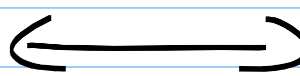
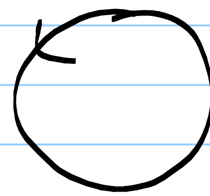
Note Title 19.11.2020

Yüzeylerin Sınıflandırması ve Gauss-Bonnet Teoremi

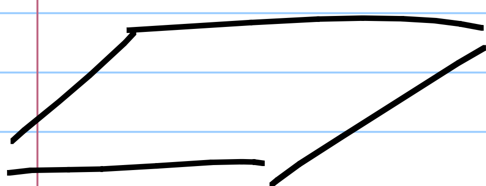
1) Manifold nedir?

1-boyutlu manifoldlar

 $\mathbb{R}$,  S^1

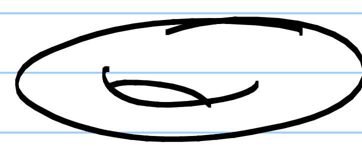
2-boyutlu manifoldlar: Yönlendirilebilir

Kapalı manifoldlar

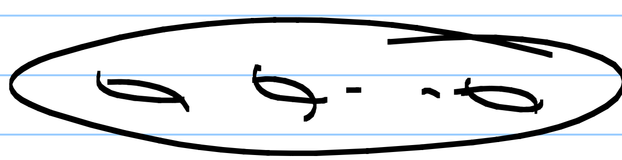


Düzlem

S^2



T^2

 Σ_g, $g=0,1,2,\ldots$

Cinsi g olan yüzey

Yönlendirilemez:

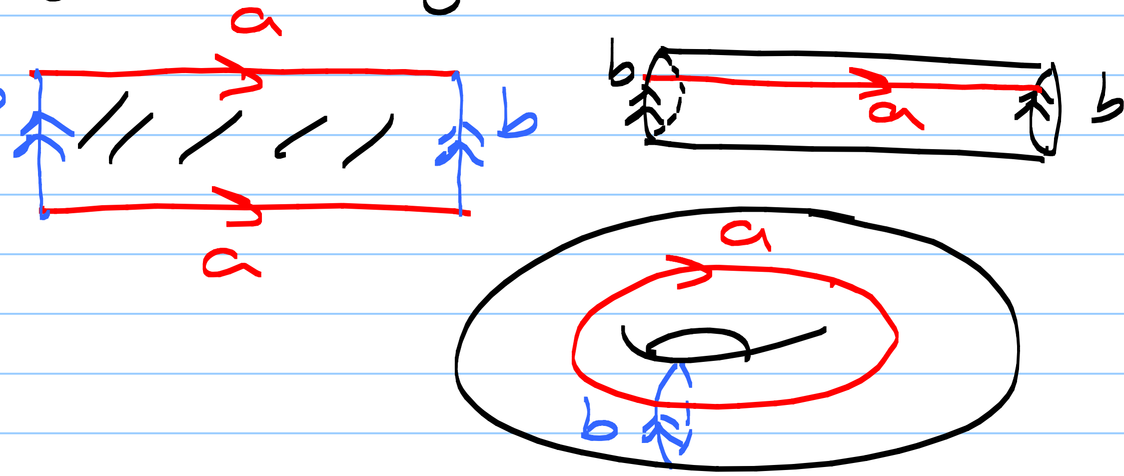
MB: Möbius Şeridi

$\mathbb{RP}^2$: Projektif düzlem

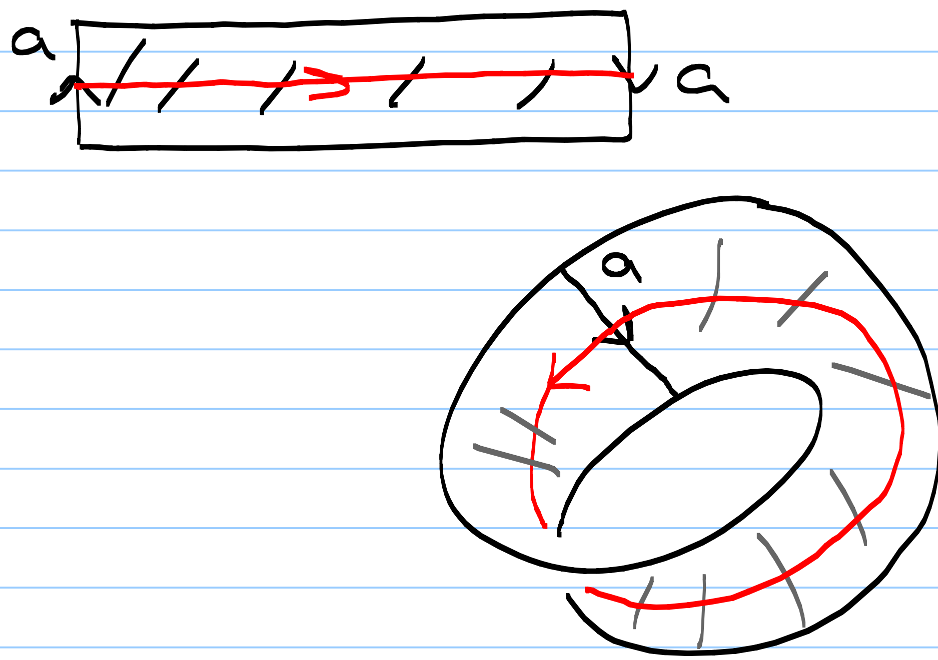
KB: Klein Şişesi, ---

Yüzeylerin Diagramlarla Gösterimi

T^2:

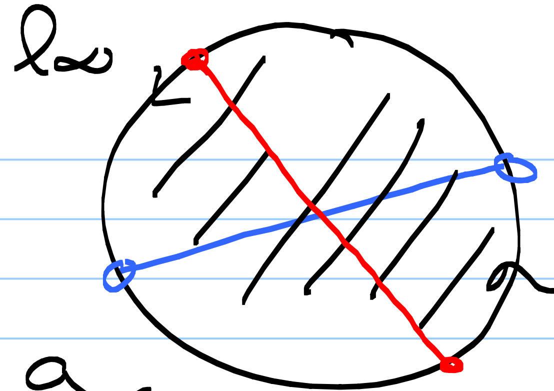


MB:

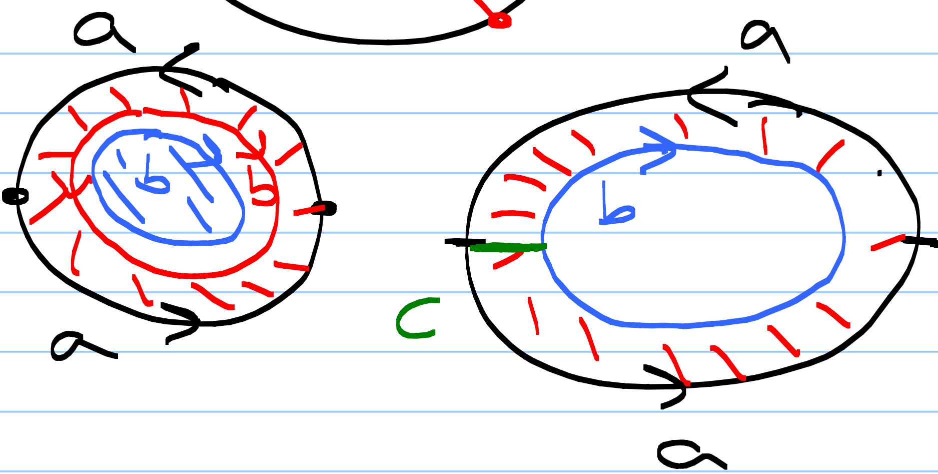


$\mathbb{RP}^2$: $\mathbb{R}^2 \cup l_\infty$, l_∞ sonsuzdaki doğru öyle ki düzlemdeki her doğru l_∞'u tek bir noktada

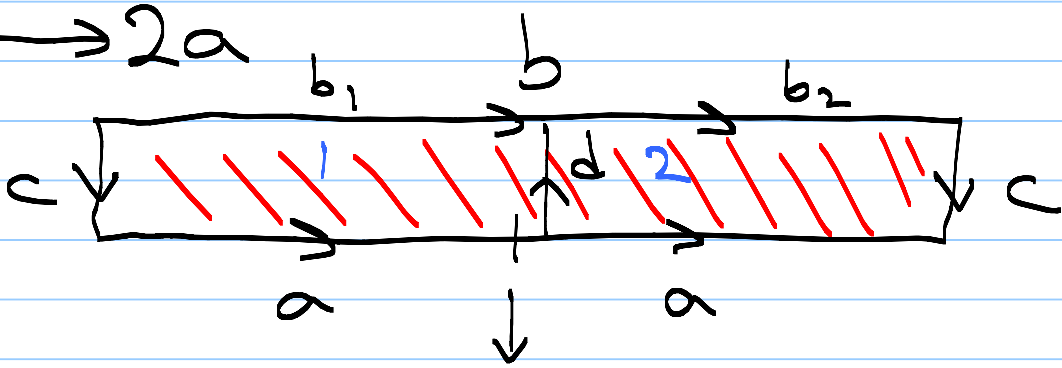
Keser.

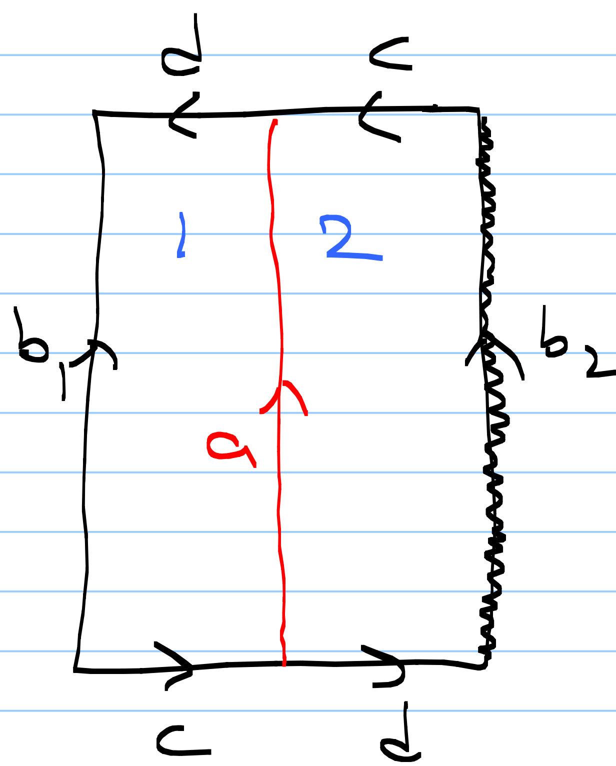


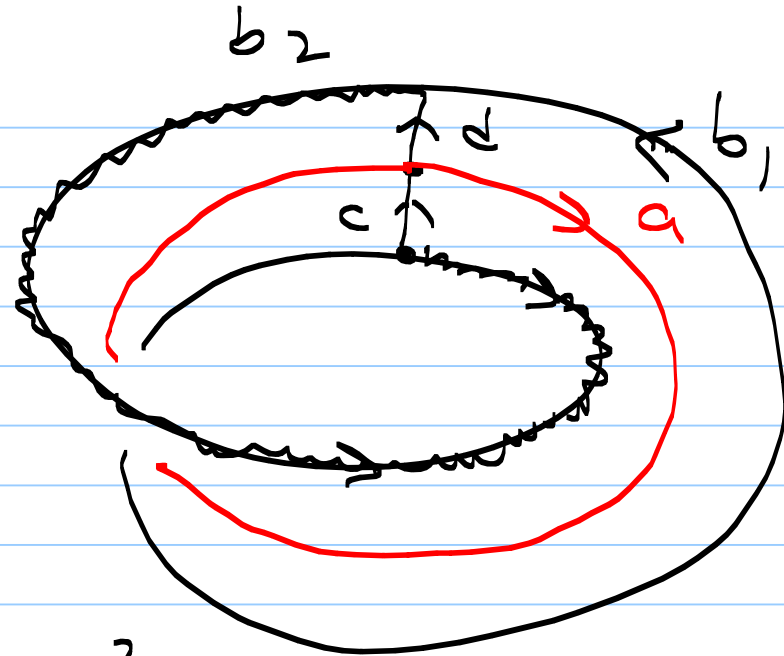
$\mathbb{R}^2$:

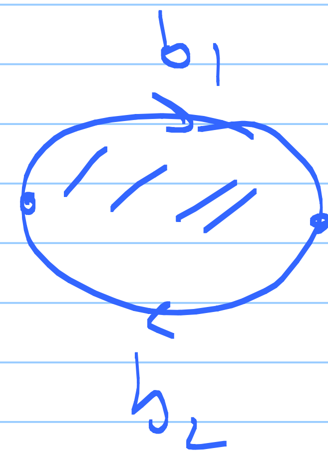


$b_1 \longrightarrow 2a$



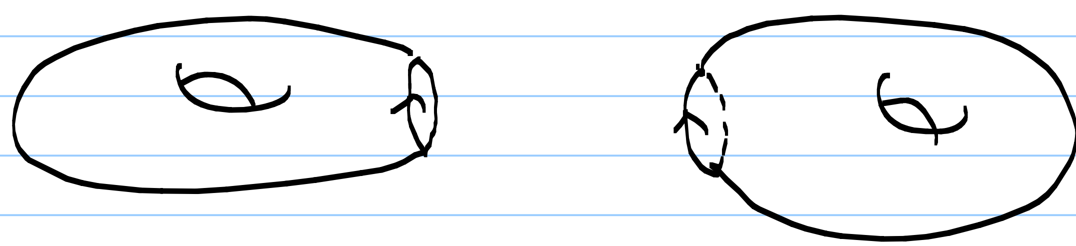


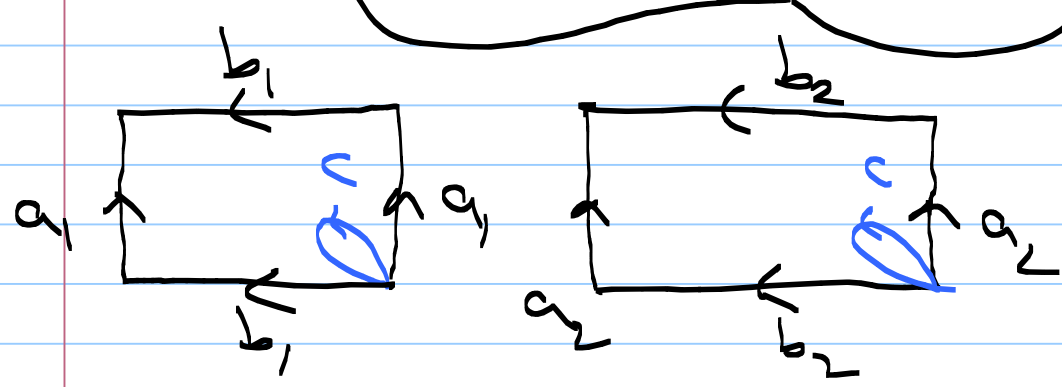


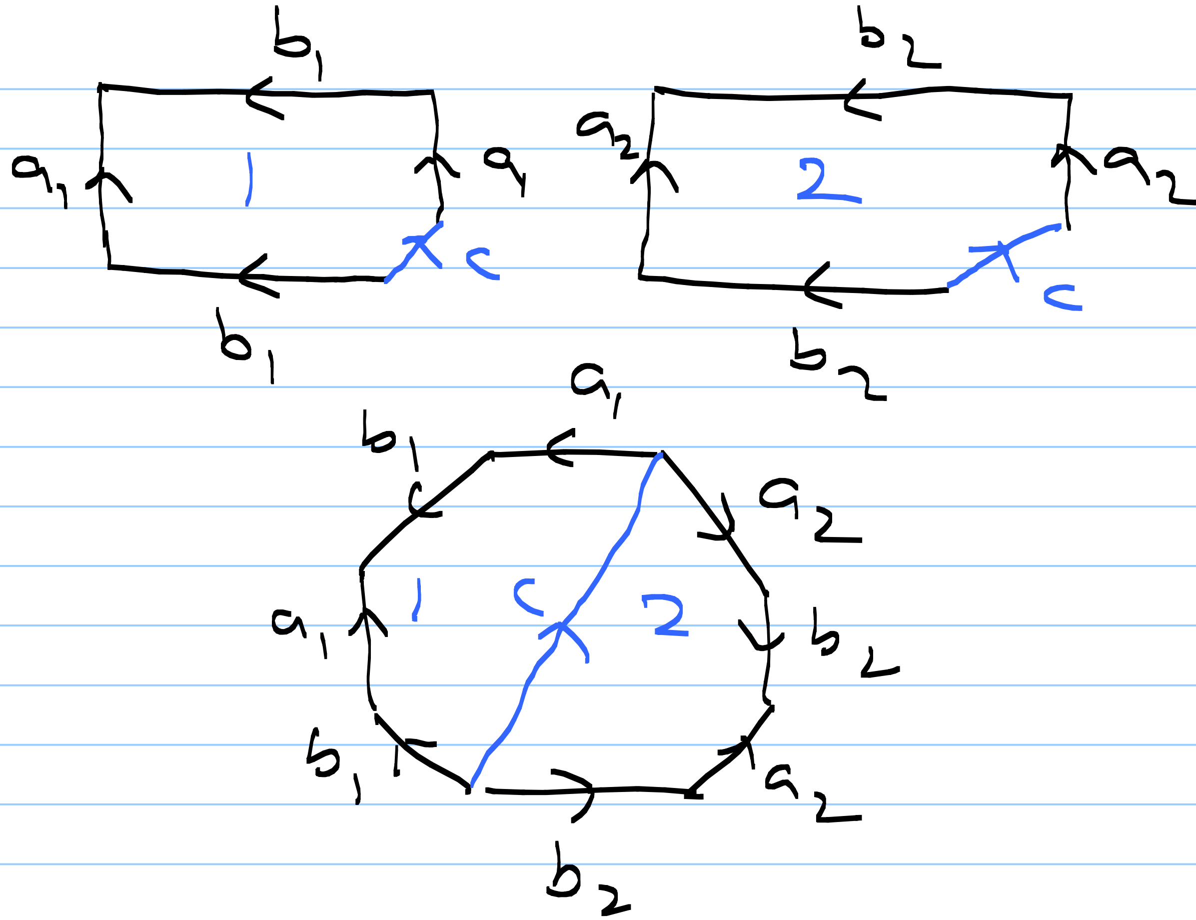


$$\mathbb{RP}^2 = MB \cup_\partial D^2$$

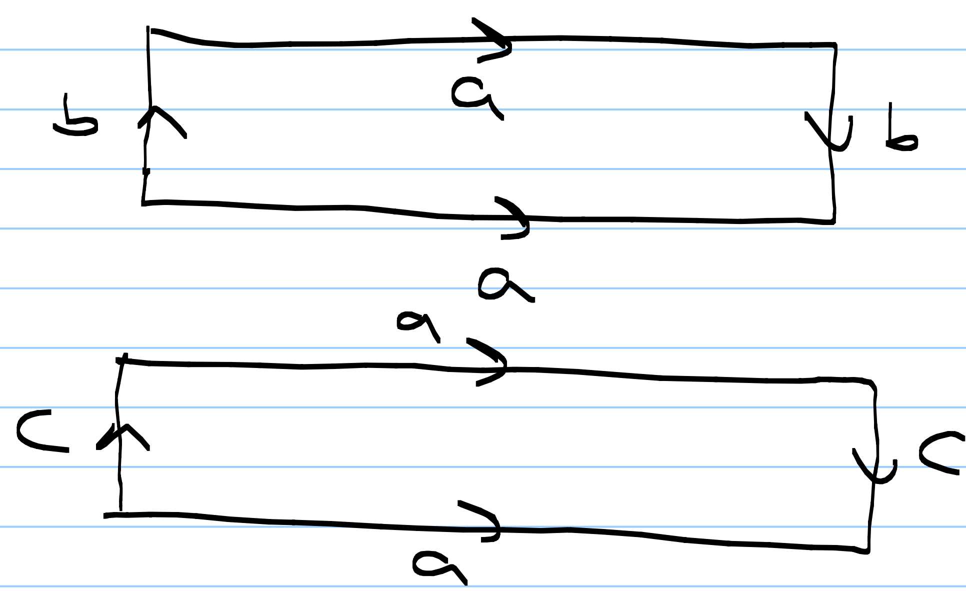
$$T^2 \# T^2 = (T^2 \setminus D^2) \cup_\partial (T^2 \setminus D^2)$$

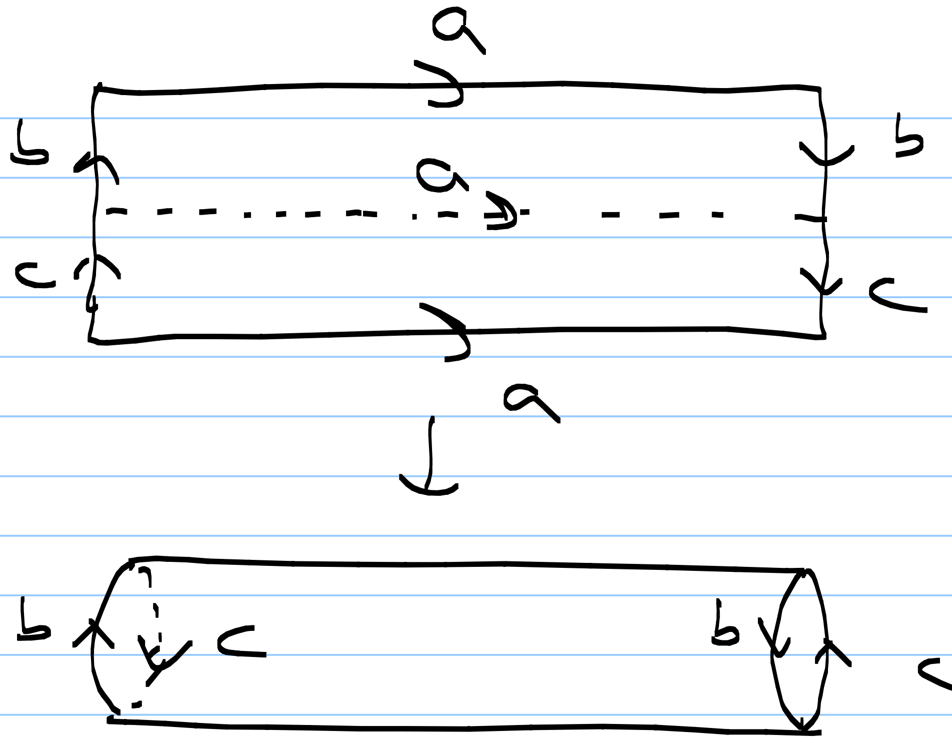




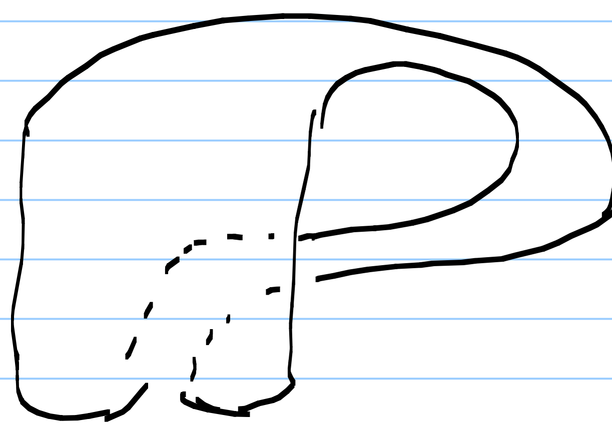


$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = KB$





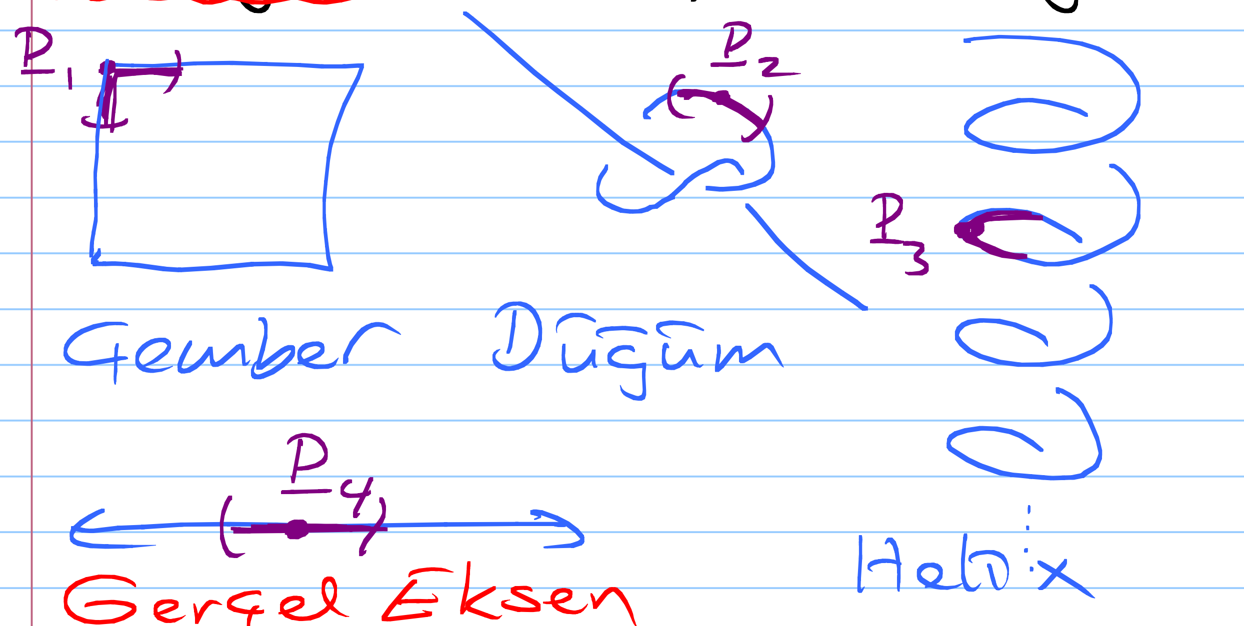
KB :



(I) Topolojistler neler üzerinde çalışır?

Manifoldlar:

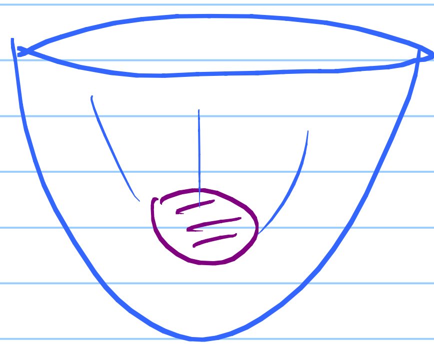
1-boyutlu manifoldlar: Eğriler



Yerel olarak gerçel eksen üzerindeki bir aralık gibi görünen nesnelere eğri denir.

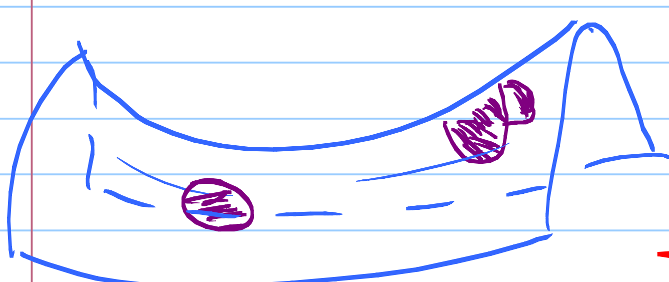
2-boyutlu manifoldlar: Yüzeyler

Yerel olarak gerçel düzlemin içindeki bir yuvar gibi görünen cisimlere yüzey denir.

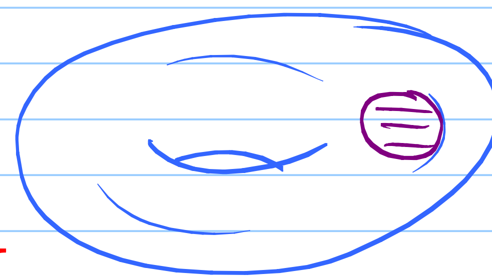


$z=x^2+y^2$

Küre: $x^2+y^2+z^2=1$



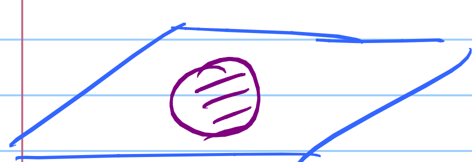
$z=x^2-y^2$



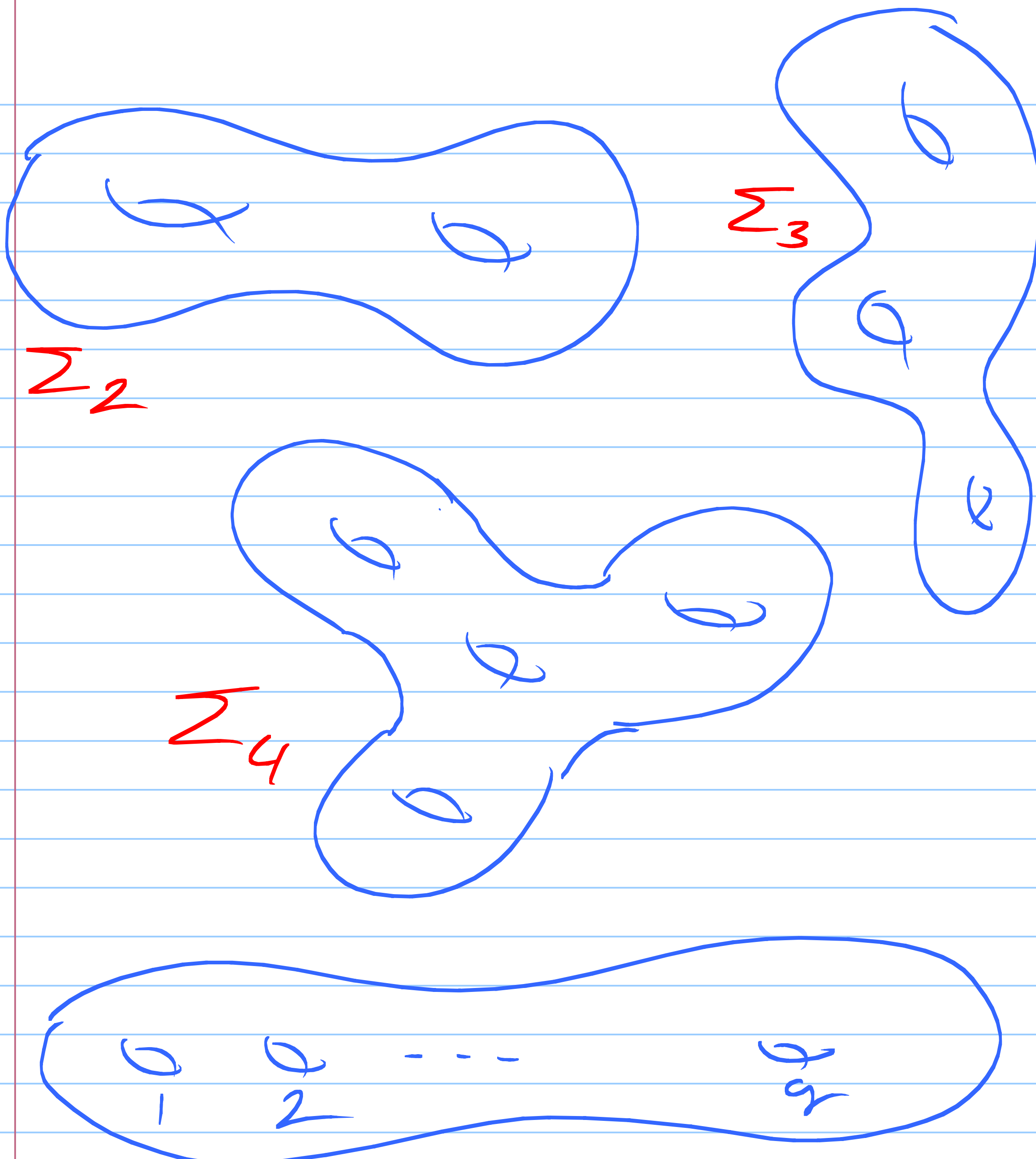
Σ_1

(1-delikli) Torus

$(x^2+y^2+z^2+3)^2 = 16(x^2+y^2)$

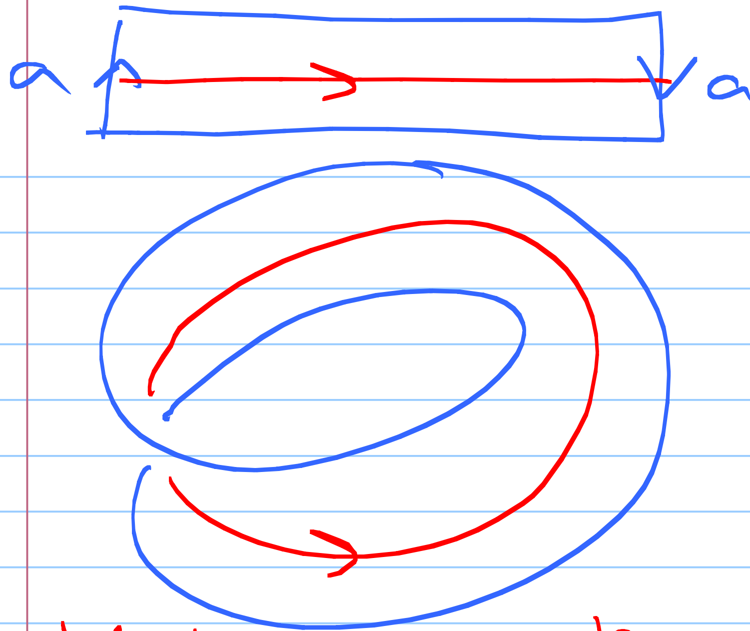


Düzlem

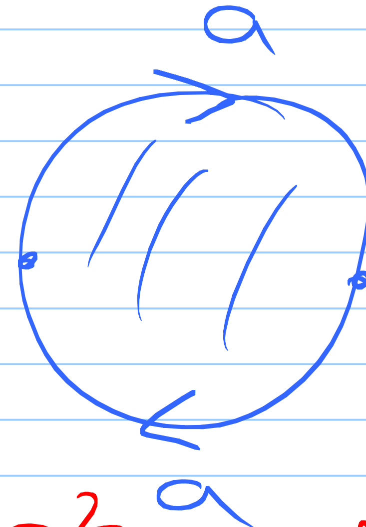


Σ_g : g-delikli Torus

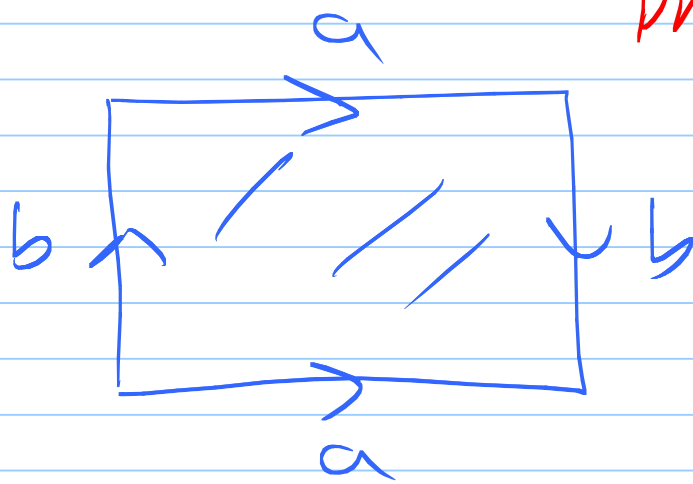
Yukarıdaki örneklerin hepsi yönlendirilebilir yüzeylerdir!



Möbius şeridi

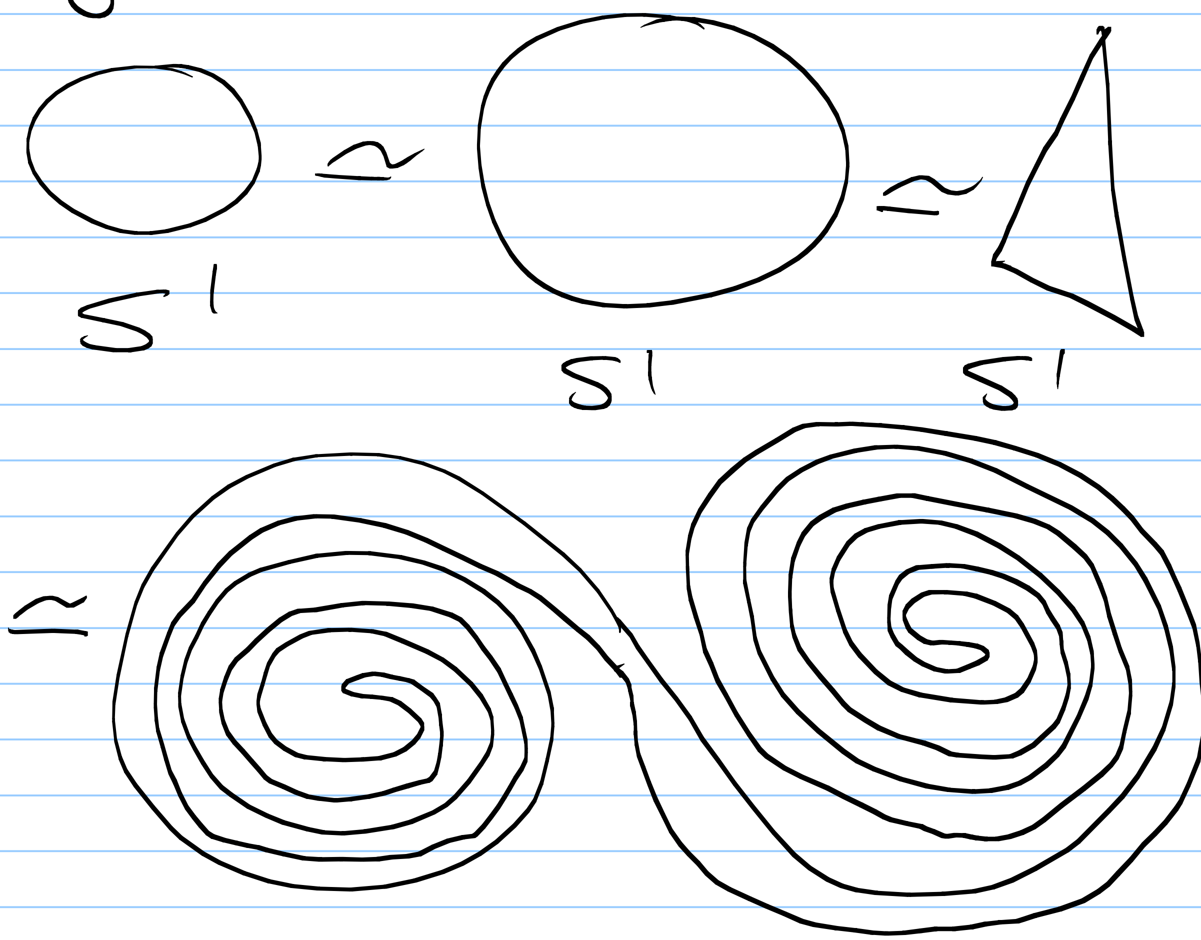


$\mathbb{R}P^2$: gerçel projektif düzlem



Klein şişesi

Yırtma, koparma, dikme gibi işlemler yapmadığımız sürece manifoldların topolojileri değişmez. Örneğin, çekiştirmek, bükmek topolojiyi değiştirmez.



Topolojik olarak hepsi birer çemberdir.

T^2

Simit $\approx$

Kahve fincanı

Her iki nesnenin yüzeyi de bir torustur.

İki topolojik uzay arasındaki bir dönüşüm yakın noktaları yakın noktalara götürüyorsa bu dönüşüme sürekli veya topolojik dönüşüm denir. Çekmek, bükmek topolojik dönüşümdür fakat yırtmak, koparmak, delmek topolojik dönüşüm değildir.

Topolojik eş yapı dönüşümleri altında değişmeyen özelliklere topolojik özellikler denir. Dolayısıyla, açı, uzunluk, alan gibi özellikler topolojik değildir.

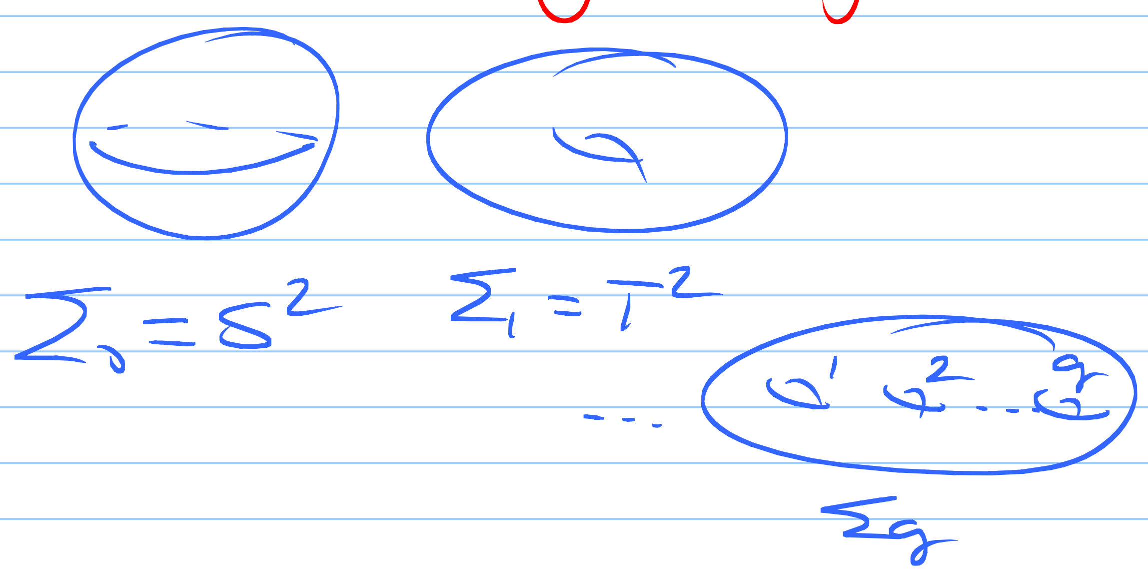
Topolojik Sınıflama

1) Bağlantılı eğriler sadece çember ve gerçel eksendir.

2) Bağlantılı yüzeyler iki topolojik özellik sayesinde sınıflandırılır.

- Yönlendirilebilme

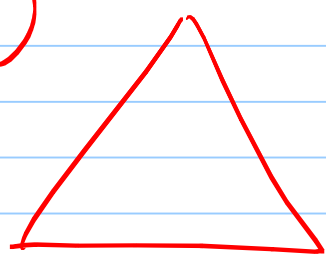
- Delik sayısı (genus)



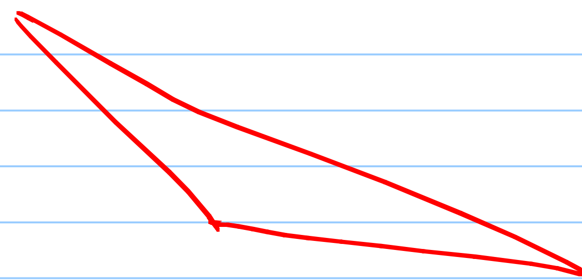
GEOMETRİ NEDİR?

Topolojik nesnelerin üzerine "ölçülebilir" büyüklükler koyarsak nesneler geometri kazanırlar.

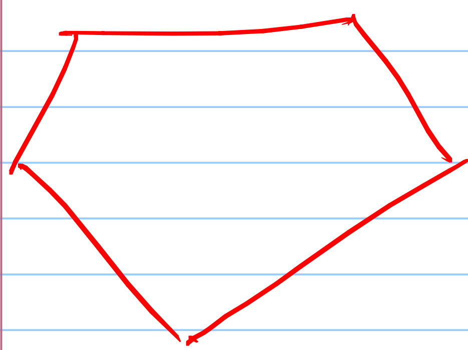
1)



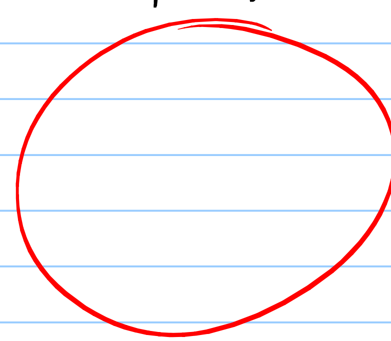
Eşkenar Üçgen



Geniş Açılı Üçgen



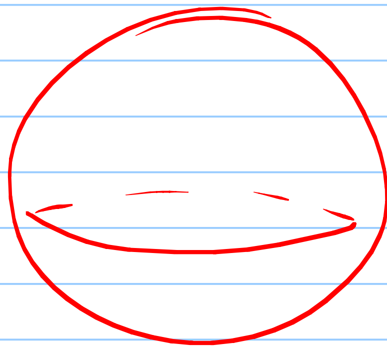
Beşgen



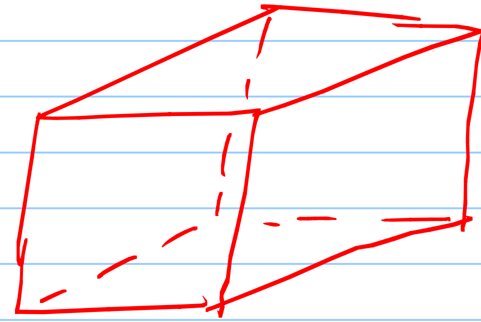
Çember

Topolojik olarak hepsi aynı olsa da geometrileri farklıdır.

2)



Küre

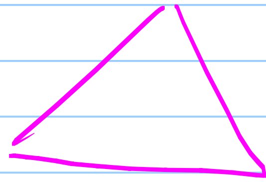


Küp

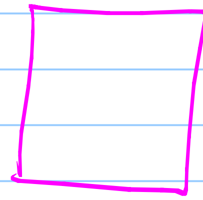
(ZOR) SORU: Geometrik ve topolojik özellikler nasıl etkileşirler?

Daha kolay soruları:

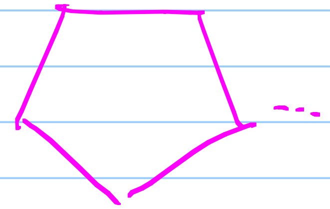
— "Simetrisi bol olan" poligonal çemberler nelerdir?



Eşkenar üçgen



Kare

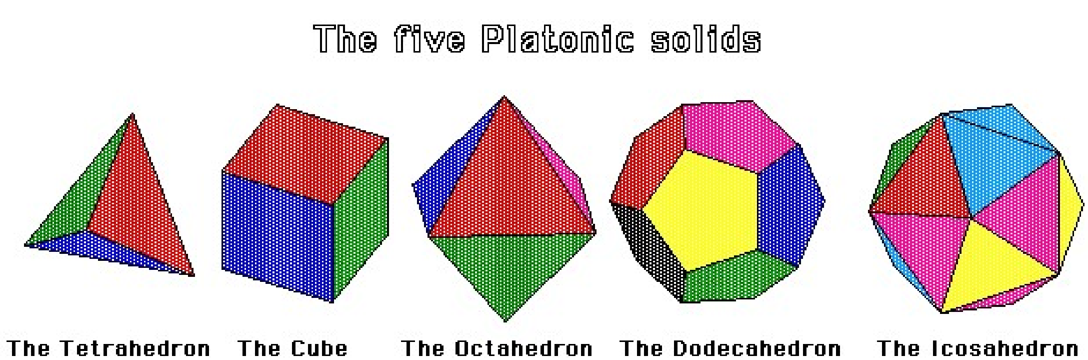


Eşkenar beşgen

"Simetrisi bol olan" polihedral küreler nelerdir?

Platonik Cisimler

Neolitik çağlarda bile biliniyorlardı.
Bu geometrik cisimlerin ilk sınıflaması Euclid'in Elements (XIII) kitabında verilmiştir.



The five regular solids discovered by the Ancient Greek mathematicians are:

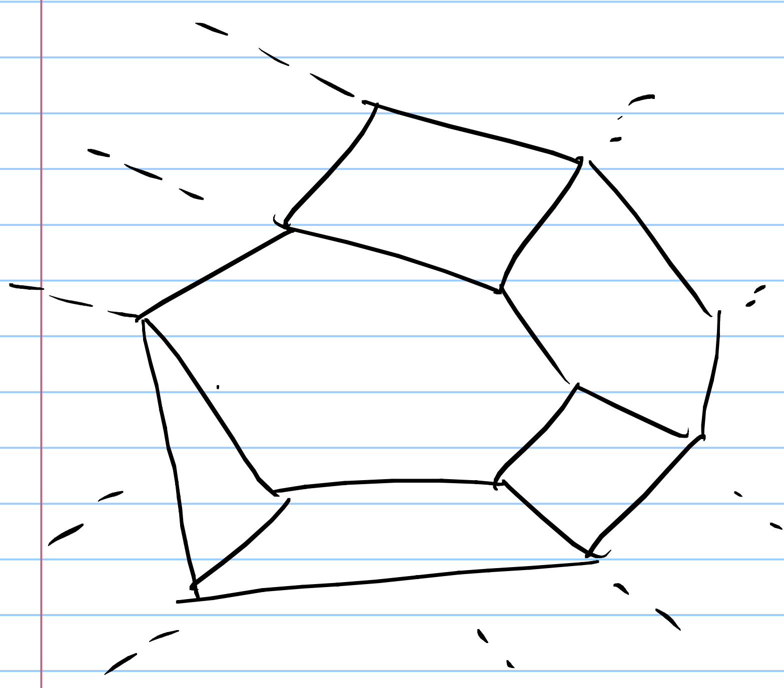
The **Tetrahedron**:	4 vertices	6 edges	4 faces	each with 3 sides
The **Cube**:	8 vertices	12 edges	6 faces	each with 4 sides
The **Octahedron**:	6 vertices	12 edges	8 faces	each with 3 sides
The **Dodecahedron**:	20 vertices	30 edges	12 faces	each with 5 sides
The **Icosahedron**:	12 vertices	30 edges	20 faces	each with 3 sides

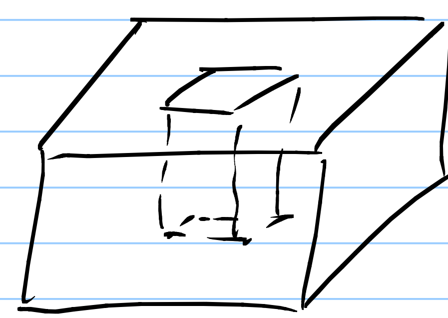
The solids are regular because the same number of sides meet at the same angles at each vertex and identical polygons meet at the same angles at each edge.
These five are the only possible regular polyhedra.

Her yüzü ve kenarı aynı büyüklük ve şekilde olan, her köşesine aynı sayıda kenar/yüz bağlanan cisimlere Platonik cisimler denir.

Neden sadece beş tane Platonik Cisim vardır?

İspat: S herhangi bir polyhedral cisim olsun.





v = köşe sayısı

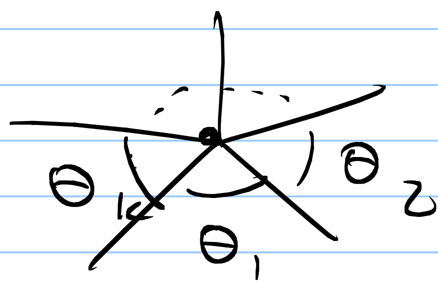
e = kenar sayısı

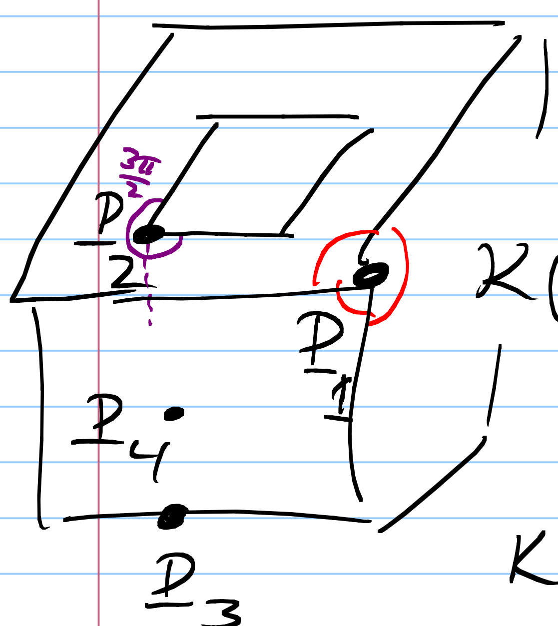
f = yüz sayısı

$p \in S$ bir nokta ise

$$K(p) = 2\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_k)$$

sayısına yüzeyin p noktasındaki eğriliği denir.





$$K(p_1) = 2\pi - 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$$

$$K(p_2) = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = -\pi/2$$

$K(P_3) = 2\pi - (\pi + \pi) = 0$

$K(P_4) = 2\pi - 2\pi = 0$

Yüzeyin toplam eğriliğini hesaplayalım:

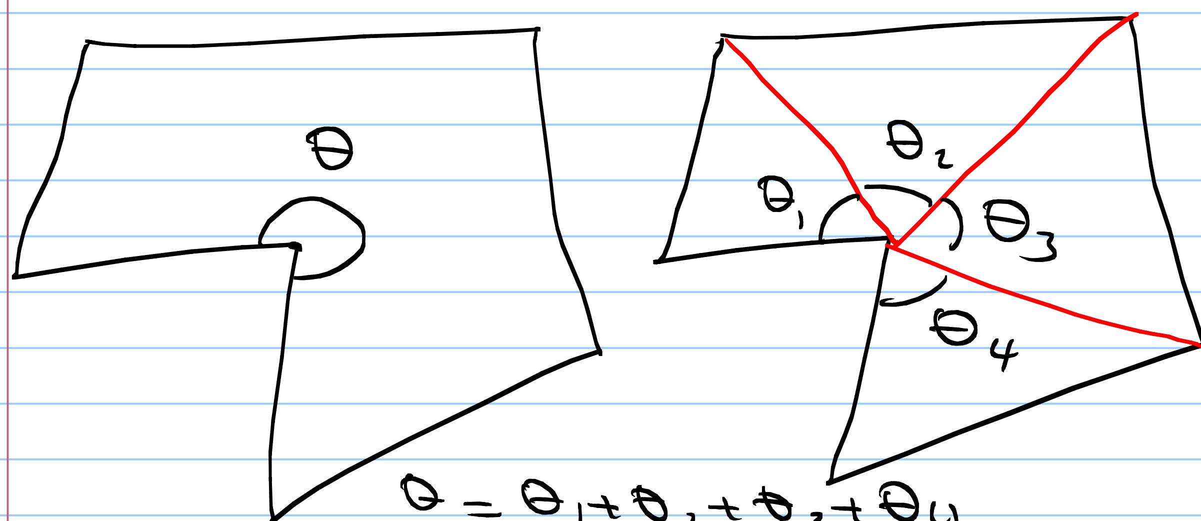
$$\sum_{p \in S} K(p) = \sum_{\substack{p \in S \\ \text{köşe}}} K(p)$$

$$= \sum_{p \text{ köşe}} 2\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_{k_p})$$

$$= 2\pi V - \sum_{p \in \text{köşe}} (\theta_1 + \dots + \theta_{k_p})$$

$$= 2\pi V - \underbrace{\text{tüm yüzlerin iç açılarının toplamı}}_{?}$$

Şimdi köşe sayısını hiç değiştirmeden her bir yüzü üçgenlere ayıralım:



$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$

$v = 6$

$e = 6$

$f = 1$

$v = 6$

$e = 6 + 3 = 9$

$f = 1 + 3 = 4$

Önemli gözlem: 1) Kenar ve yüz sayısı aynı miktarda arttığı için $v - e + f$

sayısı bu işlem altında değişmez.

2) Eğrilikler de bu işlem altında değişmez.

O halde, her bir yüzü üçgen olarak alabiliriz.

Bu durumda,

$$\sum_{p \in S} K(p) = 2\pi V - f \cdot \pi$$

olur. Diğer taraftan $3f = 2e$ olduğundan

$$\sum_{p \in S} K(p) = 2\pi \left(V - \frac{f}{2} \right)$$

$$= 2\pi (V - e + f)$$

$$= 2\pi \chi(S)$$

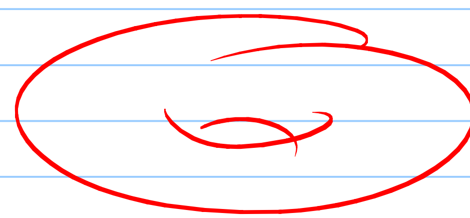
elde edilir. Burada $v-e+f=\chi(S)$ sayısına yüzeyin Euler karakteristiği denir. Bu sayı topolojik bir özelliktir ve

$$\chi(S)=2-2g(S)$$

ile verilir.

$g=0$

$\chi=2-0=2$



$g=1$

$\chi=2-2=0$

$g=2$

$\chi=2-4=-2$

Bizim Platonik cisimleri
birer küre olduğun-
dan toplam eğrilik

$$\sum_{p \in S} K(p) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

olarak bulunur.

O halde,

$$4\pi = V \cdot K(p) \text{ olur.}$$

$$K(p) = 360 - k \begin{cases} 60 & \text{Üçgen} \\ 90 & \text{Kare} \\ 108 & \text{Beşgen} \end{cases}$$

k = her bir köşedeki yüz
sayısı ≥ 3.

Buradan,

$$V=\frac{720}{K(P)}=\frac{720}{360-k\begin{cases}60\\90\\108\end{cases}}$$

elde edilir.

$k=3$ alalım.

Eş kenar üçgen:

$$V=\frac{720}{360-3\cdot 60}=\frac{720}{180}=4$$

Tetrahedron
(yüzler üçgen)

Kare:

$$V=\frac{720}{360-3\cdot 90}=\frac{720}{90}=8$$

Küp
(yüzleri kare)

Beşgen

$$V = \frac{720}{360 - 3 \cdot 108} = \frac{720}{36} = 20$$

Dodecahedron
(yüzleri beşgen)

k = 4

$$V = \frac{720}{360 - 4 \begin{cases} 60 \\ 90 \\ 108 \end{cases}} = \frac{720}{360 - 4 \cdot 60}$$

$$V = \frac{720}{120} = 6$$

Her bir yüzü üçgen

Octahedron

k=5

$$V=\frac{720}{360-5\begin{cases}60\\90\\108\end{cases}}$$

$$=\frac{720}{60}=12$$

Icosahedron
(yüzleri üçgen)

NOT: $2=\chi(S)=V-e+f$

ve $3f=2e$

olduğundan V sayısı e ve f'yi belirler.

Örnek: $V=12$ olsun

$$2=V-\frac{f}{2}\Rightarrow -10=-\frac{f}{2}$$

$\Rightarrow f = 20, \quad e = \frac{3f}{2} = 30$

elde edilir.

Futbol Topunun Geometrisi

12 beşgen

20 altıgen

$v = 5 \times 12 = 60$

$e = \frac{60+120}{2} = 90$

$f = 12 + 20 = 32$

$$\left(\chi = v - e + f = 60 - 90 + 32 = 2\right)$$

Her köşedeki eğrilik

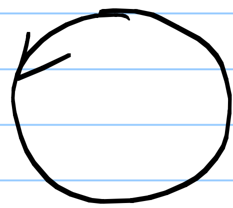
$$K(p) = 360 - (120 + 120 + 108) = 12^\circ$$

$$\text{Toplam eğrilik} = v \cdot K(p) = 12^\circ \times 60 = 720^\circ = 4\pi$$

Düzgün Yüzeylerin Eğriliği:

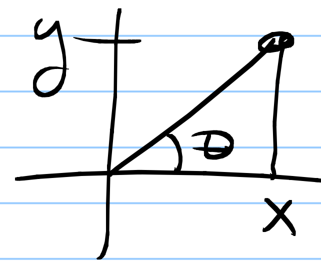
Birim çemberin toplam eğriliği çevre uzunluğu olan 2π sayısıdır:

S^1



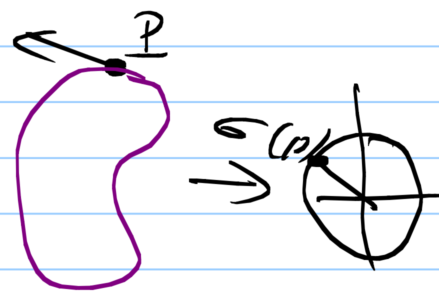
$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} y/x$$



$$\omega = d\theta$$

$$2\pi = \int_{S^1} d\theta = \int_C \sigma^* \omega ,$$



Benzer şekilde birim kürenin toplam eğriliği

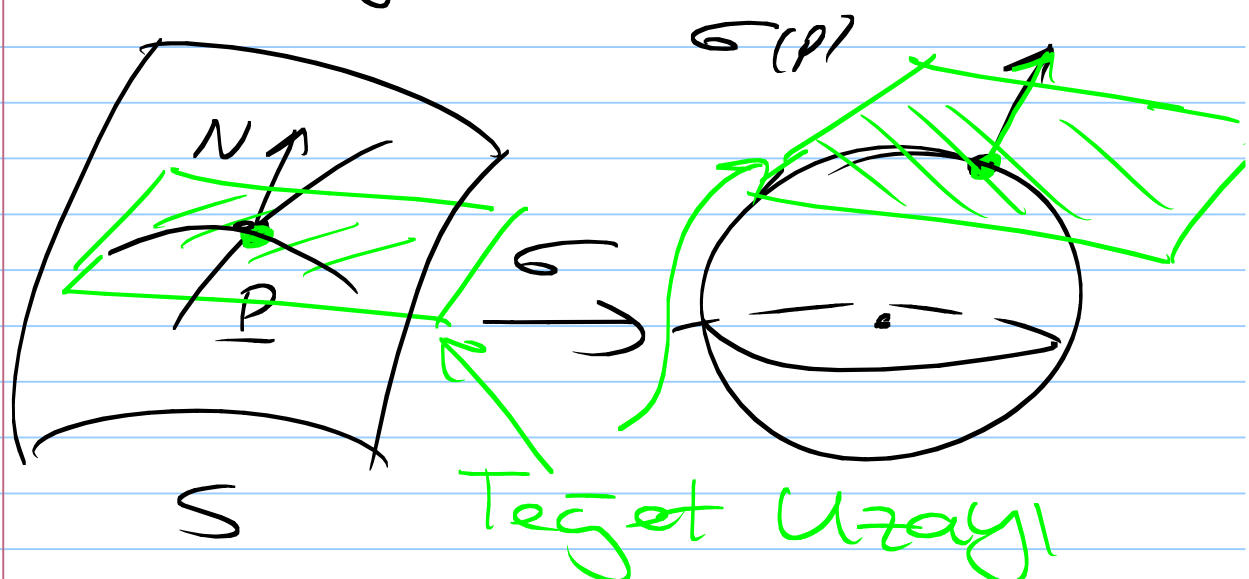
$$\omega = \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

formunun integrali ile verilir:

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi$$

S^2

Rastgele bir yüzeyin (Gauss) eğriliği ω formu yardımıyla verilir:



σ : Gauss gönderimi

$$\sigma^*(\omega) = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} \, dS$$

$$S = \{ (x,y,z) \mid z = f(x,y) \}$$

Theorem (Gauss-Bonnet)

S sınırı olmayan kapalı bir yüzey olmak üzere

$$\int_S \sigma^*(\omega) = 2\pi \chi(S)$$

eşitliği sağlanır.

Bu teorem yüzeyin topolojisi ile geometrisi arasındaki ilişkiyi ifade eder; Yerel eğrilik istenildiği gibi seçilebildiği halde toplam eğrilik topolojik bir değişmezdir.

Yüzeyler Üzerinde Homojen Geometriler (genelleştirilmiş Platonik yüzeyler)

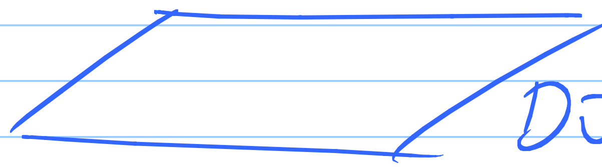
g	0	1	2	3	4	...
$\chi=2-2g$	2	0	-2	-4	-6	
$2\pi\chi$	4π	0	-4π	-8π	-12π	

Bu durumda her noktada eğrilik sabit ise

$$2\pi\chi(S)=\int_{S^2} K(p)\,ds$$

olduğundan

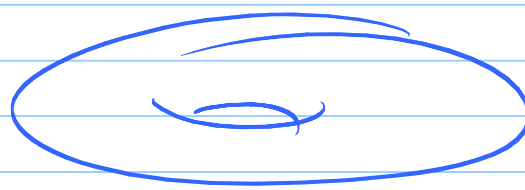
$$K(p) = \frac{2\pi\chi(S)}{\text{Alan}(S)} \quad \text{olur.}$$



Düzlem

$K=0$

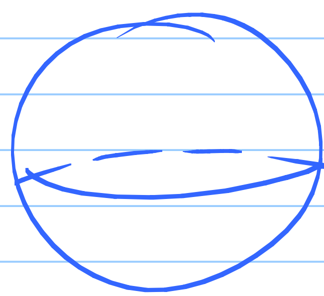
(Parabolik)



Torus

$K=1$

(Eliptik)

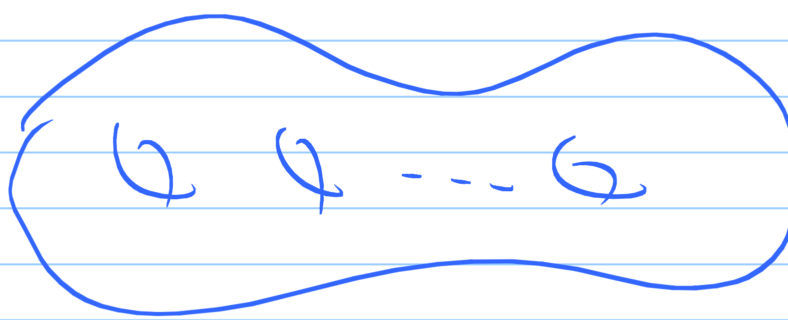


S^2

Küre

$K=-1$

(Hiperbolik)



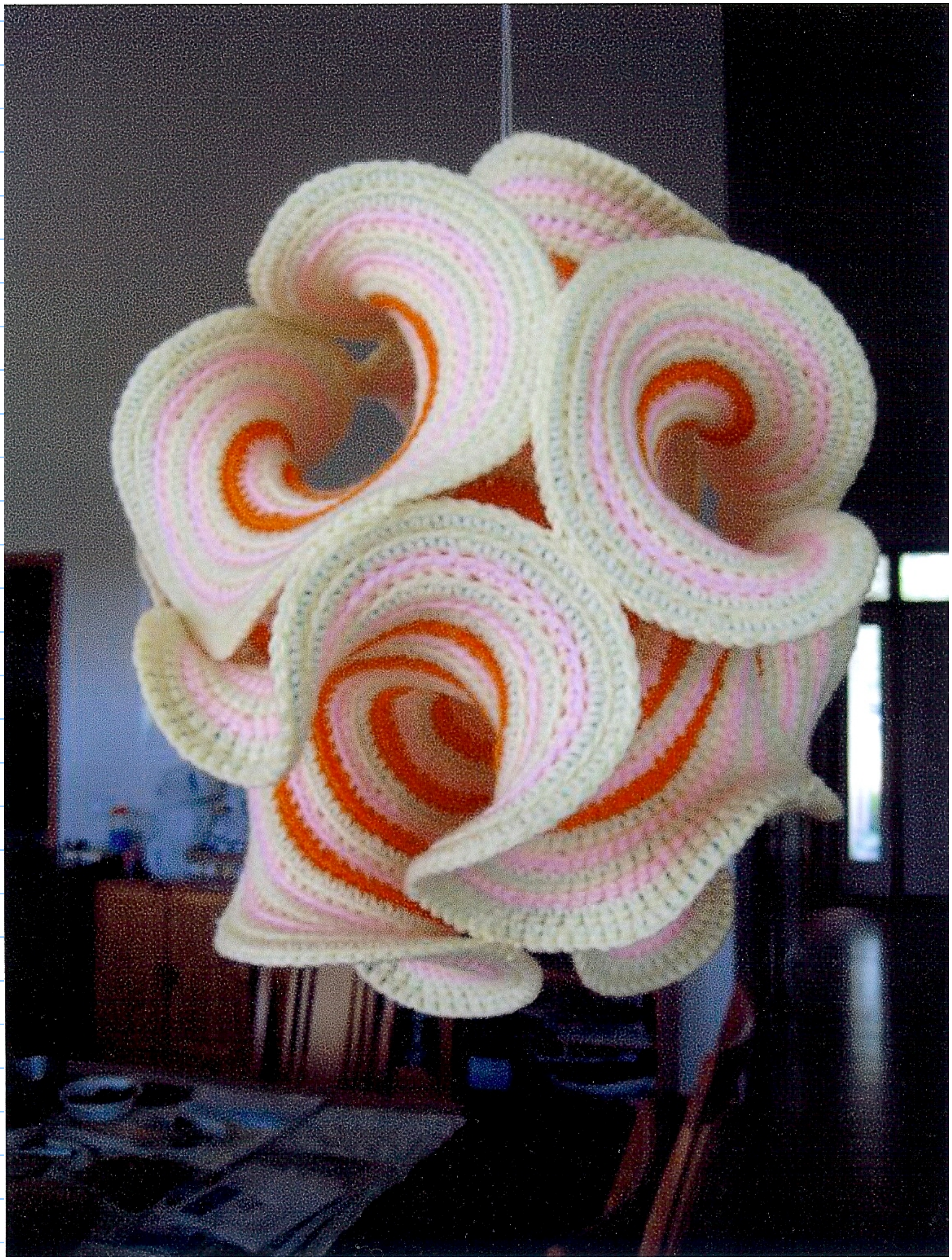
$$\Sigma_g, \quad g \geq 2$$

John Nash

(~1956) bu yüzeylerin bir $\mathbb{R}^n$ uzayı içine gömüleceğini göstermiştir. Fakat k<0 ise n>3 olmalıdır!

$\mathbb{R}^3$ içindeki negatif eğrilikli yüzeyler "tam" değildir!

Ayrıca $\mathbb{R}^3$ içindeki her kapalı yüzeyin pozitif eğriliğe sahip bir noktası vardır. Bu nedenle her noktadaki (Gauss) eğriliği sıfır olan torus $\mathbb{R}^3$ içinde oturmaz!



Gabriele E. Meyer

http://www.math.wisc.edu/~meyer

Üç boyutlu manifoldların Geometrisi?

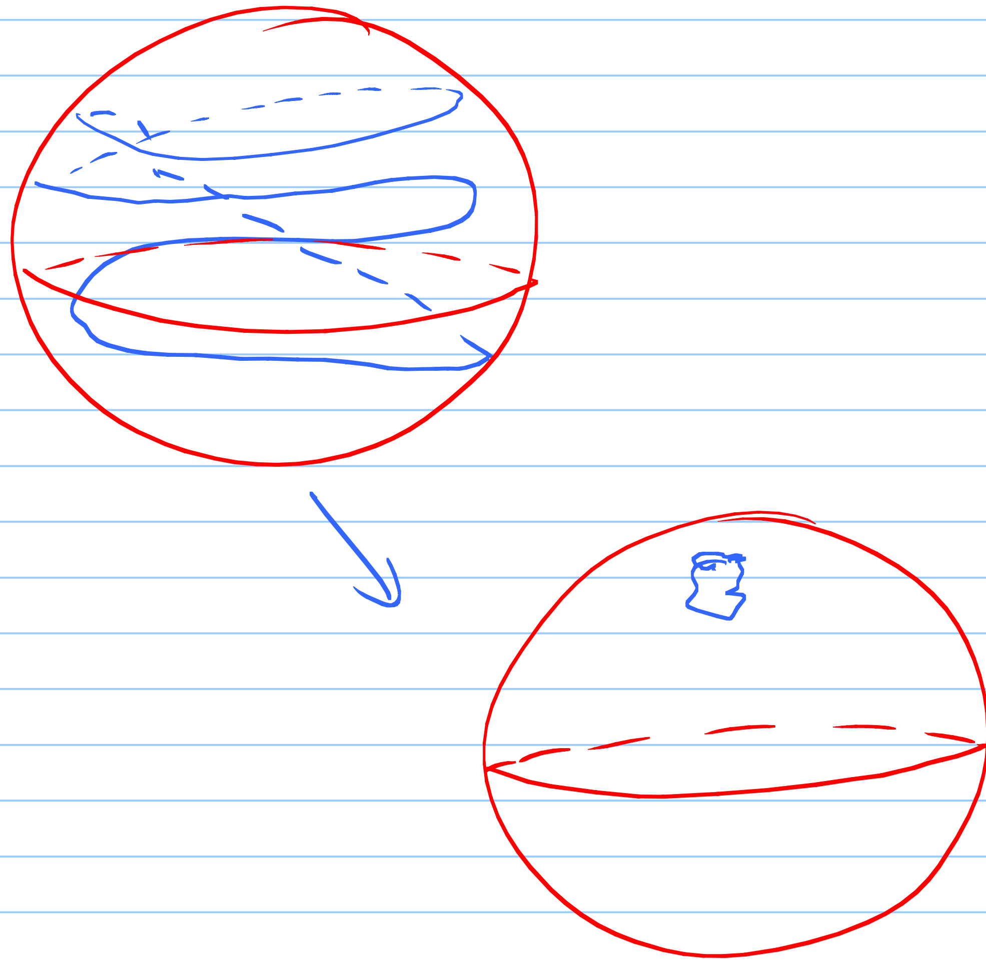
8 farklı geometri vardır.

Grigori Perelman: (2003)

İspat ettiği sonuçlarla üç boyutlu manifoldların geometri ve topolojilerinin anlaşılması yönünde, Poincare Sanısı dahil, birçok soruyu cevaplamıştır.

Poincaré Sanısı:

Üzerindeki her kapalı eğri bir noktaya büzüle-bilen tek kapalı üç manifold üç boyutlu küredir.



Perelman Richard Hamilton'ın başlattığı ve Ricci Akışları denen programı tek başına bitirmiştir. Çalışmalarının kontrol edilmesi çok yetkin bir çok matematikçinin üç yılını almıştır. Bu çalışmaları için kendisine sunulan tüm ödülleri reddetmiştir.

Perelman'ın çözümü matematiğin hemen hemen tamamına hakim olmayı gerektirmektedir. Son yüzyılın en heyecan verici matematiksel gelişmelerinden biri olarak kabul edilmektedir.

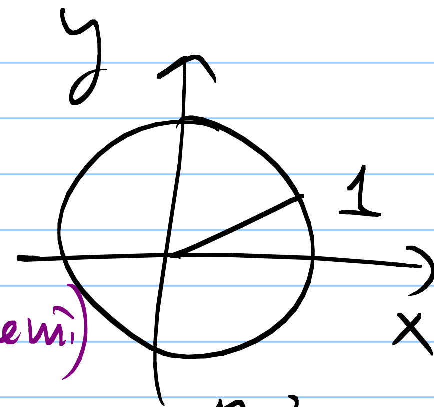
Cebirsel Geometri nedir?

Cebirsel denklemlerle (polinom) ifade edilen nesnelerin geometrik ve topolojik özelliklerini inceleyen disipline cebirsel geometri denir.

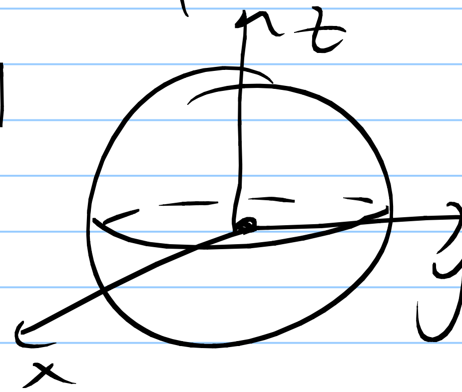
Örnekler

1) $S^1 : x^2+y^2=1$

(Hilbert'in 16. Problemi)

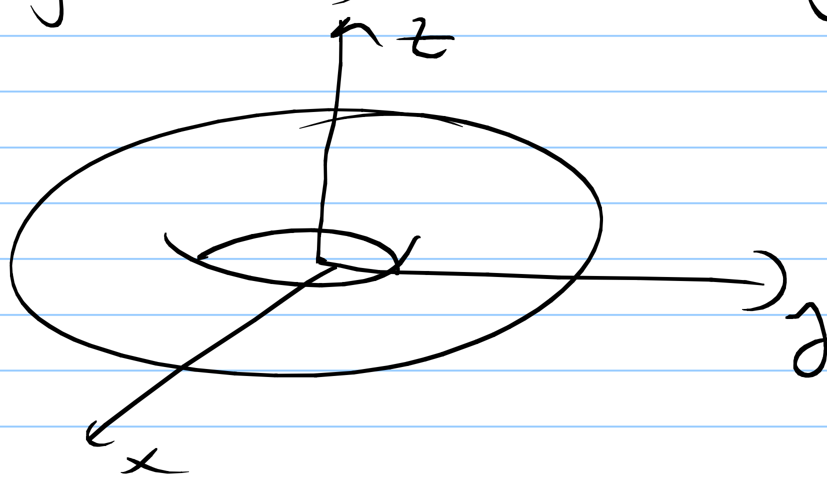


2) $S^2 : x^2+y^2+z^2=1$



3) $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

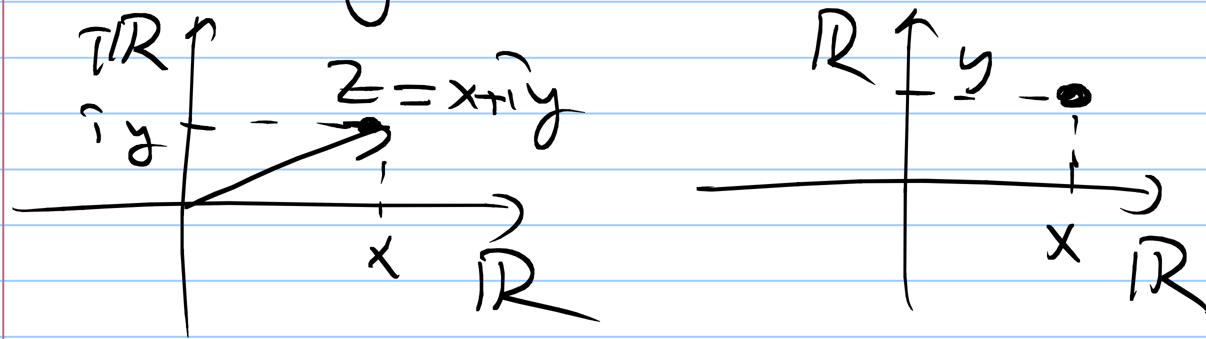
$$(x^2+y^2+z^2+3)^2 = 16(x^2+y^2)$$



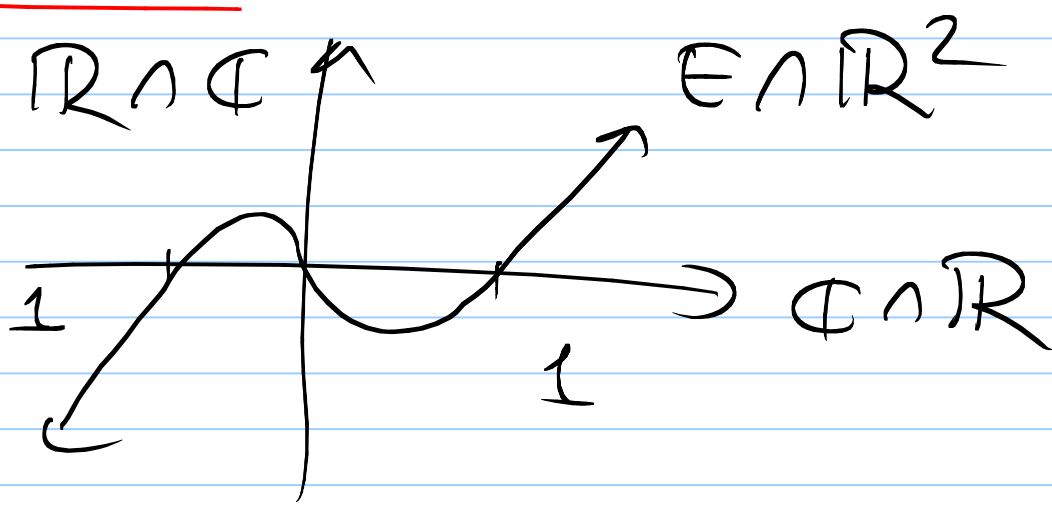
"Karmaşık" Cebirsel Geometri

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

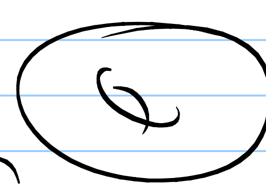
$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y)$$



Örnek:



$$E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z-1)(z+1)\}$$

Karmaşık Resmi: 

Elliptik Eğri

Derece Genus Formülü:

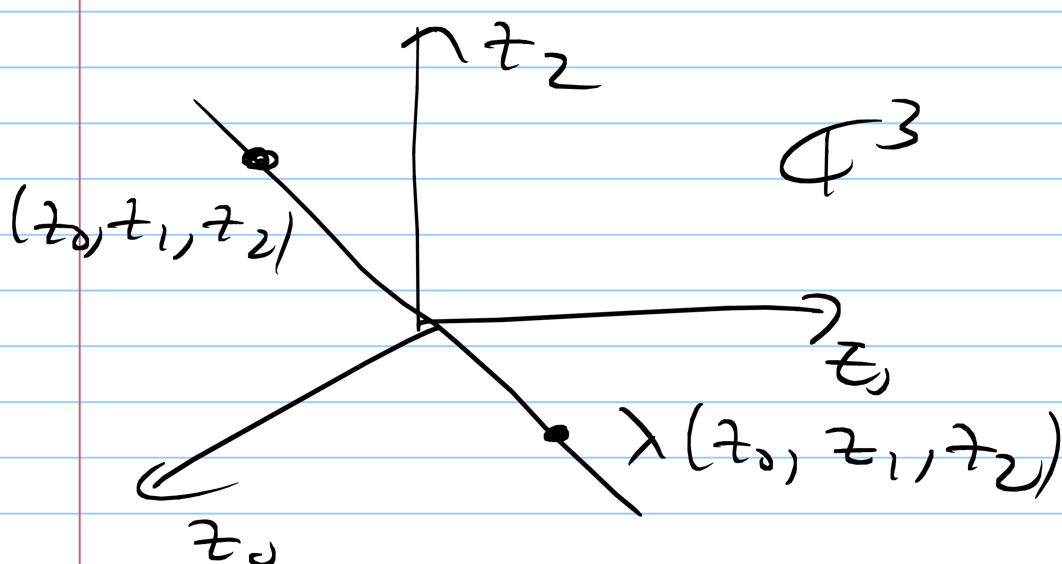
$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$$

Karmaşık projektif doğru

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$$
$$= \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1$$

Karmaşık projektif düzlem

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \Big/ \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$(z_0, z_1, z_2) \sim \lambda(z_0, z_1, z_2)$$



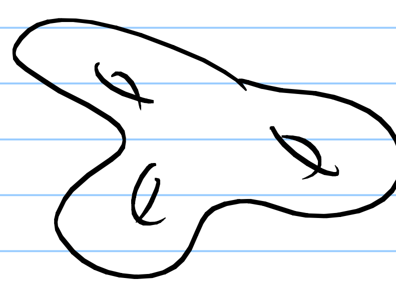
Eğer $f(z_0, z_1, z_2)$ derecesi d olan homogen bir polinom ise bu polinomun sıfırlarının oluşturduğu küme $\mathbb{CP}^2$ içinde genusu (eğer dejenere değilse)

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

olan bir yüzeydir.

$d = 1, 2 \Rightarrow g = 0$ 

$d = 3 \Rightarrow g = 1$ 

$d = 4 \Rightarrow g = 3$ 

$\vdots$

İspatı yapabilmek için bu eğrilere tek tek bakmak yerine hepsini birden incelemek gerekir (dejenere olanlar dahil).

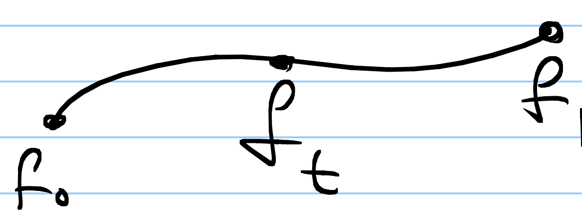
"Düzgün olanları anlayabilmek için önce dejenere olanları anlamak gerekir."

<u>İspatın fikri:</u> f polinomunu tamamen dejenere hale getir: $f_1 = (a_1 z_0 + b_1 z_1 + c_1 z_2)$

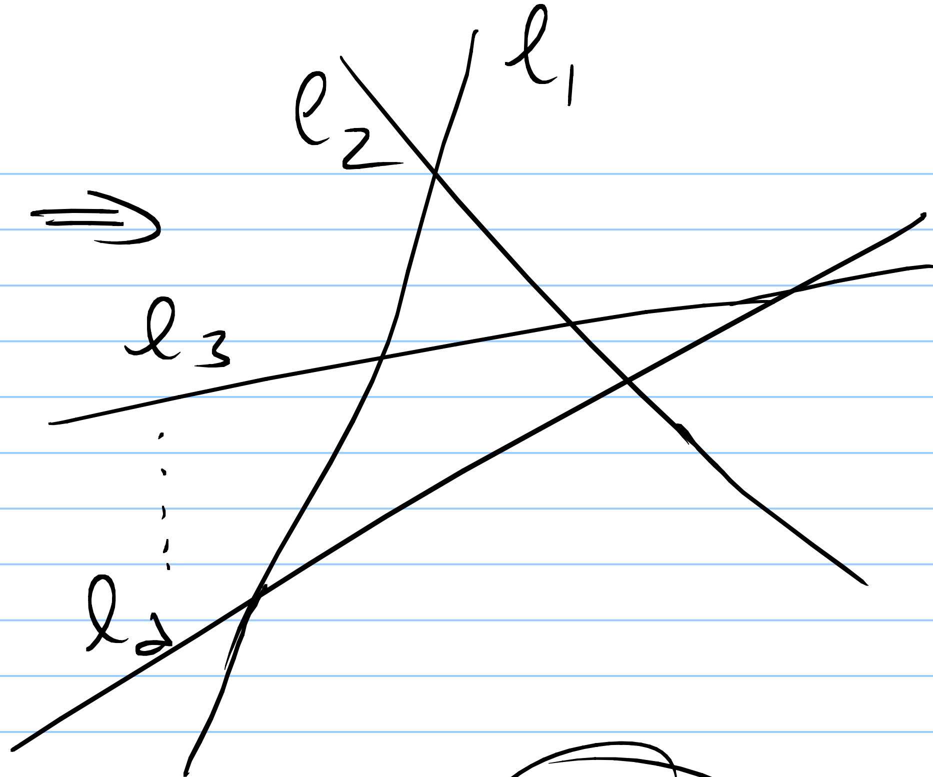
$$\vdots$$

$$(a_d z_0 + b_d z_1 + c_d z_2)$$

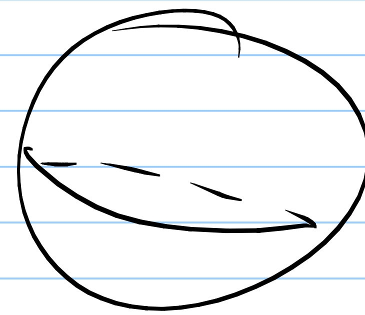
$f_0 = f$



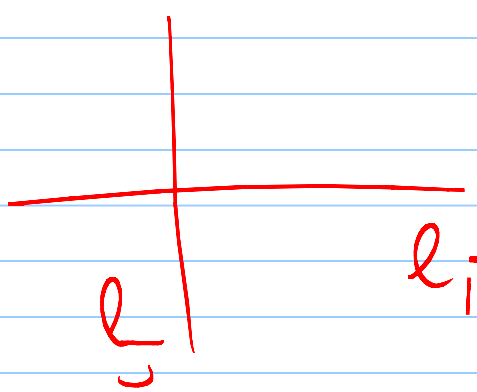
$f_1 = 0 \Longrightarrow$



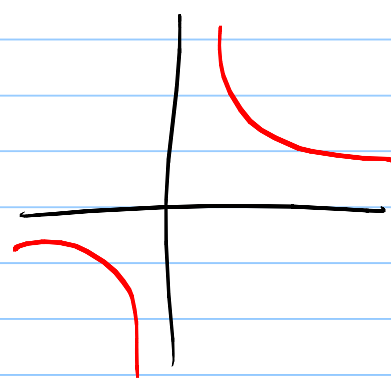
$l_i : \mathbb{CP}^2$



Tüm kesişim noktalarında iki tane küre tek bir noktada kesişir.



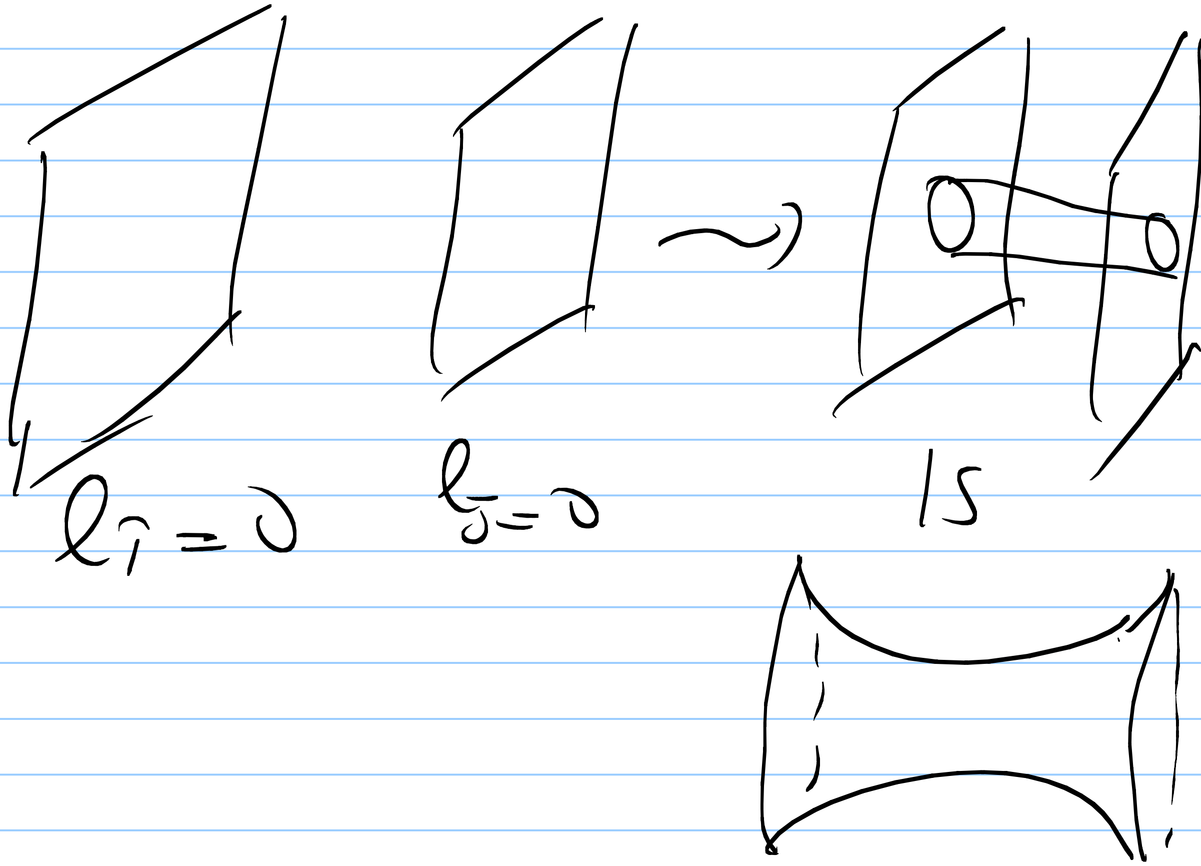
$\Longrightarrow$



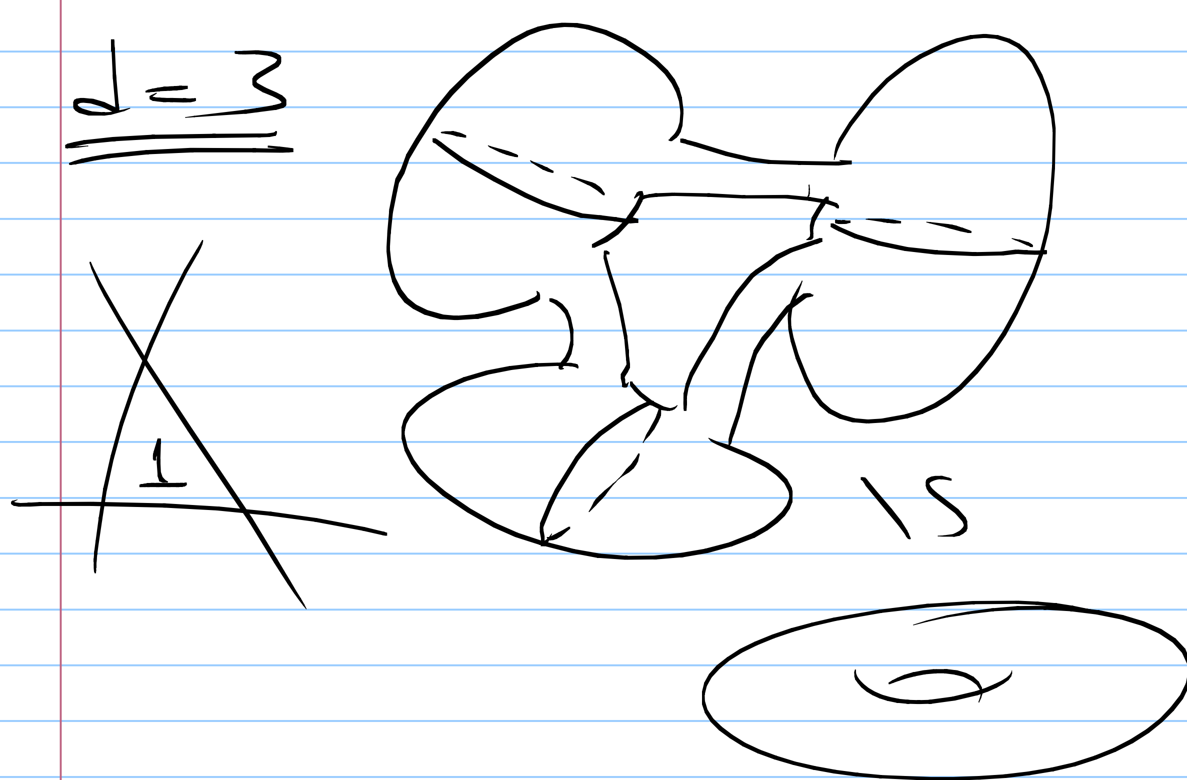
$l_i \, l_j = 0$ $\qquad$ $l_i \, l_j = \epsilon$

$xy = 0 \Longrightarrow xy = \epsilon$

Geometrik açıdan:

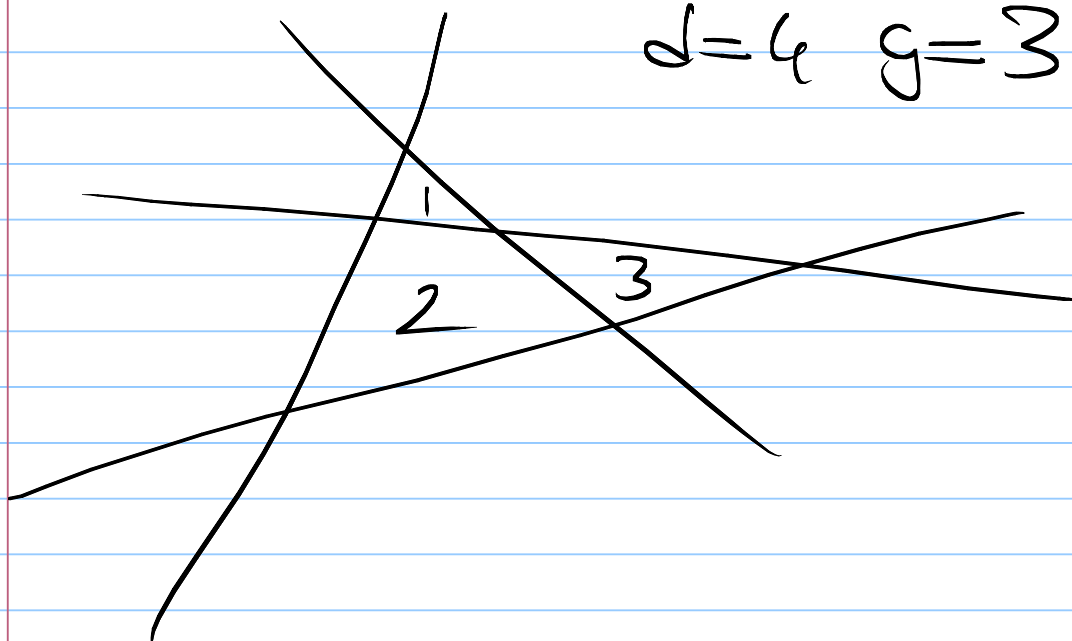


d = 3



Genel durum:

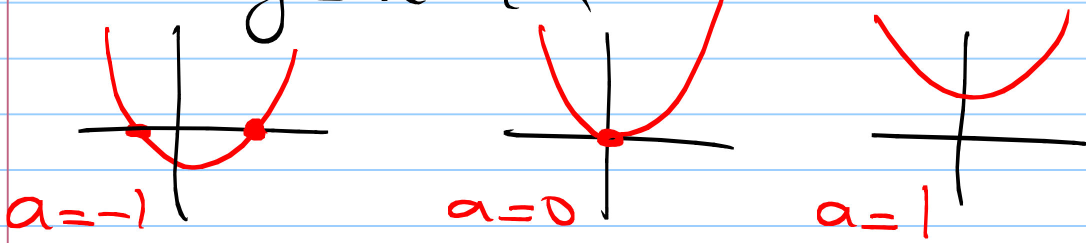
$d=4 \quad g=3$



Son olarak dejenere olmayan eğrilerin oluşturduğu uzayın bağlantılı olduğunu görmek yeterlidir!

Örnek: $\mathbb{R}^1$'de durum farklıdır!

$y=x^2+a$



DİKKATİNİZ

VE

SABRINIZ

İÇİN

TEŞEKKÜR

EDERİM...