k(E) \xrightarrow{\wedge \mu_M} H_{vc}^{k+r}(E)$$

izomorfizmasını verir. Yukarıdaki tanımdan dolayı bu izomorfizmanın tersi de lifler boyunca integral alma homomorfizmasına karşılık gelecektir:

$$H_{vc}^{k+r}(E) \xrightarrow{\int_{\mathbb{R}^r}} H_{DR}^k(M).$$

Daha detaylı bir kanıt şu şekilde verilebilir. İlk önce bu homomorfizmaların demetin her

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$$

çarpımında bir izomorfizma verdiğini görürüz. Daha sonra $M = \cup_\alpha U_\alpha$ ve $E = \cup_\alpha \tilde{U}_\alpha = \cup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$ birleşimine aynı anda Mayer-Vietoris dizisini uyguluyoruz:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H_{DR}^k(U \cap V) & \rightarrow & H_{DR}^k(U) \oplus H_{DR}^k(V) & \rightarrow & H_{DR}^k(U \cup V) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow \wedge \mu_{U \cap V} & & \downarrow \wedge \mu_U \oplus \wedge \mu_V & & \downarrow \wedge \mu_{U \cup V} & & \\ \cdots \rightarrow H_{vc}^{k+r}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \rightarrow & H_{vc}^{k+r}(\tilde{U}) \oplus H_{vc}^{k+r}(\tilde{V}) & \rightarrow & H_{vc}^{k+r}(\tilde{U} \cup \tilde{V}) & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Buradan, tümevarım metodu ile her sonlu adet U_α 'nın birleşimi için sonuç kanıtlanmış olur. Diğer taraftan, her tıkHz destekli türevlenebilir form böyle bir sonlu birleşimin içinde destekleneceğinden sonuç M manifoldu için de kanıtlanmış olur.

Şimdi de bu izomorfizmayı kullanarak vektör demetleri için Gysin Tam Dizisi'ni kuralım. Vektör demeti üzerine bir metrik koyalım ve $\pi : P \rightarrow M$ ile bu demetin birim küre demetini gösterelim:

$$P = \{(p, v) \in E \mid \|v\|_p = 1\}.$$

$E_0 = E - M$ açık alt kümesi ise (M 'yi E demetinin sıfır kesiti olarak alıyoruz) $E_0 = P \times \mathbb{R}$ olduğundan düşey homomorfizmaları izomorfizmalar olan aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc} H_{vc}^{k+r}(E_0) & \longrightarrow & H_{vc}^{k+r}(E) \\ \int_{\mathbb{R}} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \int_{\mathbb{R}^r} \\ H_{DR}^{k+r-1}(P) & \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} & H_{DR}^k(M) \end{array}$$

Şimdi Gysin Tam Dizisi'ni verebiliriz:

Teorem 5.3.3. $\pi : E \rightarrow M$ türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde yönlendirilmiş rankı r -olan bir gerçel vektör demeti olsun. $\pi : P \rightarrow M$ bu demetin birim küre demeti olmak üzere aşağıdaki dizi tamdır:

$$\dots \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^{i-1}(P) \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} H_{DR}^{i-r}(M) \xrightarrow{\wedge e(E)} H_{DR}^i(M) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^i(P) \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} \dots$$

Burada $H_{DR}^{i-1}(P) \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} H_{DR}^{i-r}(M)$ ile lifler üzerinde integral alma işlemine karşılık gelirken, $H_{DR}^{i-r}(M) \xrightarrow{\wedge e(E)} H_{DR}^i(M)$ vektör demetinin Euler sınıfı ile dış çarpım homomorfizmasıdır.

Kanıt : Dördüncü Ünite'de görmüş olduğumuz tıkHz destekli kohomoloji dizisinin kuruluşundaki fikirlerin benzerlerini kullanarak (bkz. s.228) (E_0, E) ikilisinin dikey tıkHz destekli kohomoloji dizisini yazalım (ayrıca bkz. Alıştırma 6):

$$\dots \rightarrow H_{vc}^i(E_0) \rightarrow H_{vc}^i(E) \rightarrow H_{DR}^i(M) \rightarrow H_{vc}^{i+1}(E_0) \rightarrow \dots$$

Şimdi yukarıdaki değişmeli diyagramı kullanarak $H_{vc}^i(E_0) \simeq H_{DR}^{i-1}(P)$ ve $H_{vc}^i(E) \simeq H_{DR}^{i-r}(M)$ yazarsak dizimiz

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^{i-1}(P) \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} H_{DR}^{i-r}(M) \xrightarrow{\wedge \mu_M} H_{vc}^i(E) \rightarrow \\ H_{DR}^i(M) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^i(P) \xrightarrow{\int_{S^{r-1}}} \dots \end{aligned}$$

haline dönüşür. Son olarak, μ_M kohomoloji sınıfı

$$H_{vc}^i(E) \rightarrow H_{DR}^i(M)$$

homomorfizması altında $E \rightarrow M$ demetinin Euler sınıfına gittiği için (Teorem 4.3.18 ve kanıtına bakınız) bu dizinin

$$H_{DR}^{i-r}(M) \xrightarrow{\wedge \mu_M} H_{vc}^i(E) \rightarrow H_{DR}^i(M)$$

kısmı

$$H_{DR}^{i-r}(M) \xrightarrow{\wedge e(E)} H_{DR}^i(M)$$

ile değiştirilebilir ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

5.3.3 Leray-Hirsch ve Künneth Teoremleri

Bu bölümde De Rham Kohomolojisi için Leray-Hirsch Teoremi'ni ve bunun özel hali olan Künneth Teoremi'ni vereceğiz. Bunun için ilk önce vektör demetine benzer şekilde lif demetinin tanımını vereceğiz: P ve F türevlenebilir manifoldlar ve $\pi : P \rightarrow M$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ M -manifoldunun açık bir örtüsü olsun, öyle ki, her $\alpha \in \Lambda$ için bir $\phi_\alpha : \pi^{-1} \rightarrow U_\alpha \times F$ difeomorfizması var olsun ve bu difeomorfizma

$$\pi_F : U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha, (x, v) \mapsto x,$$

olmak üzere $\pi = \pi_F \circ \phi_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, koşulunu sağlasın. Bu durumda, (π, P, M) üçlüsüne, ya da kısaca $\pi : P \rightarrow M$ fonksiyonuna, M üzerinde lifi F manifoldu olan türevlenebilir lif demeti denir.

Kohomolojileri sonlu boyutlu vektör uzayları olan, türevlenebilir bir F manifoldunu lif olarak kabul eden türevlenebilir bir $\pi : P \rightarrow M$ lif demeti alalım. Bu durumda, $H_{DR}^*(P)$ kohomoloji halkasını

$$\pi^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(P)$$

halka homomorfizması yardımıyla bir $H_{DR}^*(M)$ -modülü olarak görebiliriz.

Teorem 5.3.4 (Leray-Hirsch Teoremi). *Lifi türevlenebilir bir F manifoldu olan türevlenebilir bir $\pi : P \rightarrow M$ lif demeti alalım. Eğer her bir life kısıtlanışı $H_{DR}^*(F)$ vektör uzayının tabanı olan sonlu bir $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq H_{DR}^*(P)$ kümesi varsa, $H_{DR}^*(P)$ tabanı $\{x_1, \dots, x_N\}$ olan serbest $H_{DR}^*(M)$ -modüldür.*

Kanıt : Kanıt Poincaré İzomorfizması'nın kanıtına çok benzerdir ve yine adımlardan oluşur.

Adım 1) $U \subseteq M$ lif demetinin üzerine kısıtlanışı çarpım şeklinde yazılan, noktaya homotopi denk olan bir açık alt küme olsun. Bu durumda $P_U \doteq \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ kısıtlanışı için $P_U \simeq U \times F$ açık kümesi F manifolduna homotopi denk olacağından teorem U için doğrudur (burada x_i kohomoloji sınıflarının U kümesine kısıtlanışlarını alıyoruz).

Adım 2) Şimdi bir Mayer-Vietoris dizisi yardımıyla şunu kanıtlayacağız: Eğer teorem $U, V \subseteq M$ ve $U \cap V$ açık kümeleri için doğru ise $U \cup V$ açık kümesi için de doğrudur. İlk önce Mayer-Vietoris tam dizilerini *tam üçgenler* şeklinde yazarak aşağıdaki değişmeli prizmayı düşünelim. (Burada tam üçgen şu anlama gelmektedir. Bir üçgen oluşturan üç vektör uzayı veya modül ile bunların arasındaki üç homomorfizmanın her birinin çekirdeği bir önceki homomorfizmanın görüntüsüne eşittir.)

$$\begin{array}{ccccc}
& & H_{DR}^*(P_{U \cup V}) & & \\
& \delta_P \nearrow & \uparrow & \searrow i_P & \\
H_{DR}^*(P_{U \cap V}) & & \xleftarrow{J_P} & & H_{DR}^*(P_U) \oplus H_{DR}^*(P_V) \\
\uparrow & & | & & \uparrow \\
| & & H_{DR}^*(U \cup V) & & | \\
| & \delta \nearrow & & \searrow i & | \\
H_{DR}^*(U \cap V) & & \xleftarrow{J} & & H_{DR}^*(U) \oplus H_{DR}^*(V)
\end{array}$$

Prizmanın alt ve üst tabanındaki tam üçgenler Mayer-Vietoris dizilerinin direkt toplamaları alınarak oluşturulmuştur (bkz. Alistırma 7). Ayrıca düşey homomorfizmalar lif demetinin izdüşüm fonksiyonu tarafından belirlenen homomorfizmalardır.

Şimdi $\omega = \sum a_i x_i \in H_{DR}^*(P_{U \cup V})$, $a_i \in H_{DR}^*(U \cup V)$, şeklinde bir sınıf alalım ve $\omega = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, $a_i = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 = i_P(\omega) = \sum i(a_i) x_i$ olduğu için hipotezden dolayı $i(a_i) = 0$ elde ederiz. Bu durumda bazı $b_i \in H_{DR}^*(U \cap V)$ sınıfları için $a_i = \delta(b_i)$ olur. Buradan, $\nu = \sum b_i x_i \in H_{DR}^*(P_{U \cap V})$ olmak üzere

$$\delta_P(v) = \sum \delta(b_i) x_i = \sum a_i x_i = \omega = 0$$

elde ederiz. Diyagramdaki üçgenlerin tam olmasını kullanarak $\nu = J_P(\mu)$ olacak şekilde bir $\mu \in H_{DR}^*(P_U) \oplus H_{DR}^*(P_V)$ sınıfı buluruz. Yine hipotezden dolayı, $b_i = J(c_i)$ olacak şekilde $c_i \in H_{DR}^*(U) \oplus H_{DR}^*(V)$ sınıfları vardır. O halde,

$$a_i = \delta(b_i) = J(\delta(c_i)) = 0$$

elde ederiz ve böylece bu adımın kanıtının ilk yarısını bitirmiş oluruz.

Kanıtın ikinci yarısı için herhangi bir $\omega \in H_{DR}^*(P_{U \cup V})$ sınıfı alalım. Bu durumda, bazı $a_i \in H_{DR}^*(U) \oplus H_{DR}^*(V)$ sınıfları için $i_P(\omega) = \sum a_i x_i$ olur. Buradan,

$$0 = J_P(i_P(\omega)) = \sum J(a_i) x_i$$

ve dolayısıyla $J(a_i) = 0$ elde ederiz. O halde, üçgenin tamlığını tekrar kullanarak bazı $b_i \in H_{DR}^*(U \cup V)$ sınıfları için $a_i = i(b_i)$ yazabiliriz. Bu durumda, $\nu = \sum b_i x_i \in H_{DR}^*(P_{U \cup V})$ sınıfı için

$$i_P(\nu) = \sum i(b_i) x_i = \sum a_i x_i = i_P(\omega)$$

olduğundan $i_P(\omega - \nu) = 0$ elde ederiz. O halde, $\omega - \nu = \delta_P(\sum_i c_i x_i)$ olacak şekilde $c_i \in H_{DR}^*(U \cap V)$ sınıfları bulabiliriz. Son olarak,

$$\omega = \nu + \delta_P(\sum_i c_i x_i) = \sum b_i x_i + \sum \delta(c_i) x_i = \sum (b_i + \delta(c_i)) x_i$$

yazarak ikinci adımın kanıtını bitiririz.

Adım 3) Kolayca görülebileceği gibi, eğer teorem ayrık bir $\{U_\alpha \subseteq M\}$ açık kümeler ailesinin her bir elemanı için doğru ise bu kümelerin $U = \cup U_\alpha$ birleşimi için de doğrudur. Ele aldığımız $\{x_1, \dots, x_N\}$ kümesinin sonlu olması bu adım için gereklidir! (bkz. Alıştırma 9)

Son olarak, M manifoldunu U ve V gibi iki açık kümenin birleşimi olarak yazabiliriz öyle ki, U , V ve $U \cap V$ kümeleri, her biri birinci adımda ele aldığımız açık kümelerin sonlu birleşimi şeklinde yazılabilen açık kümelerin ayrık bir birleşimidir (Poincaré İzomorfizması'nın, Teorem 4.4.1, kanıtının 4. adımındaki iddianın kanıtına bakınız). Bu durumda önceki adımlardan dolayı, teorem U , V ve $U \cap V$ için doğru olacağından $M = U \cup V$ için de doğru olacaktır. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Şimdi bu teoremin bir sonucu olarak *Künneth Formülü'nü* verelim: $P = M \times N \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonunu aşık bir lif demeti olarak görüp Leray-Hirsch Teoremi'ni buna uygularsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Sonuç 5.3.5 (Künneth Formülü). M ve N türevlenebilir manifoldlar olsun. Eğer $H_{DR}^*(N)$ vektör uzayı sonlu boyutlu ise her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$H_{DR}^k(M \times N) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H_{DR}^i(M) \otimes H_{DR}^j(N)$$

izomorfizması vardır.

Tanım 5.3.6. Tüm kohomoloji vektör uzayları sonlu boyutlu olan bir M manifoldunun Poincaré serisi

$$P_M(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} b_k(M) t^k$$

olarak tanımlanır.

Örnek 5.3.7. M^m ve N^n tüm kohomoloji vektör uzayları sonlu boyutlu olan iki manifold ise $M \times N$ çarpım manifoldunun Poincaré serisi, Künneth Formülü'nden, iki çarpanın Poincaré serilerinin çarpımı olarak hesaplanır. Özel halde, $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ çarpım manifoldunun Poincaré serisi $P_{T^n}(t) = (1+t)^n$ olacaktır.

Künneth Formülü'nde $M \times N \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonu bize aşık lif demeti yapısı verir ve bu yüzden Leray-Hirsch Teoremi'nin ihtiyaç duyduğu kohomoloji sınıfları $M \times N \rightarrow N$ ikinci izdüşüm fonksiyonu ile liflerden geri çekilerek kolayca elde edilir. Karmaşık bir vektör demetinin projektivizasyonunun kohomolojisini ifade eden aşağıdaki sonucun kanıtında ise karmaşık projektif uzayın kohomolojisini veren Fubini-Study formundan yararlanacağız (bkz. Alt Ünite

2.3.8): $E \rightarrow M$ rankı $k > 0$ olan bir karmaşık vektör demeti olsun. Bu vektör demetinin her bir lifinin projektivizasyonunu alalım:

$$P(E) \doteq E - \{0\} / u \sim \lambda u, \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Bu durumda $P : P(E) \rightarrow M$ lifi $\mathbb{C}P^{k-1}$ olan bir lif demetidir (bkz. Alıştırma 10). $E \rightarrow M$ demetinin üzerine Hermityan bir iç çarpım koyarak demetin yapı fonksiyonlarının $U(k-1)$ değerli olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla, demetin bir $U \times \mathbb{C}P^{k-1}$ yerel çarpımı üzerinde

$$\omega_{FS}(p, [z_0 : z_1 : \cdots : z_{k-1}]) = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \|(z_0, z_1, \cdots, z_{k-1})\|^2$$

şeklinde tanımlanan Fubini-Study formu tüm demet üzerinde kapalı bir 2-form verir. Bu formun kuvvetlerinin oluşturduğu

$$\{1, [\omega_{FS}], \cdots, [\omega_{FS}]^{k-1}\}$$

kümesi her bir lifin kohomolojisinin bir tabanını verdiği için Leray-Hirsch Teoremi'ni kullanarak aşağıdaki sonucu buluruz.

Sonuç 5.3.8. $H_{DR}^*(P(E))$ halkası tabanı

$$\{1, [\omega_{FS}], \cdots, [\omega_{FS}]^{k-1}\} \subset H_{DR}^*(P(E))$$

alt kümesi olan serbest bir $H_{DR}^*(M)$ -modüldür.

5.3.4 Poincaré-Hopf Teoremi

Teorem 5.3.9 (Poincaré-Hopf). *Türevlenebilir yönlendirilebilir ve tıkHz her manifoldun Euler sayısı Euler karakteristiğine eşittir.*

Kanıt : Göstermemiz gereken eşitlik teğet demetinin Euler sınıfının manifold üzerindeki integralinin manifoldun Euler karakteristiğine eşit olduğudur:

$$\chi(M) = \int_M e(T_*M).$$

İlk önce, sağ taraftaki integrali başka bir integral ile değiştireceğiz. Aşağıdaki

$$f : M \rightarrow M \times M, x \mapsto (x, x),$$

fonksiyonu görüntüsü olan

$$\Delta \doteq \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$$

köşegenine bir difeomorfizmadır. Dolayısıyla,

$$Df_* : T_*M \rightarrow T_*\Delta \subseteq T_*(M \times M)$$

bir izomorfizmadır. Diğer taraftan, eğer $\nu(\Delta)$, $\Delta \subseteq M \times M$ alt manifoldunun normal demeti ise,

$$T_*\Delta \rightarrow \nu(\Delta), (v, v) \mapsto (v, -v)$$

fonksiyonu yine bir vektör demeti izomorfizmasıdır. (Bunu görmek için M üzerine herhangi bir g Riemann metriği koyalım. Bu durumda, (g, g) çarpımı $M \times M$ üzerinde bir metrik verir. Şimdi, köşegenin her (v, v) teğet vektörünün normal demetin $(w, -w)$ vektörüne dik olduğu kolayca görülür.) O halde, M manifoldunun teğet demeti içinde kendisi ile kesişimi $\Delta \subseteq M \times M$ alt manifoldunun kendisi ile kesişimine eşittir. Başka bir deyişle, eğer $\omega \in H_{DR}^m(M \times M)$ sınıfı $\Delta \subseteq M \times M$ alt manifoldunun Poincaré duali ise

$$\int_M e(T_*M) = \int_\Delta \omega ,$$

olur. Şimdi, $\omega \in H_{DR}^m(M \times M)$ sınıfını hesaplayalım: $H_{DR}^*(M)$ vektör uzayının bir $\{a_i\}$ tabanını alalım. Poincaré izomorfizmasını kullanarak aynı vektör uzayının öyle bir $\{b_j\}$ tabanını bulabiliriz ki, her i, j için

$$\int_M a_i \wedge b_j = \delta_{ij}$$

olur. Şimdi ise $\pi_i : M \times M \rightarrow M$, $i = 1, 2$, koordinatlara izdüşüm fonksiyonları olmak üzere, cebirsel topolojide köşegen yaklaşımı olarak bilinen sonucu kanıtlayacağız.

İddia: Yukarıdaki gösterimi kabul edersek

$$\omega = \sum (-1)^{\deg(a_i)} \pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_i) ,$$

olur.

İddianın kanıtı: Künneth Teoremi'nden dolayı bazı c_{ij} gerçel sayıları için

$$\omega = \sum c_{ij} \pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_j)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $f : M \rightarrow M \times M$ köşegen difeomorfizması olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_\Delta \pi_1^*(b_l) \wedge \pi_2^*(a_k) &= \int_M f^*(\pi_1^*(b_l) \wedge \pi_2^*(a_k)) \\ &= \int_M b_l \wedge a_k \\ &= (-1)^{\deg(a_k) \deg(b_l)} \delta_{kl} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan ω , $\Delta \subseteq M \times M$ alt manifoldunun Poincaré duali olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} \pi_1^*(b_l) \wedge \pi_2^*(a_k) &= \int_{M \times M} \pi_1^*(b_l) \wedge \pi_2^*(a_k) \wedge \omega \\
&= \sum c_{ij} \int_{M \times M} (\pi_1^*(b_l) \wedge \pi_2^*(a_k)) \wedge (\pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_j)) \\
&= \sum c_{ij} (-1)^{\deg(a_i) (\deg(a_k) + \deg(b_l))} \\
&\quad \int_{M \times M} (\pi_1^*(a_i) \wedge \pi_1^*(b_l)) \wedge (\pi_2^*(a_k) \wedge \pi_2^*(b_j)) \\
&= \sum c_{ij} (-1)^{\deg(a_i) (\deg(a_k) + \deg(b_l))} \\
&\quad \int_{M \times M} \pi_1^*(a_i \wedge b_l) \wedge \pi_2^*(a_k \wedge b_j) \\
&= \sum c_{ij} (-1)^{\deg(a_i) (\deg(a_k) + \deg(b_l))} \delta_{il} \delta_{kj} \\
&= c_{lk} (-1)^{\deg(a_l) (\deg(a_k) + \deg(b_l))}
\end{aligned}$$

buluruz. Son olarak, bu iki sonucu karşılaştırarak

$$c_{ij} = (-1)^{\deg(a_i)} \delta_{ij}$$

elde ederiz ve böylece iddianın kanıtı tamamlanır.

Şimdi teoremin kanıtını bitirebiliriz:

$$\begin{aligned}
\int_M e(T_*M) &= \int_{\Delta} \omega \\
&= \int_{\Delta} \left(\sum (-1)^{\deg(a_i)} \pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_i) \right) \\
&= \sum (-1)^{\deg(a_i)} \int_M f^*(\pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_i)) \\
&= \sum (-1)^{\deg(a_i)} \int_M a_i \wedge b_i \\
&= \sum (-1)^{\deg(a_i)} \\
&= \chi(M) .
\end{aligned}$$

□

Bu teoremi kullanarak örtü uzaylarının Euler karakteristiklerine dair aşağıdaki sonucu kanıtlayabiliriz.

Sonuç 5.3.10. $f : M \rightarrow N$ tıkız bağlantılı manifoldların mertebesi k pozitif tam sayısı olan bir örtü uzayı izdüşümü olsun. Bu durumda manifoldların Euler karakteristikleri arasında $\chi(M) = k \chi(N)$ eşitliği vardır.

Kanıt : Yukarıdaki teoremden dolayı $e(T_*M) = k e(T_*N)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\pi : T_*N \rightarrow N$ teğet demeti izdüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$f^*(T_*N) = \{(p, w) \in M \times T_*N \mid f(p) = \pi(w)\} \longrightarrow M$$

teğet demetinin geri çekmesini düşünelim. Örtü uzayı izdüşümü yerel bir difeomorfizma olduğundan

$$\phi : T_*M \longrightarrow f^*(T_*N), (p, v) \mapsto (p, Df_p(v)),$$

vektör demeti fonksiyonu bir izomorfizmadır, çünkü her $(p, v) \in T_*M$ için, $\pi(Df_p(v)) = f(p)$ 'dir ve $Df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ bir vektör uzayı izomorfizmasıdır. Şimdi, eğer $s : N \rightarrow T_*N$ sıfır kesitini çapraz kesen bir kesit ise, $\tilde{s} : M \rightarrow f^*(T_*N) \cong T_*M$, $p \mapsto (p, s(f(p)))$ yine sıfır kesitine çapraz olan bir kesit verir. $f : M \rightarrow N$ derecesi k olan yerel bir difeomorfizma olduğundan, s kesitinin her bir sıfırına karşılık $\tilde{s}$ kesitinin tam olarak k tane aynı işarete sahip sıfırı olacaktır. Son olarak, manifoldların Euler sayıları bu kesitlerin sıfırlarının işaretli toplamı olduğundan $e(T_*M) = k e(T_*N)$ olduğunu görürüz. $\square$

Uyarı 6.1.9.2 bu sonucun bir genellemesini verir.

Uyarı 5.3.11. *Sonlu bir G grubu türevlenebilir bir M manifoldu üzerine difeomorfizmalar yardımıyla serbest olarak etki ediyorsa $f : M \rightarrow M/G = N$ bölüm uzayı aslında mertebesi $k = |G|$ olan bir örtü uzayı olur. Bu durumda $\chi(M) = k \chi(N)$ olacağından $\chi(M)$ tam sayısının $k = |G|$ ile bölünebildiğini görürüz. Bunun bir sonucu olarak çift boyutlu bir küre üzerinde serbest etkisi olan tek grubun iki elemanlı grup olduğu sonucuna varırız, çünkü $\chi(S^{2n}) = 2$ 'dir ($\mathbb{Z}_2$ grubunun küre üzerindeki $p \mapsto -p$ ters kutupsal etkisi serbest bir etkidir).*

Bir başka çarpıcı örnek daha verelim: Türevlenebilir tıkHz bir M manifoldunun serbest bir S^1 (çember) etkisine sahip olduğunu kabul edelim. Her sonlu devirli grup çemberin bir alt grubu olduğundan manifoldun Euler karakteristiği tüm pozitif tam sayılara kalansız bölünebilmelidir. Bu ise ancak $\chi(M) = 0$ olması halinde mümkündür. Bu gözlemin bir sonucu olarak şunu söyleyebiliriz: Her pozitif boyutlu tıkHz Lie grubu çembere homeomorfik bir alt grup içerir ve dolayısıyla bu Lie grup üzerinde serbest etki eden bir çember vardır. O halde, pozitif boyutlu her tıkHz Lie grubunun Euler karakteristiği sıfırdır.

5.3.5 Lefschetz Sabit Nokta Teoremi

Türevlenebilir tıkHz bir M manifoldunun türevlenebilir $f : M \rightarrow M$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu homotopi sınıfı içinde değiştirerek $1_M : M \rightarrow M$, $p \mapsto p$ birim dönüşümüne dik hale getirelim. Bu durumda, f fonksiyonunun sabit noktaları, $M \times M$ içinde $\Delta \subseteq M \times M$ köşegeni ile $f : M \rightarrow M$ fonksiyonun

$$\Gamma_f = \{(p, f(p)) \in M \times M \mid p \in M\}$$

grafığının dik kesişim noktalarına karşılık gelecektir. Bu nedenle, f 'nin sabit noktalarının işaretli sayısı sonlu $f \pitchfork 1_M$ sayısı olarak tanımlanabilir. Bu sayıyı Λ_f ile gösterelim. Aslında $f : M \rightarrow M$ fonksiyonunun homotopi sınıfı ile belirlenen işaretli sabit nokta sayısı bu fonksiyonun kohomoloji seviyesinde verdiği homomorfizma yardımıyla da hesaplanabilir: Teorem 5.3.9'ün kanıtının bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz. Teoremin ifadesindeki $Tr(f^*)$ terimi kohomoloji düzeyinde tanımlanan f^* doğrusal homomorfizmasının izini göstermektedir.

Teorem 5.3.12.

$$\Lambda_f = \sum_k (-1)^k Tr(f^* : H_{DR}^k(M) \rightarrow H_{DR}^k(M))$$

Kanıt : Teorem 5.3.9'ün gösterimini kullanmaya devam edeceğiz.

$$\omega = \sum (-1)^{\deg(a_i)} \pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_i) ,$$

köşegenin Poincaré duali ve $\phi : M \rightarrow M \times M$, $p \mapsto (p, f(p))$, olmak üzere

$$\Gamma_f \pitchfork \Delta = (-1)^{\dim M} \Delta \pitchfork \Gamma_f = (-1)^{\dim M} \int_{\Gamma_f} \omega = (-1)^{\dim M} \int_M \phi^*(\omega)$$

sayısının Λ_f 'ye eşit olduğunu göstermek teoremin kanıtını bitirecektir.

$$f^*(b_i) = \sum_j \lambda_{ij} b_j$$

olmak üzere

$$\sum_k (-1)^k Tr(f^* : H_{DR}^k(M) \rightarrow H_{DR}^k(M)) = \sum_i (-1)^{\deg b_i} \lambda_{ii}$$

olduğu açıktır. O halde doğrudan hesap yaparak,

$$\begin{aligned}
(-1)^{\dim M} \int_M \phi^*(\omega) &= \sum_i (-1)^{\dim M - \deg(a_i)} \int_M \phi^*(\pi_1^*(a_i) \wedge \pi_2^*(b_i)) \\
&= \sum_i (-1)^{\deg(b_i)} \int_M \phi^*(\pi_1^*(a_i)) \wedge \phi^*(\pi_2^*(b_i)) \\
&= \sum_i (-1)^{\deg(b_i)} \int_M 1_M^*(a_i) \wedge f^*(b_i) \\
&= \sum_i (-1)^{\deg(b_i)} \int_M a_i \wedge f^*(b_i) \\
&= \sum_{ij} (-1)^{\deg(b_i)} \int_M a_i \wedge \lambda_{ij} b_j \\
&= \sum_{ij} (-1)^{\deg(b_i)} \lambda_{ij} \int_M a_i \wedge b_j \\
&= \sum_i (-1)^{\deg(b_i)} \lambda_{ij} \delta_{ij} \\
&= \Lambda_f .
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Örnek 5.3.13. M Euler karakteristiği sıfır olmayan bir tıkHz manifold olsun. Bu durumda manifoldun özdeşlik fonksiyonuna homotopik olan her fonksiyonun en az $|\chi(M)|$ tane sabit noktası olacaktır.

5.3.6 Riemann-Hurwitz Teoremi

Bu üniteyi tıkHz Riemann yüzeylerinin arasındaki analitik fonksiyonların yüzeylerin topolojik değişmezleriyle nasıl etkileştiğini gösteren Riemann-Hurwitz Teoremi ve tıkHz Riemann yüzeylerinin otomorfizma gruplarının eleman sayılarını sınırlayan Hurwitz Teoremi ile bitireceğiz. İlk önce analitik fonksiyonlara dair bir gözlemde bulunacağız: $f : U \rightarrow V$, $0 \in U \cap V \subseteq \mathbb{C}$, açık kümeleri arasında $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan, sabit olmayan bir analitik fonksiyon olsun. Fonksiyonun $z = 0$ noktasındaki sıfırının derecesi $d \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$f(z) = a_d z^d + \cdots + a_n z^n + \cdots ,$$

olacak şekilde $a_n \in \mathbb{C}$, $a_d \neq 0$, sayıları vardır. Diğer taraftan,

$$g(z) = a_d + \cdots + a_n z^{n-d} + \cdots ,$$

analitik fonksiyonu $g(0) \neq 0$ koşulunu sağladığı için bu fonksiyonu, sıfırın etrafındaki daha küçük bir açık küme üzerinde, bir $h(z)$ analitik fonksiyonu için, $g(z) = e^{h(z)}$ şeklinde yazabiliriz. O halde,

$$f(z) = (z e^{\frac{h(z)}{d}})^d$$

olur. Elde edilen bu d sayısına fonksiyonun bu noktadaki ramifikasyon endeksi denir ve e_0 ile gösterilir. Aslında bu sayı fonksiyonun $z = 0$ noktasındaki $\deg_0(f)$ yerel derecesidir. Burada $\omega = z e^{\frac{h(z)}{d}}$ fonksiyonu analitik bir izomorfizma olduğundan şu sonuca varırız: Her analitik fonksiyon, yerel olarak uygun bir analitik koordinat dönüşümü altında, $\omega \mapsto z \mapsto \omega^d$ şeklinde ifade edilebilir. Ramifikasyon endeksinin birden büyük olduğu noktaların izole noktalar olacağı açıktır. Dolayısıyla, $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ iki tıkHz Riemann uzayı arasında analitik bir dönüşüm ise, bu dönüşüm sonlu nokta dışında yerel bir izomorfizmadır. Başka bir deyişle, öyle bir $R = \{p_1, \dots, p_k\} \subseteq \Sigma_2$ sonlu nokta kümesi vardır ki, $\phi : \Sigma_1 - \phi^{-1}(R) \rightarrow \Sigma_2 - R$ bir örtü uzayıdır. Şimdi bir $p \in R$ noktası alalım ve bu noktanın ters görüntüsü $\{q_1, \dots, q_r\} = \phi^{-1}(p)$ olsun. Seçtiğimiz bu p noktasının etrafındaki küçük bir açık kümede desteklenen bir hacim formunu yukarı çekerek integralini alalım. Fonksiyonun yerel ifadesi $z \mapsto z^d$ şeklinde olacağından

$$N = \deg \phi = \sum_{i=1}^r \deg(\phi)_{q_i} = \sum_{i=1}^r e_{q_i}$$

elde ederiz.

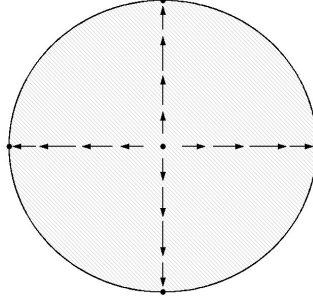
Şimdi Σ_2 Riemann yüzeyi üzerinde bir X vektör alanı alalım, öyle ki, izole noktalardan oluşan sıfırları (vektör alanı teğet demetin sıfır kesiti ile çapraz kesişsin) R kümesini içersin ve bu kümenin her noktasındaki endeksi $+1$ olsun. İstenilen vektör alanını şu şekilde kurabiliriz. İlk önce her $p \in R$ noktası etrafında bu noktayı merkez kabul eden ve birbirinden ayırık (x, y) koordinat sistemleri seçelim. Ayrıca, koordinat sistemlerinin yönü Riemann yüzeyinin karmaşık yönü ile aynı olsun. Her bir koordinat sisteminin içinde tanımlanan

$$(x, y) \mapsto (1 - (x^2 + y^2))(x, y)$$

vektör alanını birim yuvarın dışında tamamen sıfır olacak şekilde tüm Riemann yüzeyine genişletelim (bkz. Şekil 5.4). Elde ettiğimiz bu vektör alanlarının toplamını R kümesinin küçük bir komşuluğu dışında hafifçe oynatarak teğet demetin sıfır kesitine dik hale getirelim. Bu vektör alanı her bir $p \in R$ noktasında istediğimiz özelliklere sahiptir. O halde, aradığımız vektör alanını elde etmiş olduk. $\phi : \Sigma_1 - \phi^{-1}(R) \rightarrow \Sigma_2 - R$ fonksiyonu yerel difeomorfizma olduğundan, her $q \in \Sigma_1 - \phi^{-1}(R)$ noktasında $D\phi_q(\tilde{X}(q)) = X(\phi(q))$ koşulunu sağlayan bir

$$\tilde{X} : \Sigma_1 - \phi^{-1}(R) \rightarrow T_*(\Sigma_1 - \phi^{-1}(R))$$

vektör alanı vardır. Ayrıca X vektör alanının $\Sigma_2 - R$ içinde kalan her sıfırına karşılık $\tilde{X}$ alanının $\Sigma_1 - \phi^{-1}(R)$ içinde aynı işarete sahip tam olarak $N = \deg(\phi)$ adet sıfırı vardır. Şimdi de $\tilde{X}$ alanının tüm Riemann yüzeyine genişletilebileceğini gösterelim. Bunun için herhangi bir $q \in \phi^{-1}(R)$ noktası alalım. Fonksiyonun yerel ifadesinin $z \mapsto \omega = z^d$ şeklinde ve X vektör alanının da, bu koordinat sisteminde, $X(\omega) = \omega$ ile verildiğini kabul edebiliriz (bu noktalarda endeksi $+1$ olarak seçmiştik). O halde, $z \neq 0$, olduğu



Şekil 5.4: Birim disk üzerinde tanımlı $(x, y) \mapsto (1 - (x^2 + y^2))(x, y)$ vektör alanı

durumda, $\tilde{X}(z) = z/d$ olduğunu görürüz, çünkü $z \mapsto z^d$ fonksiyonun teğet uzayda verdiği doğrusal fonksiyon

$$D\phi_z : T_z\mathbb{C} \rightarrow T_{z^d}\mathbb{C}, (z, v) \mapsto (z^d, dz^{d-1}v)$$

ile verilir. Şimdi her iki vektör alanının sıfırlarının endekslerini sayarak

$$\chi(\Sigma_1) - |\phi^{-1}(R)| = \deg(\phi) (\chi(\Sigma_2) - |R|)$$

denklemini elde ederiz. Bu sonuç aşağıdaki haliyle Riemann-Hurwitz Teoremi olarak bilinir:

Teorem 5.3.14 (Riemann-Hurwitz Teoremi). $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ iki tıkHz Riemann yüzeyi arasında analitik bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$\chi(\Sigma_1) = \deg(\phi) \chi(\Sigma_2) - \sum_{q \in \Sigma_1} (e_q - 1)$$

eşitliği her zaman doğrudur.

Şimdi de bu teoremin bir sonucu olarak Hurwitz'in bir başka teoremini vereceğiz.

Teorem 5.3.15 (Hurwitz Teoremi). $\Sigma_g, g \geq 2$, tıkHz bir Riemann yüzeyi ve $G \leq \text{Aut}(\Sigma_g)$ yüzeyin analitik otomorfizmalarının sonlu bir alt grubu olsun. Bu durumda grubun mertebesi $|G| \leq 84(g-1)$ eşitsizliğini sağlar.

Kanıt : TıkHz Σ_g yüzeyinin herhangi bir $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ homeomorfizmasının sonsuz tane sabit noktası olsaydı bu sabit noktaların bir $p \in \Sigma_g$ yığılma noktası olurdu. Eğer bu homeomorfizma aslında bir analitik difeomorfizma ise $p \in \Sigma_g$ noktası etrafında alacağımız karmaşık bir komşuluk bize sıfırlarının yığılma noktası olan bir analitik fonksiyon verirdi (örneğin $g(z) = f(z) - z$ fonksiyonu). Bu ise f otomorfizmasının bu komşuluk üzerinde ve dolayısıyla tüm yüzey üzerinde birim fonksiyon olduğunu gösterir. O halde, eğer $f \in G$ sonlu grubunun birim elemanı dışında bir elemanı ise f otomorfizmasının

ancak sonlu sayıda sabit noktası olabilir. Diğer taraftan, G grubunun kendisi de sonlu olduğundan öyle bir sonlu $C \subset \Sigma_g$ kümesi vardır ki, G grubu $\Sigma_g - C$ açık yüzeyi üzerinde serbest olarak etki eder. G grubunun C kümesi üzerindeki etkisinin yörüngeleri $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ olsun. Grup her bir yörüngeye transitif etki ettiği için G grubunun yörüngenin tüm noktalarındaki davranışı benzer olacaktır. Başka bir deyişle, eğer bir $f \in G$ elemanı, herhangi bir $p_1 \in \mathcal{O}_i$ noktasının bir komşuluğunda $f(z) = z^k$ ile veriliyorsa, f fonksiyonu bu yörüngedeki tüm noktalarda aynı şekilde davranacaktır. Buradan Σ_g/G bölüm uzayının da bir tıkHz karmaşık türevlenebilir bir yüzey olduğunu görürüz (bkz. Alıştırma 13). Diyelim ki, $\Sigma_h = \Sigma_g/G$ olsun. Bu durumda, yukarıdaki teoremden dolayı, $N = |C|$, C kümesinin eleman sayısı olmak üzere,

$$2 - 2g - N = |G| (2 - 2h - n)$$

eşitliğini elde ederiz. Teoremin hipotezindeki $g \geq 2$ koşulundan dolayı $2 - 2h - n \neq 0$ olduğunu görürüz. Ayrıca, $k_i = |G|/|\mathcal{O}_i|$, $i = 1, \dots, n$, sayıları olarak tanımlanırsa (yörüngedeki herhangi bir noktanın sabitleyicisinin mertebesi) yukarıdaki eşitlikten

$$|G| = 2(g - 1) \frac{1}{2(h - 1) + \sum_{i=1}^n (1 - 1/k_i)}$$

elde edilir. Grubun bu yörüngedeki etkisi serbest olmadığından $k_i \geq 2$ olmalıdır. Amacımız G grubunun mertebesi için bir üst sınır bulmak olduğundan,

$$2(h - 1) + \sum_{i=1}^n (1 - 1/k_i)$$

ifadesinin, $h \geq 0$ ve $k_i \geq 2$, tam sayılar olmak üzere, alabileceği en küçük pozitif değeri bulmalıyız. Eğer $n \geq 4$ ise bu değer (ancak $h = 0$ ve $n = 4$ olması durumunda)

$$-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

ve $0 \leq n \leq 3$ için ise (ve yine ancak $h = 0$ ve $n = 3$ olmak üzere)

$$-2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{1}{42}$$

olarak bulunur. Böylece ispat biter. $\square$

Örnek 5.3.16. *Karmaşık projektif düzlemde dördüncü dereceden*

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

homojen polinomu cinsi

$$\frac{1}{2} (4 - 1)(4 - 2) = 3$$

olan bir Riemann yüzeyi verir (bkz. Örnek 6.2.10). Klein Kuartik (Quartic) olarak bilinen bu yüzeyin otomorfizmalar grubunun mertebesi 168'dir ve bu sayı yukarıdaki teoremden verilen üst sınırdır. Aslında bu otomorfizmalar grubunun mertebesi 168 olan tek basit grup olduğu bilinmektedir. Klein Kuartik, hiperbolik geometriden cebirsel geometriye, sayılar teoresinden grup teoriye ve karmaşık analize kadar matematiğin bir çok dalını ilgilendirmektedir (bkz. [18], s.348).

5.4 Alıştırmalar

1. Sonuç 5.1.6'nın kanıtını tamamlayınız.
2. Önerme 5.2.1'in kanıtını tamamlayınız.
3. Aralarında asal herhangi iki p ve q tam sayıları için $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ torusu üzerinde

$$t \mapsto (tp, tq), t \in \mathbb{R},$$

ile parametrize edilen $C_{p,q}$ alt manifoldunu düşünelim. Torusun düzlemin standart yönlendirmesiyle ve $C_{p,q}$ alt manifoldunun da yukarıda verilen parametrizasyonu ile yönlendirildiğini kabul edelim. Bu şekilde verilen C_{p_1,q_1} ve C_{p_2,q_2} alt manifoldlarının kesişim sayısını hesaplayınız.

4. Mayer-Vietoris dizisini kullanarak cinsi g olan yönlendirilebilir yüzeyin kohomoloji cebirini hesaplayınız (bkz. Örnek 5.2.11.1).
5. Projektif karmaşık düzlemin homojen bir $f(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ polinomunun sıfırı olarak tanımlanan

$$C_f = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

alt kümesini düşünelim. Eğer $0 \in \mathbb{C}$ noktası $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun bir düzgün değeri ise bu alt kümenin bir alt manifold olduğunu gösteriniz.

6. Teorem 5.3.3'nin kanıtında kullanılan dikey tıkkız destekli kohomoloji dizisinin varlığını kanıtlayınız.
7. Teorem 5.3.4'ün kanıtının birinci adımında verilen Mayer-Vietoris tam üçgenini model olarak herhangi bir

$$\cdots \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow \cdots$$

tam dizisini aşağıdaki şekilde olduğu gibi bir tam üçgen olarak yazabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} A^* & = & \oplus_n A_n \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$$C^* = \oplus_n C_n \longleftarrow B^* = \oplus_n B_n$$

Bu üçgenin tam olduğunu gösteriniz. Başka bir deyişle, her bir homomorfizmanın çekirdeğinin bir önceki homomorfizmanın görüntüsü olduğunu gösteriniz.

8. Bu alıştırmada sayfa 114'da

$$\omega_{0, \mathbb{R}^n} = \frac{\omega_{S^{n-1}}}{nA_n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

ve sayfa 214'de

$$\omega_K = \frac{f dg - g df}{2\pi (f^2 + g^2)} \in \Omega^1(S^3 - K)$$

şeklinde tanımladığımız geçişme formlarının arasındaki ilişkiyi ortaya çıkartacağız. İlk önce $\omega_{0, \mathbb{R}^n}$ formunun $H_{DR}^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{R}$ kohomoloji grubunun üretici olduğunu hatırlayalım.

Orijinin aşağıdaki türevlenebilir

$$F : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_{n+k}) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in \mathbb{R}^{n+k},$$

fonksiyonunun bir düzgün değeri olduğunu kabul edelim ve bu düzgün değerin $F^{-1}(0)$ ters görüntüsü olan manifoldu K^k ile gösterelim. Bu durumda $\omega_{K, \mathbb{R}^{k+n}} \doteq F^*(\omega_{0, \mathbb{R}^n}) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^{k+n} - K)$ kapalı formu

$$\frac{1}{nA_n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_{i-1} \wedge df_{i+1} \wedge \dots \wedge df_n}{(f_1^2 + \dots + f_n^2)^{n/2}}$$

ile verilir ve 4. Ünite'de olduğu gibi $K \subset \mathbb{R}^{k+n}$ alt manifoldunun geçişme formu olarak adlandırılır. Aşağıdaki ifadeleri kanıtlayınız.

(a) Bu alıştırmanın başında bahsettiğimiz 1-form

$$\omega_K = \frac{f dg - g df}{2\pi (f^2 + g^2)} \in \Omega^1(S^3 - K),$$

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (f(x, y, z), g(x, y, z))$ fonksiyonu olmak üzere $F^*(\omega_{0, \mathbb{R}^2})$ formuna eşittir.

(b) $L^{n-1} \subset \mathbb{R}^{k+n} - K$ tıkHz yönlendirilebilir alt manifold ve $n > 1$ olsun. Eğer L manifoldunu iç K manifoldunu ise dış bölgesinde barındıran bir S^{n+k-1} küresi varsa $l(K, L)$ sayısı sıfırdır. Bunu göstermek için L alt manifoldunu S^{n+k-1} küresi içinde bir $\phi : L \times [0, 1] \rightarrow S^{n+k-1}$ homotopisi ile kürenin merkezine sıkıştırılalım. Homotopinin gömme fonksiyonu olmayan diğer ucu sabit fonksiyon olduğundan Stokes Teoremi kanıtı tamamlar. $n > 1$ kabulünü nerede kullandık?

- (c) L yine tıkHz yönlendirilebilir ve pozitif boyutlu olmak üzere

$$\int_L \omega_{K, \mathbb{R}^{k+n}}$$

integralinin bir tam sayı olduğunu gösteriniz. Bu sayı geçişme sayısı olarak adlandırılır ve $l(K, L)$ ile gösterilir. Bunu göstermek için yine bir $\phi : L \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{k+n} - K$ homotopisi alalım, öyle ki $\phi(x, 0)$ fonksiyonu L alt manifoldunun gömme fonksiyonu olsun ve homotopinin diğer ucu, $\phi(L, 1)$, K alt manifoldunu dışında bırakan bir S^{n+k-1} küresinin içinde kalsın. Böyle bir kürenin varlığını $K = F^{-1}(0)$ alt manifoldunun kapalı olmasından söyleyebiliyoruz. Yine aynı nedenden ϕ homotopisini uçlarını hiç değiştirmeden K ile çapraz kesişecek şekilde hafifçe oynatabiliriz. O halde, homotopinin görüntüsü K ile uçlarının dışında kalan sonlu noktada kesişecektir. Her bir kesişim noktası geçişme sayısını ± 1 ile değiştirecektir. Homotopinin $\phi(L, 1)$ ucu bir kürenin içinde kaldığından bir önceki bölümden dolayı kanıt tamamlanır.

- (d) K^k ve L^{n-1} geçişme formları tanımlı tıkHz alt manifoldlar ise aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_L \omega_{K, \mathbb{R}^{k+n}} = \pm \int_K \omega_{L, \mathbb{R}^{k+n}}$$

- (e) $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$ alt manifoldunun geçişme formu

$$\omega_{0, \mathbb{R}^1} = \frac{x}{2|x|}$$

fonksiyonudur (0-formudur). $S^0 = \{-1^-, 1^+\} = \partial[-1, 1]$ sınır manifoldunu aralıktan aldığı yönlendirme ile düşünerek $\int_{S^0} \omega_{0, \mathbb{R}^1} = 1$ olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan, $L = \{1^+\} \subset \mathbb{R}$ yönlendirilmiş alt manifoldu üzerindeki $\int_L \omega_{0, \mathbb{R}^1} = 1/2$ integrali bir tam sayı değildir. Neden? $K = \partial[a, b]$, $ab \neq 0$ olmak üzere, $\int_K \omega_{0, \mathbb{R}^1}$ integralini hesaplayınız.

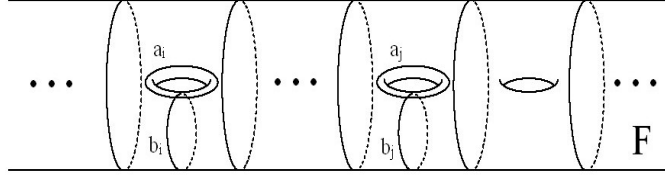
- (f) $K = S^0 \subset \mathbb{R}$ alt manifoldunun geçişme formunun

$$\omega_{S^0, \mathbb{R}^1} = \frac{x^2 - 1}{2|x^2 - 1|}$$

fonksiyonu olduğunu gösteriniz. Bu formun çeşitli sıfır boyutlu yönlendirilmiş tıkHz $L \subset \mathbb{R}$ alt manifoldları üzerinde integralini hesaplayınız ve bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

9. Teorem 5.3.4'ün kanıtının üçüncü adımındaki F manifoldunun kohomolojisinin sonlu boyutlu olmaması durumunda doğru olmayacağını gösteriniz: F aşağıda resmi verilen ve cinsi sonsuz olan yüzey ve $P = \mathbb{R} \times F$

aşık demet olsun. O halde, $\{U_i = (i-1, i+1)\}$ sonsuz ailesi olmak üzere $\omega = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_{a_i}$ kohomoloji sınıfı $\{\mu_{a_i}, \mu_{b_i} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq H_{DR}^1(P)$ kümesinin gerdiği $\mathbb{R} \simeq H_{DR}^*(M)$ -modülünün bir elemanı değildir. Neden? (Burada μ_L ile $L \subseteq F$ alt manifoldunun Poincaré dualini gösteriyoruz.)



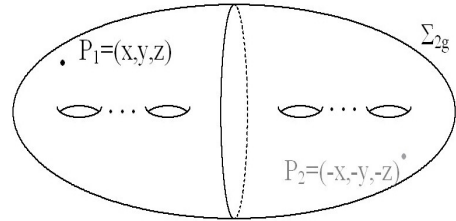
Şekil 5.5: Cinsi sonsuz olan yüzey

10. $E \rightarrow M$ rankı $k > 0$ olan bir karmaşık vektör demeti olsun. Bu vektör demetinin her bir lifinin projektivizasyonunu alarak elde edilen

$$P(E) \doteq E - \{0\} / u \sim \lambda u, \lambda \in \mathbb{C}^*$$

bölüm uzayının, lifi $\mathbb{CP}^{k-1}$ olan bir $P : P(E) \rightarrow M$ lif demeti olduğunu gösteriniz. Bu demetin geçiş fonksiyonları ile karmaşık vektör demetinkileri karşılaştırınız.

11. Örnek 5.3.2.3'de ifade edilen iddiayı kanıtlayınız. Diğer taraftan, eğer $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonlarının vermiş olduğu yönlendirme yerine $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ fonksiyonlarının verdiği yönlendirmeyi alsaydık gerçel projektif düzlemin Euler sayısının $e(\mathbb{RP}^2) = 1$ yerine -1 olacağını gözlemleyiniz. Bu nedenle teğet demeti üzerindeki 'doğru' yönlendirmenin $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonlarının verdiği yönlendirme olduğu sonucuna varıyoruz.
12. Cinsi en az iki olan bir yüzey alalım. Bu yüzeyi aşağıdaki şekilde verilen $\mathbb{Z}_2$ -grup etkisine bölersek yönlendirilemeyen bir yüzey elde ederiz. Bu yüzeyin Euler sayısının da negatif olduğunu gösteriniz (Şekil 5.6).
13. Teorem 5.3.15'in kanıtının ilk kısmını kullanarak, tıkHz bir Riemann yüzeyinin sonlu bir analitik otomorfizma grubuna bölümünün de tıkHz bir Riemann yüzeyi olduğunu gösteriniz.



Şekil 5.6: Yüzey üzerindeki $\mathbb{Z}_2$ -grup etkisi $\phi(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ ters kutupsal fonksiyonu ile verilsin; bu durumda bölüm uzayı cinsi $2g+1$ olan yönlendirilemeyen yüzey olur.

14. Fermat eğrisi olarak bilinen ve karmaşık projektif düzlem içinde $z_0^n + z_1^n \pm z_2^n = 0$ ($n \geq 4$) denklemiyle tanımlanan yüzeyin tüm karmaşık analitik otomorfizmalarını bulunuz. Karmaşık eğrinin (Riemann yüzeyinin) derecesinin $n \leq 3$ olduğu durumlarda otomorfizma grubu sonlu olur mu? Bu yüzeylerin yönü korumayan gerçel analitik otomorfizmaları var mıdır? Bu yüzeyleri elde ettiğiniz otomorfizma gruplarına bölünce ne elde ederiz ($n \geq 4$)?
15. Ünite 2, Alıştırma 24'de iddia edilen aşağıdaki ifadeyi kanıtlayınız: Karmaşık projektif uzay $\mathbb{C}P^n$ 'nin karmaşık boyutu m olan bir $M^m \subseteq \mathbb{C}P^n$ karmaşık alt manifoldunu alalım. Bu durumda, ω_{FS} karmaşık projektif uzay üzerindeki Fubini-Study formu olmak üzere

$$\frac{1}{\pi^m} \int_M \omega_{FS}^m$$

integrali pozitif bir tam sayıdır.

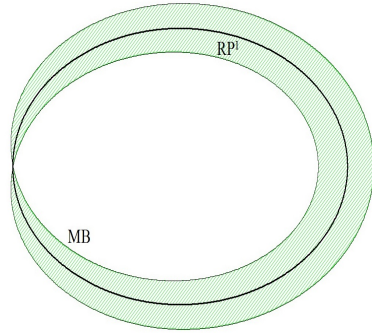
16. Bu alıştırmada gerçel projektif düzlemin $\mathbb{R}^3$ içine gömülemeyeceğini kanıtlayacağız. Vereceğimiz kanıt [3] numaralı referanstan esinlenilerek elde edilmiştir. Yüzeylerin $\mathbb{R}^3$ içine daldırmaları ile ilgili daha kapsamlı bir okuma için bu makaleye bakabilirsiniz. İlk önce gerçel projektif düzlemin $\mathbb{R}^3$ içine gömüldüğünü kabul edelim ve bu gömülmüş $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}^3$ gerçel projektif düzlemin içindeki

$$\mathbb{R}P^1 = \{[x_0 : x_1 : 0] \mid [x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2\}$$

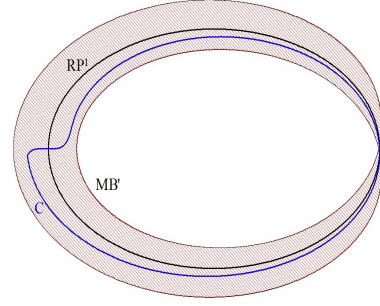
gerçel projektif doğrusunu ele alalım. Örnek 5.2.4'te $\mathbb{R}P^1$ alt manifoldunun $\mathbb{R}P^2$ içindeki kendisi ile kesişiminin $1 \in \mathbb{Z}_2$ olduğunu görmüştük. Aslında $\mathbb{R}P^1$ alt manifoldunun $\mathbb{R}P^2$ içindeki tüp komşuluğunun Möbius şeridi olduğu gösterilebilir. Bu Möbius şeridi'ni MB ile gösterelim. Diğer taraftan, hem $\mathbb{R}P^1$ hem de $\mathbb{R}^3$ manifoldları yönlendirilebilir oldukları için $\mathbb{R}P^1$ alt manifoldunun $\mathbb{R}^3$ içindeki N tüp komşuluğu $\mathbb{R}P^1$ üzerinde yönlendirilmiş bir disk demeti olarak görülebilir:

$$D^2 \rightarrow N \rightarrow \mathbb{R}P^1 .$$

Tüp komşuluğu yeterince küçük seçersek $MB = \mathbb{R}P^2 \cap N$ olacaktır. Disk demeti içindeki diskleri yönlendirmelerini kullanarak 90° döndürelim. Bu döndürme işleminin sonucunda MB alt manifoldunun görüntüsü bir başka, diyelim ki MB' olsun, Möbius şeridi'dir ve $MB' \cap \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^1$ alt manifoldudur. şimdi MB' içinde $\mathbb{R}P^1$ ile tek noktada çapraz kesişen bir C çemberi alalım. O halde, $\mathbb{R}^3$ manifoldunun C ve $\mathbb{R}P^2$ alt manifoldları bu tek noktada çapraz kesişirler. Başka bir deyişle, bu iki alt manifoldun $\mathbb{Z}_2$ kesişim sayısı birdir. Fakat her iki alt manifold da tıkız olduğu için bunlardan birini herhangi bir vektör boyunca yeterince uzak



(a) $\mathbb{R}P^2$ içindeki $\mathbb{R}P^1$ 'in komşuluğu olan MB Möbius Şeridi.



(b) MB Möbius Şeridi'nin 90° döndürülmesiyle elde edilen MB' ve onun içinde $\mathbb{R}P^1$ ve $\mathbb{R}P^2$ 'yi tek noktada kesen C eğrisi.

Şekil 5.7

bir yere ötelerssek bu iki manifold kesişmeyecektir ve dolayısıyla kesişim sayısı aslında bir değil, sıfırdır. Bu çelişki kanıtı tamamlar. Kanıtın (eksik bulduğunuz muhtemel) detayları okuyucuya bırakılmıştır.

Aynı kanıt Möbius Şeridi'ni içeren iki boyutlu tıkHz manifoldların, başka bir deyişle yönlendirilemeyen tıkHz yüzeylerin, $\mathbb{R}^3$ içine gömülemeyeceğini gösterir. Özel durumda Klein Şişesi'de $\mathbb{R}^3$ 'e gömülemez.

Açıkça görüldüğü üzere $\mathbb{R}P^3$ ve $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$ 3-boyutlu manifoldları gerçel projektif düzlemi bir alt manifold olarak kabul ederler ve dolayısıyla yukarıdaki kanıtta $\mathbb{R}^3$ yerine bu iki manifolddan birini koyamayız. Neden?

Son olarak, S^3 ve $\mathbb{R}P^3$ manifoldlarının difeomorfik olmadığını kanıtlayınız.

17. Sayfa 233'te aynı boyuta sahip yönlendirilmiş manifoldlar arasındaki fonksiyonlar için tanımlanan tam sayı değerli derecenin özelliklerini vermiştik. Bu alıştırmada ise bu sonuçları yönlendirilemeyen manifoldlara genişleteceğiz. $f : M \rightarrow N$ n -boyutlu bağlantılı tıkHz türevlenebilir manifoldların fonksiyonu olsun. N manifoldu içinde alınan herhangi bir p noktasını sıfır boyutlu bir alt manifold olarak alarak bu fonksiyonun mod 2 derecesini fonksiyonun bu alt manifold ile Mod 2 kesişim sayısı olarak tanımlayalım: $\deg_2(f) \doteq \text{Int}(f(M), p) \pmod{2}$ (bkz. Sonuç 5.2.2). Aşağıdaki iddiaları kanıtlayınız.

- (a) Homotopiler fonksiyonların Mod 2 derecesini korur. Dolayısıyla, eğer $h : M \rightarrow M$ birim fonksiyona homotopik ise $\deg_2(h) = 1$ olur.
- (b) $\deg_2(g \circ f) = \deg_2(f) \deg_2(g)$
- (c) Eğer f örten değilse $\deg_2(f) = 0$ 'dır.
- (d) Eğer $f : M \rightarrow N$ yönlendirilmiş manifoldların bir fonksiyonu ise,

bu fonksiyonun tam sayı değerli derecesi ile Mod 2 değerli derecesi Mod 2’de birbirine denktir: $\deg_2(f) \equiv \deg(f) \pmod{2}$.

Bu ve sonraki iki alıştırmada Arf değişmezini ve bir topolojik uygulamasını vereceğiz. Arf değişmezini Dye’nın makalesini takip ederek sunacağız (bkz. [11]). Aslında Dye’nın makalesini de basitleştireceğiz. Dye karakteristiği iki olan herhangi bir mükemmel (perfect) cisim üzerinde çalışırken biz kendimizi sadece iki elemanlı $\mathbb{F}_2$ cismine kısıtlayacağız.

18. (a) İki elemanlı $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde boyutu çift sayı olan bir V vektör uzayı alalım. Eğer $Q : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ bir kuadratik form (derecesi iki olan bir homojen polinom fonksiyon) ise bu form yardımıyla aşağıdaki şeklide tanımlanan

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_2, \quad B(u, v) \doteq Q(u + v) + Q(u) + Q(v), \quad u, v \in V,$$

fonksiyon (ters) simetrik ve bilineerdir, gösteriniz. (Cismin karakteristiği iki değil ise $B(u, v)$ bu ifadenin yarısı olarak tanımlanır. Örneğin bkz. s. 345.) Bu form hem simetrik hem de ters simetriktir. Ayrıca bilineer form yozlaşmamış ise (dejenere değilse) kuadratik forma da yozlaşmamış diyeceğiz.

- (b) Eğer bilineer form yozlaşmamış ise, V uzayının öyle bir $\beta = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ tabanı vardır ki, her $i, j = 1 \dots, n$, için

$$B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0 \quad \text{ve} \quad B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

olur. Bu özelliğe sahip tabana bilineer formun bir simplektik tabanı denir. Her yozlaşmamış bilineer formun bir simplektik tabanı olduğunu gösteriniz. B bilineer formunu koruyan doğrusal dönüşümlere simplektik dönüşümler denir:

$$S : V \rightarrow V, \quad B(u, v) = B(S(u), S(v)), \quad \text{her } u, v \in V \text{ için.}$$

Bir dönüşümün simplektik olması için yeter ve gerek koşul dönüşümün verilen bir (her) simplektik tabanı yine bir simplektik tabana götürmesidir. Gösteriniz. Ayrıca simplektik dönüşümler $GL(V)$ içinde bir alt grup oluşturur.

- (c) Her $w \in V$ vektörü için,

$$T_w : V \rightarrow V, \quad u \mapsto T_w(u) = u + B(u, w)w, \quad u \in V,$$

ile tanımlanan doğrusal fonksiyona bir *transveksiyon* denir. Transveksiyonların simplektik dönüşümler olduğunu gösteriniz. Bu alıştırmanın geri kalanında her simplektik dönüşümün transveksiyonların sonlu bir çarpımı (bileşkesi) olduğunu göreceğiz. Bunu verilen herhangi bir diğer simplektik tabanı uygun transveksiyonlarla değiştirip β tabanını elde ederek yapacağız.

- (d) β' bilinear formun bir başka simplektik tabanı olsun. Bu tabanın her elemanı $\sum_i (a_i e_i + b_i f_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, şeklinde olacaktır. Bu tabanın içinde e_1 terimini içeren bir eleman vardır (neden?). Başka bir deyişle, $a_1 = 1$ olacak şekilde bir taban elemanı vardır. Bu eleman için aynı zamanda $b_1 = 1$ ise β' tabanına T_{f_1} transveksiyonunu uygulayalım. $T_{f_1}(e_1 + f_1) = e_1$ olacağı için içinde $e_1 + f_1$ toplamı olan taban elemanının görüntüsü e_1 elemanını içerip ($a_1 = 1$) f_1 elemanını içermeyen ($b_1 = 0$) bir eleman olacaktır. Bu elemanı u olarak adlandıralım.

Daha sonra elde ettiğimiz taban (muhtemelen $T_{f_1}(\beta')$ tabanı) içinden $B(u, v) = 1$ olacak şekilde bir v taban elemanı seçelim (taban simplektik olduğunu için bu şekilde tek bir eleman vardır). Bu v elemanı β tabanına göre yazıldığında f_1 elemanını içermek zorundadır. Eğer v elemanı aynı zamanda e_1 'i de içeriyorsa bu tabana $T_{e_1} \circ T_{f_1}$ çarpımını uygulayalım:

$$\begin{array}{ccccc} e_1 & \xrightarrow{T_{f_1}} & e_1 + f_1 & \xrightarrow{T_{e_1}} & f_1 \\ e_1 + f_1 & \xrightarrow{T_{f_1}} & e_1 & \xrightarrow{T_{e_1}} & e_1 \end{array}$$

olduğu için $\{u, v\}$ kümesinin transveksiyonlar altındaki görüntüsünün $\{e_1 + u', f_1 + v'\}$ kümesi olduğunu kabul edebiliriz, öyle ki, u' ve v' vektörleri ne e_1 ne de f_1 terimini içerirler. Ayrıca, $B(u, v) = 1$ olduğu için $B(u', v') = 0$ olmalıdır.

Son olarak bu tabana

$$T_{e_1} \circ T_{e_1+v'} \circ T_{f_1} \circ T_{f_1+u'}$$

çarpımını uygularsak elde edilen simplektik taban

$$\{e_1, f_1, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}\}$$

şeklinde olur, öyle ki hiçbir u_i, v_i ne e_1 ne de f_1 terimini içerir.

- (e) B formunun $\{u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}\}$ kümesinin gerdiği alt uzaya kısıtlaması da simplektik olacaktır. Dolayısıyla, tümevarım metoduyla, β' tabanına sonlu tane transveksiyon uygulayarak $\beta = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ tabanını elde ederiz.
- (f) Verilen herhangi bir simplektik tabanı, bu tabana sonlu tane transveksiyon uygulayarak β tabanına dönüştürme işleminin bir algoritması olduğunu gördük. Dolayısıyla, sıralı simplektik tabanlar ile simplektik matrisler arasında bire bir eşleme olduğuna göre verilen herhangi bir simplektik matrisi transveksiyonların sonlu çarpımı şeklinde yazmanın bir algoritmasını yazabiliriz.
- (g) Şu ifadeleri kanıtlayınız: Her transveksiyonun karesi birim dönüşümdür. Sıfırdan farklı her vektörü elemanı olarak kabul eden bir

simplektik taban vardır. Dolayısıyla, tüm transveksiyonlar, simplektik grup içinde, birbirine eşleniktir. Simplektik grubun herhangi bir transveksiyon içeren tek normal alt grubu kendisidir. Bu grubun yapısı hakkında neler söyleyebilirsiniz? Küçük bir üreteç listesi nasıl kurulabilir?

19. Bir önceki alıştırmanın gösterimi kullanarak devam edelim. $Q : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ yozlaşmamış kuadratik formunun Arf değışmezi $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_2$ formu yardımıyla şu şekilde tanımlanır: $\beta = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ kümesi B için simplektik bir taban olmak üzere

$$\text{Arf}(Q) \doteq \sum_{i=1}^n Q(e_i) Q(f_i).$$

- (a) İlk önce değışmezin iyi tanımlı olduğunu görelim. Bunun için B formunun bir başka $\beta' = \{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$ simplektik tabanını alalım. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^n Q(e_i) Q(f_i) = \sum_{i=1}^n Q(u_i) Q(v_i)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Bir önceki alıştırmadan dolayı bazı $q \in V$ için $\beta' = T_q(\beta)$ olduğunu kabul edebiliriz. Başka bir deyişle, her $i = 1, \dots, n$ için,

$$u_i = T_q(e_i) = e_i + B(e_i, q) q \quad \text{ve} \quad v_i = T_q(f_i) = f_i + B(f_i, q) q$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} Q(u_i) &= Q(e_i + B(e_i, q) q) \\ &= Q(e_i) + Q(B(e_i, q) q) + B(e_i, B(e_i, q) q) \\ &= Q(e_i) + (B(e_i, q))^2 Q(q) + (B(e_i, q))^2 \\ &= Q(e_i) + (1 + Q(q)) (B(e_i, q))^2 \end{aligned}$$

ve aynı şekilde $Q(v_i) = Q(f_i) + (1 + Q(q)) (B(f_i, q))^2$ elde ederiz. Dolayısıyla, eğer $Q(q) = 1$ ise bu adımın kanıtı tamamlanır. O halde, $Q(q) = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $q = \sum_i (a_i e_i + b_i f_i)$ ise $Q(u_i) = Q(e_i) + b_i^2$ ve $Q(v_i) = Q(f_i) + a_i^2$ olarak hesaplanır.

Buradan doğrudan hesap yaparak,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n Q(u_i) Q(v_i) &= \sum_{i=1}^n (Q(e_i) + b_i^2) (Q(f_i) + a_i^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n Q(e_i)Q(f_i) + a_i^2 Q(e_i) + b_i^2 Q(f_i) + a_i^2 b_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n Q(e_i)Q(f_i) + a_i^2 Q(e_i) + b_i^2 Q(f_i) + a_i b_i \\
 &= \sum_{i=1}^n Q(e_i)Q(f_i) + Q(a_i e_i + b_i f_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n Q(e_i)Q(f_i) + \sum_{i=1}^n Q(a_i e_i + b_i f_i)
 \end{aligned}$$

ve son olarak $\sum_{i=1}^n Q(a_i e_i + b_i f_i) = Q(q) = 0$ olduğunu kullanarak değişmezini iyi tanımlı olduğunu göstermiş oluruz.

- (b) Şimdi de Arf değişmezinin denk kuadratik formlar için aynı kaldığını görelim: Q_1 ve Q_2 aynı V vektör uzayı üzerinde iki denk form olsun. Dolayısıyla, öyle bir $L : V \rightarrow V$ doğrusal izomorfizması vardır ki, her $v \in V$ için $Q_2(v) = Q_1(L(v))$ eşitliği sağlanır. Bu durumda bu iki forma karşılık gelen simplektik formlar için

$$B_2(u, v) = B_1(L(u), L(v)), \quad u, v \in V,$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, eğer $\beta = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ B_1 için bir simplektik taban ise

$$\beta' \doteq L^{-1}(\beta) = \{L^{-1}(e_1), L^{-1}(f_1), \dots, L^{-1}(e_n), L^{-1}(f_n)\}$$

kümesi de B_2 için bir simplektik taban oluşturur. O halde,

$$\begin{aligned}
 \text{Arf}(Q_2) &= \sum_{i=1}^n Q_2(L^{-1}(e_i)) Q_2(L^{-1}(f_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n Q_1(LL^{-1}(e_i)) Q_1(LL^{-1}(f_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n Q_1(e_i) Q_1(f_i) \\
 &= \text{Arf}(Q_1)
 \end{aligned}$$

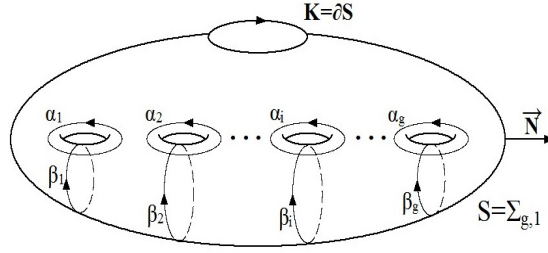
- (c) Yukarıda verdiğimiz sonucun tersi de doğrudur: V vektör uzayı üzerinde verilen ve Arf değişmezleri aynı olan Q_1 ve Q_2 kuadratik formlarının denk olduklarının gösterilmesini size bırakıyoruz.

20. Bu alıştırmada adımlar halinde dğğümler için Arf değişmezini tanımlayacağız. İlk adım yüzeylerin birinci tekil homolojisinin alternatif bir tanımını vermek olacak. Daha sonra üç boyutlu Öklit uzayında verilen bir dğğümün herhangi bir Seifert yüzeyinin Arf değişmezini tanımlayacağız. Son olarak da bu değişmezin Seifert yüzeyinden bağımsız olduğunu ve dolayısıyla sadece dğğüm tarafından belirlendiğini göstereceğiz.

(a) $S = \Sigma_{g,1} \subset \mathbb{R}^3$ cinsi g ve bir sınır bileşeni olan yönlendirilebilir yüzey olsun. Örnek 5.2.11'den dolayı α_i ve β_i , $i = 1, \dots, g$, alt manifoldlarının Poincaré dualleri $a_i = D(\alpha_i)$, ve $b_i = D(\beta_i)$, olmak üzere birinci kohomoloji vektör uzayının

$$H_{DR}^1(S) = \langle a_i, b_i \mid i = 1, \dots, g \rangle$$

tabanı ile verildiğini biliyoruz. Bunun kanıtı sınırı olmayan yüzeyden bir disk çıkartılarak Mayer-Vietoris dizisi yardımıyla kolayca yapılabilir.



şekil 5.8: Üç boyutlu Öklit uzayı içinde dış normal vektör ile yönlendirilmiş cinsi g olan bir sınır bileşenli yüzey. $\text{Int}(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, g$.

Düzlemdeki S^1 birim çemberini saat yönünün tersi ile yönlendirelim ve $\mathcal{L}$ ile bu çemberden S yüzeyine giden tüm gömme fonksiyonlarının kümesini gösterelim:

$$\mathcal{L} = \{f : S^1 \rightarrow S \mid f \text{ bir gömme fonksiyonudur.}\}.$$

Ayrıca $\mathcal{H}$ ile tabanı $\mathcal{L}$ olan serbest değişmeli grubunu gösterelim:

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1, \dots, k} n_i f_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, f_i \in \mathcal{L}, i = 1, \dots, k, 1 \leq k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\mathcal{H}$ grubu üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı şu şekilde tanımlansın:

$$\sum_{i=1, \dots, k} n_i f_i \sim \sum_{j=1, \dots, l} m_j g_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1,\dots,k} n_i \int_{S^1} f_i^*(\omega) = \sum_{j=1,\dots,l} m_j \int_{S^1} g_j^*(\omega), \quad \forall \omega \in H_{DR}^1(S).$$

Şimdi kesişim sayıları $n_i = \text{Int}(f, \alpha_i)$ ve $m_i = \text{Int}(g, \beta_i)$ olan herhangi bir $f \in \mathcal{L}$ gömme fonksiyonunun

$$\sum_{i=1,\dots,g} m_i \alpha_i - n_i \beta_i$$

elemanına denk olduğunu gösteriniz. Bu sonucu kullanarak $\mathcal{H}/\sim$ bölüm grubunun tabanı $\{\alpha_i, \beta_i \mid i = 1, \dots, g\}$ olan serbest değişmeli grup olduğunu gösteriniz ($\mathcal{H}$ grubunun elemanları ile bu elemanların denklik sınıfları için aynı gösterimi kullanıyoruz). Rankı $2g$ olan $\mathcal{H}/\sim$ bölüm grubuna yüzeyin tam sayı katsayılı birinci tekil homoloji grubu denir ve $H_1(S, \mathbb{Z})$ ile gösterilir. Ayrıca, yüzeyin $\mathbb{Z}_2$ katsayılı birinci tekil homoloji grubu da

$$H_1(S, \mathbb{Z}_2) \doteq \frac{H_1(S, \mathbb{Z})}{2H_1(S, \mathbb{Z})}$$

ile tanımlanan $2g$ boyutlu $\mathbb{Z}_2$ vektör uzayıdır.

$H_1(S, \mathbb{Z}_2)$ vektör uzayının her elemanını temsil eden bir $f \in \mathcal{L}$ gömme fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

- (b) Yukarıda tanımladığımız her iki homoloji grubu üzerinde kesişim formu tanımlayabiliriz. Kesişim formu taban elemanları için

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 = (\beta_i, \beta_j) \text{ ve } (\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}, \text{ her } 1 \leq i, j \leq g, \text{ için,}$$

şeklinde ve diğer elemanlar için de doğrusallık kullanılarak tanımlanır.

Şimdi herhangi iki $f, g \in \mathcal{L}$ gömmesi alalım. Eğer bu elemanların homoloji sınıfları sırasıyla h_f ve h_g ise

$$\text{Int}(f, g) = (h_f, h_g)$$

olduğunu gösteriniz. Dolayısıyla, f gömme fonksiyonunun homoloji sınıfını da f ile göstermek herhangi bir karışıklığa yol açmayacaktır.

- (c) Yüzey üzerinde bir $f \in \mathcal{L}$, $f : S^1 \rightarrow S$, gömme fonksiyonu alalım. Fonksiyonu yüzeyin yönlendirmesini veren N vektör alanı boyunca iterek bir $\tilde{f} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gömme fonksiyonu elde ederiz. İtme miktarını sıfırdan büyük ama yeterince küçük seçerek $\tilde{f}(S^1) \cap S = \emptyset$ olmasını sağlayabiliriz. Bu fonksiyonun $\tilde{f}(S^1)$ görüntüsünün geçişme formunu $\omega_{\tilde{f}}$ ile gösterelim.

şimdi $g \in \mathcal{L}$ bir başka gömme fonksiyonu ise bu $\tilde{f}$ ile g 'nin

$$l(\tilde{f}, g) = \int_g \omega_{\tilde{f}} = \int_{S^1} g^*(\omega_{\tilde{f}})$$

geçişme sayısının bir tam sayı olduğunu biliyoruz. Bu sayının (mod 2) değerini yine $l(\tilde{f}, g)$ ile gösterelim. Bu sayının fonksiyonların homotopileri altında değişmediğini gösteriniz. Dolayısıyla, f ve g fonksiyonlarının çapraz keşiştiğini kabul edebiliriz. Bu durumda

$$l(\tilde{f}, g) = l(\tilde{g}, f) + Int(f, g) \pmod{2},$$

olduğunu gösteriniz.

şimdi aynı (mod 2) homoloji sınıfını temsil eden iki $f, g \in \mathcal{L}$ fonksiyonu için $l(f, f) = l(\tilde{g}, g)$ olduğunu gösteriniz. O halde, $Q : H_1(S, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $Q(x) = l(\tilde{x}, x)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Eğer x homoloji sınıfını temsil eden gömülmüş bir çemberi de x ile gösterirsek $Q(x)$ sayısı x eğrisi boyunca yüzeyin kendi etrafında kaç tur (mod 2) döndüğünü göstermektedir.

Bu fonksiyonun her $x, y \in H_1(S, \mathbb{Z}_2)$

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + Int(x, y)$$

eşişliğini sağladığını ve dolayısıyla bir kuadratik form olduğunu kanıtlayalım:

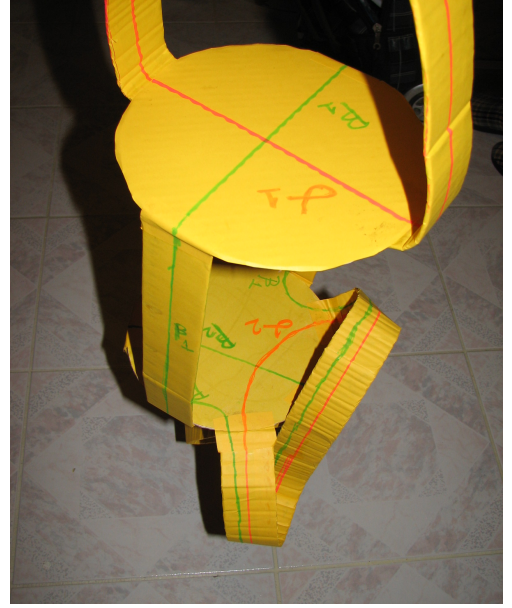
$$\begin{aligned} Q(x + y) &= \int_{x+y} \widetilde{\omega_{x+y}} \\ &= \int_x \widetilde{\omega_{x+y}} + \int_y \widetilde{\omega_{x+y}} \\ &= \int_{x+y} \omega_{\tilde{x}} + Int(x + y, x) + \int_{x+y} \omega_{\tilde{y}} + Int(x + y, y) \\ &= \int_{x+y} \omega_{\tilde{x}} + \int_{x+y} \omega_{\tilde{y}} + Int(x + y, x + y) \\ &= \int_{x+y} \omega_{\tilde{x}} + \int_{x+y} \omega_{\tilde{y}} + 0 \\ &= \int_x \omega_{\tilde{x}} + \int_y \omega_{\tilde{x}} + \int_x \omega_{\tilde{y}} + \int_y \omega_{\tilde{y}} \\ &= Q(x) + Q(y) + Int(x, y). \end{aligned}$$

O halde, $\mathbb{R}^3$ içinde verilen her tek sınır bileşenli yönlendirilmiş yüzeyin Arf değişmezini $Arf(Q)$ olarak tanımlayabiliriz.

Son olarak $Arf(Q)$ değişmezinin yüzeyin yönlendirmesinden bağımsız olduğunu gösteriniz (genelde $l(\tilde{f}, g)$ yönlendirmeden bağımsız değildir!).



(a) $\mathbb{R}^3$ içine gömülmüş tek sınır bileşenli yönlendirilebilir cinsi iki olan yüzey, Σ_2^1 .



(b) $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ eğrileri yüzeyin birinci homolojisinin simplektik bir tabanını verir.



(c) Yüzeyin sınırı olan K düğümünün Arf değişmezi $Arf(K) = Q(\alpha_1)Q(\beta_1) + Q(\alpha_2)Q(\beta_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ olur.

Şekil 5.9: Arf Değişmezi bir olan düğüm örneği

- (d) şimdi de $\mathbb{R}^3$ içinde verilen yönlendirilmiş bir K düğümünün Arf değişmezini tanımlayalım (bkz. şekil 5.9). Bunun için ilk önce bu düğümü sınırı olarak kabul eden yönlendirilmiş bir S yüzeyi alalım. Bu yüzeye düğümün bir Seifert yüzeyi denir. Seifert yüzeyinin varlığının kanıtını size bırakıyoruz (ayrıca bkz. [22], s.16). K düğümünün Arf değişmezi Seifert yüzeyin Arf değişmezi olarak tanımlanır:

$$Arf(K) \doteq Arf(Q).$$

Son olarak bu sayının düğümü sınırlayan Seifert yüzeyinin seçiminden bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Bunun için K düğümünü sınırlayan iki Seifert yüzeyi alalım: S_1 ve S_2 , $\partial S_1 = K = \partial S_2$. Bu yüzeylerin üzerindeki kuadratik formlarımız da sırasıyla Q_1 ve Q_2 olsun. O halde, $Arf(Q_1) = Arf(Q_2)$ olduğunu göstermeliyiz. İlk önce bu iki yüzeyin sadece K düğümü boyunca keşiştiğini kabul edelim. Dolayısıyla, $\Sigma_g = S_1 \cup -S_2$ sınırı olmayan yönlendirilebilir tıkız g cinsli bir yüzeydir. Bu alıştırmada tek sınır bileşenli yüzeyler için elde ettiğimiz tüm sonuçlar sınırı olmayan tıkız yüzeyler için de geçerlidir. Ayrıca Σ_g yüzeyinin üzerindeki keşişim formu ile kuadratik form bileşenlerinin formlarının toplamıdır: $Q = Q_1 \oplus Q_2$. O halde, $Arf(Q) = 0$ olduğunu görmeliyiz.

Bunu görmek için ilk önce yüzeyin $\mathbb{R}^3$ içinde üç boyutlu tıkız bir V manifoldunu sınırladığını gözlemleyiniz (bkz. Teorem 4.3.19): $\partial V = \Sigma_g$. Buradan $i : \Sigma_g \rightarrow V$ içerme fonksiyonu olmak üzere $i^* : H_{DR}^2(V) \rightarrow H_{DR}^2(\Sigma_g)$ homomorfizmasının sıfır olduğunu görürüz. Bunu kullanarak şu ifadeyi kanıtlayınız: Σ_g yüzeyinin keşişim formunun öyle bir

$$\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\} \subset H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2)$$

simplektik tabanı vardır ki, her $j = 1, \dots, g$ için,

$$\int_{\alpha_j} i^*(a) = 0, \text{ her } a \in H_{DR}^1(V) \text{ için,}$$

veya

$$\int_{\beta_j} i^*(a) = 0, \text{ her } a \in H_{DR}^1(V) \text{ için,}$$

nermesi doğrudur. Dolayısıyla, bu simplektik taban

$$Q(\alpha_j)Q(\beta_j) = 0, \text{ her } j = 1, \dots, g, \text{ için,}$$

koşulunu sağlar. Başka bir deyişle, Σ_g yüzeyinin $Arf(Q)$ değişmezi sıfırdır.

Bunu kanıtlamak için yüzeyi $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ olarak ele alalım ve $S^3 - \Sigma_g = U_1 \cup U_2$, $\partial \bar{U}_i = \Sigma_g$ olarak yazalım. Mayer-Vietoris dizisinden

$$0 \rightarrow H_{DR}^1(U_1) \oplus H_{DR}^1(U_2) \rightarrow H_{DR}^1(\Sigma_g) \rightarrow 0$$

izomorfizmasını elde ederiz. Ayrıca, $\partial \bar{U}_i = \Sigma_g$ koşulundan dolayı $j_i : \Sigma_g \rightarrow \bar{U}_i$ içermeye fonksiyonu olmak üzere her $a, b \in H_{DR}^1(\bar{U}_i)$ için $j_i^*(a)j_i^*(b) = 0 \in H_{DR}^2(\Sigma_g)$ ve dolayısıyla $\dim(H_{DR}^1(U_i)) = g$ elde ederiz. Yüzeyler için yaptığımız homoloji tanımı U_i için de geçerlidir ve $j_i : \Sigma_g \rightarrow \bar{U}_i$ içermeye fonksiyonu bize homoloji grupları arasında homomorfizma verir. Sonuç olarak

$$j_{i*} : \mathbb{Z}_2^{2g} \simeq H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(U_i, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^g$$

örten homomorfizmalarını elde ederiz, öyle ki $\ker(j_{1*}) \cap \ker(j_{2*}) = 0$ dolayısıyla

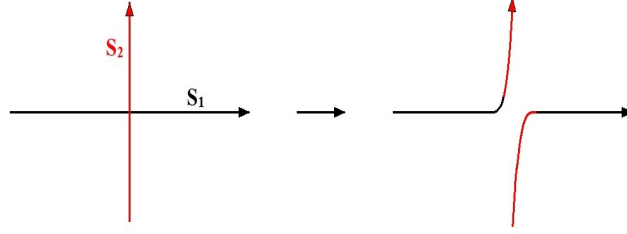
$$H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2) \simeq H_1(U_1, \mathbb{Z}_2) \oplus H_1(U_2, \mathbb{Z}_2)$$

olur. Bu ise aynı zamanda

$$H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2) = \ker(j_{1*}) \oplus \ker(j_{2*})$$

anlamına gelir. Eğer $\alpha, \beta \in \ker(j_{1*}) \subset H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}_2)$ ve $\text{Int}(\alpha, \beta) = 1$ ise $\partial F_1 = \alpha$ ve $\partial F_2 = \beta$, $F_1, F_2 \subset \bar{U}_1$ olacak şekilde iki yüzey seçelim! Bu iki yüzey dik şekilde sonlu tane ayrık eğri boyunca kesişecektir. Eğrilerin uç noktalarının sayısı çift sayı olacaktır. Fakat bu sayı (mod 2)'de $\text{Int}(\alpha, \beta) = 1$ sayısına denk olacağı için bir çelişki elde ederiz. Son olarak, $\ker(j_{1*})$ ve $\ker(j_{2*})$ vektör uzaylarının birer $\{e_1, \dots, e_g\}$ ve $\{f_1, \dots, f_g\}$ tabanını alalım. Dolayısıyla, her $i, j = 1 \dots, g$ için $\text{Int}(e_i, e_j) = 0 = \text{Int}(f_i, f_j)$ olacaktır. Şimdi kesişim formunun yozlaşmamış olduğunu kullanarak Alıştırma 18'de yaptığımıza benzer şekilde ve sadece $\{f_1, \dots, f_g\}$ tabanının elemanlarını doğrusal toplamaları ile değiştirerek öyle bir $\{f_1, \dots, f_g\}$ tabanı buluruz ki, her $i, j = 1 \dots, g$ için $\text{Int}(e_i, e_j) = 0 = \text{Int}(f_i, f_j)$ ve $\text{Int}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ olur. Bu Σ_g yüzeyinin $\text{Arf}(Q)$ değişmezinin sıfır olduğunu kanıtlar.

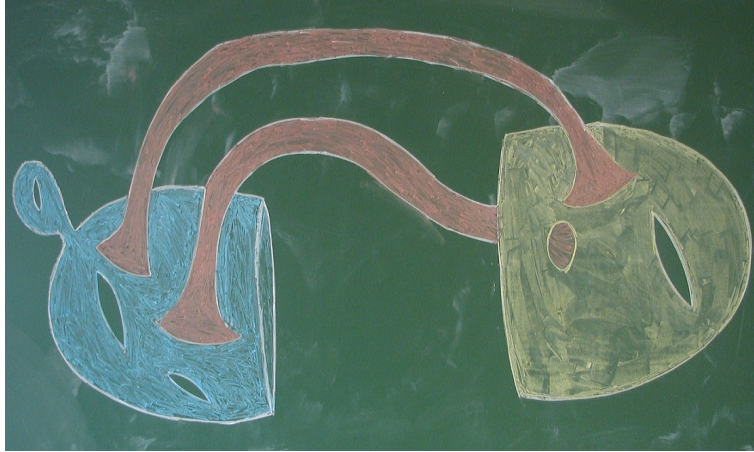
Şimdi de S_1 ve S_2 yüzeylerinin K düğümünün dışındaki noktalarda da kesiştiği durumu ele alalım. İlk önce S_2 yüzeyinin yönünü ters çevirelim. Kesişimin çapraz olduğunu kabul ederek kesişimin K dışında sonlu tane çemberden oluştuğunu görürüz. Çünkü bir boyutlu tıknaz tek manifold çemberdir. K dışındaki tüm çemberleri her iki yüzeyden de çıkartalım ve kalan yüzey parçalarını birbiri ile kesişmeyen kapalı yüzeyler oluşturacak şekilde tekrar yapıştıralım, öyle ki yüzey parçalarının kesme işleminden önceki yönlendirmeleri



Şekil 5.10: Yüzeylerin kesiştikleri çemberler boyunca kesilip farklı şekilde yapıştırılması ile ayırık kapalı yüzeylerin oluşturulmasının bir düşük boyutlu temsili resmi.

ile yapıştırdıktan sonraki yönlendirmeleri aynı olsun. (Dolayısıyla, her kesişim çemberi boyunca yüzeyleri tekrar yapıştırmanın tek bir yolu vardır!)

Elimizde sonlu sayıda tıkız ve sınırı olmayan ayırık yüzey olacaktır. Bu yüzeyler $\mathbb{R}^3$ içinde oturdukları için yönlendirilebilir yüzeylerdir (bkz. Aġştırma 16). Başka bir deyişle, S_1 yüzeyinin çemberler çıkartıldıktan sonraki her parçası S_2 yüzeyini hep aynı taraftan kesmektedir; ya hep içinden ya da hep dışından.



Şekil 5.11: Cinsi 3 olan mavi yüzeyin kırmızı kolları, cinsi bir olan sarı yüzeyi hem içinden hem de dışından kesmektedir. Yukarıdaki paragrafta bahsettiğimiz yüzeyler bu şekilde kesişmezler.

Kesme ve yapıştırma işlemleri sonucunda oluşan yönlendirilebilir yüzeylerden (sadece) bir tanesi, diyelim ki $F_1 \cup F_2$, $F_i \subset S_i$, $i = 1, 2$, K düğümünü içerecektir. $\partial F_1 = K \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ olsun. $C_1 \cup \dots \cup C_n$ birleşimi S_2 yüzeyini F_2 ve $F_3 = S_2 - F_2$ olmak üzere iki parçaya böler. F_1 yüzeyini S_1 yüzeyinin normal vektörü boyunca yüzeyin

dışına, F_3 yüzeyini de, F_1 yüzeyinin S_2 yüzeyini $C_1 \cup \dots \cup C_n$ birleşimi boyunca içinden mi yoksa dışından mı kestiğine göre, S_2 yüzeyinin normal vektörü boyunca yüzeyin içine ya da dışına doğru hafifçe itelim ve elde ettiğimiz yüzeyleri sınırları boyunca yapıştıralım. Bu işlem sonucunda elde edilen yüzey, diyelim ki S_3 olsun, K düğümünün bir başka (yönlendirilebilir) Seifert yüzeyi olacaktır. Ayrıca kuruluşu gereği S_3 Seifert yüzeyi S_1 ve S_2 Seifert yüzeylerini sadece K düğümü boyunca keser. Dolayısıyla,

$$Arf(Q_1) = Arf(Q_3) = Arf(Q_2)$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır.

“Yanlış bir nota çalmak önemsizdir, tutkusuz
çalmak ise affedilemez.”

-Ludwig van Beethoven

6

Karakteristik Sınıflar

Bu ünite de ilk önce Euler sınıfının geometrik bir tanımını vereceğiz. Daha sonra Euler sınıfını kullanarak karmaşık vektör demetlerinin Chern sınıfları tanımlayıp temel bazı örnekleri inceleyeceğiz. Son olarak Chern sınıfları yardımıyla gerçel vektör demetlerinin Pontryagin sınıflarını tanımlayıp bu sınıfların topolojik özelliklerine dair örnekler ve Milnor’un 7-boyutlu egzotik küreleri ile üniteyi bitireceğiz.

6.1 Euler Karakteristik Sınıfı

Bir önceki ünite de Euler sınıfının yönlendirilebilir vektör demetlerinin bir değişmezi olduğunu görmüştük. Şimdi de vektör demetleri üzerine koyduğumuz bağlantı formlarının eğriliğini tanımlayacağız. Daha sonra eğrilik yardımıyla vektör demetlerinin karakteristik sınıflarını ele alacağız.

$E^r \rightarrow M$ bir vektör demeti ve $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M)$ bu demet üzerinde bir bağlantı olsun. Ayrıca X, Y manifold üzerinde vektör alanları ve s vektör demetinin bir kesiti olsun. Son olarak $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ manifold üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$R(X, Y)(fs) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})(fs)$$

ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y(fs) &= \nabla_X(f \nabla_Y s + Y(f)s) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y s + X(f) \nabla_Y s + X(Y(f))s + Y(f) \nabla_X s. \end{aligned}$$

Buradan da

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)(fs) &= f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)s + [X(Y(f)) - Y(X(f))]s \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)(s) + [X, Y](f) s \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$\nabla_{[X,Y]}(fs) = f\nabla_{[X,Y]}(s) + [X, Y](f) s$$

olduğundan

$$(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(fs) = f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(s)$$

buluruz ki, bu bize $R(X, Y) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ fonksiyonunun bir tensör olduğunu gösterir. Bu tensöre ∇ bağlantısının *eğrilik tensörü* denir. Şimdi de eğrilik tensörünün bileşenlerini eğriliğin Christoffel sembolleri cinsinden hesaplayalım: Vektör demetinin, manifoldun bir U açık kümesi üzerindeki $x_1, \dots, x_n$ koordinat sisteminde verilen bir $s_1, \dots, s_r$ çatısını alalım. Bu durumda $e_i(p) = \frac{d}{dx_i}$ vektör alanları ve bağlantının Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri için

$$\nabla_{e_i} s_k = \Gamma_{ik}^l s_l$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $R(e_i, e_j)(s_k) = \sum_{l=1}^r R_{kij}^l s_l$ eşitlikleri ile tanımlanan

$$R_{kij}^l : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına *eğrilik tensörünün bileşenleri* denir. Bu bileşenleri Christoffel sembolleri cinsinden hesaplamak için ilk önce

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j}) s_k &= \sum_m \nabla_{e_i} (\Gamma_{jk}^m s_m) \\ &= \sum_m (e_i(\Gamma_{jk}^m) s_m + \Gamma_{jk}^m \nabla_{e_i} s_m) \\ &= \sum_m \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x_i} s_m + \sum_{ml} \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l s_l \end{aligned}$$

türevini buluruz. Son olarak, $[e_i, e_j] = 0$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j) s_k &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x_j} \right) s_m + \sum_{ml} (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) s_l \\ &= \sum_l \left(\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right) + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \right) s_l, \end{aligned}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, eğriliğin bileşenleri

$$R_{kij}^l = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right) + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l)$$

ifadesiyle verilir. Eğrilik tensörü tanımı gereği ters simetriktir:

$$R_{kij}^l = -R_{kji}^l .$$

Dolayısıyla, eğrilik tensörünü kesitler uzayının endomorfizmalarında değer alan bir 2-form olarak görebiliriz:

$$R : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Omega^2(M) \otimes E), \quad s \mapsto \Omega \otimes s .$$

Bu durumda,

$$R(s_k) = \sum_l \Omega_k^l \otimes s_l$$

şeklinde yazarsak

$$\Omega_k^l = \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{kij}^l dx_i \wedge dx_j$$

elde ederiz.

Eğrilik tensörünün bu ifadesini Uyarı 3.3.8'in sonucu ile birleştirerek, ω bağlantı formu olmak üzere,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu görmek için ilk önce

$$\omega_k^l = \sum_i \Gamma_{ik}^l dx_i$$

bağlantı formunun dış türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} d\omega_k^l &= d\left(\sum_i \Gamma_{ik}^l dx_i\right) \\ &= \sum_i d(\Gamma_{ik}^l dx_i) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i\right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j . \end{aligned}$$

Diğer taraftan $\omega \wedge \omega$ terimi $\omega = [\omega_k^l]$ matris değerli 2-formun kendisi ile matris çarpımıdır. Matrislerin bileşenleri form dış çarpımı ile çarpılır:

$$\omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_1^l & \omega_2^l & \cdots & \omega_r^l \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \omega_k^1 & \cdots \\ \cdots & \omega_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \omega_k^r & \cdots \end{pmatrix}$$

matris çarpımının bileşenleri

$$\begin{aligned}
 (\omega \wedge \omega)_k^l &= \sum_m \omega_m^l \wedge \omega_k^m \\
 &= \sum_m \left(\left(\sum_i \Gamma_{im}^l dx_i \right) \wedge \left(\sum_j \Gamma_{jk}^m dx_j \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijm} (\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) dx_i \wedge dx_j
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Uyarı 6.1.1. 1) Bazı yazarlar ω 1-formlar matrisini bizim kullandığımız formun devriği olarak alır (bkz. Milnor-Stasheff [29], ve Madsen-Tornehave [24]). Bu durumda

$$(\omega \wedge \omega)_k^l = \sum_m \omega_k^m \wedge \omega_m^l$$

ve dolayısıyla

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

olur.

2) Tanımından dolayı eğrilik tensörü vektör alanları bileşenlerine göre ters simetriktir:

$$R(X, Y)s = -R(Y, X)s.$$

Dolayısıyla $R(X, X)s = 0$ olduğundan bir boyutlu manifoldlar üzerindeki vektör demetlerinin eğrilik tensörleri her zaman sıfırdır.

3) Yine aynı nedenden dolayı iki boyutlu bir manifold için eğrilik tensörü, tensörün R_{k12}^l terimleri ile tamamen belirlenir.

Örnek 6.1.2. Karmaşık projektif doğru üzerindeki

$$\mathcal{O}(k) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \dot{\cup} \mathbb{C} \times \mathbb{C} / (z, v) \sim (1/z, v/z^k),$$

$(z, v) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C}$ karmaşık doğru demetini yönlendirilmiş düzlem demeti olarak görelim ve bu demet üzerine koyacağımız bir metriğin eğriliğini hesaplayalım. Yukarıdaki her iki yerel çarpım üzerine de

$$g(z)(u, v) = \frac{\operatorname{Re}(u^*v)}{(1 + z^*z)^k}$$

metriğini koyalım (Hermityan metriğin gerçel kısmını Riemann metrik olarak alıyoruz). Bu metrik

$$g(z)(u, v) = g\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{u}{z^k}, \frac{v}{z^k}\right)$$

koşulunu sağladığından vektör demeti üzerinde bir iç çarpım verir. Metriğin bileşenleri

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^k} \quad \text{ve} \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

olduğundan metriktен elde edilen bağlantı formunun katsayıları da aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g_{11}^1}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{g_{22}^2}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{g_{11}^2}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22}^1}{2g_{11}}$$

ve

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{g_{11}^2}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{g_{22}^1}{2g_{22}}$$

olur. Doğrudan hesap yaparak bağlantı matrisinin elemanlarını aşağıdaki gibi

hesaplarız: $A = \frac{-kx}{1+x^2+y^2}$, $B = \frac{-ky}{1+x^2+y^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} w_1^1 &= \Gamma_{11}^1 dx + \Gamma_{21}^1 dy = A dx + B dy \\ w_1^2 &= \Gamma_{11}^2 dx + \Gamma_{21}^2 dy = -B dx + A dy \\ w_2^1 &= \Gamma_{12}^1 dx + \Gamma_{22}^1 dy = B dx - A dy \\ w_2^2 &= \Gamma_{12}^2 dx + \Gamma_{22}^2 dy = A dx + B dy \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O halde, eğrilik formu

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} \Omega_1^1 & \Omega_2^1 \\ \Omega_1^2 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} = dw + w \wedge w \\ &= \begin{pmatrix} (B_x - A_y) dx \wedge dy & -(A_x + B_y) dx \wedge dy \\ (A_x + B_y) dx \wedge dy & (B_x - A_y) dx \wedge dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2k}{(1+x^2+y^2)^2} dx \wedge dy \\ \frac{-2k}{(1+x^2+y^2)^2} dx \wedge dy & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Eğer

$$F = -(A_x + B_y) dx \wedge dy = \frac{2k}{(1+x^2+y^2)^2} dx \wedge dy$$

ise

$$\frac{F}{2\pi} = \frac{ik}{2\pi} \frac{(dz \wedge d\bar{z})}{(1+z^*z)^2} \in \Omega^2(\mathbb{CP}^1)$$

kapalı formunun $\mathbb{CP}^1$ üzerindeki integrali k tam sayısına eşittir (bkz. s. 118). O halde, Örnek 5.3.2.2'den dolayı bu form $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ yönlendirilmiş iki boyutlu vektör demetinin Euler sınıfını temsil eder.

Yönlendirilmiş bir vektör demetinin Euler sınıfının, vektör demeti üzerindeki bir bağlantı formunun eğrilik tensörü ile temsil edilmesi karakteristik sınıflar

teorisinin temel öğelerinden birisidir. Yukarıdaki örnekte bulduğumuz Ω formu boyut koşullarından dolayı kapalıdır. Sonraki kısımlarda vektör demetleri için oluşturacağımız benzeri formların kapalı olduğunu ve bu formların temsil ettiği kohomoloji sınıfının da vektör demeti üzerinde seçilen bağlantı formundan bağımsız olduğunu göstereceğiz.

Bağlantı formunun, demetin çatısı $s_j = g s'_j$ ile değiştiği zaman

$$\omega' = g^{-1}\omega g + g^{-1} dg$$

bağıntısı ile değiştiğini biliyoruz. Aşağıdaki önerme bağlantı eğriliğinin nasıl değiştiğini göstermektedir.

Önerme 6.1.3. *Bir bağlantının eğrilik formunun yerel gösterimi çatının değişimi altında aşağıdaki gibi davranır:*

$$\Omega' = g^{-1} \Omega g .$$

Kanıt : $g^{-1}g = Id = gg^{-1}$ eşitliklerinin türevlerini alarak

$$dg^{-1}g + g^{-1} dg = 0 = dg g^{-1} + g dg^{-1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Diğer taraftan, $\omega' = g^{-1}\omega g + g^{-1} dg$ olduğundan

$$\begin{aligned} \omega' \wedge \omega' &= g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g \\ &\quad + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \\ &= g^{-1}\omega gg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1}\omega \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g \\ &\quad - dg^{-1} g \wedge g^{-1}dg \\ &= g^{-1}\omega \wedge \omega g + g^{-1}\omega \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g - dg^{-1} \wedge dg \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$d\omega' = dg^{-1}\omega g + g^{-1}d\omega g - g^{-1}\omega \wedge dg + dg^{-1} \wedge dg$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \Omega' &= \omega' \wedge \omega' + d\omega' \\ &= g^{-1} (\omega \wedge \omega) g + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g + dg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1} d\omega g \\ &= g^{-1} (\omega \wedge \omega) g + (g^{-1}dg g^{-1}) \wedge \omega g + dg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1} d\omega g \\ &= g^{-1} (\omega \wedge \omega) g - dg^{-1} \wedge \omega g + dg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1} d\omega g \\ &= g^{-1} (\omega \wedge \omega + d\omega) g \\ &= g^{-1}\Omega g \end{aligned}$$

bulunur. $\square$

Önerme 6.1.4. Yukarıdaki vektör demetinin ortonormal yerel bir çatısı $\{s_\alpha\}$ ise bu çatıya karşılık gelen Christoffel sembolleri, bağlantı ve eğrilik formu için

$$\Gamma_{i\alpha}^\beta = -\Gamma_{i\beta}^\alpha, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha, \quad \Omega_\alpha^\beta = -\Omega_\beta^\alpha$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt : Çatı ortonormal olduğundan $(s_\alpha, s_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{e_i} (s_\alpha, s_\beta) \\ &= (\nabla_{e_i} s_\alpha, s_\beta) + (s_\alpha, \nabla_{e_i} s_\beta) \\ &= \sum_{\gamma} \Gamma_{i\alpha}^\gamma (s_\gamma, s_\beta) + \Gamma_{i\beta}^\gamma (s_\alpha, s_\gamma) \\ &= \Gamma_{i\alpha}^\beta + \Gamma_{i\beta}^\alpha \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $\Gamma_{i\alpha}^\beta = -\Gamma_{i\beta}^\alpha$ elde ederiz. Kanıtın geri kalanı eğriliğin ifadesinden kolayca görülür. $\square$

Bu önermenin sonucu olarak eğrilik formunun ortonormal bir çatıda manifold üzerindeki 2-formların ters simetrik matrisi olduğunu görürüz. Derecesi çift sayı olan formlar değişmeli bir halka oluşturduğundan bu matrisin determinantı iyi tanımlıdır. İki ortonormal çatı arasındaki g taban değiştirme matrisi ortogonaldır. Ayrıca çatılar, yönlendirilmiş bir demetin yönlendirilmiş çatıları ise her $x \in M$ için, $g(x) \in SO(r)$ olacaktır.

Ters Simetrik Matrislerin Pfaffianı: Örnek 6.1.2'deki F 2-formu Ω eğrilik tensörünün yukarıdaki yerel çatı seçiminden bağımsız olan bir değişmezidir. Aslında F, Ω eğrilik formunun Pfaffian'ı olarak bilinen bir değişmezidir. Şimdi bunu biraz daha detaylı olarak görelim: $\Omega = [\omega_{ij}]$ ters simetrik bir matris ise $Pfaff(\Omega)$ ters simetrik matrisin bileşenlerinin bir polinomudur. Kabaca $\det(\Omega)$ 'nin kareköküdür: $(Pfaff(\Omega))^2 = \det(\Omega)$. Tek boyutlu ters simetrik bir matrisin determinantı sıfır olduğundan Pfaffian'ı da sıfır olarak tanımlanır (A $(2r-1) \times (2r-1)$ -boyutlu ters simetrik bir matris olmak üzere $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2r-1} \det(A) = -\det(A)$ olduğundan $\det(A) = 0$ olur).

A $(2n \times 2n)$ -lik ters simetrik bir matris olsun. Bu matrisin bir λ karmaşık özdeğerini ve bu özdeğere ait bir v özvektörünü alalım: $Av = \lambda v$. Diğer taraftan, A gerçel katsayılı bir matris olduğundan $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ olur. Ayrıca A ters simetrik olduğundan her özdeğer tamamen sanal bir sayıdır:

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Av, v \rangle \\ &= \langle v, A^* v \rangle \\ &= \langle v, -Av \rangle \\ &= \langle v, -\lambda v \rangle \\ &= -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ elde ederiz. O halde, $\lambda \in \mathbb{R}i$ olmalıdır. Diğer taraftan, yine A ters simetrik olduğundan farklı özdeğerlere ait özvektörler birbirine dik olacaktır:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle A v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, A^* v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, -A v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, -\lambda_2 v_2 \rangle \\ &= -\bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ olmalıdır. Benzer bir şekilde, A matrisinin, $\mathbb{C}^n$ vektör uzayı içinde $\{v_1, v_2\}$ vektörlerinin gerdiği uzayın dik tümleyeni üzerinde bir operatör tanımladığını görürüz. Buradan tümevarım yöntemiyle A matrisini köşegen hale getirebiliriz. Herhangi bir v karmaşık özvektörünün gerçel ve sanal kısımları $v = \xi + i\eta$ ve $\lambda = ia$ ise $\lambda v = Av$ denkleminde

$$-a\eta + ia\xi = ia(\xi + i\eta) = A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta$$

elde ederiz. O halde, $A\xi = -a\eta$ ve $A\eta = a\xi$ olur. Son olarak, A matrisinin $\{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n\}$ gerçel tabanındaki gösterimi

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n & 0 \end{pmatrix}$$

ters simetrik matrisi olur. Bu durumda A matrisinin Pfaffian'ı $a_1 \cdots a_n$ gerçel sayısı olarak tanımlanır.

Uyarı 6.1.5. Örneğin, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ ters simetrik matrisinin Pfaffian'ı a 'dır ve bu $Pfaff(A) = a$ şeklinde yazılır. Genel olarak $A = [a_{ij}]_{2r \times 2r}$ ters simetrik bir matris ve $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ ($\{e_1, \dots, e_{2r}\}$ herhangi bir vektör uzayının bir tabanı olmak üzere) ise $Pfaff(A)$ aşağıdaki eşitlik yardımıyla da tanımlanır:

$$\frac{1}{r!} \omega^r = Pfaff(A) (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2r}).$$

Ters simetrik bir matrisin Pfaffian'ı, karesi determinant polinomu olan bir başka polinomdur. Bunu görmek için aynı satır ve sütun işlemlerini yaparak matrisin $a_{12} = -a_{21}$ bileşenleri hariç ilk iki satır ve sütunu tamamen sıfır yapalım. Elde edilen matris yine ters simetrik olacaktır. Şimdi tümevarım metodunu kullanarak kanıtı bitirebiliriz (bkz. Akıştırma 1).

$\Omega = [\Omega_k^l]$ ortonormal bir çatıda yazılan eğrilik formu olsun. Aynı tensörü bir başka ortogonal çatıda yazarsak elde edilen matris,

$$g : M \rightarrow SO(r)$$

türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Omega' = g^{-1}\Omega g$$

olacağından $Pfaff(\Omega') = Pfaff(\Omega)$ elde ederiz. Başka bir deyişle, $Pfaff(\Omega)$ yerel ortonormal çatının seçiminden bağımsızdır.

Örnek 6.1.6. $\mathcal{O}(k_i) \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $i = 1, \dots, n$ vektör demetlerini

$$P_i : M = \mathbb{C}P^1 \times \dots \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad (p_1, \dots, p_n) \mapsto p_i,$$

izdüşüm fonksiyonları ile geri çekelim: $L_i = P^*(\mathcal{O}(k_i))$. Karmaşık yapıları göz ardı edersek, $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n \rightarrow M$ rankı $2n$ olan yönlendirilmiş (karmaşık yönlendirme ile) bir gerçel vektör demeti olur. Her $i = 1, \dots, n$ için, $s_i : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathcal{O}(k_i)$ demetin sıfır kesiti ile çapraz kesişen bir kesiti ise $s = (s_1, \dots, s_n) : M \rightarrow E$ fonksiyonu da sıfır kesiti ile dik kesişen bir kesit verir ve dolayısıyla $E \rightarrow M$ demetinin Euler sayısı $k_1 \dots k_n$ çarpımıdır. Diğer taraftan, Örnek 6.1.2'de verilen metriğin uygun çarpımını E üzerine koyalım. Metrik çarpım şeklinde olduğundan bağlantı formu ve eğriliği de çarpım şeklinde olacaktır:

$$Pfaff(\Omega_E) = Pfaff(\Omega_{\mathcal{O}(k_1)}) \wedge \dots \wedge Pfaff(\Omega_{\mathcal{O}(k_n)}).$$

Yine Örnek 6.1.2'den dolayı

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_M Pfaff(\Omega_E) = k_1 \dots k_n$$

olacaktır.

Eğrilikle ilgili çalışmamızı biraz daha ilerletelim: $E \rightarrow M$ rankı iki olan yönlendirilmiş bir vektör demeti olsun. Demet üzerine bir iç çarpım ve bununla uyumlu bir bağlantı formu koyalım. Yerel bir koordinat sistemi üzerinde seçilen ortonormal bir çatıda bağlantı matrisi ve eğrilik matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1^1 & \Omega_2^1 \\ \Omega_1^2 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_2^1 \\ -d\omega_2^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla, $Pfaff(\Omega_E) = d\omega_2^1$ formu kapalı bir formdur. (Bu form, her kapalı form gibi, yerel olarak tamdır. Diğer taraftan, önceki örnekte bu formun tam olmayabileceğini gördük.)

Şimdi aşağıdaki teoremi kanıtlamak için son bir hazırlık yapacağız. Yukarıda elde ettiğimiz $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ eşitliğin dış türevini alalım

$$d\Omega = d^2\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega$$

ve burada $d\omega$ yerine

$$d\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$$

koyalım. Böylece aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk.

Teorem 6.1.7 (Bianchi Özdeşliği).

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

Şimdi bu bölümün, Genelleştirilmiş Gauss-Bonnet Teoremi ya da Chern-Gauss-Bonnet Teoremi olarak bilinen, ana sonucunu verebiliriz.

Teorem 6.1.8 (Genelleştirilmiş Gauss-Bonnet Teoremi). $E \rightarrow M$ türevlenebilir bir manifold üzerinde yönlendirilmiş r -boyutlu bir vektör demeti olsun. Ω vektör demeti üzerinde verilen herhangi bir metrik ile uyumlu bir bağlantı formunun ortonormal bir tabandaki eğrilik formu olmak üzere $Pfaff(\Omega)$ kapalı bir formdur ve vektör demetinin Euler sınıfı

$$e(E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r [Pfaff(\Omega)]$$

ile temsil edilir.

Kanıt : Kanıtı üç adımda yapacağız.

Adım 1) Önce Milnor-Stasheff'in sunumunu takip ederek $Pfaff(\Omega)$ formunun kapalı olduğunu göstereceğiz. Gösterimi basitleştirmek için, herhangi bir $A = [A_k^l] \in M(r, \Omega^2(M))$ matrisi için $Pfaff([A_k^l])$ ifadesini kısaca $P([A_k^l])$ olarak yazalım. Bu ifadenin kısmi türevlerinden oluşan matrisin devriğini şu şekilde gösterelim:

$$P'(A) \doteq \left[P_k^l = \frac{\partial P}{\partial A_k^l} \right]^T.$$

Doğrudan hesap yaparak

$$dP([A_k^l]) = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial P}{\partial A_k^l} \right) \wedge dA_k^l,$$

eşitliğini buluruz. Dolayısıyla, $dP(\Omega) = Tr(P'(\Omega) \wedge d\Omega)$ matris çarpımının izine eşittir (bkz. Alıştırma 2). Bu sonucu Bianchi Özdeşliği ile birleştirirsek

$$dP(\Omega) = Tr(P'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega - P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega), \quad (*)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi de $\Omega \wedge P'(\Omega) = P'(\Omega) \wedge \Omega$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için ilk önce, $F_k^l \doteq [E_i^j] = [\delta_{ik}\delta_{jl}]$ matrisini tanımlayalım (diğer bir deyişle, $[F_k^l]$ ile l 'inci satır ve k 'inci sütundaki elemanı bire eşit olan ve diğer tüm elemanları sıfır olan matrisi gösteriyoruz). $(I + tF_k^l)$ matrisinin yeterince küçük $t \in \mathbb{R}$ değerleri için tersi olduğundan

$$P((I + tF_k^l)\Omega) = P(\Omega(I + tF_k^l))$$

eşitliği sağlanır. O halde, bu eşitliğin t 'ye göre türevini alıp $t = 0$ değerini yerine koyarsak

$$Tr(P'(\Omega) \wedge F_k^l \Omega) = Tr(P'(\Omega) \wedge \Omega F_k^l)$$

elde ederiz. Açık bir şekilde yazmak gerekirse, izlerini aldığımız matrisler şu şekilde olacaktır: $P'(\Omega) \wedge F_k^l \Omega$ çarpımı

$$\begin{aligned} P'(\Omega) \wedge F_k^l \Omega &= \begin{pmatrix} P_1^{l1} & \cdots & P_1^{lr} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ P_r^{l1} & \cdots & P_r^{lr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^1 & \cdots & \Omega_r^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \Omega_1^r & \cdots & \Omega_r^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1^{ll} \Omega_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_r^{ll} \Omega_r^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$Tr(P'(\Omega) \wedge F_k^l \Omega) = \sum_i P_i^{ll} \Omega_i^k$$

elde ederiz. Benzer şekilde ikinci terimini de hesaplayarak

$$\sum_{i=1}^r P_i^{ll} \Omega_i^k = \sum_{i=1}^r P_k^{li} \Omega_l^i$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise tam olarak

$$\Omega \wedge P'(\Omega) = P'(\Omega) \wedge \Omega$$

özdeşliğine denktir. Son olarak eğer $X \doteq P'(\Omega) \wedge \omega$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki $(*)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} dP(\Omega) &= Tr(P'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega - P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega) \\ &= Tr(\Omega \wedge P'(\Omega) \wedge \omega - P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega) \\ &= Tr(\Omega \wedge X - X \wedge \Omega) \\ &= \sum_{k,l} \Omega_k^l \wedge X_l^k - X_l^k \wedge \Omega_k^l \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz (en son eşitlik Ω_k^l 'nin 2-form olmasından elde edilmiştir). Böylece bu adımın kanıtı tamamlanmış oldu.

Adım 2) $Pfaff(\Omega)$ kapalı formunun kohomoloji sınıfı vektör demeti üzerinde seçilen metrikten bağımsızdır: Bunu görmek için, $E \rightarrow M$ üzerinde g_i , $i = 0, 1$, gibi iki metrik ve bu metrikler ile uyumlu bağlantılar alalım (Sonuç 3.3.13). Bu bağlantıların eğrilik tensörleri de, sırasıyla, Ω_0 ve Ω_1 olsun. İlk önce

$$P : M \times (-1, 2) \rightarrow M, (p, t) \mapsto p ,$$

fonksiyonu yardımıyla vektör demetini geri çekelim:

$$F = P^*(E) \rightarrow M \times (-1, 2) .$$

$M \times (-1, 2)$ çarpım manifoldunun $U = M \times (-1, 3/4)$, $V = M \times (1/4, 2)$ açık örtüsü ile uyumlu bir ρ_U , ρ_V birimin ayrışımını alalım. Şimdi bunu kullanarak $F \rightarrow M \times (-1, 2)$ demeti üzerine aşağıdaki iç çarpımı koyalım:

$$g(p, t) = \rho_U(p, t) g_0(p) + \rho_V(p, t) g_1(p) .$$

Bu metrik $M \times (-1, 1/4)$ üzerinde g_0 ve $M \times (3/4, 2)$ üzerinde de g_1 ile verilecektir. $F \rightarrow M \times (-1, 2)$ demeti üzerindeki bu metriğin eğrilik formunu da Ω ile gösterelim. Son olarak $i_0 : M \rightarrow M \times (-1, 2)$, $p \mapsto (p, 0)$ ve $i_1 : M \rightarrow M \times (-1, 2)$, $p \mapsto (p, 1)$ fonksiyonları homotopik ve $Pfaff(\Omega)$ kapalı olduğundan

$$[Pfaff(\Omega_0)] = i_0^*([Pfaff(\Omega)]) = i_1^*([Pfaff(\Omega)]) = [Pfaff(\Omega_1)]$$

elde ederiz ve böylece bu adımın kanıtı tamamlanır.

Adım 3)

$$\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)$$

olsun. Demetin sıfır kesiti ile dik kesişen bir $s : M \rightarrow E$ kesitini alalım ve $N^{m-r} = s^{-1}(0) \subseteq M$ alt manifoldu olarak tanımlansın. O halde, teoremin kanıtını tamamlamak için, $[\nu]$ kohomoloji sınıfının N alt manifoldunun Poincaré duali olduğunu göstermeliyiz. Bunun için herhangi bir r -boyutlu yönlendirilmiş tıkHz K manifoldu ve N manifoldu ile çapraz kesişen bir $i : K \rightarrow M$ türevlenebilir fonksiyonu alalım. Bu durumda, Uyarı 5.2.7'den dolayı kanıtı tamamlamak için

$$Int(N, i(K)) = \int_K i^* \nu$$

olduğunu göstermeliyiz. $i : K \rightarrow M$ fonksiyonu ile vektör demetini ve üzerindeki yapıları geri çekelim. O halde, $i^*(E) \rightarrow K$ vektör demetinin eğrilik formu $i^*(\Omega)$, ve dolayısıyla da

$$i^*(\nu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(i^*(\Omega))$$

olmalıdır. Ayrıca, $E \rightarrow M$ demetini $i^*(E) \rightarrow K$ ile değiştirerek $m = r$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $N = s^{-1}(0) \subseteq M$ sonlu sayıda işaretli noktadan oluşacaktır. $m = r$ sayısının tek olması durumunda kanıtlamak istediğimiz eşitliğin her iki tarafı da sıfır olduğundan $m = r$ sayısının çift olduğunu kabul edeceğiz. Demetin Euler sayısı $e(E)$ olsun.

Şimdi bir $p \in D_1^m \subseteq M$ disk komşuluğu seçelim öyle ki, disk üzerinde kesitin sıfırı olmasın ve vektör demeti disk üzerinde çarpım şeklinde verilsin. Şimdi bu disk üzerinde bir homotopi kullanarak metriği standart metrik haline getirelim. Ayrıca yine metrikle uyumlu olacak şekilde bağlantı formunu bu disk üzerinde değiştirelim öyle ki, diskin sınırından merkeze olan uzaklığın yarısına gelene kadar bağlantı formu da türevlenebilir bir şekilde sıfıra dönüşsün (Sonuç 3.3.13'un sabit katsayılı metrik için vermiş olduğu bağlantı sıfır bağlantısıdır). Bağlantı formunun sıfır olduğu diskin üzerinde ν formu da sıfır olacaktır. Ayrıca bu disk üzerinde kesitin sıfırı olmadığından, diskin sınırına kısıtlandığında, kesiti homotopi ile sabit bir fonksiyona dönüştürebiliriz (Önerme 4.3.31).

Şimdi de Örnek 6.1.6'da oluşturduğumuz

$$E_0 \rightarrow S = (\mathbb{C}P^1)^{m/2}$$

vektör demetini ele alalım: $k_1 = e(E)$, $k_2 = \dots = k_{m/2} = 1$ olarak seçilsin. Bu manifold üzerinde de yukarıdaki paragraftaki gibi bir $q \in D_2^m \subseteq S$ diski alalım. Bu disk üzerinde bağlantı formunun sıfır olduğunu kabul edelim. Her iki vektör demeti de bu diskler üzerinde

$$D^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow D^m, (x, v) \mapsto x,$$

aşık çarpım şeklindedir. Bu iki diskin iç noktaları üzerindeki (merkez noktalarını atalım) lifleri aşağıdaki gibi birbirine yapıştıralım:

$$Int(D_1^m - \{p\}) \times \mathbb{R}^m \bigcup Int(D_2^m - \{q\}) \times \mathbb{R}^m / (x, v) \sim (\phi(x), v),$$

öyle ki, uygun öteleme fonksiyonları yardımıyla $p = q = 0$ olduğunu kabul ederek $\phi : Int(D_1^m - \{0\}) \rightarrow Int(D_2^m - \{0\})$ aşağıdaki bileşke fonksiyonu olarak tanımlansın,

$$Int(D_1^m - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow Int(D_2^m - \{0\}),$$

$$x \mapsto y = \frac{x}{1 - \|x\|} \mapsto z = \frac{y}{\|y\|^2} \mapsto w = \frac{z}{1 + \|z\|}.$$

O halde, $-S$ ile S manifoldunun ters yönlendirilmişini gösterirsek bu yapıştırma fonksiyonu bize $M^\sharp - S$ toplam manifoldu üzerinde bir $E_1 \rightarrow M^\sharp - S$ vektör demeti verecektir. Bu demetin $M - D_1$ üzerine kısıtlanması E ve $S - D_2$ üzerine kısıtlanması ise E_0 olacaktır. Ayrıca, her iki manifold üzerindeki kesitleri yapıştırarak elde edilen kesitin sıfırlarının cebirsel toplamı sıfır olacaktır, çünkü $x \mapsto \phi(x)$ yapıştırma fonksiyonu yönü ters çevirir. Şimdi sıfırları

ayrı ayrı içeren küçük diskler alalım ve daha sonra bu diskleri birbirine ince tüplerle bağlayarak yeni bir disk elde edelim. Diskin üzerinde vektör demetini bir çarpım şeklinde yazalım. Daha sonra disk her bir noktasındaki lifini diskin seçtiğimiz bir noktasındaki lifi ile eşleyelim. Disk kesitin tüm sıfırlarını içerdigi için, diskin sınırında kesiti küreden küreye derecesi sıfır olan bir fonksiyon olarak görebiliriz (Önerme 4.3.29). Bu fonksiyon bir sabite homotopik olduğundan vektör demetinin hiç sıfırı olmayan bir kesitini elde etmiş oluruz (Önerme 4.3.31). Bu kesit demetin biri aşikar doğru demeti olmak üzere iki vektör demetinin toplamı şeklinde yazılabilmesi anlamına gelir. Bunu görmek için vektör demeti üzerinde herhangi bir iç çarpım alalım ve demeti hiç sıfırı olmayan kesitin gerdiği doğru demeti ile bu kesite dik vektörlerden oluşan demetin direkt toplamı olarak yazalım. Bu toplam demetin üzerinde seçtiğimiz iç çarpıma karşılık gelen eğrilik her bir toplamın eğriliğini ifade eden matrislerin direkt toplamı olacaktır. Fakat (aşikar) bir doğru demetinin eğriliği her zaman sıfırdır. Bu durumda eğrilik matrisinin Pfaffian'ı da sıfır olacaktır. Dolayısıyla, toplam vektör demeti üzerinde birbirine yapıştırılarak elde edilen bağlantı formunun eğriliğinin verdiği m -formunun integrali sıfır olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M_{\sharp}-S} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_{M_{\sharp}-S} \\
&= \int_M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_M + \int_{-S} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_S \\
&= \int_M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_M - \int_S \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_S \\
&= \int_M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_M - e(E)
\end{aligned}$$

elde edilir ve kanıt tamamlanır. En son adımdaki

$$\int_S \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^r Pfaff(\Omega)_S = e(E)$$

eşitliği $E_0 \rightarrow S = (\mathbb{CP}^1)^{m/2}$ vektör demetinin seçiminin bir sonucudur. $\square$

Uyarı 6.1.9. *Euler sınıfının önceki bölümde verilen topolojik tanımından ya da yukarıdaki teoremin kanıtında kullanılan fikirlerden yararlanarak aşağıdaki sonuçları kolayca kanıtlayabiliriz.*

1) $E_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, yönlendirilmiş vektör demetleri ise

$$e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1) e(E_2)$$

olur.

2) $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $E \rightarrow N$ yönlendirilmiş bir vektör demeti ise $e(f^*(E)) = f^*(e(E))$ olur. Buradan, M $2n$ -boyutlu yönlendirilebilir tıkHz bir manifold olmak üzere, her k tam sayısı için, derecesi k olan türevlenebilir bir $f : M \rightarrow S^{2n}$ fonksiyonun bulunduğu gerçeğini kullanarak (Örnek 4.3.26.2) şu ilginç sonucu elde ederiz: $e(T_*S^{2n}) = 2$ olduğundan

$$f^*(T_*S^{2n}) \rightarrow M$$

vektör demetinin Euler sayısı $2k$ dır.

3) Herhangi bir yönlendirilmiş $E \rightarrow M$ vektör demetinin duali E^* ise

$$e(E^*) = (-1)^{\text{rank}(E)/2} e(E)$$

olur ($\text{rank}(E)$ 'nin tek sayı olması durumunda her iki Euler sayısı da sıfırdır).

4) Herhangi bir yönlendirilmiş $E \rightarrow M$ vektör demetinin ters yönlüsü $-E$ ise

$$e(-E) = -e(E)$$

olur. Yönlendirilebilir bir manifoldun Euler sınıfı manifoldun yönlendirmesine duyarlı olduğu halde Euler sayısı yönlendirmeden bağımsızdır:

$$\int_{-M} e(T_*(-M)) = \int_{-M} e(-T_*(M)) = \int_{-M} -e(T_*M) = \int_M e(T_*M) .$$

Ricci Eğriliği ve Sayısal Eğrilik: Riemann tensöründen başka tensörler elde edebiliriz. Bunlardan birincisi Ricci eğrilik tensörüdür ve şu şekilde tanımlanır:

$$\text{Ric} \doteq \sum_{ij} R_{ij} dx_i \otimes dx_j, \quad R_{ij} \doteq \sum_k R_{ikj}^k.$$

Bu tensör simetriktir. Bu tensörün metrik izi şu şekilde tanımlanır ve Riemann manifoldunun sayısal eğriliği adını alır:

$$\mathcal{S} = \text{Tr}_g \text{Ric} \doteq \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} .$$

Örnek 6.1.10. $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ yüzeyi yerel olarak türevlenebilir bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun grafiği olsun:

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} .$$

Bu durumda yüzeyin teğet demeti üzerinde $\mathbb{R}^3$ Öklit uzayından gelen metrik

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir. Doğrudan hesap yaparak Christoffel sembolleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{f_x f_{xx}}{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{f_y f_{xx}}{1 + f_x^2 + f_y^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{f_x f_{yy}}{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f_y f_{yy}}{1 + f_x^2 + f_y^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{f_x f_{xy}}{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f_y f_{xy}}{1 + f_x^2 + f_y^2} .\end{aligned}$$

Buradan Ricci eğrilik tensörünü hesaplayabiliriz:

$$\kappa = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = R_{121}^2 = \kappa(1 + f_x^2) \\ R_{12} &= R_{112}^1 + R_{122}^2 = R_{112}^1 = \kappa(f_x f_y) \\ R_{21} &= R_{211}^1 + R_{221}^2 = R_{221}^2 = \kappa(f_x f_y) \\ R_{22} &= R_{212}^1 + R_{222}^2 = R_{212}^1 = \kappa(1 + f_y^2) .\end{aligned}$$

Son olarak sayısal eğrilik

$$\mathcal{S} = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} = 2\kappa$$

olarak elde edilir. Aslında, κ yüzeyin Gauss eğriliğidir ve dolayısıyla yüzeyler için, sayısal eğrilik Gauss eğriliğinin tam olarak iki katıdır (bkz. Alıştırma 4). Eğer teğet demeti için $\{e_1 = (1, 0, f_x), e_2 = (0, 1, f_y)\}$ çatısını seçersek eğrilik tensörü aşağıdaki gibi olur:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1^1 & \Omega_2^1 \\ \Omega_1^2 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} = d\omega + \omega \wedge \omega = \kappa \begin{pmatrix} f_x f_y & 1 + f_y^2 \\ -(1 + f_x^2) & -f_x f_y \end{pmatrix} dx \wedge dy .$$

Bu çatıyı $a = 1 + f_x^2 + f_y^2$ olmak üzere

$$\left\{ \frac{f_y}{\sqrt{a-1}} e_1 - \frac{f_x}{\sqrt{a-1}} e_2, \frac{f_x}{\sqrt{a^2-a}} e_1 + \frac{f_y}{\sqrt{a^2-a}} e_2 \right\}$$

ortonormal çatısı ile değiştirirsek yeni eğrilik formu

$$g^{-1}\Omega g = \sqrt{a} \kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

ile verilir. Dolayısıyla, yüzeyin teğet demetinin Euler sınıfı

$$e(T_*\Sigma) = \frac{1}{2\pi} Pfaff(g^{-1}\Omega g) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{2\pi (1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} dx \wedge dy$$



(a) Yukarıdaki tek kulplu kürenin, diğer bir deyişle torusun yüzeyinin büyük bölümünde eğrilik pozitif olduğu halde, Gauss-Bonnet Teoremi'ne göre eğriliğin yüzey üzerindeki integrali sıfırdır.



(b) Düzlemin üzerindeki standart Riemann metriği ötelemeler altında korunduğu için $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ bölüm uzayı üzerinde, Gauss eğriliği her noktada sıfır olan bir Riemann metriği verir. Fakat bu metriği torusun üzerine yukarıdaki şekilde gösterilen yöntemle koyamayız! (Bkz. Alıştırma 7 ve Alıştırma 8)

Şekil 6.1

ile temsil edilir.

Bu yüzeyin Gauss eğriliğinin

$$\kappa = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

ile verildiğini söylemiştik. Aslında doğrudan hesap yaparak,

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} , \sigma(x,y) = (f_x, f_y, -1)$$

yüzeyin Gauss gönderimi ve $dS \doteq \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx \wedge dy$ yüzeyin üç boyutlu uzaydan aldığı alan formu (bkz. Örnek 3.2.16) olmak üzere

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})$$

kapalı 2-formu için

$$\sigma^*(\omega) = \kappa dS$$

elde edilir (bkz. Alıştırma 5). Diğer taraftan, eğer Σ , Euler sayısı $e(\Sigma) = 2-2g$ olan tıkız bir yüzey ise (bkz. Örnek 5.2.11) bir önceki örnek bize Gauss-Bonnet Teoremi olarak bilinen sonucu verir.

Sonuç 6.1.11 (Gauss-Bonnet Teoremi).

$$\int_{\Sigma} \kappa dS = 2\pi \chi(\Sigma) = 4\pi(1 - g) .$$

Şimdi yukarıda verdiğimiz sonucun değişik fikirler içeren bir başka kanıtını vereceğiz.

Kanıt : Kanıt dört adımdan oluşmaktadır.

Adım 1) Yukarıdaki gösterimi kullanarak devam edelim. Alıştırma 5'ten dolayı

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} , \quad \sigma(x, y) = (f_x, f_y, -1)$$

yüzeyin Gauss gönderimi, $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \wedge dy$ yüzeyin üç boyutlu uzaydan aldığı alan formu ve

$$\omega = \frac{x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\})$$

kapalı 2-formu olmak üzere yüzeyin Gauss eğriliği için

$$\sigma^*(\omega) = \kappa \, dS$$

olduğunu biliyoruz.

Adım 2) Uzaydaki $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ yüzeyinin $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ Gauss gönderimini yüzeyin her noktasına o noktadaki teğet uzayını karşılık getiren gönderim olarak görebiliriz. $\sigma(p)$ vektörünü boyuna bölersek Gauss gönderimi

$$\sigma : \Sigma \rightarrow S^2$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Aslında üç boyutlu uzaydaki yönlendirilmiş düzlemleri, yönlendirilmiş normal vektörleri ile eşleyerek, S^2 küresini üç boyutlu uzaydaki yönlendirilmiş düzlemlerin uzayı olarak görebiliriz. $Gr_{\mathbb{R}}(n, 2)$ ile $\mathbb{R}^n$ içindeki yönlendirilmiş düzlemlerin uzayını gösterelim (bkz. Sayfa 169). Bu durumda $Gr_{\mathbb{R}}(3, 2) = S^2 = \mathbb{C}P^1$ olur. Kolayca görüleceği üzere

$$Gr_{\mathbb{R}}(n, 2) = \{(u, v) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \mid u \perp v\} / \sim ,$$

bölüm kümesi olarak yazılabilir. Buradaki $\sim$ bağıntısı

$$(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \cos \theta \, u_1 - \sin \theta \, v_1 \\ v_2 = \sin \theta \, u_1 + \cos \theta \, v_1 \end{cases} , \theta \in \mathbb{R} ,$$

ile verilir. $Gr_{\mathbb{R}}(n, 2)$ boyutu $2(n-2)$ olan türevlenebilir bir manifolddur. Bu manifolddan $(n-1)$ -boyutlu karmaşık projektif uzaya doğal bir fonksiyon vardır:

$$\Phi : Gr_{\mathbb{R}}(n, 2) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\} / \sim = \mathbb{C}P^{n-1} , \quad [(u, v)] \mapsto [u + iv] .$$

Bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğu kolayca görülür. Görüntüsü $\mathbb{C}P^{n-1}$ içinde $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ denklemiyle verilen kuadratik hiperyüzeydir. Ayrıca Φ

fonksiyonu görüntüsüne bir difeomorfizmadır. Dolayısıyla, $n = 3$ olduğunda $\mathbb{CP}^2$ içindeki bu kuadratik eğri S^2 küresidir.

Şimdi, $F : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun, öyle ki, her $t \in [0, 1]$ için

$$f_t = F(-, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto F(p, t),$$

bir daldırma fonksiyonu olsun. Dolayısıyla, bu fonksiyon Σ yüzeyinin $\mathbb{R}^n$ içine daldırmalarının türevlenebilir bir ailesidir. f_t daldırmasının Gauss gönderimini σ_t ile gösterirsek

$$\sigma_t : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow Gr_{\mathbb{R}}(n, 2)$$

türevlenebilir homotopisini elde ederiz. Bu fonksiyonun Φ ile bileşkesinden

$$\Phi \circ \sigma_t : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$$

homotopisini elde ederiz. $a \in H_{DR}^2(\mathbb{CP}^{n-1})$ karmaşık doğru üzerindeki integrali $1/2$ ($\mathbb{CP}^2$ içindeki kuadratik eğri bir doğru ile iki noktada kesişir ve bu yüzden doğru üzerindeki integrali $1/2$ olan formun kuadratik eğri üzerindeki integrali birdir) olan 2-form ve $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ birinci adımdaki yüzey ise

$$\kappa \, dS = \sigma^*(\omega) = 4\pi(\Phi \circ \sigma_0)^*(a)$$

($f_0 = id$ olduğunu kabul ediyoruz) olur. Dolayısıyla, her $t \in [0, 1]$ için

$$\int_{\Sigma} \kappa \, dS = \int_{\Sigma} \sigma^*(\omega) = \int_{\Sigma} 4\pi(\Phi \circ \sigma_t)^*(a)$$

olur.

Sonuç olarak, Σ yüzeyinin $\mathbb{R}^n$ içine iki farklı batırılması homotopik ise bu farklı daldırmalara karşılık gelecek olan

$$\int_{\Sigma} \kappa \, dS$$

integrali değişmeyecektir. Bir sonraki adımda herhangi iki daldırmanın her zaman homotopik olduğunu göreceğiz (içine batırılan uzayın boyutunun artırılmasına izin verilmesi kaydıyla).

Bu adımda ele aldığımız iki ayrı Gauss gönderiminin $n = 3$ durumunda aynı olduğunun ve Φ fonksiyonun bahsi geçen özelliklerinin kanıtlanmasını okuyucuya bırakıyoruz. Ayrıca bkz. [7] s. 25.

Adım 3) Bu adımda üç boyutlu uzaydan yedi veya daha büyük boyutlu Öklit uzayına derecesi en fazla $d \geq 1$ olan polinom daldırmaların oluşturduğu uzayın (yol) bağlantılı olduğunu göstereceğiz. Derecesi en fazla $d \geq 1$ olan üç değişkenli polinomların oluşturduğu vektör uzayının boyutu

$$s = \binom{3+d}{d}$$

sayısıdır. Aslında bu sayı derecesi d olan dört değişkenli monomiyallerin sayısıdır. Dolayısıyla, derecesi en fazla d olan üç değişkenli bir polinomu $\mathbb{R}^s$ içinde bir nokta olarak görebiliriz. Şimdi bir $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ noktası alalım. (x, y, z) koordinat sistemini $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ile değiştirerek $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ olduğunu kabul edebiliriz. $f_1, \dots, f_{k+3} \in \mathbb{R}^s$ $(k+3)$ -tane polinom olsun. Bu durumda, $P = (0, 0, 0)$ noktasının

$$\phi : (f_1, \dots, f_{k+3}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{k+3}$$

fonksiyonu için bir kritik nokta olup olmaması bu polinomların sadece doğrusal terimleri ile belirlenir. Kritik nokta olma koşulu polinomların katsayıları üzerine $(k+1)$ -tane doğrusal bağımsız koşul koyar. Dolayısıyla, bu noktayı kritik nokta kabul eden $(f_1, \dots, f_{k+3})$ fonksiyonların oluşturduğu alt uzayın $\mathbb{R}^{s(k+3)}$ içindeki ters boyutu $k+1$ olur. Eğer,

$$E = \{((x, y, z), f_1, \dots, f_{k+3}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{s(k+3)} \mid rk(D(f_1, \dots, f_{k+3})_{(x,y,z)}) \leq 2\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^3, ((x, y, z), f_1, \dots, f_{k+3}) \mapsto (x, y, z)$$

izdüşüm fonksiyonu örtendir. Bütün lifler eşyapılıdır ve ters boyutları $k+1$ olan $\binom{k+3}{2}$ -tane doğrusal alt uzayın birleşimidir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^3$ 'ün herhangi bir noktasını kritik nokta olarak kabul eden tüm

$$\phi : (f_1, \dots, f_{k+3}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{k+3}$$

fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin $\mathbb{R}^{s(k+3)}$ içindeki ters boyutu $(k+1) - 3 = k - 2$ olur. O halde, eğer $k \geq 4$ ise $\mathbb{R}^3$ uzayının $\mathbb{R}^{k+3}$ içine polinom daldırmalarının oluşturduğu açık küme yol bağlantılıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayının $\mathbb{R}^7$ içine tüm polinom daldırmalarının oluşturduğu uzay yol bağlantılıdır.

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ aşağıdaki yüzey olsun. $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ lif demetini Σ yüzeyine kısıtlayarak

$$\pi| : \pi^{-1}(\Sigma) \rightarrow \Sigma, ((x, y, z), f_1, \dots, f_{k+3}) \mapsto (x, y, z)$$

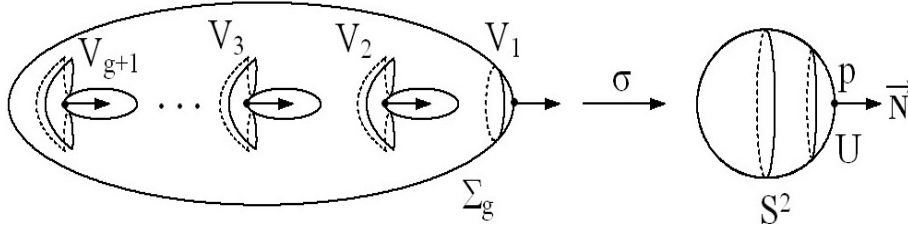
lif demetini elde ederiz. Bu durumda, yüzey iki boyutlu olduğu için yukarıda söylediklerimizden dolayı, bu yüzeyin $\mathbb{R}^6$ içine tüm polinom daldırmalarının oluşturduğu uzayın yol bağlantılı olduğunu söyleyebiliriz. Herhangi iki $f_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, daldırma fonksiyonu alalım. $n = \max\{6, m\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ bir alt uzay olarak düşünelim $((x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0))$ içermesiyle). Stone-Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nden bu iki daldırma fonksiyonuna istenildiği kadar (C^2) -yakın $g_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, polinom daldırmalar bulabiliriz, öyle ki, her $t \in [0, 1]$ için, $(1-t)f_i + tg_i$ fonksiyonu da

yüzeyin bir daldırması olur. Bu iki homotopi sayesinde f_i yerine g_i polinom daldırmalarıyla çalışabiliriz. Son olarak g_1 ve g_2 polinom daldırmaları da homotopiktir. Başka bir deyişle, bu adımı tamamlamış olduk.

Adım 4) Bu adımda ise Σ yüzeyinin üç boyutlu uzaya özel bir gömülmesi için

$$\int_{\Sigma} \kappa dS$$

integralini hesaplayacağız. Bu özel gömülmenin görüntüsünü Σ_g ile göstereyim.



Şekil 6.2: $\sigma^{-1}(p)$ ters görüntüsü $g + 1$ noktadan oluşmaktadır.

$H_{DR}^2(S^2) = \mathbb{R}$ olduğu için sadece $p = (0, 1, 0) \in S^2$ noktası etrafındaki küçük $p \in U \subset S^2$ komşuluğunda desteklenen ve $[\omega] = [\nu]$ koşulunu sağlayan bir $\nu \in \Omega^2(S^2)$ formu seçebiliriz. Bu durumda $\sigma^*(\nu)$ formu

$$V_1 \cup \dots \cup V_{g+1} \subseteq \Sigma_0$$

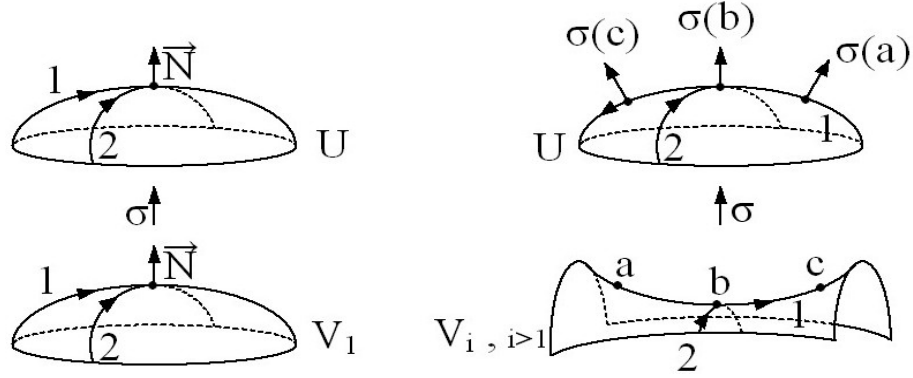
açık kümesinde desteklenen bir form olacaktır. Her bir $\sigma_i : V_i \rightarrow U$ kısıtlanışının bir difeomorfizma olduğu kolayca görülür. Ayrıca bu difeomorfizmalardan sadece birincisi yön koruyandır ve diğer g tanesi ise yönü ters çevirir (bkz. Alıştırma 6).

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \sigma^*(\omega) &= \int_{\Sigma_0} \sigma^*(\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{g+1} \int_{V_i} \sigma^*(\nu) \\ &= \int_U \nu - \sum_{i=1}^g \int_U \nu \\ &= 4\pi(1 - g) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Gauss-Bonnet Teoremi'nin farklı kanıtları için [10], [4] ve [24] numaralı referanslara da bakabilirsiniz. Özellikle ilk iki kaynak çok daha geometrik kanıtlar sunmaktadır.



Şekil 6.3: Şekildeki dört yüzey parçası da pozitif z -ekseni ile yönlendirilmiştir. $\sigma| : V_1 \rightarrow U$ 1 ve 2 numaralı eğrileri yine aynı yönlü 1 ve 2 numaralı eğrilere gönderdiği için yön koruyandır. Diğer taraftan, $i \geq 2$ için, $\sigma| : V_i \rightarrow U$ 2 numaralı eğrinin yönünü korurken 1 numaralı eğrinin yönünü ters çeviriyor. Dolayısıyla, $i \geq 2$ için, $\sigma| : V_i \rightarrow U$ yönü ters çevirir.

6.2 Chern Karakteristik Sınıfları

Chern sınıflarını tanımlamanın birden fazla yöntemi vardır. Biz Bott ve Tu'nun *Differential Forms in Algebraic Topology* adlı kitabındaki yaklaşımı kullanacağız ([5]). Kullanacağımız yöntem Leray-Hirsch Teoremi'nden yararlanmaktadır. $\pi : E \rightarrow M$ türevlenebilir bir M manifoldu üzerinde rankı r olan karmaşık bir vektör demeti olsun. Bu demetin Chern sınıflarını Euler sınıfı yardımıyla tanımlayacağız. Uyarı 3.3.2'de bir manifold üzerindeki karmaşık doğru demetleri ile yönlendirilmiş $\mathbb{R}^2$ demetleri arasında bire bir eşleme olduğunu görmüştük. Eğer $r = 1$ ise vektör demeti aslında bir $L \rightarrow M$ karmaşık doğru demetidir. Bu karmaşık doğru demetinin birinci Chern sınıfı bu yönlendirilmiş gerçel düzlem demetinin Euler sınıfı olarak tanımlanır ve

$$c_1(L) \doteq e(L_{\mathbb{R}})$$

ile gösterilir.

Verilen bir $\pi : L \rightarrow M^n$ karmaşık doğru demetinin, herhangi iki tanesi birbirini ile çapraz kesişen $s_0, \dots, s_k$ kesitlerini alalım. Dolayısıyla, eğer $2(k+1) > n$ ise bu kesitlerin ortak sıfırı yoktur. Başka bir deyişle,

$$f : M \rightarrow \mathbb{C}P^k, \quad p \mapsto f(p) \doteq [s_0(p) : \dots : s_k(p)],$$

iyi tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca, her $i = 0, \dots, k$ için

$$U_i = \{p \in M \mid s_i(p) \neq 0\}$$

açık kümeleri M manifoldunu örter. Bu kesitler $L|_{U_i} \rightarrow U_i$ kısıtlanışını $U_i \times \mathbb{C}$ çarpımı şeklinde yazabilmemize olanak verir. Kesitleri bu çarpım üzerinde de

yine $s_i : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ olarak ifade edelim. Demetin her bir U_i açık kümesine kısıtlanışı üzerinde

$$L|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} - \{0\},$$

$$(p, v) \mapsto \left(\frac{s_0(p)}{s_i(p)}, \dots, \frac{s_{i-1}(p)}{s_i(p)}, 1, \frac{s_{i+1}(p)}{s_i(p)}, \dots, \frac{s_k(p)}{s_i(p)} \right),$$

ile tanımlanan fonksiyonlar tüm demet üzerinde iyi tanımlı bir

$$\Phi : L \rightarrow f^*(\xi_k)$$

karmaşık doğru demeti izomorfizması verecektir. Burada $\xi_k \rightarrow \mathbb{C}P^k$ karmaşık projektif uzay üzerinde

$$\xi_k = \{([z_0 : \dots : z_k], (z_0, \dots, z_k)) \mid (z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} - (0, \dots, 0)\}$$

ile tanımlanan kanonik karmaşık doğru demetidir (demetin izdüşüm fonksiyonu $([z_0 : \dots : z_k], (z_0, \dots, z_k)) \mapsto [z_0 : \dots : z_k]$ ile verilmektedir). Dolayısıyla, M manifoldu üzerindeki her karmaşık doğru demeti, kesitleri yardımıyla tanımlanan $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^k$ fonksiyonu ile tamamen belirlenmektedir. Bu fonksiyona $\pi : L \rightarrow M^n$ demetinin bir *sınıflandırma fonksiyonu*, $\mathbb{C}P^k$ uzayına ise karmaşık doğru demetlerinin bir *sınıflandırma uzayı* denir.

Diğer taraftan, $[x_0 : \dots : x_k] \in \mathbb{C}P^k$, $[y_0 : \dots : y_l] \in \mathbb{C}P^l$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{k+l} z_i t^i = \left(\sum_{i=0}^k x_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^l y_i t^i \right)$$

polinom eşitliği yardımıyla tanımlanan

$$\phi : \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l \rightarrow \mathbb{C}P^{k+l},$$

$$([x_0 : \dots : x_k], [y_0 : \dots : y_l]) \mapsto [z_0 : \dots : z_{k+l}],$$

fonksiyonu ele alalım. Sıfırdan farklı iki polinomun çarpımı da sıfırdan farklı olacağı için bu fonksiyon iyi tanımlıdır.

$$\mathbb{C}P^k \rightarrow \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l, [x_0 : \dots : x_k] \mapsto ([x_0 : \dots : x_k], [1 : 0 : \dots : 0]),$$

gömme fonksiyonunun ϕ ile bileşkesini alırsak

$$\mathbb{C}P^k \rightarrow \mathbb{C}P^{k+l}, [x_0 : \dots : x_k] \mapsto ([x_0 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0]),$$

gömme fonksiyonunu elde ederiz. O halde, her $a \in H_{DR}^i(\mathbb{C}P^{k+l})$ kohomoloji elemanı için $\phi^*(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \in H_{DR}^i(\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l)$ elde edilir (bkz. Sonuç 5.3.5).

Eğer $J : M \rightarrow M \times M$, $p \mapsto (p, p)$, $p \in M$, şeklinde verilen içermeye fonksiyonu ise, her $u, v \in H_{DR}^i(M)$ için, $J^* : H_{DR}^i(M \times M) \rightarrow H_{DR}^i(M)$ kohomoloji homomorfizması olmak üzere,

$$J^*(u \otimes 1 + 1 \otimes v) = u + v$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi M manifoldu üzerinde $L_1 \rightarrow M$ ve $L_2 \rightarrow M$ gibi iki karmaşık doğru demeti alalım. Eğer $s_i : M \rightarrow L_i$, $i = 1, 2$, bu demetlerin birer kesiti ise

$$s : M \rightarrow L_1 \otimes L_2, \quad p \mapsto s_1(p)s_2(p)$$

fonksiyonu karmaşık doğru demetlerinin tensör çarpımının bir kesiti olacaktır. Dolayısıyla, $L_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, karmaşık doğru demetlerinin sınıflandırma fonksiyonları, sırasıyla, $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^k$ ve $g : M \rightarrow \mathbb{C}P^l$ ise $\phi \circ (f, g) \circ J : M \rightarrow \mathbb{C}P^{k+l}$ fonksiyonu da $L_1 \otimes L_2$ tensör çarpımının bir sınıflandırma fonksiyonu olur.

Son olarak $x = c_1(\xi_r) = e(\xi_r)$ kohomoloji sınıfı $\xi_r \rightarrow \mathbb{C}P^r$ kanonik demetin birinci Chern sınıfı ise Chern (Euler) sınıfının doğallığından dolayı

$$\begin{aligned} c_1(L_1 \otimes L_2) &= (\phi \circ (f, g) \circ J)^*(x) \\ &= (J^* \circ (f^*, g^*))(\phi^*(x)) \\ &= (J^* \circ (f^*, g^*))(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= J^*(f^*(x) \otimes 1 + 1 \otimes g^*(x)) \\ &= f^*(x) + g^*(x) \\ &= f^*(c_1(\xi_k)) + g^*(c_1(\xi_l)) \\ &= c_1(f^*(\xi_k)) + c_1(g^*(\xi_l)) \\ &= c_1(L_1) + c_1(L_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 6.2.1. $L_i \rightarrow M$, $s_i : M \rightarrow L_i$, $i = 1, 2$, ve

$$s : M \rightarrow L_1 \otimes L_2, \quad p \mapsto s_1(p)s_2(p),$$

yukarıdaki gibi olsun. Eğer bu kesitler hem sıfır kesitine hem de birbirlerine dik iseler $s^{-1}(0) = s_1^{-1}(0) \cup s_2^{-1}(0)$ alt manifoldlarının birleşimlerinin Poincaré duali her iki parçanın Poincaré duallerinin toplamı olacaktır. Başka bir deyişle herhangi bir alt manifoldun bu iki alt manifoldun birleşimi ile kesişimi ayrı ayrı kesişimlerinin birleşimidir. Bu ise, $c_1(L_1 \otimes L_2) = e(L_1 \otimes L_2) = e(L_1) + e(L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$ eşitliğinin daha geometrik bir açıklamasıdır. Ayrıca L ve L^* demetlerinin geçiş fonksiyonları sırasıyla $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ ise $L \otimes L^*$ tensör çarpımının geçiş fonksiyonu $\varphi_{\alpha\beta} \cdot \bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ gerçel ve pozitif değerli bir fonksiyon olacaktır. Bu durumda $L \otimes L^*$ aşıkarmaşık doğru demeti olur. Dolayısıyla, $\mathcal{L}(M)$ ile M üzerindeki karmaşık doğru demetlerinin izomorfizma sınıflarının oluşturduğu değişmeli grubu gösterirsek

$$c_1 : \mathcal{L}(M) \rightarrow H_{DR}^2(M), \quad [L] \mapsto c_1(L),$$

bir grup homomorfizması olur. Ayrıca bu grup içinde L elemanının tersi L^* ile verilir.

Önerme 6.2.2. *Eğer k, n pozitif tam sayıları $2(k+1) > n+1$ koşulunu sağlıyorsa n -boyutlu M manifoldu üzerindeki karmaşık doğru demetlerinin izomorfizma sınıflarının oluşturduğu $\mathcal{L}(M)$ değişmeli grubu, M manifoldundan $\mathbb{C}P^k$ karmaşık projektif uzayına giden fonksiyonların homotopi sınıflarının oluşturduğu gruba izomorftir:*

$$[M, \mathbb{C}P^k] \longrightarrow \mathcal{L}(M), [f : M \rightarrow \mathbb{C}P^k] \mapsto f^*(\xi_k).$$

$[M, \mathbb{C}P^k]$ homotopi sınıflarının bir grup oluşturduğunun kanıtı, bu önermenin kanıtıyla birlikte Alıştırma 9'da yapılacaktır.

Şimdi tüm diğer Chern sınıflarını tanımlayabiliriz. Bunun için $1 < r$ -boyutlu bir $\pi^\circ : E \rightarrow M$ vektör demeti alalım ve bu demetin projektivizasyonunu

$$\mathbb{C}P^{r-1} \rightarrow P(E) \rightarrow M$$

oluşturalım (bkz. Sonuç 5.3.8 ve üzerindeki paragraf). $\pi : P(E) \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonu yardımıyla vektör demetini geri çekelim: Her $p \in M$ için, $E_p = (\pi^\circ)^{-1}(p)$ vektör uzayı olmak üzere

$$\pi^*(E) = \{(l_p, v) \in P(E) \times E \mid \pi^\circ(v) = p, p \in M, l_p \in E_p - \{0\}/(\mathbb{C}^*)\}$$

$$\downarrow$$

$$P(E).$$

Bu r -boyutlu karmaşık vektör demetinin doğal bir alt doğru demeti vardır:

$$L = \{(l_p, v) \in \pi^*(E) \mid v \in l_p\}.$$

Son olarak $(r-1)$ -boyutlu $Q \rightarrow M$ karmaşık vektör demetini aşağıdaki bölüm demeti olarak tanımlayalım:

$$0 \rightarrow L \rightarrow \pi^*(E) \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Şimdi $a \in H_{DR}^2(P(E))$ sınıfı aşağıdaki doğru demetinin birinci Chern sınıfı olarak tanımlansın:

$$a \doteq c_1(L^*).$$

Euler sınıfının ve dolayısıyla birinci Chern sınıfının doğallığının bir sonucu olarak L doğru demetinin $P(E_p)$ lifine kısıtlanışının birinci Chern sınıfı $-a$ kohomoloji sınıfının $P(E_p)$ lifine kısıtlanışı olacaktır. Diğer taraftan, $\{1, a, \dots, a^{r-1}\} \subset H_{DR}^*(P(E))$ sınıflarının her $P(E_p)$ lifine kısıtlanışları bu lifin kohomolojisinin bir vektör uzayı tabanını verdiği için $\{1, a, \dots, a^{r-1}\}$ kümesi $H_{DR}^*(P(E))$ cebirinin bir $H_{DR}^*(M)$ -modül tabanını verir (Sonuç 5.3.8). Dolayısıyla, $a^r \in H_{DR}^*(P(E))$ sınıfı, bazı $c_1(E), \dots, c_r(E) \in H_{DR}^*(M)$ kohomoloji sınıfları için,

$$a^r + c_1(E)a^{r-1} + \dots + c_i(E)a^{r-i} + \dots + c_r(E) = 0$$

olmak üzere tek bir şekilde ifade edilir. Bu şekilde $c_i(E)$ sınıflarını tanımlamış olduk. $P(E)$, L ve Q demetleri doğal şekilde elde edildiğinden Chern sınıfları iyi tanımlanmıştır. Sadece $r = 1$ durumunda birinci Chern sınıfı için vermiş olduğumuz iki tanımın denk olduğunu görmeliyiz: $E \rightarrow M$ bir karmaşık doğru demeti ise $P(E) = M$ olacaktır. Buradan yine $\pi^*(E) = E = L$ elde ederiz. O halde,

$$a = e((L^*)_{\mathbb{R}}) = -e(L_{\mathbb{R}}) = -e(E_{\mathbb{R}})$$

ve buradan da

$$a + e(E_{\mathbb{R}}) = 0$$

denklemini buluruz. O halde, ikinci tanımımızdan yine

$$c_1(E) = e(E_{\mathbb{R}})$$

buluruz.

Uyarı 6.2.3. Eğer $E \rightarrow M$ aşık bir karmaşık vektör demeti ise $P(E) = M \times \mathbb{C}P^{r-1}$ olur ve dolayısıyla da $a^r = 0$ elde edilir. O halde, aşık bir vektör demetinin tüm Chern sınıfları sıfırdır.

6.2.1 Chern Sınıflarının Özellikleri

Bu bölümde ilk önce toplam Chern sınıfını tanımlayacağız. Verilen herhangi bir $E^r \rightarrow M$ karmaşık r -boyutlu vektör demetinin sıfıncı Chern sınıfı her zaman

$$c_0(E) = 1 \in H_{DR}^0(M)$$

olarak (manifoldun her noktasında 1 değerini alan sabit fonksiyon) ve toplam Chern sınıfı ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$c(E) = c_0(E) + \cdots + c_r(E) \in H_{DR}^*(M) .$$

Önerme 6.2.4. Chern sınıfları doğal kohomoloji sınıflarıdır. Başka bir deyişle, $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $E \rightarrow N$ karmaşık bir vektör demeti olmak üzere, her $i \in \mathbb{N}$ için, $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ eşitliği sağlanır.

Bu önermenin kanıtı okuyucuya alıştırma olarak bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 11). Bir sonraki teorem *Ayrışım İlkesi* (*Splitting Principle*) olarak bilinen ve kanıtlarda oldukça kolaylık sağlayan bir sonuçtur.

Teorem 6.2.5 (Ayrışım İlkesi). Her $\pi : E \rightarrow M$ r -boyutlu karmaşık bir vektör demeti için aşağıdaki özelliklere sahip bir türevlenebilir $F(E)$ manifoldu ve $\phi : F(E) \rightarrow M$ türevlenebilir fonksiyonu vardır:

1. $E \rightarrow M$ demetinin $F(E)$ üzerine geri çekilmesi karmaşık bazı doğru demetlerinin toplamı olarak yazılabilir:

$$\phi^*(E) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r ;$$

2. $\phi^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(F(E))$ homomorfizması bire birdir.

Chern sınıflarının doğallığı ve Ayrışım İlkesi sayesinde Chern sınıflarının polinomlarıyla ilgili bir ifadeyi kanıtlamak istersek ele aldığımız vektör demetinin karmaşık doğru demetlerinin bir toplamı olduğunu kabul edebiliriz. Yukarıdaki teorem tam olarak bu sebepten dolayı *Ayrışım İlkesi (Splitting Principle)* adını alır. Bu teoremin kanıtı için gerekli alt yapıyı oluşturmuş durumdayız. Kanıt alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 12).

Teorem 6.2.6 (Whitney Çarpım Formülü). $E_i \rightarrow M$, $i = 1, \dots, r$ karmaşık vektör demetleri olmak üzere her zaman

$$c(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = c(E_1) \cdots c(E_r)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : Teoremi ilk önce her bir E_i 'nin bir karmaşık doğru demeti olduğu durumda kanıtlayalım. O halde, $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$, doğru demetlerinin toplamı olsun. $\pi : P(E) \rightarrow M$ projektivizasyon izdüşümü olmak üzere yine

$$\tilde{E} \doteq \pi^*(E) = \{(l_p, v) \in P(E) \times E \mid \pi^\circ(v) = p, p \in M, l_p \in E_p - \{0\}/(\mathbb{C}^*)\}$$

↓

$$P(E),$$

$L \doteq \{(l_p, v) \in \pi^*(E) \mid v \in l_p\} \subseteq \tilde{E}$ ve $\tilde{L}_i \doteq \pi^*(L_i)$ olsun. Ayrıca $s_i : L \rightarrow \tilde{L}_i$ i 'inci koordinata izdüşüm fonksiyonunu gösterebiliriz. O halde, $s_i \in \text{hom}(L, \tilde{L}_i) = L^* \otimes \tilde{L}_i$ demetinin bir kesiti olacaktır. Bu kesitin sıfırdan farklı olduğu açık kümeyi V_i ile gösterebiliriz:

$$V_i = \{q \in P(E) \mid s_i(q) \neq 0\}.$$

$L \rightarrow P(E)$ doğru demeti $\tilde{E} = \tilde{L}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{L}_r$ demetinin bir boyutlu alt demeti olduğundan her $q \in P(E)$ noktası için en az bir $s_i(q) \neq 0$ olacaktır. Başka bir deyişle $\{V_1, \dots, V_r\}$ kümesi $P(E)$ manifoldu için bir açık örtü olacaktır. Şimdi

$$L^* \otimes \tilde{E} = (L^* \otimes \tilde{L}_1) \oplus \dots \oplus (L^* \otimes \tilde{L}_r)$$

karmaşık demetini yönlendirilmiş (karmaşık yapısı yardımıyla) gerçel bir vektör demeti olarak görelim. O halde,

$$s : P(E) \rightarrow L^* \otimes \tilde{E}, s(q) \doteq (s_1(q), \dots, s_r(q)),$$

bu gerçel demetin hiçbir noktada sıfır değerini almayan bir kesiti olacaktır. Başka bir deyişle, bu demetin Euler sınıfı sıfırdır. O halde,

$$\begin{aligned}
0 &= e((L^* \otimes \tilde{E})_{\mathbb{R}}) \\
&= e((L^* \otimes \tilde{L}_1)_{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus (L^* \otimes \tilde{L}_r)_{\mathbb{R}}) \\
&= e((L^* \otimes \tilde{L}_1)_{\mathbb{R}}) \cdots e((L^* \otimes \tilde{L}_r)_{\mathbb{R}}) \\
&= c_1(L^* \otimes \tilde{L}_1) \cdots c_1(L^* \otimes \tilde{L}_r) \\
&= (c_1(L^*) + c_1(\tilde{L}_1)) \cdots (c_1(L^*) + c_1(\tilde{L}_r)) \\
&= (a + c_1(\tilde{L}_1)) \cdots (a + c_1(\tilde{L}_r))
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada yine $a = c_1(L^*)$ sınıfını göstermektedir. Bu eşitlik doğallıktan dolayı $H_{DR}^*(M)$ halkası içinde

$$0 = (a + c_1(L_1)) \cdots (a + c_1(L_r))$$

haline dönüşecektir. Şimdi Chern sınıflarının tanımını hatırlarsak bu son eşitliğin tam olarak

$$c(E) = \prod_i (1 + c_1(L_i)) = \prod_i c(L_i)$$

ifadesi olduğunu görürüz. Dolayısıyla, bu özel halin kanıtını bitirmiş olduk.

Şimdi de genel durumu kanıtlayalım. Aslında, sadece $E = E_1 \oplus E_2$ durumunu kanıtlamak yeterlidir. Bu iki demetin boyutları sırasıyla k ve l olsun. Ayırışım İlkesi uyarınca

$$E_1 = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k \quad \text{ve} \quad E_2 = L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_l$$

olduğunu kabul edebiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
c(E_1 \oplus E_2) &= c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_l) \\
&= (\prod_i c(L_i)) (\prod_j c(L'_j)) \\
&= c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) c(L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_l) \\
&= c(E_1) c(E_2)
\end{aligned}$$

elde ederiz ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

6.2.2 Uygulamalar

İlk önce Ayırışım İlkesi ile Whitney Çarpım Kuralı'nın bir sonucunu verelim: Eğer bir karmaşık vektör demeti

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

şeklinde karmaşık doğru demetlerinin direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa bu vektör demetinin i 'inci Chern sınıfı $c_1(L_i)$ 'lerin i 'inci elementer simetrik polinomu olur:

$$c_i(E) \doteq \sigma_i(c_1(L_1), \cdots, c_1(L_r)) .$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} c_1(E) &= c_1(L_1) + \cdots + c_1(L_r), \\ c_2(E) &= \sum_{i < j} c_1(L_i) \cdot c_1(L_j), \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve son olarak

$$c_r(E) = c_1(L_1) \cdots c_1(L_r)$$

olur.

Whitney Çarpım Kuralı'nın bir diğer uygulaması da şu şekildedir:

Önerme 6.2.7. $E \rightarrow M$ r -boyutlu bir karmaşık vektör demeti olmak üzere $c_r(E) = e(E_{\mathbb{R}})$ eşitliği vardır. Başka bir deyişle, bir karmaşık vektör demetinin en yüksek dereceli Chern sınıfı demetin gerçel vektör demeti olarak ele alındığındaki Euler sınıfına eşittir.

Kanıt : Hem Chern sınıfları hem de Euler sınıfı doğal olduğundan vektör demetinin bazı doğru demetlerinin bir direkt toplamı olduğunu kabul edebiliriz:

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r .$$

Bu durumda, Whitney Çarpım Kuralı'nı kullanarak

$$\begin{aligned} c_r(E) &= c_1(L_1) \cdots c_1(L_r) \\ &= e(L_1) \cdots e(L_k) \\ &= e(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) \\ &= e(E) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Rankı $r > 0$ olan bir $E \rightarrow M$ karmaşık vektör demeti alalım. Bu demetin $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ geçiş fonksiyonlarının

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(r, \mathbb{C}) , \quad \bar{\varphi}_{\alpha\beta}(p) \doteq \overline{\varphi_{\alpha\beta}(p)} ,$$

karmaşık eşlenikleri alınarak elde edilen vektör demetine $E \rightarrow M$ demetinin eşleniği denir ve $\bar{E} \rightarrow M$ ile gösterilir.

Önerme 6.2.8. $E \rightarrow M$ r -boyutlu bir karmaşık vektör demeti ve $\bar{E} \rightarrow M$ bu demetin eşleniği olsun. O halde, her $i \geq 0$ için,

$$c_i(\bar{E}) = (-1)^i c_i(E)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : Sonucun ilk önce herhangi bir $E = L$ karmaşık doğru demeti için doğru olduğunu görelim. $\bar{L} = L^*$ olduğundan $c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$ olduğu açıktır. Genel durumda ise Ayrışım İlkesi'ni kullanarak vektör demetinin bazı doğru demetlerinin bir direkt toplamı olduğunu kabul edebiliriz:

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r .$$

Bu durumda, σ_i i 'inci elementer simetrik polinom olmak üzere

$$\begin{aligned} c_i(\bar{E}) &= c_i(\bar{L}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{L}_r) \\ &= \sigma_i(c_1(\bar{L}_1), \cdots, c_1(\bar{L}_r)) \\ &= \sigma_i(-c_1(L_1), \cdots, -c_1(L_r)) \\ &= (-1)^i \sigma_i(c_1(L_1), \cdots, c_1(L_r)) \\ &= (-1)^i c_i(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) \\ &= (-1)^i c_i(E) \end{aligned}$$

elde ederiz ve böylece kanıtı tamamlarız. $\square$

Örnek 5.2.11.2'de karmaşık projektif uzayın kohomolojisini hesaplamıştık: $H = \{z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ karmaşık projektif uzayının $2n - 2$ boyutlu alt manifoldunu ve $a \in H_{DR}^2(\mathbb{C}P^n)$ bu alt manifoldun Poincaré dualini gösterebiliriz. Bu durumda, $[a]^k \in H_{DR}^{2k}(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{R}$ kohomoloji grubunun bir üreticidir. Diğer bir deyişle, kohomoloji cebiri

$$H_{DR}^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}[a]/(a^{n+1})$$

(değişmeli) polinom cebirine izomorfiktir.

Önerme 6.2.9. Yukarıdaki gösterimi kabul edersek, $\mathbb{C}P^n$ karmaşık projektif uzayın toplam Chern sınıfı

$$c(T_*\mathbb{C}P^n) = (1 + a)^{n+1}$$

ile verilir. Dolayısıyla, $c_i(T^*\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{i} a^i$ kohomoloji sınıfıdır.

Kanıt : Kanıtı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapalım: $n = 1$ durumunda $c_1(T_*\mathbb{C}P^1) = e(T_*S^2) = 2a$ olduğundan sonuç doğrudur. Şimdi $c(T_*\mathbb{C}P^n) = (1 + a)^{n+1}$ olduğunu kabul edelim. O halde, kanıtı tamamlamak için $c(T_*\mathbb{C}P^{n+1}) = (1 + a)^{n+2}$ eşitliğini göstermemiz gerekiyor. Bunun için, $\mathbb{C}P^{n+1}$ içinde $z_{n+2} = 0$ denklemi ile verilen $\mathbb{C}P^n$ alt manifoldunu ele alalım. Alt manifoldun normal demeti N ile gösterilsin; bu bir karmaşık doğru demetidir. Normal demetin birinci Chern sınıfı demetin Euler sınıfı olacaktır. Dolayısıyla, bu Chern sınıfı alt manifoldun kendisi ile dik kesişiminin Poincaré duali olacaktır. $\mathbb{C}P^n$ alt manifoldunun kendisi ile kesişimi $H = \{z_0 = 0\}$ alt manifoldu olarak alınabilir ve buradan da $c_1(N) = a$ elde edilir.

Diğer taraftan, $T_*\mathbb{C}P^{n+1}$ teğet demetinin bu alt manifolda kısıtlanışını

$$T_*\mathbb{C}P^{n+1}|_{\mathbb{C}P^n} = N \oplus T_*\mathbb{C}P^n$$

şeklinde yazabiliriz. O halde, $i : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ içerme fonksiyonu olmak üzere

$$i^*(c(T_*\mathbb{C}P^{n+1})) = c(T_*\mathbb{C}P^n) \cup c(N) = (1 + a)^{n+2}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, i^* kohomoloji homomorfizması bire bir olduğundan, her $0 \leq k < n + 1$ için,

$$c_k(T_*\mathbb{C}P^{n+1}) = \binom{n+2}{k} a^k$$

olduğunu göstermiş olduk. Kanıtın tamamlanabilmesi için, son olarak

$$c_{n+1}(T_*\mathbb{C}P^{n+1}) = (n+2) a^{n+1}$$

eşitliğini göstermeliyiz. Fakat yine en yüksek dereceli Chern sınıfı Euler sınıfına eşit olduğundan

$$c_{n+1}(T_*\mathbb{C}P^{n+1}) = e(T_*\mathbb{C}P^{n+1}) = \chi(\mathbb{C}P^{n+1}) a^{n+1} = (n+2) a^{n+1}$$

buluruz. Böylece kanıtı tamamlarız. $\square$

Örnek 6.2.10 (Yanyana Gelme Eşitliği). *Örnek 5.2.11'de karmaşık projektif uzay içinde derecesi $d \geq 1$ olan bir karmaşık $C = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{C}P^2$ eğrisi alalım. Yukarıdaki teoremin kanıtına benzer şekilde*

$$T_*\mathbb{C}P^2|_C = N \oplus T_*C$$

ayrışımını düşünelim. N normal demeti bir karmaşık doğru demeti olduğundan $c_1(N) = e(N_{\mathbb{R}})$ bulunur. Buradan

$$\int_C c_1(N) = \int_C e(N_{\mathbb{R}}) = C \cdot C = d^2$$

elde edilir. (C üzerinde karmaşık yönlendirme alarak integrali hesaplıyoruz; ayrıca kohomoloji sınıfının integrali ile bu sınıfın bir temsilcisinin integralini kastediyoruz). Benzer şekilde eğrinin teğet demetinin birinci Chern sınıfının eğri üzerindeki integrali, $g \geq 0$ C eğrisinin cinsi olmak üzere,

$$\int_C c_1(T_*C) = \int_C e(T_*C) = \chi(C) = 2 - 2g$$

elde edilir. Diğer taraftan karmaşık projektif düzlemin teğet demetinin birinci Chern sınıfının eğri üzerindeki integrali

$$\int_C c_1(T_*\mathbb{C}P^2) = \int_C 3a = 3 \int_C a = 3(C \cdot H) = 3d$$

olarak hesaplanır. Son olarak, Whitney Çarpım Formülüne göre

$$c_1(T_*\mathbb{CP}^2|_C) = c_1(N) + c_1(T_*C)$$

olacağından

$$3d = d^2 + 2 - 2g$$

eşitliği elde edilir. Bu iki eşitlik de Yanyana Gelme Eşitliği olarak da bilinir.

Buradan eğrinin cinsinin derecesi ile ifade edildiği

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Derece Cins Formülü elde edilir.

Benzer bir formül $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ içindeki cebirsel eğriler için de doğrudur: İkili derecesi (d_1, d_2) olan bir $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, w_0, w_1]$ polinomu alalım (f polinomunun z_i değişkenlerine göre derecesi d_1 , w_i değişkenlerine göre derecesi ise d_2 'dir), öyle ki

$$C = \{([z_0, z_1], [w_0, w_1]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \mid f(z_0, z_1, w_0, w_1) = 0\}$$

karmaşık cebirsel eğrisinin tekil noktası olmasın.

$\pi_i : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $i = 1, 2$, koordinat izdüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$T_*(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) = \pi_1^*(T_*\mathbb{CP}^1) \oplus \pi_2^*(T_*\mathbb{CP}^1)$$

olduğu açıktır. O halde, Chern sınıflarının doğallığından dolayı

$$\begin{aligned} c_1(T_*(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)) &= \pi_1^*(c_1(T_*\mathbb{CP}^1)) + \pi_2^*(c_1(T_*\mathbb{CP}^1)) \\ &= 2(\pi_1^*(a) + \pi_2^*(a)) \\ &= 2a_1 + 2a_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Poincaré duali

$$\{p_0\} \times \mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$$

($p_0 \in \mathbb{CP}^1$ herhangi bir nokta olmak üzere) alt manifoldu olan de Rham kohomoloji sınıfının a_1 olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde, a_2 de Rham kohomoloji sınıfı da

$$\mathbb{CP}^1 \times \{p_0\} \subseteq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$$

alt manifoldunun Poincaré dualidir. O halde,

$$\int_C a_1 = C \frown \{p_0\} \times \mathbb{CP}^1 = d_2$$

ve benzer şekilde

$$\int_C a_2 = C \frown \mathbb{CP}^1 \times \{p_0\} = d_1$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\int_C c_1(T_*(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)) = 2(d_1 + d_2)$$

olur.

Diğer taraftan yukarıdaki örneğe benzer şekilde

$$T_*(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)|_C = N \oplus T_*C$$

ayrışımını düşünelim. N normal (karmaşık doğru) demeti için yine $c_1(N) = e(N_{\mathbb{R}})$ olduğundan

$$\int_C c_1(N) = \int_C e(N_{\mathbb{R}}) = C \frown C = 2d_1d_2$$

elde ederiz. Yine yukarıdaki örneğe benzer şekilde

$$c_1(T_*(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)|_C) = c_1(N) + c_1(T_*C)$$

olacağından

$$2(d_1 + d_2) = 2d_1d_2 + 2 - 2g$$

eşitliğini buluruz. O halde, eğrinin cinsi

$$g = (d_1 - 1)(d_2 - 1)$$

olur. (Detaylar için Alıştırma 13'e bakınız.)

Derece-Cins Formülünün Bir Başka Kanıtı: Bu bölümde Derece-Cins Formülleri'ni hesaplamanın bir başka yöntemine ayıracağız. Bunu yapmak için karmaşık projektif düzlem içinde derecesi $d > 0$ olan bütün cebirsel eğrilerin uzayını inceleyeceğiz. Bu sayede aynı dereceye sahip eğrilerden türevlenebilir olanların birbirine difeomorfik olduğu göstereceğiz. Daha sonra özel bir eğrinin cinsini Riemann-Hurwitz formülü ile hesaplayarak Derece-Cins formülünü elde edeceğiz.

Derecesi $d > 0$ olan $f(z_0, z_1, z_2)$ homojen polinomlarının oluşturduğu vektör uzayının boyutunun

$$N = \binom{n+k-1}{k}$$

olduğunu biliyoruz. Bir polinomu sıfırdan farklı bir sayıyla çarpmak polinomun sıfır kümesini değiştirmedikinden $\mathbb{C}P^2$ içindeki derecesi d olan her eğriyi $B = \mathbb{C}P^{N-1}$ projektif uzayı içinde bir nokta olarak görebiliriz. Her bir cebirsel eğriyi denklemiyle beraber yazarsak

$$E = \{(f, [z_0 : z_1 : z_2]) \in B \times \mathbb{C}P^2 \mid f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

cebirsal kümesini elde ederiz. $\pi : E \rightarrow B$ ilk koordinata izdüşüm fonksiyonu ise her $f \in B$ polinomunun ters görüntüsü bu polinomun projektif düzlem içinde belirlediği $\pi^{-1}(f) = \{f(z) = 0\} \subseteq \mathbb{CP}^2$ eğrisidir. Bu eğrinin tekil noktasının varlığı eğriyi veren homojen polinomun katsayılarının bir polinom denklem sisteminin çözümü olmasına denktir (bkz. Alıştırma 15). O halde, B içinde en az bir tekil noktası olan eğrilerin oluşturduğu $\Delta \subseteq B$ alt kümesi cebirseldir ve dolayısıyla Δ 'nın karmaşık boyutu B 'nin karmaşık boyutundan düşük olan alt manifoldların bir birleşimidir. O halde, $B - \Delta$ kümesi bağlantılı ve açık bir alt manifolddur (cebirsal kümeler denklem sistemlerinin çözüm kümeleri oldukları için kapalıdır).

$B - \Delta$ içinden herhangi iki f_0, f_1 noktası seçelim. O halde, $\Sigma_i = \{f_i = 0\}$, $i = 0, 1$, cebirsal eğrilerinin tekil noktaları yoktur. Başka bir deyişle bu cebirsal eğriler türevlenebilir ve yönlendirilebilir yüzeylerdir. Bu iki noktayı türevlenebilir bir, f_t , $t \in [0, 1]$, eğrisi ile birleştirelim. Bu eğrinin teğetlerinin oluşturduğu vektör alanını eğrinin bir tüp komşuluğuna taşıyıp ve vektör alanını manifoldun geri kalanına sıfır olarak genişleterek manifold üzerinde tıkkız destekli bir $X(f)$ vektör alanı elde edelim. $X(f)$ vektör alanının akışımı $\phi(t, f)$ ile gösterirsek $\phi(0, f_0) = f_0$ ve $\phi(1, f_0) = f_1$ olur.

Şimdi $E_0 = \pi^{-1}(B - \Delta)$ türevlenebilir manifoldu üzerine bir Riemann metriği koyalım ve her noktasındaki teğet uzayın

$$T_{(f,p)}E_0 = \ker(D\pi_{(f,p)} : T_{(f,p)}E_0 \rightarrow T_f B) \oplus H_{(f,p)}$$

dik ayrışımını düşünelim. $D\pi_{(f,p)}$ doğrusal fonksiyonunun $H_{(f,p)}$ yatay bileşenine kısıtlanması bir izomorfizma olduğundan $D\pi_{(f,p)}(X_0(f)) = X(f, p)$ olacak şekilde E_0 üzerinde bir X_0 vektör alanı vardır. İzdüşüm fonksiyonu düzgün olduğundan X_0 vektör alanı da tıkkız desteklidir. Bu vektör alanının akışımı $\Phi(t, (f, p))$ ile gösterelim. Her $(f, p) \in E_0$ ve $t \in \mathbb{R}$ için, $\pi(\Phi(t, (f, p))) = \phi(t, f)$ olacağından $\Phi(1, \Sigma_0) = \Sigma_1$ elde ederiz. Sonuç olarak, Σ_0 ve Σ_1 yüzeylerinin difeomorfik olduklarını kanıtladık. Başka bir deyişle, $f \in B - \Delta$ olmak üzere $\Sigma_f = \{f = 0\}$ yüzeylerinin topolojisi yüzeyi tanımlayan polinomdan bağımsızdır. O halde, özel bir polinom için bu yüzeyin cinsini belirlersek kanıtı bitirmiş olacağız.

$\Sigma_d = \{z_0^d + z_1^d - z_2^d = 0\}$ Fermat eğrisinin cinsini hesaplayalım.

$$P : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{CP}^1, [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1],$$

izdüşüm fonksiyonu, $\xi \in \mathbb{C}$, 1'in d 'inci dereceden ilkel bir kökü olmak üzere,

$$Z = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_0^d + z_1^d = 0\} = \{[1 : \xi], \dots, [1 : \xi^{d-1}]\}$$

kümesi dışında $d : 1$ tipinde bir fonksiyondur. Ayrıca, her $p \in Z$ için, $P^{-1}(p)$ tek noktadan oluşur. O halde, Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak, $g(\Sigma_d) = g$ olmak üzere,

$$(2 - 2g) - d = d(2 - d)$$

ve buradan da

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

elde ederiz.

Derece-Cins formülü cebirsel eğri ve yüzeylerin topolojileri ile bu eğri ve yüzeyleri ifade eden polinomların dereceleri arasındaki ilişkinin tipik bir örneğidir. Bu konuda daha kapsamlı bilgi edinmek için [1], [15] ve [18] numaralı referanslara bakabilirsiniz.

6.3 Pontryagin Karakteristik Sınıfları

Türevlenebilir bir manifold üzerindeki gerçel bir $E \rightarrow M$ vektör demetinin Pontryagin sınıfları bu demetin kompleksifikasyonun Chern sınıfları olarak tanımlanır. $E \rightarrow M$ rankı $k > 0$ olan gerçel bir demet ise bu demetin aşikar karmaşık doğru demeti ile tensör çarpımı $F = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow M$ karmaşık rankı k olan bir karmaşık vektör demeti olur. E demetinin

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(k, \mathbb{R}) \subseteq GL(k, \mathbb{C})$$

geçiş fonksiyonları gerçel değerli olduğundan, E , F karmaşık ve $\overline{F}$ eşlenik demetlerinin yapı fonksiyonları aynı olacaktır. Dolayısıyla, F ve $\overline{F}$ karmaşık vektör demetleri izomorfiktir. Bu durumda,

$$c_{2i+1}(F) = c_{2i+1}(\overline{F}) = (-1)^{2i+1} c_{2i+1}(F) = -c_{2i+1}(F)$$

olacağından $c_{2i+1}(F) = 0$. De Rham kohomoloji sınıfının sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla, F demetinin sadece çift Chern sınıfları sıfırdan farklı olabilir. $E \rightarrow M$ demetinin i 'inci Pontryagin sınıfı $F = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow M$ karmaşık demetinin $2i$ 'inci Chern sınıfının $(-1)^i$ katı olarak tanımlanır:

$$p_i(E) \doteq (-1)^i c_{2i}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) .$$

$GL(r, \mathbb{C}) \subseteq GL(2r, \mathbb{R})$ bir alt grup olduğundan her karmaşık vektör demetini gerçel bir demet olarak görebiliriz: Açıkça söylemek gerekirse eğer $E \rightarrow M$ karmaşık rankı $r > 0$ olan bir vektör demeti ise bu demetin $E_{\mathbb{R}} \rightarrow M$ gerçel karşılığı boyutu $2r$ olan gerçel bir demettir. $E_{\mathbb{R}} \rightarrow M$ gerçel demetinin Pontryagin sınıfları $E \rightarrow M$ karmaşık demetinin Chern sınıfları cinsinden ifade edilebilir. Bunun için ilk önce aşağıdaki sonucu kanıtlamalıyız:

Önerme 6.3.1. $E \rightarrow M$ r -boyutlu bir karmaşık vektör demeti ise bu demetin gerçel karşılığının kompleksifikasyonu karmaşık vektör demeti olarak E ve $\overline{E}$ demetlerinin direkt toplamına izomorfiktir:

$$E_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq E \oplus \overline{E} .$$

Kanıt : $\mathbb{C}^r$ karmaşık vektör uzayını, (u_k, v_k) gerçel sayılar olmak üzere)

$$w = (u_1 + iv_1, \dots, u_r + iv_r) \mapsto (u_1, v_1, \dots, u_r, v_r)$$

dönüşümünü kullanarak gerçel $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^r \doteq \mathbb{R}^{2r}$ uzayı olarak görelim. Karmaşık w vektörünü bir $z = re^{i\theta}$ ile çarpmak her bir (u_k, v_k) gerçel ikilisini

$$A_z = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

matrisi ile çarpmaya karşılık gelir. Bu matrisin özdeğerleri z ve $\bar{z}$ karmaşık sayılarıdır. Dolayısıyla, A_z matrisini ancak $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ karmaşık vektör uzayında köşegenleştirebiliriz. Bu durumda bu özdeğerlere karşılık gelen özaltuzayların tabanları

$$\beta = \{e_1 - if_1, \dots, e_r - if_r\} \text{ ve } \bar{\beta} = \{e_1 + if_1, \dots, e_r + if_r\}$$

olur (burada $\{e_1, f_1, \dots, e_r, f_r\}$ ile $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^r$ vektör uzayının standart sıralı tabanını gösteriyoruz). Diğer taraftan, z karmaşık sayısı değiştikçe A_z matrisinin özdeğerleri değişse de özaltuzaylar değişmemektedir, çünkü $\{A_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ matris ailesi değişmeli matrislerden oluşmaktadır.

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \langle \beta \rangle \oplus \langle \bar{\beta} \rangle$$

ayrışımında sol taraftaki uzayın bir vektörünü karmaşık i sayısı ile çarpmak bu vektörün sağ taraftaki iki bileşenini sırasıyla i ve $-i$ ile çarpmaya denk geldiğinden bu ayrışım

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^r \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^r \oplus \bar{\mathbb{C}}^r$$

olarak yazılır. Bir noktadaki lifte yaptığımız bu ayrışımın demet üzerindeki karmaşık yapı kullanılarak tüm demet üzerinde de yapılabileceği açıktır. Dolayısıyla kanıt tamamlanır. $\square$

Her karmaşık vektör demetinin sıfıncı Chern sınıfı 1 olarak tanımlandığı için $p_0(E) = 1$ olur. Chern sınıfında olduğu gibi toplam Pontryagin sınıfı

$$p(E) = \sum_{i \geq 0} p_i(E)$$

ile tanımlanır. Eğer

$$\tilde{p}(E) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i p_i(E)$$

şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 6.3.2. Her $E \rightarrow M$ karmaşık vektör demeti için

$$\tilde{p}(E_{\mathbb{R}}) = c(E) c(\bar{E})$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 6.3.3. M karmaşık boyutu 2 olan tıkHz bir manifold olsun. $c_i(M)$ $p_i(M)$ sırasıyla bu manifoldun teğet demetinin Chern ve Pontryagin sınıfları olmak üzere

$$1 - p_1(M) = c(M) \cdot c(\overline{M}) = (1 + c_1(M) + c_2(M))(1 - c_1(M) + c_2(M))$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$p_1(M) = c_1^2(M) - 2c_2(M) = c_1^2(M) - 2e(M)$$

olarak hesaplanır. Örnek olarak, $M = \mathbb{CP}^2$ alırsak, bir önceki bölümün sonuçlarından,

$$p_1(\mathbb{CP}^2) = c_1^2(\mathbb{CP}^2) - 2e(\mathbb{CP}^2) = 9a^2 - 6a^2 = 3a^2$$

bulunur (burada $a \in H_{DR}^2(\mathbb{CP}^2)$ sınıfı yine $\mathbb{CP}^1$ alt manifoldunun Poincaré dualıdır).

Chern sınıfları doğal oldukları için Pontryagin sınıfları da doğaldır ve Whitney Çarpım Kuralı'na uyarlar:

Önerme 6.3.4. $f : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların türevlenebilir bir fonksiyonu olsun. Bu durumda her $E \rightarrow N$ gerçel vektör demeti için

$$p(f^*(E)) = f^*(p(E))$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $E_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, gerçel vektör demetleri ise

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$

olur.

Uyarı 6.3.5. Yönlendirilmiş bir gerçel vektör demetinin Euler ve Pontryagin sınıfları ya da karmaşık bir demetin Chern sınıfları aslında tam sayı katsayılı tekil kohomolojinin elemanlarıdır (bkz. [19, 28, 6, 5]). Bir X topolojik uzayının tam sayı katsayılı tekil kohomolojisi değişmeli bir gruptur ve $H_i(X, \mathbb{Z})$ ile gösterilir. Değişmeli bir grup mertebesi sonlu elemanlar içerebilir. Aslında Euler sınıfı veya Chern sınıfları mertebesi sonlu kohomoloji elemanları olan vektör demetleri vardır. Mertebesi sonlu elemanların yaratabileceği karışıklıklara bir örnek olarak şunu verebiliriz: Tekil kohomolojinin elemanları olarak ele alındığında yukarıda verdiğimiz Whitney Çarpım Kuralı ancak

$$2p(E_1 \oplus E_2) = 2p(E_1) \cdot p(E_2)$$

şeklinde yazıldığında doğru olur.

Türevlenebilir bir M manifoldunun tekil kohomolojisi ile De Rham kohomolojisi arasındaki ilişki De Rham Teoremi olarak bilinen

$$H_{DR}(M) \simeq H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

izomorfizması ile verilir. Bu ünite de ele aldığımız karakteristik sınıflar bu tekil kohomoloji grubunun elemanları olarak tanımlanan sınıfların De Rham izomorfizması altındaki görüntüleridir. Dolayısıyla, bizim incelediğimiz karakteristik sınıfların mertebesi sonlu olan kısımları kırılmıştır ve muhtemel bir bilgi kaybı mevcuttur.

Şimdi bu önermenin bir uygulamasını verelim. $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ bir alt manifold olsun. Bu alt manifoldun normal demetini N ile göstererek,

$$T_*\mathbb{R}^n|_M = T_*M \oplus N$$

vektör demet toplamının toplam Pontryagin sınıfını hesaplayalım: Sol taraftaki demet aşıkardır olduğundan

$$1 = p(T_*\mathbb{R}^n|_M) = p(M) p(N)$$

elde edilir. Başka bir deyişle, $H_{DR}^*(M)$ halkası içinde $p(M)$ ve $p(N)$ elemanları birbirinin çarpmaya göre tersidir. Bunu kullanarak normal demet hakkında oldukça fazla bilgi edinebiliriz. Bunu bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 6.3.6. Önceki örnekte $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3a^2$ olduğunu görmüştük. O halde, eğer $\mathbb{C}P^2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 'nin bir alt manifoldu ise normal demetin Pontryagin sınıfının $H_{DR}^*(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{R}[a]/(a^3)$ halkası içinde şu eşitliği sağladığını görürüz: $1 = (1 + 3a^2) p(N)$. Başka bir deyişle, $p(N) \neq 1$ olmalıdır. Diğer taraftan, eğer $n = 5$ olsaydı N demeti bir boyutlu yönlendirilebilir bir vektör demeti olurdu. Fakat böyle bir demet aşıkardır olduğundan $p(N) = 1$ elde ederdik. O halde, $n \geq 6$ olmalıdır. Alıştırma 16 karmaşık projektif düzlemin $\mathbb{R}^6$ içine bir gömülmesini vermektedir.

Tamamen benzer bir şekilde, $\mathbb{C}P^4$ manifoldunu alt manifold olarak kabul eden bir $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayının en az 12-boyutlu olduğu gösterilebilir (bkz. Alıştırma 18).

Bir sonraki önerme Pontryagin sınıflarının bazılarının Euler sınıfından doğrudan hesaplanabileceğini göstermektedir.

Önerme 6.3.7. Rankı $2k$ olan bir $E \rightarrow M$ yönlendirilmiş gerçel vektör demeti için $p_k(E) = e(E)^2$ eşitliği sağlanır.

Kanıt : $E \otimes \mathbb{C}$ (karmaşık) vektör demetinin gerçel vektör demeti olarak $E \oplus E$ demetine izomorfik olduğu açıktır. Fakat yönlendirmeyi hesaba katmak için yerel çatılarla çalışalım. Yönlendirilmiş E gerçel demetinin yönlendirmeyi veren sıralı bir yerel $\{e_1, \dots, e_{2k}\}$ çatısını alalım. Bu durumda $E \otimes \mathbb{C}$ karmaşık vektör demetinin kanonik yönlendirmesini veren gerçel çatı $\{e_1, ie_1, \dots, e_{2k}, ie_{2k}\}$ olacaktır (bkz. Örnek 2.3.9). Bu çatıyı yönlendirilmiş $E \oplus E$ demetinin çatısı olan $\{e_1, \dots, e_{2k}, ie_1, \dots, ie_{2k}\}$ ile karşılaştırsak yönlendirmeler arasındaki fark $(-1)^{k(2k-1)} = (-1)^k$ olur. Dolayısıyla, yönlü

gerçek vektör demetleri olarak şu eşitlik sağlanır: $E \otimes \mathbb{C} \simeq (-1)^k E \oplus E$. Bu durumda tanımlardan ve Uyarı 6.1.9'dan

$$\begin{aligned} p_k(E) &= (-1)^k c_{2k}(E \otimes \mathbb{C}) \\ &= (-1)^k e(E \otimes \mathbb{C}) \\ &= (-1)^k e((-1)^k E \oplus E) \\ &= e(E \oplus E) \\ &= e(E) e(E) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanır. $\square$

Bu bölümü Pontryagin sayıları ile bitireceğiz. Yönlendirilmiş tıkHz $4n$ -boyutlu bir M manifoldu alalım. Eğer $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0$ tam sayıları $k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = n$ koşulunu sağlıyorsa

$$p_{k_1, k_2, \dots, k_r}(M) \doteq \int_M p_1^{k_1}(M) p_2^{k_2}(M) \dots p_r^{k_r}(M)$$

integrali ile tanımlanan sayıya manifoldun bir Pontryagin sayısı denir. Pontryagin sayıları Euler sayısı gibi birer tam sayıdır (bkz. Alıştırma 17). Şimdi bu manifoldun $(4n+1)$ -boyutlu yönlendirilmiş tıkHz bir W manifoldunun sınırı olduğunu kabul edelim: $M = \partial W$. $\xi \rightarrow M$ bir boyutlu aşık gerçel vektör demeti olmak üzere $T_*W|_M \cong T_*M \oplus \xi$ olduğundan, $p_i(W)|_M = p_i(M)$ (W manifoldunun karakteristik sınıfının içerme fonksiyonu ile M manifolduna geri çekilmesi) olacaktır. Bu durumda Stokes teoreminden

$$\begin{aligned} p_{k_1, k_2, \dots, k_r}(M) &= \int_{M=\partial W} p_1^{k_1}(M) p_2^{k_2}(M) \dots p_r^{k_r}(M) \\ &= \int_{M=\partial W} p_1^{k_1}(W) p_2^{k_2}(W) \dots p_r^{k_r}(W) \\ &= \int_W d(p_1^{k_1}(M) p_2^{k_2}(M) \dots p_r^{k_r}(M)) \\ &= \int_W 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle, yönlendirilmiş tıkHz bir manifoldun sınırı olan bir manifoldun tüm Pontryagin sayıları sıfırdır. Aslında bu teoremin tersi de doğrudur. Fakat kanıtın içeriği bu kitabın kapsamını aştığı için, burada vermeyeceğiz (bkz. [29], s.217).

Teorem 6.3.8 (René Thom). *M yönlendirilmiş tıkHz $4n$ -boyutlu bir manifold olsun. Bu manifoldun tüm Pontryagin sayıları sıfır ise sınırı, M manifoldunun sonlu sayıdaki kopyasının ayrık birleşimi olan, tıkHz yönlendirilmiş bir W manifoldu vardır.*

Karakteristik sınıflar hakkında yazılmış ve en fazla kabul görmüş kaynaklar [29] ve [5] numaralı referanslardır.

6.4 7-Boyutlu Egzotik Küreler

Kitabın son bölümünü Milnor'un ünlü 7-boyutlu egzotik kürelerine ayıracağız. Milnor 1956 yayınladığı [27] numaralı makalesinde 7-boyutlu standart küreye homeomorfik olan ama difeomorfik olmayan manifoldların varlığını kanıtladı ve bu küreleri egzotik olarak adlandırdı (bu kürelerden tam olarak 27 tane olduğu Michel Kervaire ile beraber yaptığı 1963 tarihli bir başka makalede gösterildi). Milnor'a Fields Madalyası kazandıran bu çalışma diferansiyel topolojinin de doğumu olarak kabul edilir.

Bu bölümün tamamında $M = M^7$ türevlenebilir yönlendirilmiş 7-boyutlu tıkHz ve sınırı olmayan bir manifoldu gösterecek. Bu manifoldun

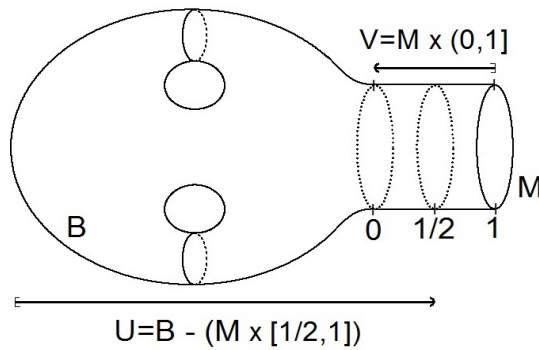
$$H_{DR}^3(M) = 0 = H_{DR}^4(M)$$

koşulunu sağladığını kabul edeceğiz. Ayrıca eğer $\partial B^8 = M^7$ olacak şekilde türevlenebilir ve yönlendirilebilir bir tıkHz B^8 manifoldu varsa bu manifoldun sınırındaki yönlendirme ile uyumlu olacak şekilde yönlendirilmiş olduğunu kabul edeceğiz. Milnor inşa ettiği kürelerin birbirlerine difeomorfik olmadıklarını tanımlamış olduğu $\lambda(M)$ değişmezi yardımıyla göstermiştir.

Yardımcı Teorem 6.4.1. M ve B yukarıdaki gibi olmak üzere

$$H_{DR}^4(B) \rightarrow \mathbb{R}, [\alpha] \mapsto \int_B \alpha^2, [\alpha] \in H_{DR}^4(B),$$

kuadratik formu, $[\alpha]$ kohomoloji sınıfını temsil eden kapalı formun seçiminden bağımsızdır ve dolayısıyla iyi tanımlıdır.



Şekil 6.4: TıkHz destekli Mayer-Vietoris kohomoloji dizisinin açık kümeleri

Kanıt : Kanıt üç adımdan oluşmaktadır. Kanıtın ana hatlarını yazıp boşlukları okuyucuya bırakacağız:

Adım 1) $[\alpha] = [\alpha'] \in H_{DR}^4(B)$ olmak üzere $\alpha - \alpha' = d\beta$, $\beta \in \Omega^3(B)$, şeklinde yazalım. O halde,

$$\int_B \alpha^2 = \int_B \alpha'^2$$

eşitliğini göstermeliyiz. Şimdi Stokes Teoremi'ni kullanarak

$$\int_B \alpha^2 - \int_B \alpha'^2 = \int_M (2\alpha' + d\beta) \wedge \beta$$

olduğunu kolayca gösterilir. Bu durumda yardımcı teoremin kanıtını tamamlamak için β formunun M üzerinde sıfır olduğunu göstermek yeterlidir.

Adım 2) B manifolduna tıkHz destekli kohomoloji Mayer-Vietoris dizisini uygulamak için yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere U ve $V = M \times (0, 1]$ seçelim. O halde, $U \cap V = M \times (0, 1/2)$ olur. Şimdi Teorem 4.3.14'ü kullanarak

$$H_c^k(U \cap V) = H_c^k(M \times (0, 1/2)) \simeq H_c^{k-1}(M) = H_{DR}^{k-1}(M)$$

elde ederiz. Ayrıca, $H_c^k(U \cup V) = H_c^k(B) = H_{DR}^k(B)$ ve $H_c^k(U) \simeq H_c^k(B - M)$ olduğu açıktır. (Aslında sonuncu eşitlik için U ile $B - M$ arasında düzgün bir difeomorfizma olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu detay okuyucuya bırakılmıştır.) Şimdi de Teorem 4.3.18'i kullanarak

$$H_c^k(V, V - M) \simeq H_c^k(M) = H_{DR}^k(M)$$

olduğunu gözlemleyiniz.

TıkHz destekli kohomoloji için bağıl kohomoloji dizisini (bkz. sayfa 228) $(V, V - M)$ ikilisi için yazalım ve yine $H_c^k(V - M) \simeq H_{DR}^{k-1}(M)$ olduğunu kullanarak $H_c^k(V) = 0$ sonucuna ulaşalım.

Adım 3) Bu adımda ise tıkHz destekli kohomoloji Mayer-Vietoris dizisini (bkz. sayfa 231) $B = U \cup V$ birleşimi için yazalım ve daha önceki adımlarda elde ettiğimiz sonuçları kullanarak

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^3(M) \rightarrow H_c^4(B - M) \rightarrow H_{DR}^4(B) \rightarrow H_{DR}^4(M) \rightarrow \cdots$$

tam dizisini elde edelim. Şimdi $H_{DR}^3(M) = 0 = H_{DR}^4(M)$ koşulunu kullanırsak $H_c^4(B - M) \simeq H_{DR}^4(B)$ izomorfizmasını elde ederiz. Bu izomorfizma sayesinde birinci adımda ele aldığımız tüm türevlenebilir formların $M = \partial B$ sınırına kısıtlanışlarının sıfır olduğunu kabul edebiliriz. Son olarak, birinci adımdan dolayı kanıt tamamlanır. $\square$

$B = B^8$ manifoldu üzerinde tanımladığımız bu formun endeksini $\tau(B)$ ile göstereceğiz. Kuadratik formun endeksini şu şekilde hesaplayabiliriz. Bu form bize $H_{DR}^4(B)$ gerçel vektör uzayı üzerinde aşağıdaki eşitlik yardımıyla tanımlanan bir simetrik bilineer form verir: $\langle [\alpha], [\beta] \rangle \doteq \int_B \alpha \wedge \beta$ ve $Q([\alpha]) = \langle [\alpha], [\alpha] \rangle$ olmak üzere

$$Q([\alpha] + [\beta]) = Q([\alpha]) + Q([\beta]) + 2 \langle [\alpha], [\beta] \rangle .$$

Bu simetrik formun herhangi bir dik tabandaki matris gösterimi simetrik olacağından gerçel sayılar üzerinde köşegenleştirilebilir. Bu durumda formun endeksi, $\tau(B)$, elde edilen köşegen matrisin pozitif özdeğerlerinin sayısı ile negatif özdeğerlerinin sayısının farkı olarak tanımlanır. Tanımı gereği $\tau(B)$ bir tam sayıdır ve manifoldun yönlendirmesine duyarlıdır:

$$\tau(-B) = -\tau(B) .$$

Yine aynı kuadratik form kullanılarak B manifoldunun Pontryagin sayısı şu şekilde tanımlanır:

$$q(B) \doteq Q(p_1(B)) = \int_B p_1^2(B) .$$

(Hem birinci Pontryagin sınıfını hem de bu sınıfı temsil eden kapalı formu $p_1(M)$ ile gösteriyoruz.) Sonuç 6.4.7'den dolayı $q(B)$ bir tam sayıdır. Milnor'un $\lambda(M)$ değişmezi aşağıdaki teorem sayesinde $2q(B) - \tau(B)$ tam sayısının (mod 7) denklik sınıfı olarak tanımlanır:

$$\lambda(M) \doteq 2q(B) - \tau(B) \pmod{7} .$$

Teorem 6.4.2. $2q(B) - \tau(B)$ tam sayısının (mod 7) denklik sınıfı B manifoldunun seçiminden bağımsızdır ve sadece M ile belirlenir. Dolayısıyla, $\lambda(M)$ değişmezi iyi tanımlıdır.

Teoremin kanıtına geçmeden önce iki önemli sonucunu ele alalım. Diyelim ki M dördüncü Betti sayısı sıfır olan türevlenebilir yönlendirilmiş tıkHz bir B manifoldunun sınırı olsun: $M = \partial B$ ve $H_{DR}^4(B) = 0$. Bu durumda $2q(B) - \tau(B)$ tam sayısı sıfır olacağından $\lambda(M) = 0$ elde edilir. O halde, aşağıdaki sonucu kanıtlamış olduk.

Sonuç 6.4.3. Eğer $\lambda(M)$ değişmezi sıfırdan farklı ise M manifoldu dördüncü Betti sayısı sıfır olan türevlenebilir yönlendirilmiş tıkHz bir B manifoldunun sınırı olamaz.

B manifoldunun (ya da sınırı olan M manifoldunun) yönlendirmesini değiştirirsek, $\tau(M)$ değişmezine benzer şekilde, $\lambda(M)$ değişmezinin de işaretinin değişeceği açıktır: $\lambda(-M) = -\lambda(M)$. Başka bir deyişle aşağıdaki sonucu elde etmiş olduk.

Sonuç 6.4.4. Eğer $\lambda(M)$ değişmezi sıfırdan farklı ise M manifoldundan kendine yönü değiştiren bir difeomorfizma yoktur.

Teorem 6.4.2'in Kanıtı: Kanıt iki adımdan oluşmaktadır.

Adım 1) B_1^8 ve B_2^8 yönlendirilmiş sınırları M^7 olan türevlenebilir yönlendirilmiş tıkHz manifoldlar olsunlar. B_2 manifoldunun yönünü ters çevirip bu

iki manifoldu ortak sınırları boyunca yapıştırarak türevlenebilir tıkHz ve sınırı olmayan $C = B_1 \cup \partial - B_2$ manifoldunu elde edelim. Bu manifoldun kesişim formunun endeksi manifoldun Pontryagin sayıları cinsinden şu şekilde ifade edilir (bu formülün kanıtı kitabımızın kapsamını oldukça aşmaktadır; bkz. [20], s. 12, 86):

$$\tau(C) = \frac{1}{45} \int_C 7p_2(C) - p_1^2(C) .$$

Buradan

$$45\tau(C) + q(C) = 45\tau(C) + \int_C p_1^2(C) = 7 \int_C p_2(C) \equiv 0 \pmod{7} .$$

En sondaki denklik Pontryagin sayılarının tam sayı olmasının sonucudur. Önerme 6.2.7'den dolayı $p_2(C) = c_4(T_*C \otimes \mathbb{C}) = e((T_*C \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ olur. Başka bir deyişle, bu Pontryagin sayısı gerçel bir demetin Euler sayısıdır ve her Euler sayısı bir alt manifold kesişimine eşit olduğu için tam sayıdır. Diğer Pontryagin sayısı $p_1^2(C)$ için ise bir sonraki paragrafta kanıtlayacağımız $p_1^2(C) = p_1^2(B_1) - p_1^2(B_2)$ eşitliğini ve Sonuç 6.4.7'yi kullanabiliriz. Son olarak, elde ettiğimiz $45\tau(C) + q(C) \equiv 0 \pmod{7}$ eşitliğini iki ile çarparak

$$2q(C) - \tau(C) \equiv 0 \pmod{7}$$

eşitliğini elde ederiz.

Adım 2) Bu adımda yukarıda ele aldığımız manifoldlar için

$$\tau(C) = \tau(B_1) - \tau(B_2) \quad \text{ve} \quad q(C) = q(B_1) - q(B_2)$$

olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için $C = B_1 \cup -B_2$ manifoldunun bileşenlerinin ortak sınırı olan $M = \partial B_1 = -\partial B_2$ alt manifoldunun bir tüp komşuluğunu $N = M \times (-1, 1)$ ele alalım ve $U = B_1 \cup N$, $V = -B_2 \cup N$ açık kümeleri için tıkHz destekli Mayer-Vietoris dizisini yazalım:

$$\cdots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(U \cup V) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \cdots .$$

Şimdi yine Yardımcı Teorem 6.4.1'de olduğu gibi $H_c^k(B_i \cup N) \simeq H_c^k(B_i - M)$, $i = 1, 2$, ve B_i manifoldlarının üçüncü ve dördüncü De Rham kohomolojilerinin sıfır olduğunu hatırlayarak aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^4(C) & \longleftarrow & H_c^4(B_1 - M) & \oplus & H_c^4(B_2 - M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{DR}^4(C) & \longrightarrow & H_{DR}^4(B_1) & \oplus & H_{DR}^4(B_2) \end{array}$$

Bu diyagramdaki tüm oklar birer izomorfizmadır. Aslında yukarıdaki yatay izomorfizmayı yukarıdaki Mayer-Vietoris dizisinden elde etmeyi size alıştırmaya bırakıyoruz. Diğer taraftan, soldaki düşey izomorfizma ise bir eşitliktir. Son olarak, diğer iki düşey izomorfizma da Yardımcı Teorem 6.4.1'in kanıtının

üçüncü adımının bir sonucudur. Ayrıca, yatay izomorfizmalar içermeye fonksiyonlarının ürettiği homomorfizmalardır. Bu değişmeli diyagram bize $H_{DR}^4(C) = H_c^4(C)$ içinden alacağımız her α sınıfının $\beta_i \in H_c^4(B_i - M)$, $i = 1, 2$, olmak üzere $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ olarak tek bir şekilde yazılabileceğini ve β_i sınıflarını temsil eden kapalı formların desteklerinin birbirinden ayrık seçilebileceğini göstermektedir. Dolayısıyla, $\alpha^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ yazabiliriz. O halde, $\tau(C) = \tau(B_1) - \tau(B_2)$ eşitliği kanıtlanmış oldu. $q(C) = q(B_1) - q(B_2)$ eşitliği için ise ayrıca Pontryagin sınıfının doğal olduğunu kullanmalıyız. Başka bir değişle, $p_1(C)$ sınıfını içermeye fonksiyonu yardımı ile B_i üzerine geri çektiğimizde $p_1(B_i)$ sınıfını elde ederiz. Sonuç olarak, $2q(B_1) - \tau(B_1) \equiv 2q(B_2) - \tau(B_2) \pmod{7}$, elde ederiz. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

S^4 Küresi Üzerindeki $\mathbb{R}^4$ -demetleri: Bu alt bölümde S^4 birim küresi üzerinde, kuaterniyon çarpımı yardımıyla tanımlayacağımız $\mathbb{R}^4$ -demetlerinin Euler ve Pontryagin karakteristik sınıflarını hesaplayacağız. Bu ve bundan sonraki bölümde $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ ile kuaterniyonlar vektör uzayını (doğrusunu) göstereceğiz. Bu uzayı standart yönlendirmesiyle düşünelim: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ veya $\{1, i, j, k\}$. Bu doğrunun tipik bir elemanı $p = (a, b, c, d) = a + ib + jc + kd$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şeklinde olup $\mathbb{R}$ -vektör uzayı yapısına sahiptir. Aslında kuaterniyonlar bir cebir oluşturur. İki kuaterniyonun çarpımı

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ ve } ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j,$$

çarpım tablosu ile tanımlanır. Karmaşık sayılarda olduğu gibi $p = (a, b, c, d) = a + ib + jc + kd$ kuaterniyonun eşleniği $\bar{p} = (a, -b, -c, -d) = a - ib - jc - kd$ ve boyu (uzunluğu veya normu) $\|p\| = \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ şeklinde tanımlanır. Birim boylu karmaşık sayılar S^1 birim çemberini oluştururken birim uzunluğa sahip kuaterniyonların kümesi S^3 birim küresidir. Sıfırdan farklı her kuaterniyonun çarpma işlemine göre tersi vardır ve

$$p^{-1} = \frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2}, \quad p \in \mathbb{H}^* \doteq \mathbb{H} - \{0\},$$

ile verilir. Ayrıca, oldukça kullanışlı olan şu eşitliği de görelim: Her $p, q \in \mathbb{H}$ için, $\overline{pq} = \bar{q} \bar{p}$.

Dört boyutlu küreyi iki kuaterniyon doğrunun birleşimi olarak şu şekilde yazalım: $S^4 = \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H}/p \sim \phi(p) = 1/p$, $p \in \mathbb{H}^*$. ϕ fonksiyonu yönü koruduğu için kuaterniyonlar üzerine koyduğumuz yönlendirme küreyi de yönlendirecektir. Örnek 2.1.10 içinde birim küreyi

$$S^2 = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \dot{\cup} \mathbb{C}/z \sim \phi(z) = 1/z, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\},$$

ve teğet demetini de

$$T_*\mathbb{C}P^1 = T_*\mathbb{C} \dot{\cup} T_*\mathbb{C}/(z, w) \sim (\phi(z), \phi'(z)(w)) = (1/z, -w/z^2),$$

$(z, w) \in \mathbb{C} - \{0\} \times \mathbb{C} = T_*(\mathbb{C} - \{0\})$, şeklinde ifade etmiştik. Dört boyutlu kürenin teğet demeti için yine $\phi(p) = 1/p$, fonksiyonun türevini hesaplayalım: Sıfırdan farklı bir $p \in \mathbb{H}^*$ noktası ve herhangi bir $v \in T_p\mathbb{H}^* \simeq \mathbb{H}$ teğet vektörü alalım. İşlemler sırasında kuaterniyon cebirinin değişmeli olmadığını göz önüne alarak dikkatli olmaya çalışacağız. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \phi'(p)(v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(p + hv) - \phi(p)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\bar{p} + h\bar{v})/||p + hv||^2 - \bar{p}/||p||^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{||p + hv||^2} (\bar{p} + h\bar{v}) [||p||^2 - (p + hv)\bar{p}] \frac{1}{h||p||^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{p + hv} [||p||^2 - ||p||^2 - hv\bar{p}] \frac{1}{h||p||^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{p + hv} (-v\bar{p}) \frac{1}{||p||^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{p + hv} v \frac{1}{p} \\
 &= -\frac{1}{p} v \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, teğet demetini

$$T_*S^4 = T_*\mathbb{H} \dot{\cup} T_*\mathbb{H} / (p, v) \sim \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} v \frac{1}{p} \right), \quad p \in \mathbb{H}^*,$$

şeklinde yazabiliriz (türevin önündeki eksi işaretini kaldırdığımızda yine aynı demeti elde ettiğimizi gözlemleyiniz; çünkü $\mathbb{H}^*$ içinde 1 ve -1 noktalarını birbirine bağlayan bir eğri vardır).

Şimdi Milnor'un S^4 üzerinde ele aldığı $\xi_{h,j} \rightarrow S^4$ demetinin tanımını verebiliriz: Herhangi iki h, j tam sayısı için

$$\xi_{h,j} \doteq \mathbb{H} \times \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H} \times \mathbb{H} / (p, v) \sim (1/p, p^h v p^j), \quad p \in \mathbb{H}^*.$$

Bu durumda $T_*S^4 = \xi_{-1,-1}$ demetidir (bizim tanımlarımız ve gösterimimiz Milnor'un orijinal makalesindekilerden biraz farklıdır fakat bu durum herhangi bir karışıklığa yol açmayacaktır). Hem lif hem de taban kuaterniyon vektör uzayını standart yönlendirmesiyle düşünelim.

Uyarı 6.4.5. Eğer $h + j \leq 0$ ise, her iki yerel koordinat sisteminde de,

$$s_i : \mathbb{H} \rightarrow T_*\mathbb{H}, \quad p \mapsto (p, 1 + p^{-h-j}), \quad i = 1, 2,$$

ifadesi ile verilen yerel kesitler $p^j s_1(p) p^h = s_2(1/p)$ eşitliğini sağladığı için $\xi_{h,j}$ demetinin bir kesitini verir. Bu kesiti ve Alıştırma 20'nin sonucunu kullanarak demetin Euler sayısının $-(h + j)$ olduğunun gösterilmesini size alıştırma olarak bırakıyoruz (bkz. Alıştırma 22). Bu sonucun $e(S^4) = 2$ gerçeğiyle uyumlu olduğunu gözlemleyiniz.

Diğer taraftan, $h + j > 0$ durumunda ise küçük bir hileye başvurmak yardımcı olabilir. $\xi_{h,j}$ demetini belirleyen $(p, v) \mapsto (1/p, p^h v p^j)$ yapıştırma fonksiyonu

$$(t, (p, v)) \mapsto \left(\frac{1}{p}, \frac{p^h}{t + (1-t)||p||^h} v \frac{p^j}{t + (1-t)||p||^j} \right), \quad t \in [0, 1],$$

homotopisi yardımıyla $(p, v) \mapsto \left(\frac{1}{p}, \frac{p^h}{||p||^h} v \frac{p^j}{||p||^j} \right)$ yapıştırma fonksiyonuna homotopiktir. Homotopik yapıştırma fonksiyonlarının izomorfik demetler verdiği kolayca gösterilebilir. (Aıştırma 9, Adım 2 istenilen izomorfizmanın nasıl kurulacağını ip uçlarını verir; aıştırmadaki manifoldu $M = S^4$ almak anlamak için yeterli olacaktır. Ayrıca sayfa 169'de bulunan Evrensel Demetler başlığı altındaki açıklamaya da bakınız.) Yapıştırma fonksiyonunu bu şekilde seçmek bize p kuaterniyonunun birim vektör alınabilmesi avantajını verecektir. Şimdi her bir lifin üzerindeki yönlendirmeyi $v \mapsto u = \bar{v}$ koordinat değişikliğiyle tersine çevirelim. Artık p birim boylu olduğu için $p^{-1} = \bar{p}$ ve $p^h v p^j = p^{-j} \bar{v} p^{-h}$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, vektör demetinin (sadece liflerin) yönünü ters çevirmek yapıştırma fonksiyonunu

$$(p, u) \mapsto (1/p, p^{-j} u p^{-h})$$

funksiyonuna homotopik yapacaktır. Başka bir deyişle, $\xi_{h,j}$ demetinin yönünü değiştiren $\xi_{-j,-h}$ demetini elde ederiz: $-\xi_{h,j} = \xi_{-j,-h}$. O halde, $h + j > 0$ durumunda da demetin Euler sayısı yine

$$e(\xi_{h,j}) = -e(-\xi_{h,j}) = -e(\xi_{-j,-h}) = -(h + j)$$

olur.

Yukarıdaki uyarıda kullandığımız tekniği bu sefer hem taban manifoldu S^4 'ün hem de lifin yönünü değiştirerek tekrar uygulayalım. Bu durumda, $(p, v) \in \mathbb{H}^* \times \mathbb{H}$ değişkenlerini $(q, \tilde{v}) = (\bar{p}, \bar{v})$ değişkenleri ile değiştirmek, $\xi_{h,j}$ demetini belirleyen $(p, v) \mapsto (1/p, p^h v p^j)$ yapıştırma fonksiyonunu, $\xi_{j,h}$ demetini belirleyen $(q, \tilde{v}) \mapsto (1/q, q^j \tilde{v} q^h)$ yapıştırma fonksiyonuna homotopik olan bir fonksiyona dönüştürecektir. Dolayısıyla, hem tabanın hem de lifin yönünü değiştirmek $\xi_{h,j}$ demetini $\xi_{j,h}$ 'ye dönüştürür. Şimdi de bu değişimin p_1 karakteristik sınıfını nasıl etkilediğini görelim. $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ lifinin yönünü değiştirmek bu lifin karmaşık sayılarla tensör çarpımının doğal yönlendirmesini değiştirmez (bkz. Örnek 2.3.9). Dolayısıyla, $\xi_{h,j} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow S^4$ demetini

$$f : S^4 = \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H} / \sim \longrightarrow \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H} / \sim = S^4, \quad p \mapsto \bar{p},$$

funksiyonu ile geri çekersek $\xi_{j,h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow S^4$ demetini elde ederiz. Doğrudan hesap yaparak $f^* : H_{DR}^4(S^4) \rightarrow H_{DR}^4(S^4)$, $f^*(a) = -a$ olduğu kolayca

görülebilir ($f^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ olduğunu gözlemlemek yeterlidir). O halde,

$$p_1(\xi_{j,h}) = p_1(f^*(\xi_{h,j})) = f^*(p_1(\xi_{h,j})) = -p_1(\xi_{h,j})$$

elde ederiz.

Sonuç 6.4.6. Her $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için $p_1(\xi_{k,k}) = 0$ olur. Dolayısıyla, $p_1(S^4) = p_1(\xi_{-1,-1}) = 0$ 'dır.

Aslında yukarıda yaptıklarımızı bir adım daha ileri götürebiliriz: Her $p, q \in \mathbb{H}$ için, $\overline{pq} = \overline{q} \overline{p}$ olduğundan sabit bir $p \neq 0$ değeri için, aşağıdaki gibi tanımlanan

$$\psi_1 : \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4, v \mapsto vp,$$

ve

$$\psi_2 : \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4, v \mapsto \overline{vp} = \overline{p} \overline{v},$$

fonksiyonları doğrusal izomorfizmalar uzayı içinde homotopik olmasalar da (determinantlarının işaretleri terstir) bu doğrusal fonksiyonların kompleksifikasyonları

$$\psi_1 \otimes id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^4 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^4, v \mapsto vp,$$

ve

$$\psi_2 \otimes id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^4 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^4, v \mapsto \overline{vp} = \overline{p} \overline{v},$$

karmaşık doğrusal izomorfizmalar uzayı içinde homotopik olacaklardır, çünkü $\mathbb{C}^*$ içinde 1 noktasını -1 noktasına bağlayan bir eğri vardır (bu eğri kullanılarak homotopi yazılabilir). O halde, $id_{\mathbb{C}}$ ile tensör edildikten sonra, $(p, v) \mapsto (1/p, p^h vp^j)$ yapıştırma fonksiyonu $(p, v) \mapsto (1/p, \|p\|^2 p^{h-1} \overline{v} p^{j-1})$ ve dolayısıyla $(p, v) \mapsto (1/p, p^{h-1} \overline{v} p^{j-1})$ yapıştırma fonksiyonuna homotopik olacaktır. Ayrıca, demetin herhangi bir yarısında lifin yönünü değiştirmek kompleksifikasyonu değiştirmeyeceği için, bu yapıştırma fonksiyonu da ($id_{\mathbb{C}}$ ile tensör edildikten sonra)

$$(p, v) \mapsto (1/p, p^{h-1} vp^{j-1})$$

yapıştırma fonksiyonuna homotopik olacaktır. Başka bir deyişle,

$$p_1(\xi_{h,j}) = p_1(\xi_{h-1,j-1})$$

olur. Son olarak bu formülü defalarca uygulayarak $p_1(\xi_{h,j}) = p_1(\xi_{h-j,0})$ elde ederiz. İşimizi bir parça daha kolaylaştırmak için derecesi h olan

$$g_h : S^4 = \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H} / \sim \longrightarrow \mathbb{H} \dot{\cup} \mathbb{H} / \sim = S^4, p \mapsto p^h,$$

fonksiyonu için $g_h^*(\xi_{1,0}) \simeq \xi_{h,0}$ olduğunu gözlemleyiniz (bkz. Alıştırma 21). Bu durumda, $p_1(\xi_{h,0}) = p_1(g_h^*(\xi_{1,0})) = g_h^*(p_1(\xi_{1,0})) = \deg(g_h)p_1(\xi_{1,0}) = hp_1(\xi_{1,0})$ elde ederiz.

Şimdi, $p_1(\xi_{1,0})$ sınıfını hesaplamak için yine küçük bir hileye başvuracağız. Genelde $\xi_{h,j} \rightarrow S^4$ demetleri karmaşık yapı kabul etmeseler de (bkz. Alıştırma 22) $\xi_{1,0} \rightarrow S^4$ demeti üzerinde karmaşık yapı vardır. Bunu görmek için $p, v \in \mathbb{H}$ kuarterniyonlarını

$$p = a + ib + jc + kd = A + jB, \quad A = a + ib, \quad B = c - di \quad \text{ve}$$

$$v = e + if + jg + kh = C + jD, \quad C = e + if, \quad B = g - hi,$$

şeklinde $\mathbb{C}^2$ içinde karmaşık vektörler olarak yazalım. O halde, $p \cdot v$ kuaterniyon çarpımı

$$p \cdot v \longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

karmaşık matris çarpımına dönüşecektir. Bu durumda demetin vektörleri üzerindeki karmaşık yapı

$$(v, z) \mapsto \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} Cz \\ Dz \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C},$$

skaler çarpımı ile verilebilir. S^4 küresi üzerinde integrali bire eşit olan bir 4-formun sınıfını ν ile gösterelim. O halde, bu karmaşık vektör demetinin birinci Pontryagin sınıfı $p_1(\xi_{1,0}) = -2e(\xi_{1,0}) = 2\nu$ olacaktır (bkz. Sonuç 6.3.2). Dolayısıyla, $\xi_{h,j}$ demetinin birinci Pontryagin sınıfı ise

$$p_1(\xi_{h,j}) = p_1(\xi_{h-j,0}) = 2(h-j)\nu$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 6.4.7. *Taban ve lifler yukarıdaki şekilde yönlendirildiğinde*

$$p_1(\xi_{h,j}) = 2(h-j)\nu \quad \text{ve} \quad e(\xi_{h,j}) = -(h+j)\nu \quad \text{olur.}$$

Milnor'un Egzotik Küreleri: Verilen herhangi bir k tek tam sayısı için $h+j = -1$ ve $h-j = k$ olacak şekilde, h, j tam sayıları seçelim. $\xi_{h,j} \rightarrow S^4$ demetinin kuaterniyonik birim disk demetinin tüm uzayını $B_k^8 = B_k$ ve bu manifoldun sınırını oluşturan S^3 demetinin tüm uzayını da $M_k = M_k^7 = \partial B_k^8 \rightarrow S^4$ ile gösterelim. Her iki demet daha önce ele aldığımız şekilde yönlendirilmiş olsunlar. Bu durumda, M_k manifoldunun λ değişmezi aşağıdaki gibidir:

Yardımcı Teorem 6.4.8. *Yukarıdaki gösterimi kullanırsak*

$$\lambda(M_k) = k^2 - 1 \quad (\text{mod } 7)$$

olur.

Kanıt : Herhangi bir vektör demetinin tüm uzayının bir noktasındaki teğet uzayı o noktayı içeren lifin teğet uzayı ile o noktanın üzerinde bulunduğu taban noktasının teğet uzaylarının direkt toplamıdır. Dolayısıyla, herhangi bir $(p, [v]) \in B_k$ noktası için $T_{(p,[v])} = T_p S^4 \oplus T_{[v]}(\xi_{h,j})_p$ olur. Başka bir deyişle, $\pi : B_k \rightarrow S^4$ demet projeksiyonu olmak üzere

$$T_* B_k = \pi^*(T_* S^4) \oplus \pi^*(\xi_{h,j}) .$$

O halde, Whitney Çarpım Kuralı'ndan, $\alpha = \pi^*(\nu)$ olmak üzere,

$$p_1(B_k) = \pi^*(p_1(T_* S^4)) + \pi^*(p_1(\xi_{h,j})) = 0 + 2(h-j)\alpha = 2k\alpha$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan, $h+j = -1$ olduğundan $\xi_{h,j}$ demetinin Euler sınıfı $-(h+j)\nu = \nu$ olur.

İddia: $\int_B \alpha^2 = 1$.

İddianın kanıtı: $\pi^* : H_{DR}^4(S^4) \rightarrow H_{DR}^4(B_k)$ homomorfizması bir izomorfizma olduğu için $\alpha \in H_{DR}^4(B_k)$ kohomolojinin bir üreticidir. Bu disk demetinin sıfır kesitini $S^4 \subset B_k$ ile gösterelim. Bu alt manifoldun Poincaré duali ise $\beta \in H_{DR}^4(B_k)$ olsun. O halde, $\beta = a \alpha$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $\pi : B_k \rightarrow S^4$ demetinin Euler sayısı 1 olduğu için bu kesit kendisini bir noktada keser. Başka bir deyişle

$$1 = S^4 \cap S^4 = \int_{S^4} \beta = \int_{B_k} \beta^2$$

olur. Diğer taraftan, tanımı gereği $\int_{S^4} \alpha = 1$ olduğundan $\beta = \alpha$ ve dolayısıyla

$$\int_{B_k} \alpha^2 = 1 \text{ elde ederiz. } \square$$

Bu durumda, $\tau(B_k) = 1$, $q(B_k) = \int_{B_k} p_1^2(B_k) = 4k^2$ ve dolayısıyla $\lambda(M_k) = 2q(B_k) - \tau(B_k) = 8k^2 - 1 = k^2 - 1 \pmod{7}$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. $\square$

Artık ana sonucu vererek bu bölümü bitirebiliriz.

Teorem 6.4.9. *Her tek $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için M_k manifoldu standart S^7 küresine homeomorfiktir. Diğer taraftan, eğer $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı $k^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$, koşulunu sağlıyorsa M_k manifoldu standart S^7 küresine difeomorfik değildir.*

Kanıt : M_k manifoldu, $\xi_{h,j}$ demetinin içindeki birim küre demetinin tüm uzayı olduğu için

$$M_k = \mathbb{H} \times S^3 \cup \mathbb{H} \times S^3 / (p, v) \sim \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{||p||^{h+j}} p^h v p^j \right) , p \in \mathbb{H}^* ,$$

şeklinde ifade edilebilir. Fakat bizim durumumuzda $h + j = -1$ olduğundan denklik bağıntısı $(p, v) \sim (q, u) \doteq (1/p, ||p|| p^h v p^j)$ halini alır. Milnor manifold üzerinde $F : M_k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu şöyle tanımlıyor: $(p, v) \mapsto \frac{Re(v)}{\sqrt{1 + ||p||^2}}$ ve diğer koordinat sisteminde ise

$$w = q \frac{1}{u} = \frac{1}{p} ||p|| \bar{p}^j \bar{v} \bar{p}^h, \quad ||w|| = \frac{1}{||p||}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{Re(w)}{\sqrt{1 + ||w||^2}} &= \frac{Re\left(\frac{||p||}{p} \bar{p}^j \bar{v} \bar{p}^h\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{||p||^2}}} \\ &= \frac{||p|| Re\left(\frac{||p||}{p} \bar{p}^j \bar{v} \bar{p}^h\right)}{\sqrt{1 + ||p||^2}} \\ &= \frac{Re\left(\bar{p}^{j+1} \bar{v} \bar{p}^h\right)}{\sqrt{1 + ||p||^2}} \\ &= \frac{Re\left(\bar{p}^{h+j+1} \bar{v}\right)}{\sqrt{1 + ||p||^2}} \\ &= \frac{Re\left(\bar{p}^0 \bar{v}\right)}{\sqrt{1 + ||p||^2}} \\ &= \frac{Re(v)}{\sqrt{1 + ||p||^2}}. \end{aligned}$$

Bu fonksiyonun sadece iki tane ve yozlaşmamış kritik noktasının olduğunun kanıtını size bırakıyoruz. O halde, Ünite 3'teki Alıştırma 8, M_k manifoldunun S^7 küresine homeomorfik olduğunu kanıtlar.

Teoremin ikinci kısmı için şu şekilde ilerleyeceğiz. S^7 küresi birim diskin sınırı olduğu için Sonuç 6.4.3'den dolayı $\lambda(S^7) = 0$ 'dır. Diğer taraftan, yukarıdaki yardımcı teoremden $\lambda(M_k) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, kanıt tamamlanır. $\square$

6.5 Alıştırmalar

1. Uyarı 6.1.5'in son kısmında bulunan tümevarım adımını tamamlayınız.
2. Teorem 6.1.8'in kanıtının birinci adımındaki

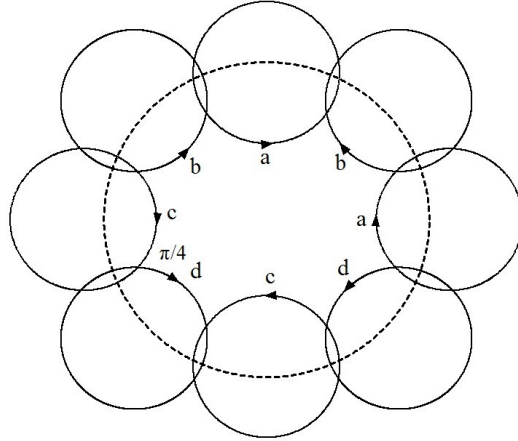
$$dP([\Omega_k^l]) = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial P}{\partial \Omega_k^l} \right) \wedge d\Omega_k^l$$

eşitliğini kanıtlayınız.

3. Herhangi bir Σ yönlendirilebilir yüzeyi üzerinde verilen (x_1, x_2) sıralı koordinat sisteminde ifade edilen bir g Riemann metriği alalım ve Γ_{ij}^k bu metriğin Christoffel sembollerini göstereyin. Bu durumda yüzeyin Euler sınıfı

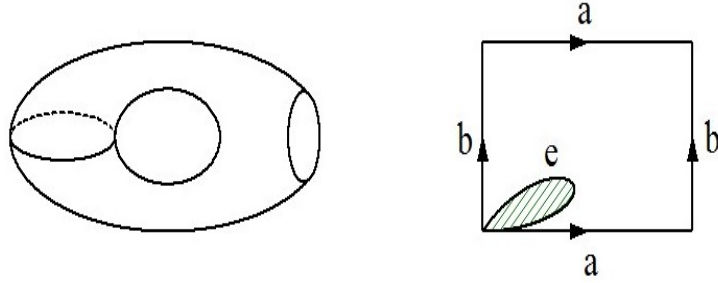
$$\frac{F}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

ile verilir. Hiperbolik yarı düzlem ve Poincaré Diski için yukarıdaki formu hesaplayınız. Şimdi cinsi iki olan tıkHz ve yönlendirilebilir bir yüzey alalım. Bu yüzeyi Poincaré Diski'nin içinde merkezi diskin merkezinde ve kenarları jeodezikler olan eşkenar bir sekizgenin bölüm uzayı olarak görebiliriz. Bunun için sekizgenin büyüklüğünü öyle ayarlayalım ki iç açılarının toplamı 2π olsun. Bu durumda kenarları okların gösterdiği yönde yapıştırırsak sekizgenin köşeleri bize yüzey üzerinde bir iç nokta verir. Ünite 3, Alıştırma 10 ve 11 bize yüzeyin Euler sayısının $2 - 2g = -2$ olduğunu söyler. Bu örneği hangi tıkHz yüzeylere genişletebilirsiniz?

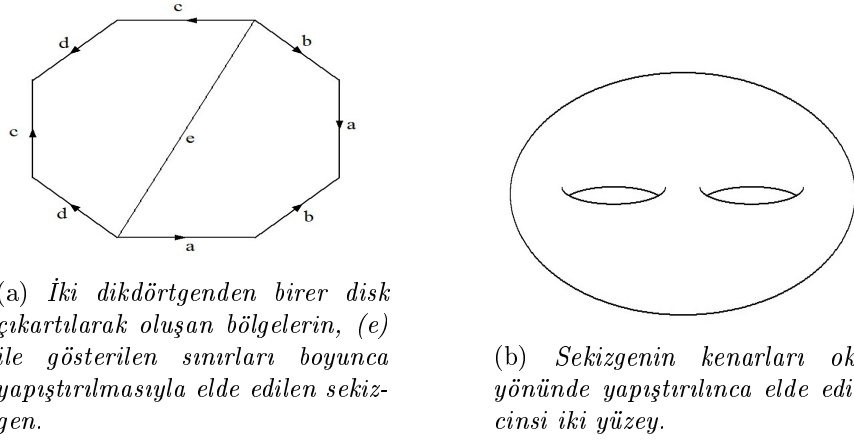


Şekil 6.5: Poincaré Diski'nin içinde her bir iç açısı $\pi/4$ radyan olan düzgün sekizgen; aynı harflerle gösterilen kenarları oklar yönünde yapıştırırsak cinsi iki olan yüzeyi elde ederiz. Sekizgenin alanı 4π 'dir!

Aslında bu yaklaşım Gauss-Bonnet Teoremi'nin bir başka kanıtını verir: Bunun için iki sonuca ihtiyacımız var. Birincisi Ünite 3, Alıştırma 11'de özel bir metrik için verilen açı-alan ilişkisinin her Riemann metriği için doğru olduğunu söyleyen ve Gauss tarafından kanıtlanan teorem. Diğeri ise her yüzeyin bir üçgenleme kabul ettiğini söyleyen ve Radó ([31]) tarafından 1925 yılında kanıtlanan sonuç. Manifoldların üçgenlemesi üzerine kapsamlı bir çalışma için [25] numaralı makaleye bakabilirsiniz.



Şekil 6.6: Torus kenarları oklar yönünde yapıştırılan dikdörtgenin bölüm uzayıdır. Dikdörtgenden disk çıkartmak torustan disk çıkartmaya karşılık gelir.



(a) İki dikdörtgenden birer disk çıkartılarak oluşan bölgelerin, (e) ile gösterilen sınırları boyunca yapıştırılmasıyla elde edilen sekizgen.

(b) Sekizgenin kenarları oklar yönünde yapıştırılınca elde edilen cinsi iki yüzey.

Şekil 6.7

4. Yüzeyler için sayısal eğriliğin Gauss eğriliğinin iki katı olduğunu gösteriniz.

5. Örnek 6.1.10'un içinde yer alan

$$\sigma^*(\omega) = \kappa \, dS$$

eşitliğini kanıtlayınız.

6. Sonuç 6.1.11'in kanıtının 4. adımındaki Gauss gönderiminin yerel olarak yönü koruması veya yönü değiştirmesi ile ilgili iddiayı kanıtlayınız.

7. Üç boyutlu Öklit uzayına gömülmüş her tıkız yüzeyin Gauss eğriliği pozitif olan bir noktası mutlaka vardır, kanıtlayınız.

8. $P : M \rightarrow N$ türevlenebilir manifoldların bir örtü uzayı olsun. Eğer N üzerinde bir Riemann metriği varsa bu metriği P yerel difeomorfizması ile M üzerine çekebiliriz. Bu durumda P bir yerel izometri olur. Gauss-Bonnet Teoremi'ni kullanarak iki boyutlu küre veya torusun herhangi sonlu bir örtü uzayının yine küre veya torus olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan, $h \geq 2$ olmak üzere $P : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ yönlendirilmiş tıkız yüzeylerin derecesi $\deg(P) = n$ olan bir örtü uzayı olsun. Alıştırma 3'de önerildiği gibi Σ_h üzerine eğriliği her noktada -1 olan hiperbolik metrik koyalım. $P : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_h$ yerel difeomorfizmasını kullanarak Σ_g üzerinde de eğriliği her noktada -1 olan metriği oluşturalım. O halde, Gauss-Bonnet Teoremi'nden dolayı

$$2 - 2h = \chi(\Sigma_h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_h} \kappa_{\Sigma_h} dS_{\Sigma_h} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_h} dS_{\Sigma_h} = -\frac{1}{2\pi} \text{Alan}(\Sigma_h)$$

ve

$$2 - 2g = \chi(\Sigma_g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_g} \kappa_{\Sigma_g} dS_{\Sigma_g} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_g} dS_{\Sigma_g} = -\frac{1}{2\pi} \text{Alan}(\Sigma_g)$$

elde ederiz. Ayrıca, yukarıdaki metrik aşağıdan P ile geri çekilen metrik olduğundan, P yerel difeomorfizması alan koruyandır. Son olarak, Σ_h içinde alınan yeterince küçük her diskin üzerinde aynı alana sahip tam olarak $\deg(P) = n$ tane disk olacağından $\text{Alan}(\Sigma_g) = n \text{Alan}(\Sigma_h)$ elde edilir. Bu durumda, daha önce elde ettiğimiz

$$2 - 2g = n(2 - 2h) \quad \text{ya da} \quad g = 1 + n(h - 1)$$

formülünü tekrar elde etmiş olduk.

şimdi M üzerinde bir G -grup etkisi olduğunu ve örtü uzayının bir bölüm uzayı olduğunu kabul edelim:

$$P : M \rightarrow M/G = N .$$

Bu durumda N üzerindeki her metrik M üzerinde G -grubunu izometrilерinin bir alt grubu kabul eden bir metrik verir. Diğer taraftan, M üzerindeki bir metrik G -grubu altında değişmez ise N üzerinde bir metrik verir, öyle ki bu metriği tekrar M üzerine çekersek yine M üzerindeki metriği elde ederiz.

Son olarak, G -grubunun sonlu olması durumunda M üzerindeki her metriğin G -etkisi altında ortalamasını alarak M üzerinde G -değişmez bir metrik bulabiliriz. Aslında $\mathcal{R}(M)$ ile M manifoldu üzerindeki tüm Riemann metriklerinin uzayını ve $\mathcal{R}(M)^G$ ile de bu metriklerden G -grubunu izometrileri olarak kabul edenleri gösterirsek

$$\mathcal{R}(M) \longrightarrow \mathcal{R}(M)^G, \quad g \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{\phi \in G} \phi_*(g), \quad g \in \mathcal{R}(M),$$

gönderimi bir küçültme fonksiyonudur ($\mathcal{R}(M)$, M üzerinde tanımlı Riemann metrikler kümesinin uygun bir topoloji ile donatıldığını kabul ediyoruz).

9. $\phi : \mathbb{C}P^r \times \mathbb{C}P^s \rightarrow \mathbb{C}P^{r+s}$, ve $J : M \rightarrow M \times M$, $p \mapsto (p, p)$, $p \in M$, sayfa 327 ve sonrasında tanımlanan fonksiyonlar olsun.

$$\mathbb{C}P^\infty \doteq \lim_{r \geq 0} \mathbb{C}P^r = \cup_r \mathbb{C}P^r$$

sonsuz birleşimi gösterebilirsin. Burada limiti doğal $\mathbb{C}P^r \rightarrow \mathbb{C}P^{r+1}$ içermesi fonksiyonları yardımıyla kuruyoruz (bkz. Ünite 1, Alıştırma 1). Eğer $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^r \subseteq \mathbb{C}P^\infty$ ve $g : M \rightarrow \mathbb{C}P^s \subseteq \mathbb{C}P^\infty$ iki fonksiyon ise bu iki fonksiyonun çarpımı

$$f \cdot g \doteq \phi(f, g)$$

ile tanımlanır. Yine $n = \dim M$ ve $s, r \leq k$ olsun. Bu durumda, $f \cdot g$ çarpım fonksiyonu Önerme 6.2.2'nin $2(k+1) > n+1$ koşulundan dolayı $\mathbb{C}P^k$ içine giden bir fonksiyona homotopiktir; kanıtlayınız. Bu işlemin homotopi sınıfları üzerinde değişmeli bir grup oluşturduğunu gösteriniz. $[f : M \rightarrow \mathbb{C}P^\infty]$ homotopi sınıfının grup işlemine göre tersi $[\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{C}P^\infty]$ eşlenik fonksiyonunun homotopi sınıfı ile verilir. Son olarak Önerme 6.2.2'yi aşağıda verilen adımları izleyerek kanıtlayınız (ayrıca bkz. sayfa 169):

Adım 1) $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$, $p \mapsto f(p) = [s_0(p) : \cdots : s_N(p)]$ ve $g : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$, $p \mapsto g(p) = [r_0(p) : \cdots : r_N(p)]$, verilen bir $\pi : L \rightarrow M^n$ karmaşık doğru demetinin iki sınıflandırma fonksiyonunu olsun. Demeti

$$L|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C}$$

yerel çarpımları şeklinde yazalım. Kesitleri $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde fonksiyonlar olarak görelim.

$$\phi_f : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}, p \mapsto (s_0(p), \cdots, s_N(p)), p \in U_i, \text{ ve}$$

$$\phi_g : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{N+1} - \{0\}, p \mapsto (r_0(p), \cdots, r_N(p)), p \in U_i,$$

fonksiyonlarının doğrusal homotopisi, $\phi_f(p) = -\phi_g(p)$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda iyi tanımlı olmayacaktır. Bu zorluğu aşmak için sınıflandırma fonksiyonlarını sıfır kesitleriyle genişletelim:

$$f : M \rightarrow \mathbb{C}P^{2N+1}, p \mapsto f(p) = [s_0(p) : \cdots : s_N(p) : 0 : \cdots : 0]$$

ve

$$g : M \rightarrow \mathbb{C}P^{2N+1}, p \mapsto g(p) = [r_0(p) : \cdots : r_N(p) : 0 : \cdots : 0].$$

Ayrıca

$$h : M \rightarrow \mathbb{C}P^{2N+1}, p \mapsto h(p) = [0 : \cdots : 0 : s_0(p) : \cdots : s_N(p)]$$

sınıflandırma fonksiyonunu tanımlayalım. şimdi ϕ_h fonksiyonunun hem ϕ_f fonksiyonuna hem de ϕ_g fonksiyonuna homotopik olduğu açıktır. Son olarak bu homotopilerin $\xi_{2N+1} \rightarrow \mathbb{C}P^{2N+1}$ demet izdüşüm fonksiyonu ile bileşkesini alarak f ve g fonksiyonlarını birbirine bağlayan homotopiyi elde ederiz. Dolayısıyla, her bir karmaşık doğru demeti tek bir (sınıflandırma fonksiyonu) homotopi sınıfı belirler.

Adım 2) Homotopik $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ ve $g : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ fonksiyonlarının belirlediği $f^*(\xi_N)$ ve $g^*(\xi_N)$ demetlerinin izomorfik olduğunu görelim. Homotopiyi

$$f_t : M \rightarrow \mathbb{C}P^N, (p, t) \mapsto [s_0(p, t) : \cdots : s_N(p, t)],$$

$f_0 = f$, $f_1 = g$ şeklinde yazalım. İlk önce M manifoldunun tıkız olduğunu kabul edelim. Manifold tıkız olduğu için $[0, 1]$ aralığını sonlu sayıdaki $[a_i, b_i]$ aralıklarının birleşimi olarak yazabiliriz, öyle ki bu aralıklardan herhangi birisi için

$$M \times [a, b] = \cup_i U_i \times [a, b],$$

şeklinde yazılır ve her $(p, t) \in U_i \times [a, b]$ için $s_i(p, t) \neq 0$ eşitsizliği sağlanır. Kanıtı bitirmek için $f_a^*(\xi_N)$ ve $f_b^*(\xi_N)$ demetlerinin izomorfik olduğunu göstermek yeterlidir. Bu iki demet arasındaki izomorfizmayı her bir U_i açık kümesi üzerinde şu şekilde tanımlayalım:

$$\psi_i(p) : f_a^*(\xi_N)_p \rightarrow f_b^*(\xi_N)_p, v \mapsto \psi_i(p)(v) \doteq \frac{s_i(p, b)}{s_i(p, a)} \cdot v.$$

Diğer taraftan herhangi bir $t \in [a, b]$ değerı için, $f_t^*(\xi_N)$ demetinin $U_i \times \{t\}$ ve $U_j \times \{t\}$ açık kümelerine kısıtlanışları arasındaki geçiş fonksiyonu

$$v \mapsto \psi_{ij}(p, t)(v) \doteq \frac{s_j(p, t)}{s_i(p, t)} \cdot v$$

ile verilir. Son olarak

$$\psi_j(p, \psi_{ij}(p, a)(v)) = \frac{s_j(p, b)}{s_i(p, a)} \cdot v = \psi_{ij}(p, b)(\psi_i(p)(v))$$

olduğundan kanıt tamamlanır. Manifoldun tıkız olmadığı durumun kanıtını okuyucuya bırakıyoruz.

10. Yukarıdaki alıştırmayı gerçel projektif uzay için tekrar ediniz. Bu durumda $\mathbb{R}P^\infty$ uzayı gerçel doğru demetlerinin sınıflandırma uzayı olacaktır. $[M, \mathbb{R}P^\infty]$ homotopi sınıflarının kümesi bir 2-grup oluşturur. Başka bir deyişle birim eleman dışındaki her elemanın mertebesi ikidir.
11. Önerme 6.2.4'ü kanıtlayınız.

12. Teorem 6.2.5'i kanıtlayınız. Bunun için ilk önce sayfa 329'de oluşturduğumuz yapıları hatırlayalım: $\pi^\circ : E \rightarrow M$ $1 < r$ -boyutlu bir vektör demeti olmak üzere ve bu demetin projektivizasyonunu

$$\mathbb{C}P^{r-1} \rightarrow P(E) \rightarrow M$$

ile gösterelim. Ayrıca $\pi : P(E) \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonu yardımıyla $\pi^\circ : E \rightarrow M$ vektör demetinin geri çekmesinin

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow \pi^*(E) \rightarrow Q_1 \rightarrow 0$$

şeklinde bir tam diziye oturduğunu görmüştük. Başka bir deyişle,

$$\pi^*(E) \simeq L_1 \oplus Q_1$$

karmaşık vektör demeti izomorfizmasını elde ederiz. Burada Q_1 rankı $r-1$ olan bir karmaşık vektör demetidir. Ayrıca $\pi : P(E) \rightarrow M$ izdüşüm fonksiyonunun kohomolojide verdiği bire bir

$$\pi^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(P(E))$$

homomorfizması yardımıyla $H_{DR}^*(P(E))$ cebirinin bir serbest $H_{DR}^*(M)$ -modülü olduğunu görmüştük. Şimdi de $\pi_1 : P(Q_1) \rightarrow P(E)$ projektivizasyonunu kullanarak benzer şekilde

$$(\pi \circ \pi_1)^*(E) \simeq \pi_1^*(L_1 \oplus Q_1) \simeq \pi_1^*(L_1) \oplus L_2 \oplus Q_2$$

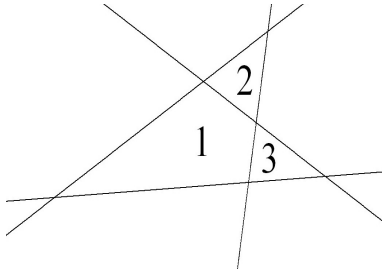
ayrışımını elde ederiz. Aynı nedenlerden dolayı kohomoloji düzeyindeki $(\pi \circ \pi_1)^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(P(Q_1))$ homomorfizmasının bire bir olduğu açıktır. Bu şekilde ilerleyerek elde edeceğimiz Q_{r-1} manifoldu $\pi^\circ : E \rightarrow M$ demetini doğru demetleri toplamına dönüştürecek aradığımız uzay olacaktır: $\phi_k = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_k$, $k = 1, \dots, r-1$, olmak üzere

$$(\pi \circ \phi_{r-1})^*(E) \simeq \phi_{r-1}^*(L_1) \oplus \phi_{r-2}^*(L_2) \oplus \dots \oplus \phi_1^*(L_{r-1}) \oplus L_r.$$

13. Örnek 6.2.10'da $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ içindeki cebirsel eğriler için verilen Derece-Cins Formülü'nü kanıtlayınız.
14. Bu alıştırma şü ana kadar iki farklı kanıtı sunduğumuz Derece-Cins Formülü'nün bir diğer kanıtının ana hatlarını göreceğiz. Şekil 6.8a'daki dört doğrunun denklemleri $l_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$ olsun. Bu durumda aynı şekildeki dört doğru,

$$f(x, y) = l_1(x, y) l_2(x, y) l_3(x, y) l_4(x, y)$$

çarpım polinomu olmak üzere $f(x, y) = 0$ denkleminin çözüm kümesidir. Bu polinomu aynı zamanda $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olarak görelim ve



(a) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, $(x, y) \mapsto (x, y) \mapsto [x : y : 1]$, içinde rastgele dört doğrudan oluşan dejenere kuartik eğri.

	1	2	
	3	4	
	5	6	

(b) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, $(x, y) \mapsto (x, y) \mapsto ([x : 1], [y : 1])$, içinde ikili derecesi (4, 3) olan dejenere eğri.

Şekil 6.8

Sard Teoremi'ni kullanarak bu fonksiyon için bir $\epsilon > 0$ düzgün değeri seçelim. O halde, $f(x, y) - \epsilon = 0$ denkleminin çözümü bir boyutlu türevlenebilir bir manifold olacaktır. Şimdi bu polinomun homojen hali

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_2^4 f(z_0/z_2, z_1/z_2) - \epsilon z_2^4$$

olarak yazılır. Hemen hemen her $\epsilon > 0$ için, $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ eğrisinin $\mathbb{CP}^2$ karmaşık projektif düzlemi içinde türevlenebilir bir yüzey olduğunu gösteriniz. Diğer taraftan, $z_2^4 f(z_0/z_2, z_1/z_2) = 0$ dört karmaşık doğrunun birleşimidir. Bu doğrular $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ içinde yukarıdaki şekilde kesişirler. Şekildeki dejenere eğriyi türevlenebilir yapmak için kullandığımız $\epsilon > 0$ sayısını yeterince küçük seçerek eğrinin tekil noktalarının küçük bir komşuluğu dışında değişmediğini kabul edebiliriz. Diğer taraftan, sadece kesişim noktalarından oluşan tekilliklerin hepsi denklemin yerel olarak

$$z_0 z_1 = 0 \mapsto z_0 z_1 = \epsilon' \neq 0$$

şeklinde değişmesi ile yok olurlar. Eğrinin topolojisi şu şekilde değişir: Her kesişim noktasının her iki küreden birer disk komşuluğu çıkarılır ve oluşan iki sınır çemberi bir silindir ($z_0 z_1 = \epsilon'$ denklemi karmaşık düzlem içinde bir silindir belirler) ile birbirine bağlanır. Başka bir deyişle, Şekil 6.8a'daki dört küre (gerçek doğruların karmaşık projektivizasyonları) kesişim noktaları yakınında birbirine tüplerle bağlanır. Oluşan yeni yüzeyin cinsi üç olan yüzey olduğu açıktır! Aslında Euler sayısı hesabından da oluşan yüzeyin cinsinin üç olduğu görülebilir. Dört kürenin birleşiminden tekil noktaların küçük komşuluklarını atarsak geriye her biri üç sınır bileşenine sahip dört ayrık küre kalır ve bu topolojik uzayın Euler sayısı $4 \cdot (2 - 3) = -4$ olur. Silindirin Euler sayısı sıfır olduğu için bu delikli küreleri tüplerle bağlamak Euler sayısını değiştirmeyecektir. O halde,

deformasyon sonucunda oluşan yüzeyin Euler sayısı -4 ve dolayısıyla cinsi $-4 = 2 - 2g$ denkleminden $g = 3$ olarak bulunur.

Hesaplamış olduğumuz $g = 3$ sayısının l_1, l_2, l_3 ve l_4 doğrularının düzlemde ayırmış oldukları sınırlı bölgelerin sayısı olduğuna dikkat ediniz.

Şekil 6.8b'de ise $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ düzleminde koordinat eksenlerine paralel toplam yedi doğru verilmiştir. Doğruların denklemlerinin çarpımlarının hafifçe deforme edilmesi ile elde edilecek (ikili derecesi $(m, n) = (4, 3)$ olan) eğrinin cinsi yine $(m - 1)(n - 1) = 6$ olacaktır. Şekil 6.8a'dakine benzer şekilde kanıtlayınız. Tahmin edeceğiniz üzere eğrinin cinsi bu doğruların düzlemde ayırdığı sınırlı bölgelerin sayısına eşittir.

15. Karmaşık (projektif) düzlemde derecesi $d \geq 1$ olan genel bir eğri denklemi alalım. Bu eğrinin tekil noktaları, eğriyi veren polinomun katsayılarını değişken olarak kabul eden bir polinom denklem sisteminin çözümüdür. Kanıtlayınız.
16. Karmaşık projektif düzlemin, $\mathbb{C}P^2$, altı boyutlu $\mathbb{R}^6$ Öklit uzayına gömmülebileceğini gösteriniz. Bunun için karmaşık projektif düzlemin

$$\mathbb{C}P^2 = S^5 / \sim = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid \sum_i |z_i|^2 = 1\} / \sim$$

$((z_0, z_1, z_2) \sim \lambda(z_0, z_1, z_2), \lambda \in S^1)$ bölüm uzayı modelini kullanabiliriz. İlk önce ifadesi aşağıda verilen $\tilde{F} : S^5 \rightarrow \mathbb{R}^6$,

$$\tilde{F}(z_0, z_1, z_2) = (|z_0|^2, |z_1|^2, \operatorname{Re}(z_0 \bar{z}_1), \operatorname{Im}(z_0 \bar{z}_1), \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2), \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)),$$

fonksiyonunun kürenin her (z_0, z_1, z_2) noktasında

$$\tilde{F}(z_0, z_1, z_2) = F([z_0 : z_1 : z_2])$$

eşitliğini sağlayan bir $F : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ fonksiyonu verdiğini gözlemleyiniz. Daha sonra bu fonksiyonun bire bir daldırma fonksiyonu olduğunu kanıtlayınız.

17. M^{2n} tıkmaz yönlendirilmiş bir manifold ve $E \rightarrow M$ karmaşık bir vektör demeti olsun. Pontryagin sayılarına benzer şekilde $k_1, k_2, \dots, k_r \geq 0$ tam sayıları $k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = n$ koşulunu sağlıyorsa

$$c_{k_1, k_2, \dots, k_r}(E) \doteq \int_M c_1^{k_1}(E) c_2^{k_2}(E) \cdots c_r^{k_r}(E)$$

integrali ile tanımlanan sayıya $E \rightarrow M$ demetinin bir Chern sayısı denir. Dolayısıyla, Pontryagin sayıları o manifoldun teğet demetinin karmaşık cisim ile tensör çarpımının Chern sayılarından başka bir şey değildir.

Üzerinde karmaşık yapı bulunan çeşitli vektör demetlerinin Chern sayılarını hesaplayınız.

Chern sayılarının birer tam sayı olduğu bilinmektedir. Bazı Chern sayılarının tam sayı olduğu açıktır; örneğın karmaşık doğru demetlerinin toplamı olan demetlerin Chern sınıfları aslında Euler sınıflarının bir polinomudur ve dolayısıyla bu demetlerin Chern sayıları birer kesişim sayısı olarak hesaplanabilir. Başka hangi demetler için Chern sayılarının tam sayı olduğu kolayca gösterilebilir?

18. $\mathbb{C}P^4$ karmaşık manifoldunu bir alt manifold olarak kabul eden bir $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayının en az 12-boyutlu olduğunu gösteriniz.
19. Bu alıştırmada $SO(3)$ ve $SO(4)$ gruplarının topolojisine dair basit gözlemleri sunacağız. İlk iki ılık için [5] (s.195) numaralı kaynaktan yararlanıldım.

- (a) Bir $A \in SO(3)$ matrisi alalım. Matrisin satırlarını R_1, R_2, R_3 ile gösterelim. Matrisin determinantı 1 olduğundan $R_3 = R_1 \times R_2$ dış çarpımına eşittir. Dolayısıyla, matris R_1 ve R_2 ile tamamen belirlenir. R_1 vektörünü S^2 üzerinde bir nokta olarak alırsak, buna dik olan R_2 vektörünü kürenin R_1 noktasındaki teğet uzayda birim uzunlukta bir vektör olarak düşünebiliriz. Başka bir deyişle, kürenin teğet uzayının birim vektör demetinin tüm uzayı $SO(3)$ manifoldudur:

$$\begin{aligned} U(T_*S^2) &= \{(p, v) \in S^2 \times T_pS^2 \mid \|v\| = 1\} \\ &= \{(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1 = \|v\|, p \cdot v = 0\} \\ &= \{(p, v, p \times v) \in (\mathbb{R}^3)^3 \mid \|p\| = 1 = \|v\|, p \cdot v = 0\} \\ &= SO(3). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $SO(3)$ manifoldunun R^6 içine bir gömülmesini elde etmiş olduk.

- (b) Her $A \in SO(3)$ dönme hareketi merkezden geçen bir doğrunun etrafında olur. Bu doğrunun etrafındaki dönme açısını doğrunun üzerindeki noktaların merkeze olan uzaklığı ile belirleyelim. Dolayısıyla, doğrunun üzerinde alınan $[-\pi, \pi]$ aralığı, bu doğruyu eksen olarak kabul eden tüm dönmeleri verecektir. Aslında, aralık üzerindeki herhangi bir noktaya karşılık gelen dönme şu şekilde belirlenir: Alınan noktanın merkeze olan uzaklığı $\theta \in [0, \pi]$ ise bu noktayı merkeze bağlayan ışın etrafında ve saat yönünün tersi istikametinde θ radyanlık dönme aradığımız dönmedir. Böylece π -yarıçaplı kürenin iç bölgesinde kalan her nokta tek bir dönme belirler. Ayrıca, bu kürenin üzerindeki $-\pi$ ve π ile verilen karşılıklı noktalar aynı dönmeyi verir. Başka bir deyişle, $SO(3)$ ile

$$D^3/(p \sim -p, p \in \partial D^3)$$

bölüm uzayı arasında bire bir eşleme vardır. Fakat bu bölüm uzayı $\mathbb{R}P^3$ gerçel projektif uzayıdır. Bu işlemin bir $\phi : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}P^3$ difeomorfizması belirlediğini gösteriniz.

- (c) S^3 küresini birim kuaterniyonlar uzayı olarak ele alalım. Bu durumda $f : S^3 \rightarrow SO(3)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın: Herhangi bir $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü gerçel kısmı sıfır olan bir birim kuaterniyon olarak $v = ai + bj + ck$ şeklinde yazalım. Bu durumda, $p \in S^3$ birim kuaterniyon olmak üzere $f(p)$ rotasyon matrisi

$$f(p)(v) = pvp^{-1}$$

ile tanımlansın. Bunun çekirdeği $\ker(f) = \{\pm 1\}$ olan iyi tanımlı bir grup homomorfizması olduğunu gösteriniz. Ayrıca

$$g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3 = S^3/p \sim -p, \quad p \in S^3,$$

bölüm uzayını göstermek üzere $\phi \circ f = g$ olduğunu kanıtlayınız. Bunun sonucu olarak, $f : S^3 \rightarrow SO(3)$ fonksiyonu derecesi iki olan bir örtü uzayıdır.

- (d) Sayfa 351'da kuaterniyon çarpımını karmaşık matris çarpımı olarak yazmıştık. Bu bilgiyi kullanarak $S^3 = SU(2)$ olduğunu gösteriniz.
- (e) $SO(4)$ grubunun herhangi bir $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix}$ elemanını sütunları ile ifade edelim. Bu durumda, $\psi : SO(4) \rightarrow S^3$, $A \mapsto C_1$, iyi tanımlı örten bir türevlenebilir fonksiyondur. Ayrıca, her $v \in S^3$ vektörünün $\psi^{-1}(v)$ ters görüntüsü bu vektöre dik olan üç boyutlu Öklit uzaydaki tüm sıralı ortonormal çatılardan oluşur. Dolayısıyla, $\psi : SO(4) \rightarrow S^3$ fonksiyonu her bir lifi $SO(3)$ grubuna izomorfik olan bir lif demetidir. Aslında bu demet aşıkâr demettir. Bunu görmek için her bir $C_i = [a \ b \ c \ d]^T$ sütununu $a + ib + cj + dk$ kuaterniyonu olarak görelim. $\bar{C}_i = a - ib - jc - kd$ kuaterniyonun eşleniğini göstermek üzere

$$\Psi : SO(4) \rightarrow S^3 \times SO(3),$$

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \mapsto (C_1, \begin{bmatrix} \bar{C}_1 C_2 & \bar{C}_1 C_3 & \bar{C}_1 C_4 \end{bmatrix}),$$

istenilen demet izomorfizmasını verir. Burada $\bar{C}_1 C_s$, $s = 2, 3, 4$, kuaterniyon çarpımlarının gerçel kısımları sıfırdır ve dolayısıyla bu kuaterniyonları $\mathbb{R}^3$ içinde birim vektörler olarak görebiliriz. Elde edilen 3×3 'lük matrisin ortogonal olduğunun gösterilmesini, diğer detaylarla beraber, size bırakıyoruz.

- (f) Yukarıdaki (c) şıkında ele aldığımız $f : S^3 \rightarrow SO(3)$ fonksiyonunu kullanarak derecesi yine iki olan bir örtü uzayı yazabiliriz:

$$F : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times SO(3), \quad (p, q) \mapsto (p, f(q)).$$

$\Psi^{-1} \circ F : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ fonksiyonunun açık ifadesini yazınız.

20. Karmaşık sayılarda olduğu gibi kuaterniyon cebirinde tanımlanan

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, x \mapsto x^n, x \in \mathbb{H},$$

fonksiyonunun topolojik derecesinin n olduğunu gösteriniz. Aslında bu sonuç 1944 yılında Eilenberg ve Niven tarafından daha genel haliyle kanıtlanmıştır (bkz. [12]). Bunun için ilk önce $i \in \mathbb{H}$ kuaterniyon sayısının bu fonksiyonun bir düzgün değeri olduğunu ve ters görüntüsünün tam olarak n noktadan oluştuğunu gösteriniz. Daha sonra her bir ters görüntü noktasında fonksiyonun yön koruyan (Jakobiye'nin pozitif işaretli) olduğunu gösteriniz.

Eilenberg ve Niven bu sonucu şu şekilde genelliyor: $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{H}^*$ sıfırdan farklı kuaterniyon sayılar olmak üzere

$$g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, x \mapsto a_0 x a_1 \cdots x a_n + h(x), x \in \mathbb{H},$$

fonksiyonunu düşünelim öyle ki, $h(x)$ derecesi n 'den küçük monomiyallerden oluşsun. Bu fonksiyonun f fonksiyonuna düzgün bir homotopi yardımıyla homotopik olduğunu göstererek $\deg(f) = \deg(g) = n$ eşitliğini kanıtlayınız.

21. $g_h : S^4 = \mathbb{H} \cup \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{H} = S^4$, $p \mapsto p^h$, fonksiyonu için $g_h^*(\xi_{1,0}) \simeq \xi_{h,0}$ olduğunu kanıtlayınız.
22. Dört boyutlu kürenin teğet demetinin üzerinde karmaşık yapı bulunmadığını gösteriniz. Küre üzerinde tanımladığımız $\xi_{h,j}$ demetinin Euler sayısının $-(h+j)$ olduğunu kanıtlayınız. Bu demetlerden hangileri üzerinde karmaşık yapı olabilir?
23. Karmaşık projektif düzlemden 4-boyutlu küreye aşağıdaki ifade ile tanımlanan $\xi : \mathbb{C}P^2 \rightarrow S^4$,

$$\xi([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{2\bar{z}_0 z_1}{\|z\|^2}, \frac{2\bar{z}_0 z_2}{\|z\|^2}, \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_0|^2}{\|z\|^2} \right),$$

fonksiyonunu düşünelim. Burada $z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ karmaşık vektörünün boyunu $\|z\|^2 = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2$ ile gösteriyoruz. Ayrıca küreyi aşağıdaki gibi ifade edeceğiz:

$$S^4 = \{(w_1, w_2, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |w_1|^2 + |w_2|^2 + t^2 = 1\}.$$

Fonksiyonun $\xi([0 : z_1 : z_2]) = (0, 0, 1)$ koşulunu sağladığını ve derecesinin ± 1 olduğunu gösteriniz. Karmaşık projektif düzlem üzerinde verilen her n tam sayısını birinci Pontryagin sayısı olarak kabul eden bir dört boyutlu gerçel vektör demeti vardır, kanıtlayınız. Bu demetlerden hangileri üzerinde karmaşık yapı olabilir?

24. Yukarıda ele aldığımız $\xi_{1,0} \rightarrow S^4$ demetinin birinci Pontryagin sınıfını hesaplamak için doğrudan tanımları kullanmayı deneyebiliriz. Herhangi bir $\pi_0 : E \rightarrow S^4$ $\mathbb{R}^4$ -demetinin birinci Pontryagin sınıfının demetin kompleksifikasyonunun, $\pi_1 : E_{\mathbb{C}} \rightarrow S^4$, ikinci Chern sınıfının -1 katı olduğunu biliyoruz: $p_1(E) = -c_2(E_{\mathbb{C}})$, $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Chern sınıflarını hesaplamak için ise ilk önce $\pi_1 : E_{\mathbb{C}} \rightarrow S^4$ demetinin her bir lifi $\mathbb{C}P^3$ olan projektivizasyonunu düşünmeliyiz: $\pi : P(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow S^4$. Daha sonra $\pi^*(E_{\mathbb{C}})$ demetinin $L \rightarrow P(E_{\mathbb{C}})$ kanonik alt doğru demetini oluşturup, bu demetin dualinin birinci Chern sınıfını $a = c_1(L^*) = -c_1(L) \in H_{DR}^2(P(E_{\mathbb{C}}))$ olarak yazalım. S^4 küresi üzerinde integrali bire eşit olan bir 4-formun sınıfını $\pi : P(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow S^4$ ile geri çekelim ve her iki sınıfı da ν ile gösterelim. Leray-Hirsch Teoremi'nden $H_{DR}^*(P(E_{\mathbb{C}}))$ kohomolojisinin aşağıdaki şekilde verildiğini gösteriniz:

$$H_{DR}^0(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle 1 \rangle \simeq \mathbb{R}, \quad H_{DR}^2(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle a \rangle \simeq \mathbb{R},$$

$$H_{DR}^4(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle a^2, \nu \rangle \simeq \mathbb{R}^2, \quad H_{DR}^6(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle a^3, a\nu \rangle \simeq \mathbb{R}^2,$$

$$H_{DR}^8(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle a^2\nu \rangle \simeq \mathbb{R}, \quad H_{DR}^{10}(P(E_{\mathbb{C}})) = \langle a^3\nu \rangle \simeq \mathbb{R}.$$

Demetin Chern sınıfları tamamen

$$a^4 + c_1(E_{\mathbb{C}})a^3 + c_2(E_{\mathbb{C}})a^2 + c_3(E_{\mathbb{C}})a + c_4(E_{\mathbb{C}}) = 0$$

denkleminle tek bir şekilde belirlenir. Taban manifoldu S^4 küresi olduğundan $c_1(E_{\mathbb{C}}) = c_3(E_{\mathbb{C}}) = c_4(E_{\mathbb{C}}) = 0$ ve dolayısıyla

$$a^4 + c_2(E_{\mathbb{C}})a^2 = 0$$

denklemini elde ederiz.

$\pi^*(c_2(E_{\mathbb{C}})) = \lambda\nu$, $\lambda \in \mathbb{R}$, olarak yazılsın. Eğer $a^4 = 0$ ise $c_2(E_{\mathbb{C}}) = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan, eğer $a^4 \neq 0$ ise $c_2(E_{\mathbb{C}}) \neq 0$ olur. Ayrıca a^3 sınıfını temsil eden formu yine a ile gösterirsek $\int_{\mathbb{C}P^3} a^3 = 1$ olduğunu biliyoruz. Son olarak $a^5 = -c_2(E_{\mathbb{C}})a^3 = -\lambda\nu a^3 \neq 0$ denkleminde

$$\lambda = - \int_{P(E_{\mathbb{C}})} a^5$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_1(E) = -c_2(E_{\mathbb{C}}) = -\lambda\nu = \left(\int_{P(E_{\mathbb{C}})} a^5 \right) \nu$$

olarak hesaplanır. Aslında bu integrali hesaplamak yerine, daha geometrik bir yaklaşımla, $a \in H_{DR}^2(P(E_{\mathbb{C}}))$ sınıfının Poincaré dualinin kendisi ile beş defa çapraz kesişimini hesaplamayı düşünebiliriz. Bunun

için aşağıdaki ifade ile verilen $P(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}P^7$ fonksiyonunun bu karmaşık doğru demetinin bir sınıflandırma fonksiyonu olduğunu gözlemleyiniz (bkz. Önerme 6.2.2):

$$\begin{array}{ccc} (p, [v]) & \longrightarrow & [p^j v p^k : \frac{1}{1 + ||p||^{2(h+j)}} v] \\ \downarrow & & \parallel \\ (q, [\tilde{v}]) & \longrightarrow & [\tilde{v} : \frac{||q||^{2(h+j)}}{1 + ||q||^{2(h+j)}} q^j \tilde{v} q^k] \\ \parallel & & \\ (\frac{1}{p}, [p^j v p^k]) & & \end{array}$$

Bunu görmek için, ilk önce $\mathbb{C}P^7$ uzayının ikinci kohomolojisinin üreteci olan bir sınıfın Poincaré dualinin $z_7 = 0$ denklemi ile verildiğini gözlemleyiniz. O halde, bu kohomoloji sınıfını ve Poincaré dualini geri çekip $P(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow S^4$ demetinin lifi olan $\mathbb{C}P^3$ ile kesiştirirsek bu lifin içindeki $v_3 = 0$ hiper düzlemini buluruz. Başka bir deyişle, $\mathbb{C}P^7$ uzayının ikinci kohomolojisinin üretecini geri çekip $\mathbb{C}P^3$ lifine kısıtlarsak bu lifin ikinci kohomolojisinin üreticini buluruz. Diğer taraftan, $P(E_{\mathbb{C}})$ uzayının ikinci kohomolojisinin her elemanı herhangi bir life (dolayısıyla her bir life) kısıtlanışı ile tek bir şekilde belirlenir. Dolayısıyla, bu fonksiyon gerçekten de aradığımız sınıflandırma fonksiyonudur. şimdi $P(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}P^7$ sınıflandırma fonksiyonunun bir gömme fonksiyonu olduğunu gösteriniz. Ayrıca, bu durumda hesaplamak istediğimiz Pontryagin sayısı bu fonksiyonun görüntüsü ile $\mathbb{C}P^7$ içindeki bir $\mathbb{C}P^2$ düzleminin çapraz kesişimi olacaktır. Bu kesişimin ± 2 olduğunu gösteriniz.

25. Gerçel ve karmaşık projektif uzaylar, iki boyutlu tıkız manifoldlar, kürelerin birbirleriyle çarpımları, iki boyutlu küre üzerindeki karmaşık doğru demetlerinin birim çember demetleri gibi kitapta sıkça adı geçen manifoldlar üzerinde Morse fonksiyonları bulunuz. Bu fonksiyonların kritik noktalarındaki Hessian matrislerinin endekslerini hesaplayınız. İndeksler ile manifoldun Betti sayıları arasında bir ilişki görebiliyor musunuz?

Kaynakça

- [1] Dimca Alexandru. *Singularities and Topology of Hypersurfaces*. Springer-Verlag New York, Inc., 1992. Universitex Series.
- [2] Thierry Aubin. *A Course in Differential Geometry*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000. Graduate Studies in Mathematics, no. 27.
- [3] Thomas F. Banchoff. Triple points and surgery of immersed surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 46(3):407–413, December 1974.
- [4] Ethan D. Bloch. *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Birkhauser, Boston, 1997.
- [5] Raoul Bott ve Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag New York, Inc., 1986. Graduate Texts in Mathematics, no. 82.
- [6] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1995. Graduate Texts in Mathematics, no. 139.
- [7] S. Y. Cheng, P. Li ve G. Tian. *A mathematician and his mathematical work, Selected papers of S. S. Chern*. World scientific series in 20th century mathematics, World Scientific, Singapore, New Jersey, 1995, no.4.
- [8] Pierre E. Conner. *Differentiable periodic maps*. Lecture Notes in Math., Springer Berlin, 1979, no.738.
- [9] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [10] Manfredo P. do Carmo. *Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler*. TÜBA, Türkiye Bilimler Akademisi, Şenol Form Matbaacılık, Ankara, 2012. TÜBA Ders Kitapları no. 8, Birinci Baskı, Çeviren: Belgin Korkmaz.
- [11] R. H. Dye. On the Arf invariant. *J. Algebra*, 53:36–39, 1978.
- [12] Samuel Eilenberg ve Ivan Niven. The fundamental theorem of algebra for quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50:246–248, 1944.
- [13] William Fulton. *Algebraic Topology, A First Course*. Springer-Verlag New York, Inc., 1995. Graduate Texts in Mathematics, no. 153.

- [14] Robert E. Gompf ve András I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999. Graduate Studies in Mathematics, no. 20.
- [15] Phillip Griffiths ve Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
- [16] Victor Guillemin ve Alan Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [17] S. M. Gusein-Zade. Integration with respect to the Euler characteristic and its applications. *Russian Math. Surveys*, 65(3):399–432, 2010.
- [18] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., 1977. Graduate Texts in Mathematics, no. 52.
- [19] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [20] Friederich Hirzebruch. *Topological Methods in Algebraic Geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995. 3. Edisyonun 2. düzeltilmiş baskısı.
- [21] L. Christine Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997. Undergraduate Texts in Mathematics.
- [22] W. B. Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer New York, 1997. Graduate Texts in Mathematics, no. 175.
- [23] Alexander Lubotzky. *Groups '93 Galway / St Andrews Galway 1993*, volume 2. London Mathematical Society Lecture Note Series, 1993.
- [24] Ib Madsen ve Jørgen Tornehave. *From Calculus to Cohomology, De Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.
- [25] Ciprian Manolescu. Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 29:147–176, 2016.
- [26] Dusa McDuff ve Dietmar Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [27] John W. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64(2):399–405, September 1956.
- [28] John W. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973. Annals of Mathematical Studies, no. 51.

- [29] John W. Milnor ve James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1974. Annals of Mathematical Studies, no. 76.
- [30] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
- [31] Tibor Radó. Über den begriff der riemannschen flache. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2:101–121, 1925.
- [32] Georges Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222:847–849, 1946.
- [33] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1987. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 3. Baskı.
- [34] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- [35] Michael Spivak. *Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., Huston Texas, 1970. 1. Cilt.
- [36] Michael Spivak. *Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., Huston Texas, 1975. 2. Cilt.
- [37] Tosun Terzioğlu. *Fonksiyonel Analizin Yöntemleri*. Matematik Vakfı: ODTÜ, Ankara, 1998. no. 9.
- [38] Tosun Terzioğlu. *An Introduction to Real Analysis*. Matematik Vakfı: ODTÜ, Ankara, 2008. no. 3.
- [39] Sina Türeli ve Ferit Öztürk. *Morse Kuramı Ders notları*. 2009 Matematik Köyü Yaz Okulu, (<http://www.math.boun.edu.tr/instructors/ozturk/acikders/morse.htm>), 2009.
- [40] Oleg Y. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. *Lecture Notes in Math., Springer Berlin, 1979, no. 1346*, pages 127–138, 1988.
- [41] Julia Viro ve Oleg Y. Viro. Configurations of skew lines. *ar-Xiv:math/0611374*, 2006.
- [42] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag New York, Inc., 1983. Graduate Texts in Mathematics, no. 94.

Semboller

(A_*, d_*)	zincir yapısı, 198
$(D\phi)_p, \Phi'(p), (d\Phi)_p$	fonksiyonun noktadaki türevi, 69
(M, g)	Riemann manifoldu, 140
(M^{2n}, ω)	simplektik manifold, 140
$(V, [,])$	Lie cebiri, 139
(X, τ)	topolojik uzay, 3
(X, d)	metrik uzay, 10
$(\Omega^*(M), d_*)$	de Rham zincir yapısı, 198
$*\omega$	formun yıldızı, 157
$B(x, r)$	x-merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar, 3
$C^0([0, 1])$	aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı, 17
$C^\infty(V, W)$	sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar, 16
$C^k(V, W)$	k-ıncı türevi sürekli olan fonksiyonlar, 16
DF	fonksiyonun türevi, 16
D_M	Poincaré İzomorfizması, 243
$Diff(M)$	difeomorfizmalar grubu, 73
$E(\gamma)$	eğrinin enerjisi, 140
$E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$	vektör demetlerinin toplamı, 164
$E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$	vektör demetlerinin tensör çarpımı, 165
$Exp_p : T_p M \rightarrow M$	üstel fonksiyon, 144
F^∇	eğrilik, 182
F^{-1}	fonksiyonun tersi, 18
$G \cdot p$	noktanın grup etkisi altındaki yörüngesi, 73
$Gr_{\mathbb{F}}(n, k)$	Grassmann manifoldu, 169
$H^*(X, \mathbb{Z})$	Tekil kohomoloji, 341
$H^k(A_*, d_*)$	zincir yapısının kohomolojisi, 198
$H_{DR}^k(M)$	k'inci de Rham kohomoloji, 198
$H_c^k(M)$	tıkız destekli kohomoloji, 222
$H_c^k(M, U)$	tıkız destekli bağıl kohomoloji, 228
$Int(K, L)$	iki alt manifoldun kesişim sayısı, 261
$J : M \rightarrow \text{hom}(E, E)$	vektör demeti üzerinde karmaşık yapı, 167
J_m	$m \times m$ boyutunda Jordan blok matrisi, 43
$L(\gamma)$	eğrinin uzunluğu, 140
$L(p, q)$	Lens uzayı, 103
$L^*(\omega)$	formun geri çekmesi, 35

MB	Möbius şeridi, 77
$M \otimes_R N$	R -modüllerin tensör çarpımı, 33
$O(n)$	$(n \times n)$ -lik ortogonal matrisler uzayı, 80
$P(E)$	vektör demetinin projektivizasyonu, 290
$P : E^{m+k} \rightarrow M^m$	vektör demeti, 162
$P_M(t)$	Poincaré serisi, 277
$Pfaff(\Omega)$	eğrilik formunun Pfaffian'ı, 311
$R(X, Y)$	eğrilik tensörü, 306
R_{kij}^l	eğrilik tensörünün bileşenleri, 306
Ric	Ricci eğriligi, 319
$Rot(\gamma)$	dönme sayısı, 209
$S(n)$	simetrik $(n \times n)$ -lik matrisler uzayı, 69
$SL(n)$	özel doğrusal grup, 122
S^n	n -boyutlu birim küre, 64
S_k	permütasyon grubu, simetrik grup, 33
$T(X, Y)$	burulma tensörü, 176
T^*M	eşteget demeti, 93
T_*M	teğet demeti, 71
T_pM	bir noktadaki teğet uzayı, 67
$Tr(f^*)$	f^* doğrusal dönüşümünün izi, 281
V^*	dual vektör uzayı, 34
$X(p)$	teğet vektör alanı, 71
$X/\sim$	bölüm kümesi, 2
$X/\sim$	bölüm uzayı, 4
$X \times Y$	iki topolojik uzayın çarpımı, 4
$Y - B$	iki kümenin farkı, 3
$[X, Y]$	Lie köşeli parantezi, 134
$[\mu_L]$	alt manifoldun Poincaré duali, 265
$[\nu_L]$	alt manifoldun Poincaré duali, 262
$\Gamma(E)$	vektör demetinin kesitleri, 163
Γ_{jl}^i	Christoffel sembolleri, 140
Λ_f	fonksiyonun sabit noktalarının (işaretli) sayısı, 281
$\Omega^k(U)$	U üzerindeki k -formlar uzayı, 90
$\Omega_c^n(U)$	tıkız destekli k -formlar uzayı, 104
Ω_k^l	eğrilik formu, 182
$\bar{E}$	karmaşık demetin eşleniği, 333
β	topolojinin tabanı, 4
$\chi(M)$	Euler karakteristiği, 247
$\deg(f)$	düzgün fonksiyonun derecesi, 231
$\deg(f)_{p_i}$	düzgün fonksiyonun yerel derecesi, 232
$\det(A)$	A matrisinin determinanı, 36
$\det(E) \rightarrow M$	vektör demetinin determinanı, 166

$\dim(V)$	vektör uzayının boyutu, 36
$\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$	teğet vektörlerin taban vektörleri, 69
$\text{hom}(E_1, E_2) \rightarrow M$	homomorfizmalar demeti, 165
$\text{hom}(V, W)$	Banach uzayları arasındaki sınırlı doğrusal dönüşümler uzayı, 16
$\int_M \omega$	formun manifold üzerinde integrali, 105
κ	Gauss eğriliği, 320
$\ker T$	homomorfizmanın çekirdeği, 36
$\lim_{i \in \Lambda} X_i$	topolojik uzayların düz limiti, 44
$\lim x_n$	bir dizinin limiti, 7
$\mathcal{L}_X$	Lie türevi, 132
$\mathcal{S}$	sayısal eğrilik, 319
$\text{Alt}^k(V)$	değişmeli tensörler uzayı, 34
$\text{Hac}(D^n(r))$	diskin hacmi, 113
$\text{Hac}(S^n(r))$	kürenin hacmi, 113
$\text{Sim}^k(V)$	simetrik tensörler uzayı, 34
$\text{tr} A$	matrisin izi, 55
∇	vektör demeti üzerinde bağlantı, 175
∇f	fonksiyonun gradyan vektörü, 155
$\nu(L)$	alt manifoldun normal demeti, 185
$\omega(f)$	sarılma sayısı, 209
ω_K	geçişme formu, 213, 288
ω_{FS}	Fubini-Study form, 118
∂M	manifoldun sınırı, 107
$\phi^*(\omega)$	formun fonksiyon ile geri çekilmesi, 91
$\prod X_i$	bir topolojik uzay ailesinin çarpımı, 4
$\triangle f$	Laplas operatörü, 159
φ_t	izotopi, 127
$b_k(M)$	Betti sayısı, 247
$c(E)$	toplam Chern sınıfı, 330
$c_i(E)$	Chern sınıfı, 330
$c_{k_1, k_2, \dots, k_r}(M)$	Chern sayısı, 362
$d(x, y)$	iki nokta arasındaki uzaklık, 10
$d\omega$	formun dış türevi, 94
d^∇	vektör demeti üzerinde dış türev, 180
$d_{\text{sup}}(f, g)$	supremum metriği, 14
$d\text{vol}_{(M, g)}$	hacim formu, 156
dx_i	1-form, koordinatın diferansiyeli, 90
$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$	koordinat sisteminde k-form, 90
$e(E)$	Euler karakteristik sınıfı, 267
e^A	matrisin üstel fonksiyonu, 38
e_p	ramifikasyon endeksi, 283

$f \pitchfork L$	fonksiyon ve alt manifold çapraz kesişiyor, 258
$f \pitchfork g$	çapraz kesişen fonksiyonlar, 255
$f^*(E) \rightarrow M$	vektör demetinin geri çekmesi, 168
$f^{-1}(U)$	bir kümenin ters görüntüsü, 3
f_A	A matrisinin karakteristik polinomu, 36
$f_{i_\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge f_{i_\sigma(k)}$	dış çarpım, 35
$p(E)$	toplam Pontryagin sınıfı, 340
$p_i(E)$	Pontryagin sınıfı, 339
$p_{k_1, k_2, \dots, k_r}(M)$	Pontryagin sayısı, 343
$Alt^k(M)$	k-formlar demeti, 93
$l(K, L)$	geçişme sayısı, 214, 288
$\mathbb{C}P^n$	karmaşık projektif uzay, 65
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar cismi, 15
$\mathbb{D}$	Poincaré Disk Modeli, 191
$\mathbb{H}^n$	yarı Öklit uzayı, 107
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar cismi, 53
$\mathbb{R}P^n$	gerçek projektif uzay, 65
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar cismi, 2
$\mathbb{Z}$	tam sayılar halkası, 2
$\mathcal{G}_p$	fonksiyon tohumlarının cebiri, 66

Dizin

- Açık
 - fonksiyon, 7, 46
 - küme, 3
 - örtü, 6
 - yuvar, 10
- Akış
 - vektör alanı, 128
- Alan
 - işaretli, 32
 - vektör, 128
- Alexander Dualite Teoremi, 230
- Alt
 - manifold, 75
 - vektör demeti, 162
- Alt dizi
 - yakınsak, 11
- Alt küme
 - tıkız, 6
 - topolojisi, 3
- Alt manifold
 - kapalı, 75
- Alt örtü, 6
- Analitik
 - fonksiyon, 22
 - karmaşık vektör demetinin kesitleri, 170
- Annulusun kohomolojisi, 206
- Ara Değer Teoremi, 9
- Arf Değişmezi, 293, 295
- Aşkar
 - demet üzerinde bağlantı, 177
 - demetin Christoffel sembolleri, 177
 - vektör demeti, 162
- Atlas
 - topolojik, 63
 - türevlenebilir, 63
- Ayrışım İlkesi, 330
- Bağıntı
 - sıralama, 44
- Bağlantı
 - aşkar demet üzerinde, 177
 - demetlerin tensör çarpımları üzerinde, 181
 - dual demet üzerinde, 177
 - metrik ile belirlenen, 179
- Bağlantılı
 - bileşen, 8
- uzay, 8
- Banach
 - Daraltma İlkesi, 14
 - uzayı, 16
- Basit grup, 286
- Batırma fonksiyonu, 75
- Beşli Yardımcı Teorem, 243
- Betti sayıları, 248
- Bézout Teoremi, 267
- Bianchi Özdeşliği, 314
- Bileşen
 - bağlantılı, 8
 - eğrilik tensörü, 306
- Bilineer fonksiyon, 30
- Birim küre, 65
- Birimin ayrışımı, 80
- Birinci Varyasyon Formülü, 141
- Boyut
 - manifold, 64
- Bölüm
 - fonksiyonu, 2
 - kümesi, 2
 - manifoldu, 73
 - topolojisi, 4
 - uzayı, 4, 75
- Burulma tensörü, 177
- Cartan'ın Sihirli Formülü, 136
- Cauchy dizisi, 11
- Cayley-Hamilton Teoremi, 37, 44, 55
- Cebir
 - Lie, 138
- Cebirin Temel Teoremi, 235
- Chern
 - eşlenik demetin sınıfları, 333
 - karakteristik sınıfları, 326, 339
 - karmaşık projektif uzayın sınıfları, 334
 - sayıları, 362
 - sınıfları, 305
- Christoffel sembolleri, 140, 306
 - Aşkar demetin, 177
 - Dual demetin, 177
 - vektör demeti üzerindeki bağlantının, 172, 175
- Cins formülü, 335, 337
- Çapraz kesişim, 255
- Çarpım

- dış, 35
- tensör, 33
- topolojisi, 4
- Çemberin kohomolojisi, 201
- Çift boyutlu manifoldun Euler karakteristiği, 249
- Daldırma fonksiyonu, 75
- Daraltma
 - fonksiyonu, 14
 - katsayısı, 14
- Davul, 203
- De Rham Teoremi, 341
- Değer
 - düzgün, 76, 256
 - kritik, 76
- Değişmeli
 - bilineer fonksiyon, 31
 - tensör, 34
- Değişmez
 - Arf, 293, 295
- Değişmez çarpan, 39
- Dehn Değişmezi, 53
- Dehn-Hadwiger
 - Teoremi, 53
- Dehn-Sydlar
 - Teoremi, 53
- Demet
 - eşlenik, 333
 - karmaşık doğru, 327
 - lif, 275
 - normal vektör, 165, 186
 - teğet, 70
 - vektör, 161, 268
- Denk metrikler, 10
- Denklem
 - integral, 26
 - jeodezik, 140
- Derece
 - cins formülü, 335, 337, 360
 - diskten kendisine fonksiyonun, 237
 - düzgün fonksiyonun, 231
 - fonksiyon, 209
 - kuaterniyon polinomlar, 235, 365
 - küreden küreye derecesi sıfır olan fonksiyonların, 238
 - mod 2, 233, 292
 - örtünün, 73
 - polinomların topolojik, 233
 - ters kutupsal fonksiyon, 236
- Derivasyon, 67
- Determinant, 29
 - vektör demetlerinin, 166
- Dış
 - çarpım, 35
 - form, 35
 - form (geri çekme), 35
 - türev, 95
- Difeomorfizma, 18
 - ailesi, 127
- Diferansiyel Denklemlerin Varlık Teklik Teoremi, 26
- Disklerin hacmi, 113
- Dizi
 - Cauchy, 11
 - Fibonacci, 57
 - indirgemeli, 57
 - kısa tam, 216
 - tam, 216
 - tıkız destekli bağıl kohomoloji, 228
 - yakınsak, 11
- Dizisel tıkız, 11
- Doğal yönlendirme, 101
- Döngü koşulu, 162
- Dönme sayısı, 208
- Dönüşüm
 - dual, 35
- Dual
 - demet üzerinde bağlantı, 177
 - demetin Christoffel sembolleri, 177
 - dönüşüm, 35
 - Poincaré, 268
 - uzay, 35
 - vektör demeti, 165
- Düğüm, 213
 - geçişme sayısı, 213
- Düz limit, 44, 53
- Düzgün
 - değer, 76, 256
 - fonksiyon, 7
 - fonksiyonun derecesi, 231
 - nokta, 76
 - sürekli fonksiyon, 13
 - süreksiz etki, 73
- Egzotik küreler, 344
- Eğri
 - cins- g karmaşık, 267
 - enerjisi, 140
 - sabit hızlı, 144
 - uzunluğu, 140
- Eğrilik
 - formu, 182, 309, 311, 314
 - Gauss, 320
 - Ricci, 319
 - sayısal, 319
 - tensörü, 306
 - tensörünün bileşenleri, 306

- Enerji
 - eğrinin, 140
 - fonksiyoneli, 140
- Eşitlik
 - Jacobi, 138
 - Yanyana Gelme, 335
- Eşitsizlik
 - Üçgen, 10
- Eşlenik
 - demetin Chern sınıfları, 333
 - vektör demeti, 333
- Etki
 - düzgün süreksiz, 73
- Euler
 - gerçel projektif uzayın sayısı, 270
 - karakteristiği, 248, 268
 - karakteristiği, çift boyutlu manifoldun, 249
 - karakteristiği, tek boyutlu manifoldun, 249
 - karakteristiğinin verdiği ölçüm, 248, 253
 - karakteristik sınıfı, 305
 - örtü uzayının karakteristiği, 280
 - sayısı, 268, 269
 - sınıfı, 326
 - sınıfı (torus), 269
- Fark
 - küme, 1
- Fibonacci dizisi, 57
- Fonksiyon
 - C^∞ sınıfından, 16
 - C^k sınıfından, 16
 - açık, 7, 46
 - analitik, 22
 - batırma, 75
 - bilineer, 30
 - daldırma, 75
 - daraltma, 14
 - değişmeli bilineer, 31
 - derece, 209, 231
 - determinant, 29
 - düzgün, 7
 - düzgün sürekli, 13
 - gömme, 7
 - homotopik, 206
 - kapalı, 7
 - koordinat, 64
 - küçültme, 51, 202
 - Lie türevi, 133
 - Morse, 124
 - batırma, 75
 - örtü, 73
 - sınıflandırma, 327
 - standart daldırma, 76
 - standart batırma, 76
 - sürekli, 3
 - tohumu, 67
 - topolojik gömme, 76
 - türevi, 16
 - türevlenebilir, 16, 66
 - üstel, 144
 - vektör demeti yapı, 162
 - yerel çarpım, 162
 - yerel derece, 232
 - yerel sabit, 10
 - zincir, 217
- Form
 - dış, 35
 - eğrilik, 182, 309, 311, 314
 - Fubini-Study, 118
 - geçişme, 103, 114, 123, 288
 - kapalı, 97, 140, 198
 - manifold üzerinde türevlenebilir, 93
 - tam, 97, 198
 - temel, 36
 - türevlenebilir, 90
 - vektör alanı boyunca daraltma, 134
 - vektör demeti üzerindeki bağlantı, 176
- Formül
 - Cartan'ın Sihirli, 136
 - derece cins, 335, 337, 360
 - Künneth, 277
 - Riemann-Hurwitz, 338
 - Whitney Çarpım, 331
- Fourier serileri, 141
- Fubini-Study formu, 118
- Gauss
 - eğriliği, 320
 - gönderimi, 211
 - Yardımcı Teoremi, 147
- Gauss-Bonnet Teoremi, 314, 321
- Geçişme
 - formu, 103, 114, 123, 213, 288
 - sayısı, 208
- Genel doğrusal grup, 145
- Gerçel
 - projektif düzlem, 270, 291
 - projektif uzay, 65
- Gerçel projektif uzay
 - Euler sayısı, 270
 - yönlendirme, 103
- Geri çekme
 - dış form, 35
 - türevlenebilir form, 92
 - vektör demetinin, 169
- Gömme fonksiyonu, 7

- Gradyan vektörü, 155
 Green Teoremi, 111
 Grup
 basit, 286
 difeomorfizmaların oluşturduğu, 128
 Gysin Tam Dizisi, 272, 273
 Hacim
 diskin, 113
 elemanı, 154
 işaretli, 32
 kürenin, 113
 Hausdorff uzay, 5
 Hermityan
 metrik, 308
 norm, 16
 Hilbert'in 3. Problemi, 51
 Homeomorfik, 3
 Homeomorfizma, 3, 6
 Homoloji
 tekil, 64, 265, 298
 Homomorfizma
 vektör demeti, 165
 Homotopi
 denk uzaylar, 206
 fonksiyonların, 206
 Hurwitz Teoremi, 285
 İnce topoloji, 3
 İç çarpım
 vektör demeti üzerinde, 163
 İndirgemeli dizi, 57
 İntegral
 denklemleri, 26
 formların manifold üzerindeki, 104
 lif boyunca, 273
 sıfır boyutlu manifold üzerinde, 106
 vektör alanının, 128
 İşaretli
 alan, 32
 hacim, 32
 uzunluk, 32
 İyi komşuluk, 73
 İzomorfizma
 Thom, 273
 vektör demeti, 162
 İzotopi, 127
 vektör alanının ürettiği, 128
 Jacobi eşitliği, 138
 Jakobiyen
 matrisi, 18, 69
 Jeodezik
 denklemleri, 140
 en kısa eğri, 149
 konveks küme, 151
 matris gruplarında, 145
 Jordan
 Kapalı Eğri Teoremi, 229
 temel form, 43, 56
 Kaba topoloji, 3, 4
 Kapalı
 alt manifold, 75
 fonksiyon, 7
 Fonksiyon Teoremi, 22
 form, 97, 140, 198
 formun kohomoloji sınıfı, 198
 küme, 3
 Karakteristik
 Chern sınıfları, 339
 Euler, 248, 268
 polinom, 37
 Pontryagin sınıfları, 339
 sınıf, 305
 Kardinalite, 47
 Karmaşık
 cins- g eğriler, 267
 doğru demeti, 327
 manifold, 64
 manifold üzerinde özel formlar, 115
 manifoldun doğal yönlendirmesi, 101
 projektif doğru, 308
 projektif düzlem, 270
 projektif uzay, 65, 117
 projektif uzayın Chern sınıfları, 334
 projektif uzayın kohomolojisi, 266
 vektör demetleri, 167
 vektör uzayında yönlendirme, 99
 yüzeylerin Pontryagin sınıfları, 341
 Kesişim
 çapraz, 255
 kendisi ile, 261
 sayısı, 261
 vektör uzayı, 99
 Kesit
 vektör demeti, 163
 Kısmi sıralama, 44
 Killing
 vektör alanı, 190
 Klein kuartik, 286
 Kohomoloji
 annulus, 206
 çemberin, 201
 De Rham, 198
 grubu, 198
 iki boyutlu küre, 207
 karmaşık projektif uzay, 266
 Mayer-Vietoris dizisi, 216

- Möbius Şeridi, 206
- sınıfı, 198
- tekil, 341
- tıkız destekli, 223, 273
- tıkız destekli bağıl, 228
- tıkız manifold, 222, 246
- vektör demeti, 273
- Komşuluk
 - iyi, 73
- Koordinat
 - fonksiyonu, 64
 - sistemi, 64
- Köşegen, 5
 - matris, 36
 - yaklaşımı, 279
- Köşegenleştirme, 36
- Kritik
 - değer, 76
 - nokta, 76
 - nokta (yozlaşmamış), 124
- Kuadratik Form
 - mod 2, 293
- Kural
 - Leibniz, 67
- Kutu topolojisi, 4
- Kuvvetli topoloji, 3
- Küçültme Fonksiyonu Teoremi, 202, 203
- Küme
 - açık, 3
 - fark, 1
 - kapalı, 3
 - ölçümü sıfır, 83
 - yönlü, 44
- Künneth
 - Formülü, 277
 - Teoremi, 275, 277, 279
- Küre
 - birim, 65
 - egzotik, 344
 - kohomoloji, 207
- Kürelerin hacmi, 113
- L'Hopital kuralı, 25
- Laplas operatörü, 159
- Lebesgue sayısı, 13
- Lefschetz Sabit Nokta Teoremi, 281
- Leibniz kuralı, 67
- Lens uzayları, 103
- Leray-Hirsch Teoremi, 275, 326
- Lie
 - alt cebiri, 138
 - cebiri, 138
- Lie türevi, 132
 - fonksiyonun, 133
 - vektör alanının, 133
- Lif boyunca integral, 273
- Lif demeti, 275
- Limit
 - düz, 53
 - topolojik, 44
- Manifold
 - C^k -sınıfından, 63
 - alt, 75
 - boyut, 64
 - bölüm, 73
 - integral, 104
 - karmaşık, 64
 - paralellenebilir, 73
 - Riemann, 140
 - sınırı, 107
 - sınırlı, 107
 - simplektik, 140
 - topolojik, 63
 - türevlenebilir, 63
 - üzerinde türevlenebilir form, 93
 - yönlendirilebilen, 100
 - yönlendirilemeyen, 268
 - yönlendirilmiş, 102
- Manifoldların gömülmesi, 80, 88
- Matris
 - grupları üzerinde jeodezikler, 145
 - Jakobiye, 18, 69
 - köşegen, 36
 - simetrik, 70
 - üstel, 37
- Mayer-Vietoris
 - kohomoloji dizisi, 216
 - tam dizisi, 275
- Metrik
 - bağlantı, 179
 - denk, 10
 - Hermityan, 308
 - Öklit, 10
 - Riemann, 140
 - sınırlı, 10
 - supremum, 15
 - uzay, 10
- Metrik uzay
 - tam, 11
 - tıkız, 11
- Metriklenebilir
 - topoloji, 10
 - uzay, 10
- Minimal polinom, 37
- Morse Fonksiyonu, 124
- Möbius Şeridi, 77, 102
 - kohomolojisi, 206

- n-doğrusal, 32
- Nokta
 - düzgün, 76
 - kritik, 76
 - yozlaşmamış kritik, 124
- Norm
 - Öklit, 16
- Normal
 - demetin sıfır kesiti, 186
 - vektör demeti, 165, 186
- Normal demet
 - Projektif doğrunun düzlem içinde, 170
- Ortogonal grup, 145
- Öklit metriği, 10
- Ölçüm
 - Euler karakteristiği, 248, 253
- Ölçümü sıfır küme, 83
- Örtü
 - açık, 6
 - derece, 73
 - fonksiyonu, 73
 - uzayı, 73, 102
 - uzayının Euler karakteristiği, 280
- Örtü uzayı
 - topolojik, 73
 - yönlendirme, 123
- Özdeğer, 36
- Özdeşlik
 - Bianchi, 314
- Özel doğrusal grup, 145
- Özvektör, 36
- Paralellenebilir manifold, 73
- Pfaffian, 311
- Poincaré
 - Disk Modeli, 191
 - duali, 268
 - İzomorfizması, 231, 242
 - serisi, 277
 - Yardımcı Teoremi, 203
 - Yarı Düzlemi, 182, 191
- Poincaré-Hopf Teoremi, 278
- Polinom
 - derecesi, 233
 - karakteristik, 37
 - minimal, 37
- Pontryagin
 - karakteristik sınıfları, 339
 - karmaşık yüzeylerin sınıfları, 341
 - sınıfları, 305
- Projektif uzay, 65
 - karmaşık, 117
- Ramifikasyon endeksi, 284
- Rasyonel temel form, 42
- Ricci eğriliği, 319
- Riemann
 - bağlantısı, 174, 175
 - manifoldu, 140
 - metriği, 140
- Riemann metriğinin tersi, 155
- Riemann-Hurwitz
 - formülü, 338
 - Teoremi, 283
- Sabit nokta, 14
- Sabit Nokta Teoremi, 203
- Saçılım Teoremi, 112
- Sard Teoremi, 83, 232
- Sarılma sayısı, 208
- Sayı
 - Betti, 248
 - Chern, 362
 - dönme, 208
 - Euler, 268, 269
 - geçişme, 208
 - kendisi ile kesişim, 261
 - kesişim, 261
 - Lebesgue, 13
 - sarılma, 208
- Sayısal eğrilik, 319
- Sembol
 - Christoffel, 306
- Seri
 - Poincaré, 277
 - Taylor, 24
- Sınırlı metrik, 10
- Sıfır boyutlu manifold, 64
 - üzerinde integral, 106
- Sıfır kesit
 - normal demetin, 186
- Sınıf
 - Chern karakteristik, 305, 326
 - Euler karakteristik, 305, 326
 - karakteristik, 305
 - Pontryagin karakteristik, 305
- Sınıflandırma
 - fonksiyonu, 327
 - uzayı, 327
- Sınır manifoldu, 107
- Sınırlı manifold, 107
- Sıralama
 - bağıntı, 44
 - kısmi, 44
- Simetrik
 - matrisler uzayı, 70
 - tensör, 34
- Simplektik group

- mod 2, 293
- Simplektik manifold, 140
- Sistem
 - koordinat, 64
- Standart
 - daldırma fonksiyonu, 76
 - batırma fonksiyonu, 76
 - topoloji, 3
- Stokes Teoremi, 104, 109, 112
- Supremum metriği, 15
- Süreklilik fonksiyon, 3
- Taban
 - teğet uzayı, 67
 - topoloji, 4
- Tam
 - (metrik) uzay, 11
 - form, 97, 198
 - üçgen, 275
- Tam dizi
 - Gysin, 272, 273
 - Mayer-Vietoris, 275
- Taylor
 - açılımı, 24
 - serisi, 24
 - Teoremi, 24
- Teğet
 - demeti, 70
 - uzayı, 67
 - vektörü, 67
- Tek boyutlu manifoldun Euler karakteristiği, 249
- Tekil
 - homoloji, 64, 265, 298
 - kohomoloji, 341
- Temel form, 36
 - Jordan, 43, 56
 - rasyonel, 42
- Tensörler, 32
- Tensör
 - çarpımı, 33
 - değişmeli, 34
 - eğrilik, 306
 - simetrik, 34
- Tensör çarpımı
 - vektör demetlerinin, 166
- Teorem
 - Alexander Dualitesi, 230
 - Ara Değer, 9
 - Beşli Yardımcı, 243
 - Bézout, 267
 - Cayley-Hamilton, 37, 44, 55
 - Cebirin Temel, 235
 - De Rham, 341
 - Dehn-Hadwiger, 53
 - Dehn-Sydler, 53
 - Diferansiyel Denklemlerin Varlık Teklik, 26
 - E. Hopf, 159
 - Gauss'un Yardımcı, 147
 - Gauss-Bonnet, 321
 - Genelleştirilmiş Gauss'un Yardımcı, 147
 - Genelleştirilmiş Gauss-Bonnet, 314
 - Green, 111
 - Hurwitz, 285
 - Jordan Kapalı Eğri, 229
 - Kapalı Fonksiyon, 22
 - Küçültme Fonksiyonu, 202, 203
 - Küneth, 275, 277, 279
 - Lefschetz Sabit Nokta, 281
 - Leray-Hirsch, 275, 326
 - Poincaré İzomorfizma, 231, 242
 - Poincaré Yardımcı, 203
 - Poincaré-Hopf, 278
 - Reeb'in Küre, 191
 - Riemann-Hurwitz, 283
 - Sabit Nokta, 203
 - Saçılım, 112
 - Sard, 83, 232
 - Stokes, 104, 109, 112
 - Taylor, 24
 - Ters Fonksiyon, 18
 - Tüp Komşuluk, 186
 - Ters Fonksiyon Teoremi, 18
 - Ters görüntü, 1
 - Ters kutupsal fonksiyonun derecesi, 236
 - Thom izomorfizması, 273
 - Tıkız
 - alt küme, 6
 - destekli bağıl kohomoloji, 228
 - destekli bağıl kohomoloji dizisi, 228
 - destekli De Rham kohomoloji, 223
 - destekli form, 104
 - destekli kohomoloji, 273
 - dizisel, 11
 - manifoldların kohomolojisi, 222, 246
 - metrik uzay, 11
 - topolojik uzay, 6, 11
 - uzay, 6
 - Tohum
 - fonksiyon, 67
 - Toplam vektör demeti, 164
 - Topoloji, 3
 - alt küme, 3
 - bölüm, 4
 - çarpım, 4
 - ince, 3
 - kaba, 3, 4

- kutu, 4
 - kuvvetli, 3
 - metriklenebilir, 10
 - miras kalan, 3
 - standart, 3
 - tabanı, 4
 - üretilen, 4
 - zayıf, 3, 4
- Topolojicinin sinüs eğrisi, 9
- Topolojik
 - atlas, 63
 - gömme fonksiyonu, 7, 76
 - limit, 44
 - manifold, 63
 - örtü uzayı, 73
 - tıkız uzay, 11
 - uzay, 3
- Torus, 93
 - Euler sınıfı, 269
- Türevlenebilme, 15
- Tüm uzay, 162
- Tüp Komşuluk Teoremi, 186
- Türev
 - dış, 95
 - Lie, 132
 - yönlü, 132
- Türevlenebilir
 - atlas, 63
 - fonksiyon, 16, 66
 - form, 90
 - k-form, 90
 - manifold, 63
 - yapı, 63
- Türevlenebilir form
 - geri çekme, 92
- Uzay
 - bağlantılı, 8
 - Banach, 16
 - bölüm, 4
 - dual, 35
 - gerçek projektif, 65
 - Hausdorff, 5
 - homotopi denkliği, 206
 - karmaşık projektif, 65, 117
 - Lens, 103
 - metriklenebilir, 10
 - örtü, 73, 102
 - projektif, 65
 - sınıflandırma, 327
 - teğet, 67
 - tıkız, 6
 - tüm, 162
 - yol bağlantılı, 8
 - yönlendirme örtü, 123
 - yörünge, 46
- Uzunluk
 - eğrinin, 140
 - fonksiyoneli, 140
 - işaretli, 32
- Üçgen eşitsizliği, 10
- Üretilen topoloji, 4
- Üstel
 - fonksiyon, 144
 - matris, 37
- Vektör
 - alanı, 71, 128
 - alanının akışı, 128
 - alanının integrali, 128
 - demeti, 161, 268
 - demetinin kesiti, 163
 - homomorfizmalarının demeti, 165
 - gradyan, 155
 - teğet, 67
- Vektör alanı
 - Killing, 190
- Vektör alanı boyunca
 - formların daraltılması, 134
 - Lie türevi, 133
- Vektör demeti
 - alt, 162
 - analitik kesitleri, 170
 - aşık, 162
 - determinantı, 166
 - dual, 165
 - geri çekme işlemi, 169
 - izomorfizması, 162
 - kohomoloji, 273
 - tensör çarpımı, 166
 - tensör çarpımları üzerinde bağlantı, 181
 - toplam, 164
 - üzerinde bağlantılar, 171
 - üzerinde burulma tensörü, 177
 - üzerinde Christoffel sembolleri, 172, 175
 - üzerinde iç çarpım, 163
 - üzerinde metrik bağlantı, 179
 - üzerinde Riemann bağlantısı, 174, 175
 - üzerindeki bağlantı formu, 176
 - üzerindeki karmaşık yapılar, 167
 - yapı fonksiyonları, 162
 - yönlendirilebilir, 163
- Vektör uzayı
 - kesişim, 99
 - yönlendirilebilen, 98
- Whitney Çarpım Formülü, 331
- Yakınsak

- alt dizi, 11
- dizi, 11
- Yaklaşım
 - köşegen, 279
- Yanyana Gelme Eşitliği, 335
- Yapı grubunun indirgenmesi, 163
- Yerel çarpım fonksiyonu, 162
- Yerel derece, 232
- Yerel sabit fonksiyon, 10
- Yıldız operatörü, 154, 157
- Yönlendirilebilir
 - manifold, 100
 - vektör demeti, 163
 - vektör uzayı, 98
- Yönlendirilemeyen
 - yüzeyler, 291
- Yönlendirilemeyen manifold, 268
- Yönlendirilmiş manifold, 102
- Yönlendirme
 - doğal, 101
 - gerçek projektif uzay, 103
 - karmaşık vektör uzayı, 99
- Yönlü
 - küme, 44
 - türev, 132
- Yörünge uzayı, 46
- Yuvar
 - açık, 10
- Zayıf topoloji, 3, 4
- Zincir
 - fonksiyonu, 217
 - grupları, 198
 - yapısı, 198

Kitabın Yazımı ile İlgili Notlar

Yaklaşık yirmi yıl önce ülkemiz matematikçileri tarafından da kullanılmaya başlanan L^AT_EX çok gelişmiş bir yazılım olmasına rağmen Türkçe makale veya kitap hazırlama konusunda halen ciddi eksikliklere sahiptir. Bu kitabın yazımı sırasında karşılaştıklarımın bazıları şunlardır:

1. Türkçe karakterlerin yazımı konusundaki zorluklar;
2. Türkçe yazım hatalarının yazılım tarafından otomatik şekilde kontrol edilememesi ve kelimelerin satır sonlarında doğru şekilde bölünmemesi;
3. Türkçe karakterlerin alfabetik sıralamada doğru yerde olmaması nedeniyle dizin hazırlama konusuna yaşanan zorluklar;
4. Şekillerin kitaba yerleştirilmesi.

Bilgisayarlar ve L^AT_EX alanında yeterli bilgi ve beceriye sahip olmayan biri olarak yukarıda bahsettiğim zorlukların sistematik biçimde üstesinden gelme konusunda fikir ortaya koyamam. Diğer yandan, benzer zorluklarla karşılaşan meslektaşlarıma zaman kazandırabilir düşüncesiyle, uzun süren uğraşlar sonunda ulaştığım derme çatma çözümlerden bahsedebilirim.

Aslında birinci madde konusunda herhangi bir çözümüm yok. Bir cümle içinde bile üç beş defa klavyenin dilini Türkçe'den İngilizce'ye ya da İngilizce'den Türkçe'ye değiştirerek yazmak elbette pek kolay olmadı. Benzer şekilde ikinci madde için de bir çözüm bulamadım. Türkçe kelimelerin doğru hecelenmesi için heceleme açıkça yazmak dışında bir yol görünmüyor. Örneğin, satır sonuna gelen ve doğru şekilde bölünmeyen “dosyanın” kelimesini “dos\ – ya\ – nın” olarak yazmalıyız. Ya da daha sistematik bir çözüm için ana dosyanın içine `\begin{document}` komutundan önce `“\hyphenation{dos – ya – nın}”` komutunu koyabiliriz. Bu durumda bütün doküman boyunca “dosyanın” kelimesi ancak gösterdiğimiz yerlerden bölünecektir. Bu işi kitabın en son halinin çıktısını almadan yapmakta fayda olduğu açıktır. Bu kitap için hecelemesini açıkça yazmak zorunda kaldığım kelime sayısı yaklaşık 150 oldu. Kitabın yazımı tamamlandıktan sonra bazı editörlerin Türkçe sözlük ile çalışabildiğini öğrendim. Bu sayede gözden kaçan sayısız yazım hatasını düzeltme fırsatım oldu.

Üçüncü madde için makul bir çözüm bulduğumu söyleyebilirim. Burada

`\index{A@B}`

komutunu kullandım. Bu komut şu şekilde çalışıyor: Program ilk önce dizin içinde İngilizce karakterlerin alfabetik sıralamasına göre (sadece İngilizce karakterle yazılmış olan) A kelimesinin yerini buluyor ve daha sonra dizine A kelimesi yerine B kelimesini yazıyor. Örneğin dizinde

Ters görüntü

ifadesinin doğru yerde çıkması için bu ifadenin geçtiği yere

$\backslash index\{\text{Ters gozruzzntuzz@Ters görüntü}\}$

yazabiliriz. Benzer şekilde dizin içinde

Bölüm
:
kümesi

ifadesinin gözükmesi için

$\backslash index\{\text{Bozluzzm@Bölüm!kuzzmesi@kümesi}\}$

yazarız. Fikir gerçekten basit: Örneğin, dizine koymak istediğimiz bir kelimenin içinde $\check{c}$ harfi geçiyorsa bu harf yerine cz yazıyoruz ve böylece alfabetik sıralama yapılırken sıra cz ikilisine gelince, program bu kelimeyi c harfi ile d harfinin arasına koyuyor. Aslında aşağıdaki tablo B kelimesi içindeki Türkçe karakterlerin A içinde nasıl yazılması gerektiğini gösteriyor:

Dizin Yazma Sözlüğü

A	cz	gz	hz	i	oz	sz	uzz
B	ç	ğ	ı	İ	ö	ş	ü
A	CZ	GZ	HZ	HZZZ	OZ	SZ	UZZ
B	Ç	Ğ	I	İ	Ö	Ş	Ü

Gerekirse harflerin sonuna eklenen z harflerinin sayısını artırabilirsiniz.

Biraz da şekillerden bahsedelim. Şekilleri herhangi bir programda çizebilirsiniz. İnternette ücretsiz olarak indirip kullanabileceğiniz birçok program var. Ben *Graph* isimli programı kullandım. Lisansta öğrendiğiniz analitik geometriyi hatırlamak için oldukça iyi bir fırsat sağlıyor. Şekilleri çizdikten sonra “jpeg” uzantısı ile kaydedebilirsiniz. Daha sonra bu dosyayı bir resim editörü ile açıp boş alanları mümkün olduğunca kırpmakta fayda var. Bu dosyayı yine internet üzerinde ücretsiz bulunan “on line” programlar yardımıyla “eps” dosyasına çevirmeniz gerekiyor. Sonuçta, örneğin, “Figure3.5.jpeg” ve “Figure3.5.eps” isimli iki şekliniz olacak. Son olarak bunları kitabınızın $\text{\LaTeX}$ dosyasını içeren büyük dosyanın içine koyabilirsiniz. Program kitabın “pdf” çıktısı için resimlerin “jpeg”, “dvi” çıktısı için de “eps” dosyalarını kullanacaktır.

Kitabın içine şekil yerleştirme konusunda da bir önerim olacak. Eğer kitap yerine makale yazıyorsanız şekillerinizi istediğiniz ölçülerde metnin içine

yerleştirme konusunda bir zorluk çekmeyeceksiniz. Diğer taraftan doküman sınıfınız `{book}` ise şeklin boyutlarını ayarlamak mümkün olmayacak, çünkü L^AT_EX şekillerin altına yazılacak açıklamaların hangi dilde yazılacağı bilgisini isteyecektir. Bu problemi çözmek için doküman sınıfını

```
\documentclass[11pt,a4paper,turkish]{book}
```

seçebilirsiniz. Fakat L^AT_EX programının Türkçe yazım konusundaki yardımcı unsurları içindeki bazı problemlerden dolayı sistem yine hata mesajı verecektir. Diğer taraftan, doküman sınıfını başka bir dilde, örneğin

```
\documentclass[11pt,a4paper,kuşdili]{book}
```

olarak seçerseniz sistem hata vermeden çalışacaktır. Fakat bu durumda da şekillerin altında, örneğin, **Şekil 3.2** yerine bunun Kuşdili karşılığı olan **Cikfig 3.2** yazacaktır. Bunu düzeltmek için ise

```
\Miktex2.??\tex\generic\babel\kuşdili.ldf
```

veya

```
\Miktex2.??\tex\latex\babel-kuşdili.ldf
```

dosyasını uygun bir editör ile açıp **Cikfig** yerine **Şekil** yazmanız gerekiyor. Aynı şekilde **Kaynakça** ve **Semboller** kelimelerini de Kuşdili karşılıklarının yerine yazmalısınız. Bu değişiklikleri yapabilmek için bilgisayar oturumunu “Administrator” olarak açmanız gerekebilir.

