Galois Teori, Örtü Uzayları ve Diferansiyel Denklemler

Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü
Prof. Dr. L. Michael Brown'un Anısına
Topoloji Çalıştayı II

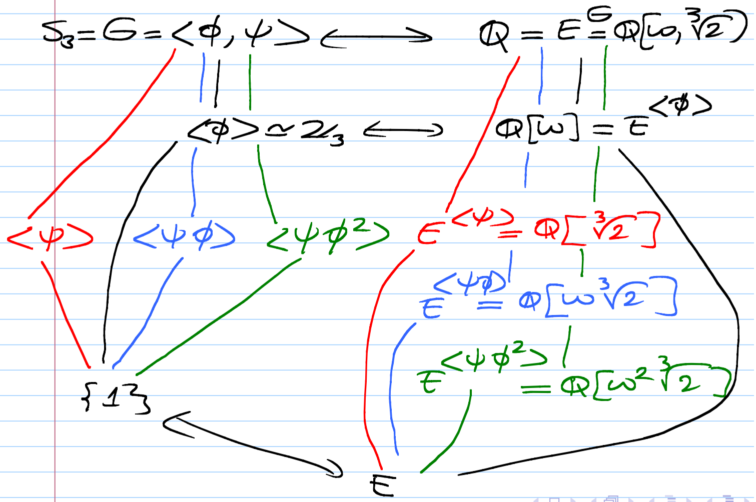
Yıldıray Ozan
ODTÜ

08.12.17

Galois Teori

- $F \subseteq E$ Galois cisim genişlemesi
- $G = Gal(E/F) \doteq \{\phi \in Aut(E) \mid \phi : E \to E,\ \phi(x) = x,\ \forall x \in F\}$, cisim genişlemesinin Galois grubu
- $|G| = [E : F] = \dim_F E$
- Galois Eşlemesi
  $H \leqslant G \ \longleftrightarrow E^H \doteq \{x \in E \mid \phi(x) = x,\ \forall \phi \in H\}$
- Ayrıca eğer $N \lhd G$ normal altgrup ise E^N/F bir Galois genişlemesidir ve karşılık gelen Galois grubu G/N olur.

- **Örnek**
- $F = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{2}] = E, \;\; \omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$
  $(p(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun tüm köklerini içeren en küçük (*splitting*) cisimdir).
- $Gal(E/F) = S_3 =< \phi, \psi \mid \phi^3 = \psi^2 = 1, \;\; \psi\phi\psi = \phi^2 >$
- $\psi : E \to E, \;\; \psi(\omega) = \omega^2 = \overline{\omega}, \;\; \psi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$
- $\phi : E \to E, \;\; \phi(\omega) = \omega, \;\; \phi(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$

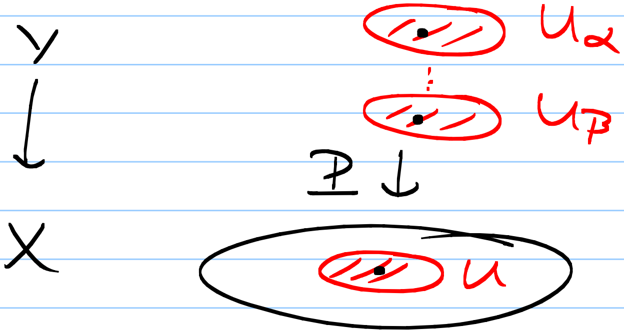

$S_3 = G = \langle \phi, \psi \rangle$
$\mathbb{Q} = E^G = \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{2}]$
$\langle \phi \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Q}[\omega] = E^{\langle \phi \rangle}$
$\langle \psi \rangle$
$\langle \psi\phi \rangle$
$\langle \psi\phi^2 \rangle$
$E^{\langle \psi \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$
$E^{\langle \psi\phi \rangle} = \mathbb{Q}[\omega\sqrt[3]{2}]$
$E^{\langle \psi\phi^2 \rangle} = \mathbb{Q}[\omega^2\sqrt[3]{2}]$
$\{1\}$
E

Örtü Uzayları

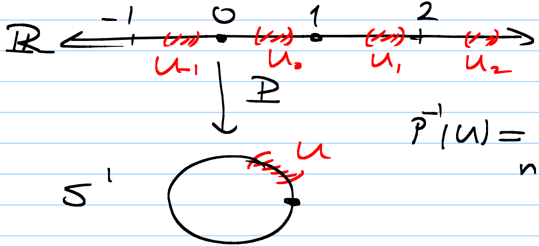
$P : Y \to X$ topolojik uzaylar arasında sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ noktası etrafında bir $U \subseteq X$ açık komşuluğu olsun öyle ki,
1) $P^{-1}(U) = \cup_\alpha U_\alpha$ ayrık birleşimdir, ve
2) Her $P_{|U_\alpha} : U_\alpha \to U$ bir homeomorfizmadır.
Bu durumda $P : Y \to X$ fonksiyonuna bir örtü fonksiyonu veya sadece örtü uzayı denir.

Bu konuşmada aksi söylenmedikçe X ve Y uzaylarının yol bağlantılı olduğunu kabul edeceğiz.

ÖRTÜ UZAYI



$p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



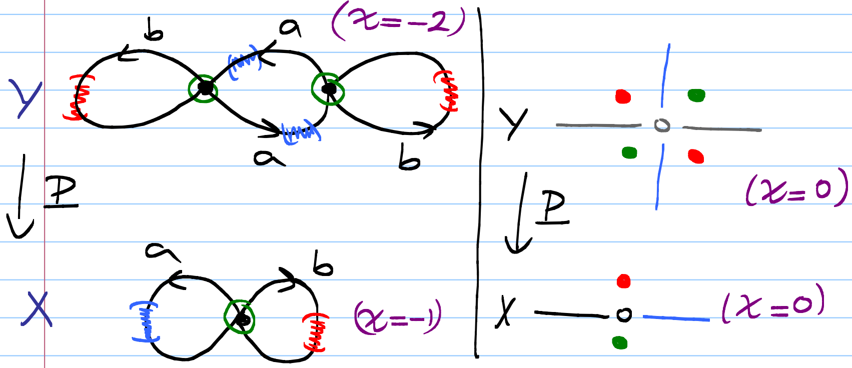
$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$

$G = \langle \varphi \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + 1$

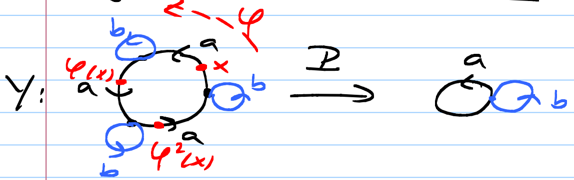
$S^1 = \mathbb{R} / \langle \varphi \rangle$

Bu bir $\mathbb{Z}$-örtü uzayıdır.

İki farklı $\mathbb{Z}/_2$–örtü uzayı



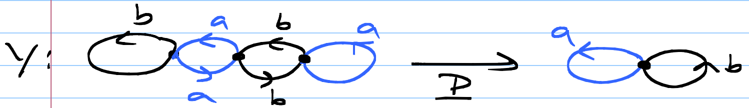
Regüler 3-katlı ($\mathbb{Z}/_3$) örtü



: $X = Y/\mathbb{Z}/_3$

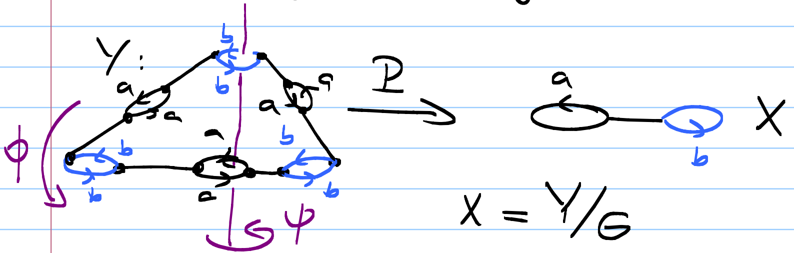
$G = \mathbb{Z}/_3 = \langle \varphi \rangle$, φ: $120°$ döndürme

Regüler Olmayan 3-katlı örtü uzayı



: X

6-katlı S_3-örtü uzayı



$$X = Y/G$$

$$G = \langle \phi, \psi \mid \phi^3 = \psi^2 = 1, \; \psi\phi\psi = \phi^2 \rangle \simeq S_3$$

ϕ: 120° döndürme, ψ: 180° döndürme

- **Ö**nerme: Sonlu G grubu Hausdorff, tıkız ve bağlantılı bir Y uzayı üzerinde serbest olarak etki ediyorsa
  $P : Y \to X \doteq Y/G$ bölüm uzayı bir örtü uzayıdır.
- Örtü uzaylarının sınıflandırılması temel grup yardımıyla yapılır.
- **T**anım:(Homotopi) $f_i : X \to Y$, $i = 0, 1$, sürekli fonksiyonlar olsun. $F : X \times [0,1] \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun öyle ki
  1) $F(x,0) = f_0(x)$, $\forall x \in X$,
  1) $F(x,1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$.
  Bu durumda f_0 ve f_1 fonksiyonlarına homotopiktir denir ve $f_0 \sim f_1$ şeklinde yazılır. Homotopi bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve bir f fonksiyonunun denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

- **T**anım:(Temel Grup) X topolojik bir uzay ve $x_0 \in X$ bir nokta ise bu uzayın x_0 noktasındaki temel grubu

  $$\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] \mid \gamma : [0,1] \to X,\ \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \text{ sürekli eğri}\}$$

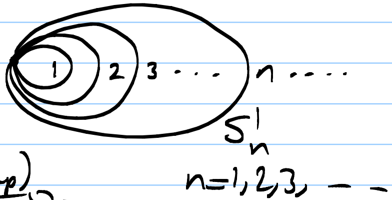
  sürekli eğrilerin homotopi sınıflarının grubu olarak tanımlanır. Burada kullandığımız homotopiler her adımda eğrinin uç noktalarını x_0 noktasında tutmaktadır.

- **T**anım:(Büzülebilir Uzay) Eğer bir X uzayı için $f_0 : X \to X$, $f_0(x) = x,\ \forall x \in X,$ birim fonksiyonu herhangi bir $c \in X$ için $f_1 : X \to X,\ f(x) = c, \forall x \in X,$ sabit fonksiyonuna homotopik ise X uzayına büzülebilir uzay denir.

Örnekler

- $\pi_1(\{x_0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq \{1\}$. Aslında her büzülebilir X uzayının temel grubu aşikar gruptur.
- $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$
- $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq F_2$, iki üreteçli serbest grup.
- $\pi_1(\vee_n S^1) \simeq F_n$, n-üreteçli serbest grup.

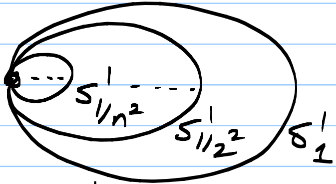
$$X_1 = \bigcup_n S^1_n$$



$$\pi_1(X) = F_\infty$$

(Sayılabilir grup)

$$X_2 = \bigcup_n S^1_{1/n^2}$$



$$\pi_1(X) = ?$$

Sayılamaz bir grup!

Örtü Uzayları İçin Galois Eşlemesi

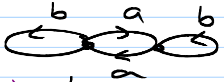
Teorem: 'Eli yüzü düzgün' bir X topolojik uzayının örtü uzayları ile $\pi_1(X, x_0)$ temel grubunun altgrupları arasında bire bir eşleme vardır: $H \leqslant \pi_1(X, x_0)$ altgrubuna karşılık gelen örtü uzayı $P : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ise

$$P_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

homomorfizmasının görüntüsü H altgrubudur.
Ayrıca bir örtü uzayının katman sayısı bu örtü uzayına karşılık gelen altgrubun temel grup içindeki endeksine eşittir:

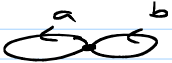
$$|P^{-1}(x_0)| = [\pi_1(X, x_0) : H]$$

Son olarak eğer $N \lhd \pi_1(X, x_0)$ normal bir altgrup ve $Y \to X$ karşılık gelen örtü uzayı ise $Y \to X$ örtü uzayının otomorfizma gurubu N grubuna izomorfiktir ve Y/N bölüm uzayı doğal olarak X uzayına homeomorfiktir.

Y: 

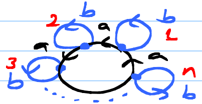
$\pi_1(Y) \simeq F_3 = \langle a^2, b^2, aba^{-1} \rangle$

$(\chi = -2)$ $\downarrow$ $\Big\downarrow \quad \Big\downarrow \quad \Big\downarrow \triangle 2$

X: 

$\pi_1(X) \simeq F_2 = \langle a, b \mid - \rangle$

$(\chi = -1)$

Y: 

$(\chi = -n)$

$\uparrow$ $G = \langle \phi \rangle$

$\phi = \frac{2\pi}{n}^{\circ}$

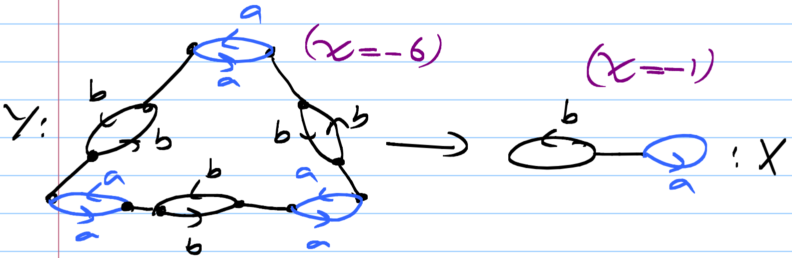
$\xrightarrow{\quad P \quad}$

$: X$

$(\chi = -1)$

$Y = \bigvee_{n+1} S^1$ $\qquad X = \bigvee_{2} S^1$

$$\underset{\substack{\cong \\ F_{n+1}}}{\pi_1(Y)} = \langle a^n, ab^k a^{-1} \mid k = 1, \ldots, n \rangle \overset{n}{\triangleleft} \langle a, b \mid - \rangle = \underset{\substack{\cong \\ F_2}}{\pi_1(X)}$$



$$\pi_1(Y) \simeq F_7 \overset{6}{\trianglelefteq} F_2 = \pi_1(X)$$

$$\pi_1(X)/\pi_1(Y) \simeq S_3$$

Modüler Grup ve Dessin d'Enfant

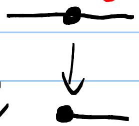
- $PSL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \simeq < [A], [B] >$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
- $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
- Modüler grubun altgruplarını anlamak için örtü uzaylarını kullanma tekniği Grothendieck'in Dessin d'Enfant (Çocuk Çizimleri) teorisinin bir topolojik yorumudur.

- $S^\infty = \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \exists n_0,\ x_n = 0,\ n \geq n_0,\ \sum_n x_n^2 = 1\}$
- S^∞ büzülebilir bir uzaydır.
- $B\mathbb{Z}_2 = S^\infty/\mathbb{Z}_2 = \lim_{n\to\infty} S^n/\mathbb{Z}_2$
- $B\mathbb{Z}_3 = S^\infty/\mathbb{Z}_3 = \lim_{n\to\infty} S^{2n-1}/\mathbb{Z}_3$
- $\pi_1(B\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ ve $\pi_1(B\mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_3$
- **Sonuç** (Van Kampen Teoremi'nin) $\pi_1(B\mathbb{Z}_2 \vee B\mathbb{Z}_3) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

Dessin d'Enfant teorisi hem sayılar teorisi hem de cebirsel eğriler (Belyi Teoremi) ve yüzeyler teorisinde oldukça önemli bir tekniktir.

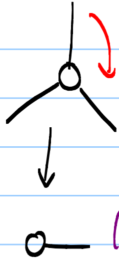
Gösterim

S^∞ — 180° döndürme $(\chi=1)$



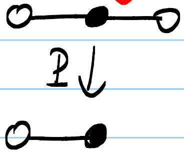
$S^\infty/\mathbb{Z}_2$ $(\chi=1/2)$

S^∞ : 120° döndürüm $(\chi=1)$



$S^\infty/\mathbb{Z}_3$! $(\chi=1/3)$

φ 180° döndürme

1) 

$Y \quad (\chi = -1/3) \qquad \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \triangle|\ 2$

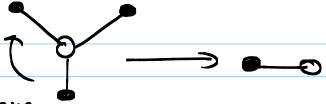
$X = Y/\mathbb{Z}_2 = \langle \varphi \rangle \quad (\chi = -1/6) \qquad \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle \simeq PSL(2, \mathbb{Z})$$

$\triangledown| \qquad\qquad \triangledown|$

$$\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 = \langle b, aba^{-1} \rangle$$

2) 120° döndürm



$x=-1/2$ $\qquad$ $x=-1/6$

$Y \longrightarrow X$

$\pi_1(Y) \simeq \underset{3}{*} \mathbb{Z}_2$

$\trianglelefteq$ 3

$\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

3)

Y $\quad x=0$ $\qquad$ X $\quad x=0$

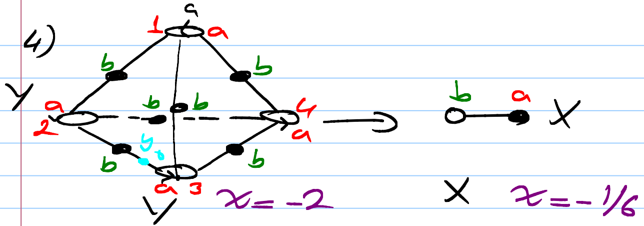
$\mathbb{Z}$

$\trianglelefteq$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z} \simeq S_3$

4)



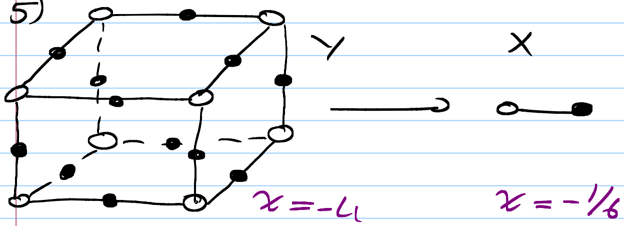
$X = Y/G$, $G = A_4$

$\pi_1(Y) \simeq F_3 \vartriangleleft \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$

$PSL(2,\mathbb{Z})/F_3 \simeq G = A_4$

$F_3 = \langle ababab, a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b, a^{-1}baba^{-1}ba^{-1} \rangle$

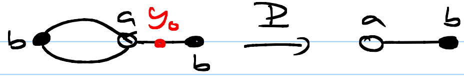
5)



$$X = Y/G\,, \quad G = S_4$$

$$\pi_1(Y) \simeq F_5 \lhd \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$$

$$PSL(2,\mathbb{Z})/F_5 \simeq S_4$$

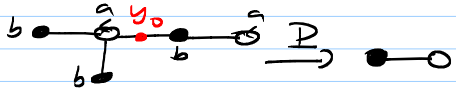
6) 

Normal olmayan 3 katlı örtü

Y $\qquad$ X

$x = -1/2$ $\qquad$ $x = -1/6$

$\pi_1(Y, y_0) \simeq \langle aba^{-1}, b \rangle \underset{3}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

7) 

(Normal olmayan 4 katlı örtü uzayı)

Y $\quad x = -2/3$ $\qquad$ X $\quad x = -1/6$

$\pi_1(Y, y_0) \simeq \langle aba^{-1}, a^{-1}ba, a \rangle \underset{4}{\leq} \langle a, b \rangle \to$

$\simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \qquad \mathbb{Z}_2 \overset{15}{*} \mathbb{Z}_3$

Karmaşık Düzlemde Regüler Tekil İkinci Mertebeden Doğrusal Difaransiyel Denklemler

Teorem: $D \subseteq \mathbb{C}$ basit bağlantılı açık bir bölge ve P ve Q bu bölge üzerinde analitik (holomorfik) fonksiyonlar olsun. Bu durumda verilen

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + P(z)\,\frac{d\omega}{dz} + Q(z)\,\omega = 0$$

doğrusal denklemininin her $z_0 \in D$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ değerleri için

$$\omega'(z_0) = \alpha,\ \omega(z_0) = \beta$$

başlangıç değerlerini sağlayan tek bir çözümü vardır.

- Başka bir deyişle, V yukarıdaki doğrusal denklemin tüm çözümlerinin oluşturduğu karmaşık vektör uzayını gösterirse, bu uzay ile $\mathbb{C}^2$ arasında bir doğrusal izomorfizma vardır:

$$V \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ \omega \mapsto (\omega(z_0), \omega'(z_0)).$$

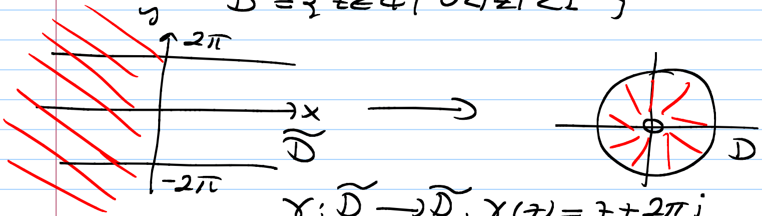
- Şimdi ise $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \ \|z\| < 1\}$ sıfır noktası çıkarılmış birim disk olsun.
- $\pi_1(D) \simeq \mathbb{Z}$
- $\pi : \tilde{D} \to D$ evrensel örtü uzayı ve $G =< \gamma >\simeq \mathbb{Z}$ bu örtü uzayının izomorfizma grubu olsun.

$\pi : \tilde{D} \to D$ evrensel örtüsü için iki model:

<u>Model 1)</u> $\tilde{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x < 0 \}$

$$\downarrow$$

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1 \}$$

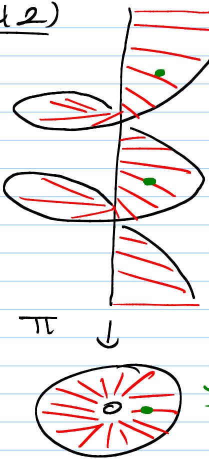


$\gamma : \tilde{D} \to \tilde{D}$, $\gamma(z) = z + 2\pi i$

$$D = \tilde{D} / \langle \gamma \rangle = \tilde{D} / \mathbb{Z}$$

Model 2)

$\tilde{D}$



$$\tilde{\tilde{z}} = re^{i(\theta+(2n+2)\pi)} = \gamma(\tilde{z})$$

$$\tilde{z} = re^{i(\theta+2n\pi)}$$

$$\gamma(\tilde{z}) = \tilde{\tilde{z}}$$

$$D = \tilde{D}/\langle\gamma\rangle$$

π

D

$$z = re^{i\theta}$$

- Şimdi P, Q birim disk üzerinde $z = 0$ dışında analitik fonksiyonlar olsun.
- Evrensel örtü olarak $\pi : \tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid u = x + iy,\ x < 0\} \to D,\ \ \pi(u) = e^u$, modelini alalım. Başka bir deyişle, yukarıdaki diferansiyel denklemi $z = e^u$ formülünü kullanarak u ve ω cinsinden yazalım:

$$\frac{d^2\omega}{du^2} + (z\ P(z) - 1)\ \frac{d\omega}{du} + z^2\ Q(z)\ \omega = 0$$

- $\tilde{D}$ basit bağlantılı bölgesinde denklemin katsayılarının analitik olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{z\to 0} z\ P(z),\ \text{ve}\ \lim_{z\to 0} z^2\ Q(z)$$

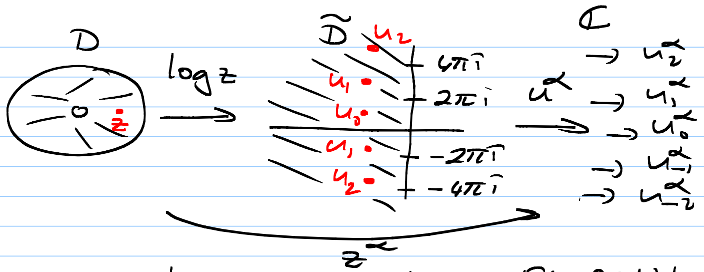
limitlerinin var olmasıdır.

- Şimdi basit bağlantılı $\tilde{D}$ bölgesinde analtik katsayılı
$$\frac{d^2\omega}{du^2} + (z\ P(z) - 1)\ \frac{d\omega}{du} + z^2\ Q(z)\ \omega = 0$$
denkleminin her $u_0 \in \tilde{D}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ değerleri için $\omega(u_0) = \alpha$, $\omega'(u_0) = \beta$, başlangıç değerlerini sağlayan tek bir ω çözümü vardır.
- $\gamma^* : C(\tilde{D}) \to C(\tilde{D}),\ \gamma^*(f) = f(\gamma(u)) = f(u + 2\pi i)$, homomorfizması
$\gamma^*(zP(z)) = \gamma^*(e^u P(e^u)) = e^{\gamma(u)} P(e^{\gamma(u)}) = e^u P(e^u)$ ve benzer şekilde $\gamma^*(z^2 Q(z)) = z^2 Q(z)$ olduğudan denklemin her ω çözümü için $\gamma^*(\omega)$ de bir çözüm olacaktır.
- Dolayısıyla, $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ bu denklemin tüm çözümlerinin oluşturduğu vektör uzayı ise $\gamma^* : \tilde{V} \to \tilde{V},\ \omega \mapsto \gamma^*(\omega)$, doğrusal bir dönüşümdür.

- $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ karmaşık vektör uzayı üzerindeki $\gamma^* : \tilde{V} \to \tilde{V}$, operatörünün Jordan formu için iki durum vardır:
- **Durum 1)** $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ uzayının öyle $\beta = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ tabanı vardır ki
$$[\gamma^*]_\beta = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \; c, d \in \mathbb{C}^*.$$
- **Durum 2)** $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ uzayının öyle $\beta = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ tabanı vardır ki
$$[\gamma^*]_\beta = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{C}^*.$$

- Çözüm fonksiyonlarını yazmadan önce D üzerinde çok değerli iki fonksiyon tanımlayalım:
- $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \; z = re^{i(\theta+2k\pi)} \mapsto \ln r + (\theta + 2k\pi)i, \; k \in \mathbb{Z}$, ve
- $\alpha \in \mathbb{C}$ herhangi bir karmaşık sayı olmak üzere

$$z^\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \; z \mapsto e^{\alpha \log z}, \; z \in \mathbb{C}.$$



$$z^\alpha = \{ e^{\alpha \log z} \} = \{ e^{\alpha \ln r} \cdot e^{\alpha(i\theta + 2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$(z = re^{i\theta}) \qquad = e^{2\pi i \alpha k} u_0^\alpha = c^k u_0^\alpha$$

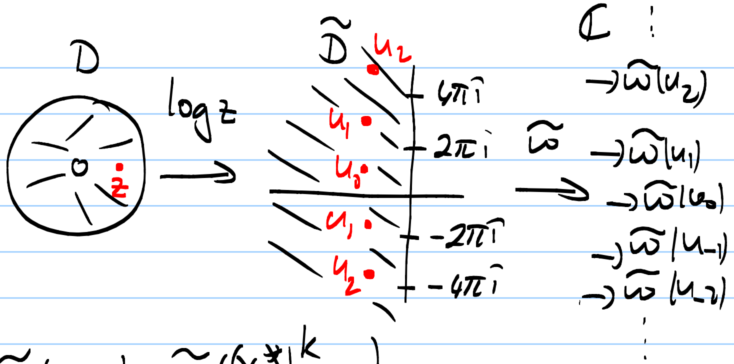
$$(c = e^{2\pi i \alpha})$$

$$u_k^\alpha = (\gamma^\alpha)^k u_0^\alpha = c^k u_0^\alpha$$

- γ^* homomorfizması bu çok değerli fonksiyonlar üzerine etki eder:
- $\gamma^*(\log z) = \log z + 2\pi i$,
- $\gamma^*(z^\alpha) = \gamma^*(e^{\alpha \log z}) = e^{\alpha\gamma^*(\log z)} = e^{\alpha(\log z + 2\pi i)} = e^{2\pi i \alpha} z^\alpha$

Çözümlerin açık ifadesi

- **Durum 1)** $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ uzayının öyle $\beta = \{\omega_1, \omega_2\}$ tabanı vardır ki
$$[\gamma^*]_\beta = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}^*.$$
Başka bir deyişle, $\gamma^*(\omega_1) = c\omega_1$ ve $\gamma^*(\omega_2) = d\omega_2$ olur.
- $\gamma^*(\tilde{\omega}_1) = c\tilde{\omega}_1$ olduğuna göre her $u \in \tilde{D}$ için $\tilde{\omega}_1(u + 2\pi i) = c\tilde{\omega}_1(u)$ olur. Dolayısıyla, $\tilde{D}$ üzerindeki bu analitik çözüm D üzerinde çok değerli bir çözüm vermektedir:
$$z \mapsto \omega_1(z) \doteq \{\tilde{\omega}_1(u) \mid u = \log z\} = \{c^k \tilde{\omega}_1(u_0) \mid e^{u_0} = z, \ k \in \mathbb{Z}\}$$



$$\tilde{\omega}(u_k) = \tilde{\omega}\left((\gamma^*)^k u_0\right)$$
$$= c^k\, \tilde{\omega}(u_0)$$

- Bu durumda, $e^{2\pi i\lambda} = c$ olmak üzere $\omega_1(z)/z^\lambda$ fonksiyonu D üzerinde tek değerli bir fonksiyon olacaktır.
- Bu ifadenin $z = 0$ noktasında kutupsal bir tekilliği olduğu gösterilebilir (tamamen teknik bir sonuç).
- O halde, çözümü

$$\omega_1(z) = z^\lambda \sum_{n=-n_0}^{\infty} \tilde{c}_n z^n = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ c_0 \neq 0,$$

  şeklinde yazabiliriz.
- Benzer şekilde, $\gamma^*(\tilde{\omega}_2) = d\tilde{\omega}_2$ olduğundan ikinci çözüm de

$$\omega_2(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \ d_0 \neq 0,$$

  şeklinde yazılacaktır.

- **Durum 2)** $\tilde{V} \simeq \mathbb{C}^2$ uzayının öyle $\beta = \{\omega_1, \omega_2\}$ tabanı vardır ki
$$[\gamma^*]_\beta = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}^*.$$
- Başka bir deyişle, $\gamma^*(\omega_1) = c\omega_1$ ve $\gamma^*(\omega_2) = \omega_1 + c\omega_2$ olur.
- Durum 1'e benzer olarak, ilk çözüm yine
$$\omega_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ c_0 \neq 0,$$
şeklinde olacaktır.
- İkinci çözüme geçmeden önce, $\omega_3(z) \doteq \frac{1}{2\pi i c} \log z \, \omega_1(z)$ fonksiyonunu düşünelim.
- $\gamma^*(\omega_3) = \frac{1}{2\pi i c} \ (\log z + 2\pi i) \ c\omega_1 = \omega_1 + c\omega_3$ elde ederiz.

- Şimdi, $\omega_4 \doteq \omega_2 - \omega_3$ olarak tanımlanırsa

  $$\gamma^*(\omega_4) = \gamma^*(\omega_2) - \gamma^*(\omega_3) = (\omega_1 + c\omega_2) - (\omega_1 + c\omega_3) = c\omega_4$$

  elde edilir.
- O halde, yukarıda yaptığımıza benzer olarak $c = e^{2\pi i \lambda_2}$ olacak şekilde bir $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ için,

  $$\omega_4(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \;\; d_0 \neq 0,$$

  elde edilir.
- Son olarak, $\omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ eşitliğinden,

  $$\omega_2(z) = \frac{1}{2\pi i c} \log z \; \omega_1(z) + z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

  buluruz.

Ayrıca, $e^{2\pi i\lambda_1} = c = e^{2\pi i\lambda_2}$ olduğu için $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

References

- Alex Degtyarev, *Topology of Algebraic Curves: An Approach via Dessins d'Enfants*, De Gruyter Studies in Mathematics, 2012.
- Yang-Hui He, James Read, *Hecke groups, Dessins d'Enfant and the Archimedean Solids*, Frontiers in Physics, 2015.
- Yang-Hui He, John McKay, James Read, *Modular groups, Dessins d'Enfant and Elliptic K3 surfaces*, LMS, J. Compt. Math. **16**, 2013, 217-318.
- J. Hekking, *Belyi Pairs, Dessins d'Enfant and Hypermaps*, 2014.

References

- Michio Kuga, *Galois Dreams*, 1993, Birkhauser.
- G.B. Shabat, V.A. Voevodsky, *Drawing Curves over Number Fields*, 1990.
- V.S. Varadarajan, *Linear Meromorphic Differential Equaitons: A Modern Point of View*, Bull. AMS **33**, no. 1, 1996, 1-42.

İLGİNİZ İÇİN TEŞEKKÜRLER