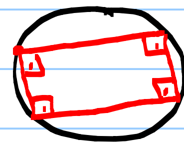
# Eğri Üzerine Dikdörtgen Çizme Problemi:

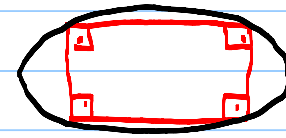
(I) **Problem:** $\gamma$ düzlemde basit kapalı bir eğri olsun. Köşeleri bu eğri üzerinde olan dikdörtgen var mı?

**Örnekler:** 1)



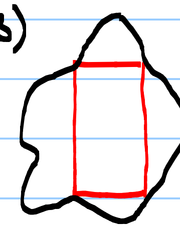
Çember

2)

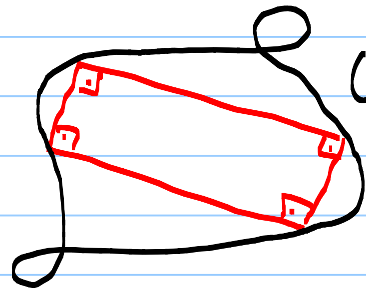


Elips

3)



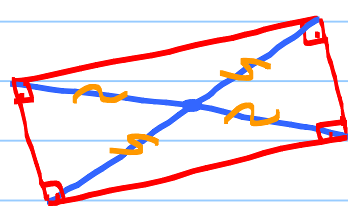
4)



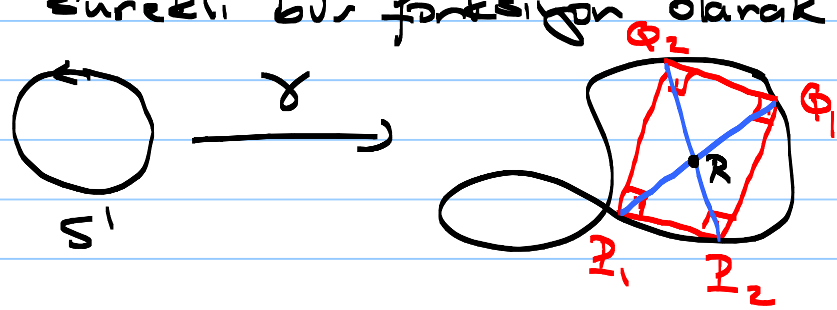
(Bu eğri basit kapalı değil! Buraya daha sonra döneceğiz.)

Problemin Projektif düzlemin $\mathbb{R}^3$'e gömülememesiyle ilgisi:

**Önemli gözlem 1:** Bir dikdörtgenin köşegenleri eşit uzunlukta olan iki doğrudur ve bu doğrular birbirini ortalar.



Şimdi düzlemde kapalı bir $\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2$ eğrisi alalım. Bu eğriyi $S^1$-çemberinden düzleme giden sürekli bir fonksiyon olarak görebiliriz.




O halde, bir dikdörtgen çizebilmek için $\gamma$

eğrisinin üzerinde $(P_1, Q_1)$ ve $(P_2, Q_2)$ gibi iki nokta çifti bulabilmeliyiz öyle ki

1) $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$ ve
2) $|P_1R| = |Q_1R| = |P_2R| = |Q_2R|$ olsun.

$(P,Q)$ eğri üzerinde bir nokta çiftiyse

$P = \gamma(s)$ and $Q = \gamma(t)$ olacak şekilde $s,t \in S^1$ noktaları vardır.

Şimdi aşağıdaki sürekli fonksiyonu düşünelim:

$$\varphi : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi(s,t) = \left( \frac{P+Q}{2}, |PQ|^2 \right) = \left( \frac{\gamma(s)+\gamma(t)}{2}, |\gamma(s)\gamma(t)|^2 \right).$$

Eğer $\gamma(s) = (x_1, y_1)$ ve $\gamma(t) = (x_2, y_2)$ ise

$$\varphi(s,t) = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \right)$$ olur.

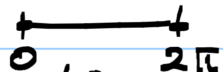
<u>Önemli Gözlem 2</u>: $\varphi(s,t) = \varphi(t,s)$ olduğu için $\varphi : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $S^1 \times S^1 / \begin{smallmatrix} (s,t) \sim (t,s) \\ \forall (s,t) \in S^1 \times S^1 \end{smallmatrix}$ "bölüm uzayına iner."

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \in S^1 \times S^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathbb{R}^3 \\
{[s,t]} \in S^1 \times S^1 / \sim \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

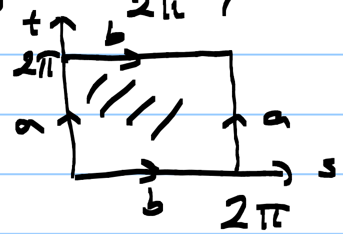
$$\tilde{\varphi}([s,t]) = \varphi(s,t) = \varphi(t,s)$$

Bu durumda $\gamma$ eğrisi üzerinde bir dikdörtgenin var olması $\tilde{\varphi}([s_1,t_1]) = \tilde{\varphi}([s_2,t_2])$ olacak şekilde farklı $[s_1,t_1], [s_2,t_2] \in S^1\times S^1/\sim$ sırasız ikililerinin var olmasına denktir.

Peki $S^1\times S^1/\sim$ bölüm uzayı nedir?

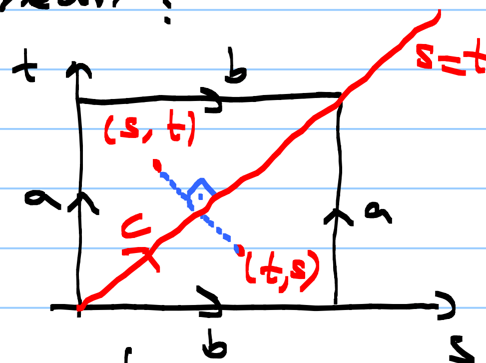
$S^1$:  $/\, 0\sim 2\pi$



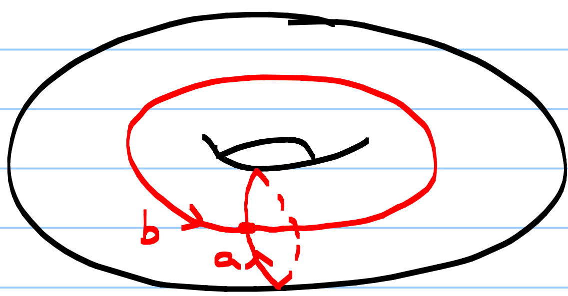
$S^1\times S^1$ : 



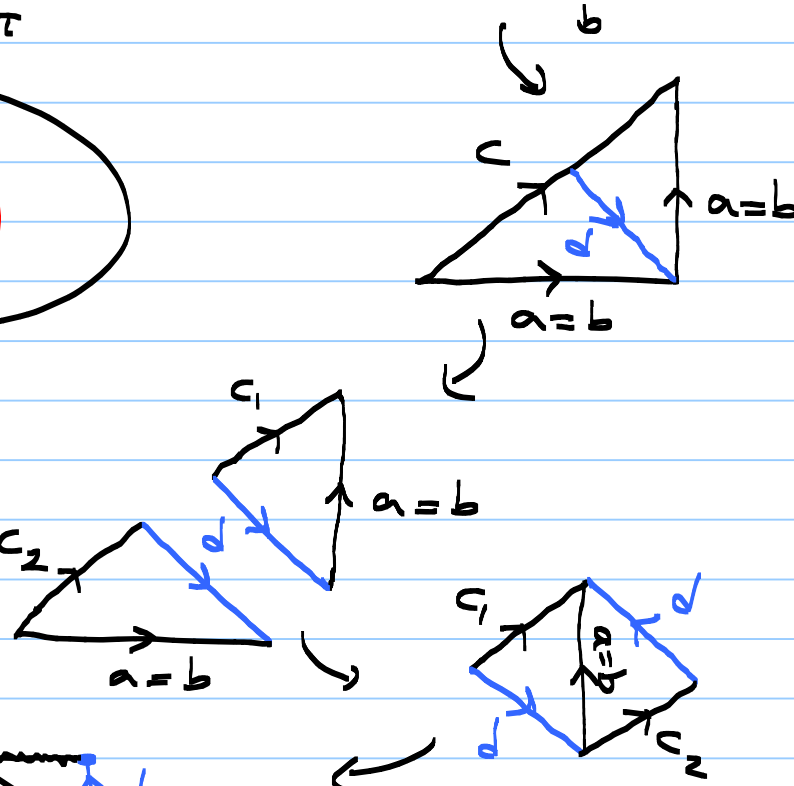
, $S^1\times S^1/\sim$



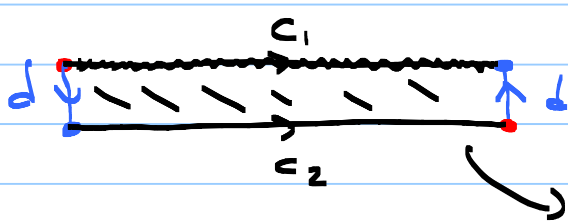




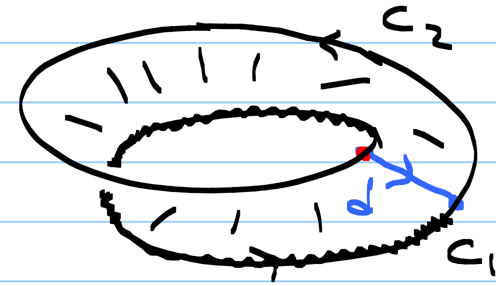










MB: 



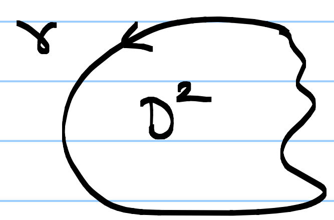
Möbius şeridi

O halde, $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu $MB = T^2/\sim$ üzerinde tanımlıdır. Ayrıca, $\tilde{\varphi}([s,t]) = (*,*,0)$ olması için gerek ve yeter şart $s=t$ dır.

Başka bir deyişle $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu Möbius Şeridinin sınırını xy-düzlemi üzerine bir noktaya gönderir. Sınırın dışındaki tüm noktalar için $\tilde{\varphi}([s,t])$ noktasının z-koordinatı pozitif olur.

Yukarıdaki 2. Önemli Gözlem'de belirttiğimiz üzere, eğer $\gamma$ eğrisi üzerinde bir dikdörtgen yoksa

$\tilde{\varphi} : MB \longrightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu bire bir olmalıdır. Bu durumda, MB tıkız olduğu için $\tilde{\varphi}$ topolojik bir gömme fonksiyonu olur. Ayrıca $\tilde{\varphi}(MB)$ görüntüsünün xy-düzlemi ile kesişimi $\gamma$ eğrisidir. $\gamma$ basit kapalı bir eğri olduğu için düzlemde bir disk sınırlar. Şimdi bu diski $\varphi(MB)$'ye $\gamma$ boyunca yapıştıralım.




Fakat

$$\varphi(MB) \cup_\gamma D^2 = MB \cup_\gamma D^2 = \mathbb{RP}^2$$

olduğu için $\mathbb{RP}^2$'nin $\mathbb{R}^3$'e topolojik bir gömmesini elde etmiş oluruz:

$$f : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

Ayrıca eğer, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ regüler bir eğri ise ($\gamma(t)$ türevlenebilir ve $\gamma'(t) \neq (0,0)$ $\forall t$ ise) $\tilde{\varphi} : MB \longrightarrow \mathbb{R}^3$ türevlenebilir bir gömme fonksiyonu olur. Bu durumda $f : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $\partial M = \gamma$ eğrisi dışında türevlenebilir gömme olur.

Sonuç:

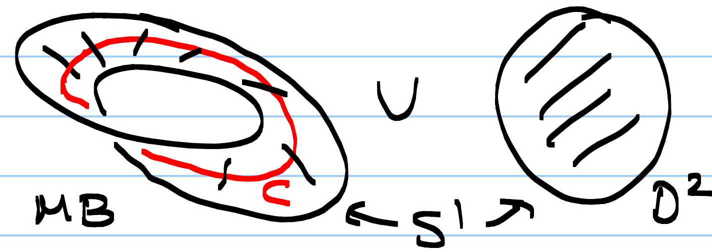
Köşeleri $\gamma$ eğrisinin üzerinde olan bir dikdörtgen yoksa $\mathbb{RP}^2$ manifoldunun $\mathbb{R}^3$ içine bir gömmesini elde ederiz.

İkinci bölümde ise bunun mümkün olmadığını göreceğiz.

(II) $\mathbb{RP}^2$, gerçel projektif düzlem $\mathbb{R}^3$'e gömülemez.

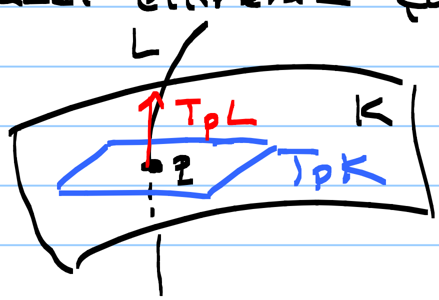
Bunu olmayana ergi metodu ile kanıtlayacağız.

$\mathbb{RP}^2 = MB \cup_\partial D^2$,




İlk önce Kesişim Teorisi'nde aşağıdaki sonucu hatırlayalım:

$M^n$ $n$-boyutlu türevlenebilir manifold ve $K, L$ $M$'nin kapalı alt manifoldları olsunlar, öyle ki $\dim K + \dim L = n$ olsun. $K$ ve $L$ alt manifoldlarını $M$ içinde izotopiler yardımı ile hareket ettirerek çapraz kesiştirelim:



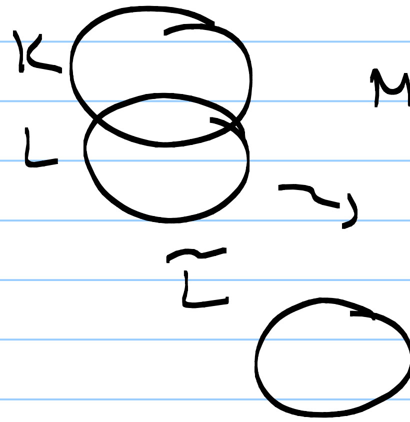

$$T_pK + T_pL = T_pM$$
$$\forall p \in K \cap L$$

Bu durumda $K \cap L$ kümesi sonludur ve bu sonlu kümenin eleman sayısının paritesi değişmez: $\tilde{K}$ ve $\tilde{L}$, $K$ ve $L$'nin izotopileri olsunlar. Eğer $\tilde{K}$ ve $\tilde{L}$ yine çapraz kesişiyorsa

$$\#(K \cap L) = \#(\tilde{K} \cap \tilde{L}) \pmod 2$$ olur. Bu

sayıya $K$ ve $L$ alt manifoldlarının (mod 2) kesişim sayısı denir ve kısaca $K \cdot L$ ile gösterilir.

Örnek: 1-)




$M=\mathbb{R}^2$

$K\cdot L = 2 = 0 \pmod 2$

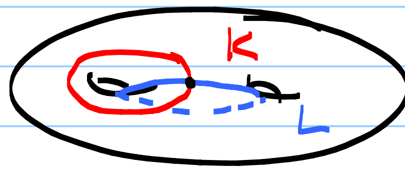
$\tilde{K}\cdot\tilde{L} = 0 \pmod 2$

2-)


$M=\Sigma_2$

$K\cdot L = 2 = 0 \pmod 2$

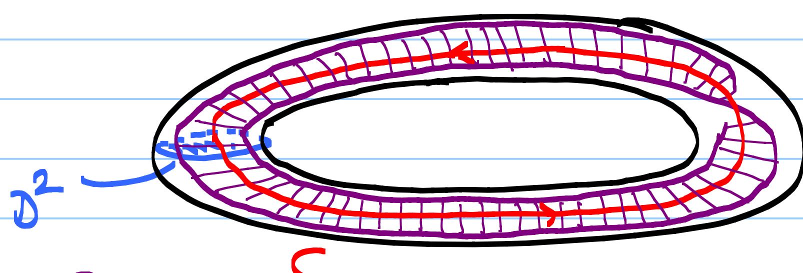
3-)

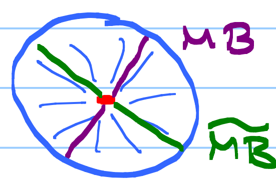


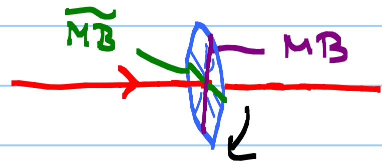

$M=\Sigma_2$

$K\cdot L = 1 \pmod 2$

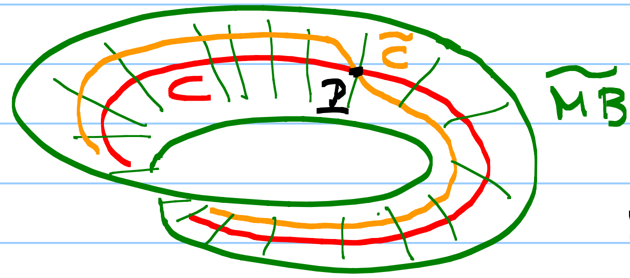
Şimdi $\mathbb{RP}^2$'nin $\mathbb{R}^3$ içine gömüldüğünü kabul edelim. O halde $MB \subseteq \mathbb{RP}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ içinde kalacaktır. MB içindeki C orta çemberinin $\mathbb{R}^3$ içindeki tüp komşuluğunu düşünelim. Hem C hemde $\mathbb{R}^3$ yönlendirilebilir olduğu için bu komşuluk $C\times D^2$ şeklindedir:




Şimdi her mavi diski sağ el kuralına göre $90^\circ$ derece döndürelim. MB de $90^\circ$ dönerek $\widetilde{MB}$'ye dönecektir. $\widetilde{MB}$'nin $MB$ ve dolayısıyla $\mathbb{RP}^2$ ile kesişimi $C$ eğrisi olacaktır.




$\widetilde{C}$ $\widetilde{MB}$ Möbius şeridi içindeki çemberi göstersin.

$\widetilde{MB} \cap \mathbb{RP}^2 = C$ ve

$C \cap \widetilde{C} = \{p\}$ olduğu için $\widetilde{C} \cap \mathbb{RP}^2 = \{p\}$. Bu kesişimin çapraz olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^3$ manifoldunun bir boyutlu $\widetilde{C}$ kapalı altmanifoldu ile $\mathbb{RP}^2$ kapalı alt manifoldunun kesişim sayısı birdir:

$$\operatorname{Int}(\mathbb{RP}^2, \widetilde{C}) = 1 \pmod 2.$$

Diğer taraftan, hem $\mathbb{RP}^2$ hemde $\widetilde{C}$ tıkız (dolayısıyla sınırlı) olduğu için, $\widetilde{C}$ eğrisini $\mathbb{R}^3$ içinde yeterince uzağa ötelersek, diyelim ki $\widetilde{\widetilde{C}}$ olsun, artık kesişmeyeceklerdir. Başka bir deyişle

$$1 = \operatorname{Int}(\mathbb{RP}^2, \widetilde{C}) = \operatorname{Int}(\mathbb{RP}^2, \widetilde{\widetilde{C}}) = 0 \pmod 2$$

çelişkisini elde etmiş olduk. Böylece, $\mathbb{RP}^2$'nin $\mathbb{R}^3$ içine gömülemeyeceğini kanıtlamış olduk.

Son olarak ilk bölümde elde ettiğimiz sonuçla bunu birleştirirsek, köşeleri $\gamma$ eğrisinin üzerinde olan bir dikdörtgenin varlığını kanıtlamış olduk.

Böylece kanıt biter. ∎