

Matematikte Sonsuz

Mahmut Kuzucuođlu

Orta Dođu Teknik Üniversitesi

Matematik Bölümü

matmah@metu.edu.tr

İlkyar-2017

17 Temmuz 2017

Bugün matematikte çok değişik bir kavram olan sonsuz terimi üzerinde konuşacağız.

Bugün matematikte çok değişik bir kavram olan sonsuz terimi üzerinde konuşacağız.

Bu kavram hakkında beyinlerimizi zorlayıp düşünme ve soyut düşünme becerimizi arttırmayı, sorgulamayı ve tartışmayı amaçlıyoruz.

Kafamızda oluşan soruların hepsini cevaplamak yerine, merak ettirmeyi ve ders sonunda cevapsız kalan soruların cevaplarını daha sonra araştırmanızı amaçlıyoruz.

Tartışmak istediğimiz sorulardan bazıları şunlar olabilir.

Tartışmak istediğimiz sorulardan bazıları şunlar olabilir.

- 1 Matematikte sonsuz nedir?

Tartışmak istediğimiz sorulardan bazıları şunlar olabilir.

- 1 Matematikte sonsuz nedir?
- 2 Sonsuz deyince ne anlıyoruz?

Tartışmak istediğimiz sorulardan bazıları şunlar olabilir.

- 1 Matematikte sonsuz nedir?
- 2 Sonsuz deyince ne anlıyoruz?
- 3 Sonsuz bir tane midir?

Tartışmak istediğimiz sorulardan bazıları şunlar olabilir.

- 1 Matematikte sonsuz nedir?
- 2 Sonsuz deyince ne anlıyoruz?
- 3 Sonsuz bir tane midir?
- 4 Kaç tane sonsuz olduğunu düşünüyorsunuz?

- 1 Matematikte sonsuz kelimesi ne zaman tartışılmaya başlanmıştır?
- 2 Eskiden sonsuz hakkında neler yapılmış, neler söylenmiş, neler kanıtlanmış ve tarihsel süreç nasıl gelişmiştir?

Bu soruları tartışmak için yeni bir soru ile başlayalım.

Bu soruları tartışmak için yeni bir soru ile başlayalım.

Soru 1. Günlük hayatımızda bazı objelerin birinin diğerinden az ya da çok olduğunu nasıl anlarız?

Soru 2. Eski çağlarda daha sayılar keşfedilmeden önce çobanlar bu karşılaştırmayı nasıl yapıyorlardı?

Önce ikinci sorunun cevabı ile başlayalım.

Önce ikinci sorunun cevabı ile başlayalım.

Eski çağlarda çobanlar hayvanlarını otlatmaya giderken küçük bir çukura her hayvan için ahırdan çıkarken bir taş atarlarmış, akşam geri geldiklerinde de her hayvan ahıra girerken, yine her hayvan için çukurdan bir taşı dışarı çıkarırlarmış.

Eğer bütün hayvanlar bittikten sonra hala çukurda taş kalmışsa, demek ki çukurdaki taş sayısı kadar hayvan dağda kaldı demekmiş.

Eğer bütün hayvanlar bittikten sonra hala çukurda taş kalmışsa, demek ki çukurdaki taş sayısı kadar hayvan dağda kaldı demekmiş.

Yani bu hayvanlar ya dağda kaldı ya da yırtıcı hayvanlar tarafından parçalandı demekmiş.

Eğer bütün hayvanlar bittikten sonra hala çukurda taş kalmışsa, demek ki çukurdaki taş sayısı kadar hayvan dağda kaldı demekmiş.

Yani bu hayvanlar ya dağda kaldı ya da yırtıcı hayvanlar tarafından parçalandı demekmiş.

Eğer çukurda hiç taş kalmamışsa, sabah giden hayvanların hepsi geri döndü demekmiş.

Burada çobanın yaptığı şey taşlarla hayvanları eşleştirmektir.

Çukurda taş kalmaması demek taşların sayısı ile hayvanların sayısı aynı demektir.

Çukurda taş kalmaması demek taşların sayısı ile hayvanların sayısı aynı demektir.

Burada yapılan eşleştirme, birebir ve örten şekilde yapıldı demektir yani her taş için bir hayvan ve her hayvan için bir taş vardır.

Burada birebir örten kelimesi ile her iki kümede de her eleman, karşı tarafta bir ve yalnız bir elemanla eşleştirilecek ve her iki tarafta da eşleştirilmemiş eleman kalmayacak demektir.

Bugün matematikte uyguladığımız yöntemde aynıdır.

Bugün matematikte uyguladığımız yöntemde aynıdır.

Elinde birer adet Elma, Armut, Nar ve Portakal olan bir kişi bunu 4 sayısı ile eşler ve elimde dört çeşit meyve var der.

Bu eşleme değişik şekillerde yapılabilir.

Bu değişik yapılan eşleme elimizdeki meyveların sayılarını değiştirmez.

Bu değişik yapılan eşleme elimizdeki meyvelerin sayılarını değiştirmez.

Elimizde hala 4 adet meyve vardır.

Birebir örten

Birebir ama örten olmayan eşleme için şu örnek verilebilir.

Birebir ama örten olmayan eşleme için şu örnek verilebilir.

$$A = \{Ali, Veli\} \text{ ve } B = \{Ali, Veli, Ahmet\}$$

kümelerini karşılaştırdığımızda birebir eşleme yapabiliriz.
Şöyle ki

$$Ali \rightarrow Ali$$

$$Veli \rightarrow Veli$$

$$A \subseteq B \text{ ve } A \subset B$$

Yalnız bu eşleme örten değildir çünkü B kümesindeki Ahmet elemanı A kümesinden bir elemanla eşleşmemiştir.

Günümüzde bu eşleştirmelere fonksiyon diyoruz.

Günümüzde bu eşleştirmelere fonksiyon diyoruz.

Yani f eşleştirmesi A ve B kümeleri arasında A dan B ye bir fonksiyon demek:

A daki her elemanın mutlaka B den bir elemanla eşleşmesi ve A daki bir elemanın B de yalnız bir elemanla eşleşmesidir.

Günümüzde bu eşleştirmelere fonksiyon diyoruz.

Yani f eşleştirmesi A ve B kümeleri arasında A dan B ye bir fonksiyon demek:

A daki her elemanın mutlaka B den bir elemanla eşleşmesi ve A daki bir elemanın B de yalnız bir elemanla eşleşmesidir.

f fonksiyonunun birebir olması demek f fonksiyonu A' da ki farklı iki elemanı B de farklı iki elemana göndermesi demektir.

Günümüzde bu eşleştirmelere fonksiyon diyoruz.

Yani f eşleştirmesi A ve B kümeleri arasında A dan B ye bir fonksiyon demek:

A daki her elemanın mutlaka B den bir elemanla eşleşmesi ve A daki bir elemanın B de yalnız bir elemanla eşleşmesidir.

f fonksiyonunun birebir olması demek f fonksiyonu A' da ki farklı iki elemanı B de farklı iki elemana göndermesi demektir.

Birebir bir f fonksiyonunun birebir örten olması demek f nin birebir ve B kümesindeki her elemana A kümesinden mutlaka bir eleman f fonksiyonu ile eşleştirilmesi demektir.

İki kümede de aynı sayıda eleman var demek için iki kümenin elemanlarını birbirine birebir ve örten olarak eşleştirmemiz gerekir.

İki kümede de aynı sayıda eleman var demek için iki kümenin elemanlarını birbirine birebir ve örten olarak eşleştirmemiz gerekir.

Eğer bu eşleştirmeleri yapabiliyorsak o zaman bu iki kümede de aynı sayıda eleman var deriz.

Çember Üzerindeki Noktalar

Örnek olarak yukarıda belirttiğimiz 4 elemanlı kümeleri verebiliriz.

Çember Üzerindeki Noktalar

Örnek olarak yukarıda belirttiğimiz 4 elemanlı kümeleri verebiliriz.

Şimdi biraz daha karmaşık şu soruyu soralım:

Çember Üzerindeki Noktalar

Örnek olarak yukarıda belirttiğimiz 4 elemanlı kümeleri verebiliriz.

Şimdi biraz daha karmaşık şu soruyu soralım:

Soru. Birbiri içine çizilmiş iki çember C_1 , C_2 düşünelim. C_1 üzerindeki noktaların kümesine A_1 ve C_2 nin üzerindeki noktaların kümesine A_2 diyelim. C_1 in yarıçapı 1 metre ve C_2 nin yarıçapı 2 metre olsun. A_1 in eleman sayısı ile A_2 nin eleman sayılarını karşılaştıralım.

çemberlerden içeridekinin mi yoksa dışarıdakinin mi üzerinde daha fazla nokta vardır veya üzerlerindeki noktaların sayısı esit midir?

Çember Üzerindeki Noktalar

Bazen bu eşleştirmeleri resimle göstermek daha kolay olabilir.

Çember Üzerindeki Noktalar

Bu konuyu nasıl düşünmeliyiz ve nasıl bir sonuca ulaşabiliriz?

Çember Üzerindeki Noktalar

Çemberleri tahtaya çizelim. Yarıçapı 1 metre olan küçük çember yarıçapı 2 metre olanın içinde olduğu için merkezlerini aynı alalım.

ve her çemberin merkezden geçen doğrularına bakalım.

Çember Üzerindeki Noktalar

Çemberleri tahtaya çizelim. Yarıçapı 1 metre olan küçük çember yarıçapı 2 metre olanın içinde olduğu için merkezlerini aynı alalım.

ve her çemberin merkezden geçen doğrularına bakalım.

Büyük çemberin üzerindeki her noktanın küçük çemberin üzerindeki bir noktadan geçtiğini görürüz.

Çember Üzerindeki Noktalar

Çemberleri tahtaya çizelim. Yarıçapı 1 metre olan küçük çember yarıçapı 2 metre olanın içinde olduğu için merkezlerini aynı alalım.

ve her çemberin merkezden geçen doğrularına bakalım.

Büyük çemberin üzerindeki her noktanın küçük çemberin üzerindeki bir noktadan geçtiğini görürüz.

Bu eşleştirme bize birebir örten bir eşleştirme verdiği için her iki çemberde de aynı sayıda nokta vardır deriz.

Çember Üzerindeki Noktalar

Dikkat ederseniz burada çemberlerin yarıçapının bir önemi yoktur. 5 metre 100 metre desek de aynı eşleştirmeyi yapabiliriz.

İşte matematikte soyutlama böyle bir şey diyebiliriz.

Çemberin yarıçapının bir önemi yoktur.

Çember Üzerindeki Noktalar

Dikkat ederseniz burada çemberlerin yarıçapının bir önemi yoktur. 5 metre 100 metre desek de aynı eşleştirmeyi yapabiliriz.

İşte matematikte soyutlama böyle bir şey diyebiliriz.

Çemberin yarıçapının bir önemi yoktur.

Matematiksel anlayışımız artınca bu eşleşmeyi genellikle sayılardan oluşan kümelerle yaparız.

Örneğin

$A = \{Kalem, Silgi, Defter, Kitap\}$ ile

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

kümelerindeki elemanları eşleştiririz.

Bu eşlemeyi

$$M = \{Elma, Armut, Nar, Portakal\}$$

kümesi ile eşleyerek A kümesinin elemanlarının sayıları B kümesinin elemanlarının sayıları ile aynıdır diyebiliriz.

Bu eşleştirmeyi şimdi kümenin altkümeleri ile kümenin elemanları arasında yapalım.

Bu eşleştirmeyi şimdi kümenin altkümeleri ile kümenin elemanları arasında yapalım.

Soru. Bir kümenin altkümelerini ve altkümelerinin sayısını nasıl buluruz?

Bu eşleştirmeyi şimdi kümenin altkümeleri ile kümenin elemanları arasında yapalım.

Soru. Bir kümenin altkümelerini ve altkümelerinin sayısını nasıl buluruz?

Örnek. $A = \{Kalem\}$ kümesinin altkümelerini bulalım.

Bu eşleştirmeyi şimdi kümenin altkümeleri ile kümenin elemanları arasında yapalım.

Soru. Bir kümenin altkümelerini ve altkümelerinin sayısını nasıl buluruz?

Örnek. $A = \{Kalem\}$ kümesinin altkümelerini bulalım.

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$

Bu eşleştirmeyi şimdi kümenin altkümeleri ile kümenin elemanları arasında yapalım.

Soru. Bir kümenin altkümelerini ve altkümelerinin sayısını nasıl buluruz?

Örnek. $A = \{Kalem\}$ kümesinin altkümelerini bulalım.

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$

Demek ki 1 elemanlı bir kümenin 2 tane altkümesi vardır.

Altküme Sayısı

Şimdi 2 elemanlı $\{Kalem, Silgi\}$ kümesini altkümelerini bulalım.

Altküme Sayısı

Şimdi 2 elemanlı $\{Kalem, Silgi\}$ kümesini altkümelerini bulalım.

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$

doğal olarak $\{Kalem, Silgi\}$ kümesinin de altkümeleridir ancak bu kümelerde silgi hiç görünmediğine göre bu kümelere Silgi eklersek

(i) $\{Silgi\}$ (ii) $\{Kalem, Silgi\}$ kümelerini buluruz ve $A = \{Kalem, Silgi\}$ kümesinin toplam altkümeleri

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$ (c) $\{Silgi\}$ (d) $\{Kalem, Silgi\}$ kümeleridir.

Altküme Sayısı

Şimdi 2 elemanlı $\{Kalem, Silgi\}$ kümesini altkümelerini bulalım.

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$

doğal olarak $\{Kalem, Silgi\}$ kümesinin de altkümeleridir ancak bu kümelerde silgi hiç görünmediğine göre bu kümelere Silgi eklersek

(i) $\{Silgi\}$ (ii) $\{Kalem, Silgi\}$ kümelerini buluruz ve $A = \{Kalem, Silgi\}$ kümesinin toplam altkümeleri

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$ (c) $\{Silgi\}$ (d) $\{Kalem, Silgi\}$ kümeleridir.

Dolayısıyla 2 elemanlı kümenin toplam 4 tane altkümesi vardır diyebiliriz.

Şimdi 3 elemanlı

$$A = \{Kalem, Silgi, Kitap\}$$

kümesinin altkümelerini bulalım.

Şimdi 3 elemanlı

$$A = \{Kalem, Silgi, Kitap\}$$

kümesinin altkümelerini bulalım.

Öncelikle

(a) \emptyset (b) $\{Kalem\}$ (c) $\{Silgi\}$ (d) $\{Kalem, Silgi\}$

kümeleri

$A = \{Kalem, Silgi, Kitap\}$ kümesinin de altkümeleridir.

Ancak bu altkümelerin hiç birinde Kitap yoktur. Her birine Kitap eklersek şu altkümeleri buluruz.

Ancak bu altkümelerin hiç birinde Kitap yoktur. Her birine Kitap eklersek şu altkümeleri buluruz.

- (a) $\{Kitap\}$ (b) $\{Kalem, Kitap\}$ (c) $\{Silgi, Kitap\}$
(d) $\{Kalem, Silgi, Kitap\}$

Bunlar yukarıdaki altkümelerden farklıdır ve dolayısıyla toplam 8 tane farklı altküme bulmuş oluruz.

Ancak bu altkümelerin hiç birinde Kitap yoktur. Her birine Kitap eklersek şu altkümeleri buluruz.

- (a) $\{Kitap\}$ (b) $\{Kalem, Kitap\}$ (c) $\{Silgi, Kitap\}$
(d) $\{Kalem, Silgi, Kitap\}$

Bunlar yukarıdaki altkümelerden farklıdır ve dolayısıyla toplam 8 tane farklı altküme bulmuş oluruz.

Demek ki 3 elemanlı bir kümenin 8 tane altkümesi vardır diyebiliriz.

Şimdi bu fikri genelleleyebilir miyiz?

Şimdi bu fikri genelleleyebilir miyiz?

Yani 4 elemanlı, 5 elemanlı ve en son olarak n elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi bulunur?

Şimdi bu fikri genelleleyebilir miyiz?

Yani 4 elemanlı, 5 elemanlı ve en son olarak n elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi bulunur?

Matematikte formül bulmak böyle bir şeydir.

Demek ki düşündüğümüz veya bulduğumuz formül doğru çıkarsa verilen kümenin altkümelerinin sayısını hemen bulabileceğiz.

Demek ki düşündüğümüz veya bulduğumuz formül doğru çıkarsa verilen kümenin altkümelerinin sayısını hemen bulabileceğiz.

Tek yapmamız gereken verilen kümenin kaç elemanlı bir küme olduğunu bilmek.

1 elemanlı kümenin 2 tane altkümesi

2 elemanlı kümenin $4 = 2^2$ tane altkümesi

3 elemanlı kümenin $8 = 2^3$ tane altkümesi

4 elemanlı kümenin $16 = 2^4$ tane altkümesi vardır.

Şimdi düşünelim bunlar arasındaki ilişki nedir.

Yani buradan nasıl bir formül çıkar ve bu düşündüğümüz formülün doğru olup olmadığını nasıl gösterebiliriz?

Soru. 8 elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi vardır?
Yukarıdaki bulduğumuz formülde deneyelim.

Soru. 8 elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi vardır?
Yukarıdaki bulduğumuz formülde deneyelim.

2^8 tane altkümesi vardır.

Soru. 8 elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi vardır?
Yukarıdaki bulduğumuz formülde deneyelim.

2^8 tane altkümesi vardır.

Dalayasıyla n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır.

Soru. 8 elemanlı bir kümenin kaç tane altkümesi vardır? Yukarıdaki bulduğumuz formülde deneyelim.

2^8 tane altkümesi vardır.

Dalayasıyla n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır.

Yukarıdaki formülü göz önüne alarak bir kümenin altkümelerinin sayısı her zaman kümenin elemanlarından daha çoktur diyebilir miyiz?

Şimdi sonlu elemanlı kümeler için şu sonuca ulaşmış olduk:

Şimdi sonlu elemanlı kümeler için şu sonuca ulaşmış olduk:

Sonlu elemanlı bir kümenin altkümelerinin sayısı kümenin elemanlarının sayısından her zaman daha çoktur.

Bu sonuca sonsuz elemanlı kümeler için de varabilir miyiz?

Bu sonuca sonsuz elemanlı kümeler için de varabilir miyiz?

Yani doğal sayılar kümesindeki elemanlar ile doğal sayılar kümesinin altkümelerinin sayısını karşılaştırdığımızda altkümelerinin sayısı doğal sayılardaki elemanlardan daha çok diyebilir miyiz?

Bu sonuca sonsuz elemanlı kümeler için de varabilir miyiz?

Yani doğal sayılar kümesindeki elemanlar ile doğal sayılar kümesinin altkümelerinin sayısını karşılaştırdığımızda altkümelerinin sayısı doğal sayılardaki elemanlardan daha çok diyebilir miyiz?

Bu soruyla ilgili tarihte kim ne söylemiştir?

Sorunun cevabı evettir;
yani verilen küme ister sonlu isterse sonsuz elemanlı olsun
onun altkümelerinin sayısı her zaman kümenin elemanlarının
sayısından fazladır.

Dolayısıyla biz sonsuz elemanlı doğal sayılar kümesini
alırsak onun altkümelerinin sayısı doğal sayıların
kümesinden daha büyük olan başka bir sonsuzdur.

Bu yöntemi devam ettirmek mümkün olduğu için biz sonsuz
tane sonsuz olduğunu söyleyebiliriz.

Sorunun cevabı evettir;
yani verilen küme ister sonlu isterse sonsuz elemanlı olsun
onun altkümelerinin sayısı her zaman kümenin elemanlarının
sayısından fazladır.

Dolayısıyla biz sonsuz elemanlı doğal sayılar kümesini
alırsak onun altkümelerinin sayısı doğal sayıların
kümesinden daha büyük olan başka bir sonsuzdur.

Bu yöntemi devam ettirmek mümkün olduğu için biz sonsuz
tane sonsuz olduğunu söyleyebiliriz.

Bu konularla ilgili olarak kümeler teorisi ve Cantor'ün
çalışmalarına bakmak yeterli olacaktır.

TEŞEKKÜRLER