Sonluötesi sayılara bir yolculuk ve sonsuzların hiyerarşisi

Dr. Burak Kaya

ODTÜ

burakk@metu.edu.tr

13 Mayıs, 2017

Matematiğin temelleri

- Matematik tümdengelimsel bir disiplindir. Matematikte, aksiyom adını verdiğimiz çeşitli önermelerin doğru olduğunu kabul ederiz ve bu aksiyomlardan mantıksal çıkarım yoluyla teoremler türetiriz.

Matematiğin temelleri

- Matematik tümdengelimsel bir disiplindir. Matematikte, aksiyom adını verdiğimiz çeşitli önermelerin doğru olduğunu kabul ederiz ve bu aksiyomlardan mantıksal çıkarım yoluyla teoremler türetiriz.
- Günümüzde matematiğin temeli olarak genellikle Zermelo-Fraenkel kümeler kuramıyla seçim aksiyomu (ZFC) olarak bilinen aksiyomatik sistem kabul edilir.

Matematiğin temelleri

- Matematik tümdengelimsel bir disiplindir. Matematikte, aksiyom adını verdiğimiz çeşitli önermelerin doğru olduğunu kabul ederiz ve bu aksiyomlardan mantıksal çıkarım yoluyla teoremler türetiriz.
- Günümüzde matematiğin temeli olarak genellikle Zermelo-Fraenkel kümeler kuramıyla seçim aksiyomu (ZFC) olarak bilinen aksiyomatik sistem kabul edilir.
- ZFC aksiyomlarının neler olduklarına bu konuşmada girmeyeceğiz. Öte yandan, bu konuşmada bahsi geçen tüm kavramlar bu aksiyomatik sistem içerisinde ifade edilebilir ve öne sürülen tüm teoremler ZFC aksiyomlarından kanıtlanabilir.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.
- Eğer iki küme arasında bir eşleme varsa, bu iki kümenin aynı kardinalitede olduğunu söyleyeceğiz.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.
- Eğer iki küme arasında bir eşleme varsa, bu iki kümenin aynı kardinalitede olduğunu söyleyeceğiz.
- İki kümenin kardinalitesinin aynı olmasını, bu kümelerden birinin elemanlarını diğerinin elemanlarıyla "etiketleyebileceğimiz" için, bu iki kümenin büyüklüğünün aynı olması olarak yorumlayacağız.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.
- Eğer iki küme arasında bir eşleme varsa, bu iki kümenin aynı kardinalitede olduğunu söyleyeceğiz.
- İki kümenin kardinalitesinin aynı olmasını, bu kümelerden birinin elemanlarını diğerinin elemanlarıyla "etiketleyebileceğimiz" için, bu iki kümenin büyüklüğünün aynı olması olarak yorumlayacağız.
- A ve B kümelerinin kardinalitesi aynıysa, bunu $A \approx B$ notasyonu ile göstereceğiz.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.
- Eğer iki küme arasında bir eşleme varsa, bu iki kümenin aynı kardinalitede olduğunu söyleyeceğiz.
- İki kümenin kardinalitesinin aynı olmasını, bu kümelerden birinin elemanlarını diğerinin elemanlarıyla "etiketleyebileceğimiz" için, bu iki kümenin büyüklüğünün aynı olması olarak yorumlayacağız.
- A ve B kümelerinin kardinalitesi aynıysa, bunu $A \approx B$ notasyonu ile göstereceğiz.
- Eğer bir A kümesinden bir B kümesine birebir bir fonksiyon varsa, A kümesinin kardinalitesinin B kümesinin kardinalitesinden küçük eşit olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $A \preceq B$ notasyonuyla göstereceğiz.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

- Kümelerin büyüklüklerini kıyaslamak için eşleme kavramını kullanacağız.
- Eğer iki küme arasında bir eşleme varsa, bu iki kümenin aynı kardinalitede olduğunu söyleyeceğiz.
- İki kümenin kardinalitesinin aynı olmasını, bu kümelerden birinin elemanlarını diğerinin elemanlarıyla "etiketleyebileceğimiz" için, bu iki kümenin büyüklüğünün aynı olması olarak yorumlayacağız.
- A ve B kümelerinin kardinalitesi aynıysa, bunu $A \approx B$ notasyonu ile göstereceğiz.
- Eğer bir A kümesinden bir B kümesine birebir bir fonksiyon varsa, A kümesinin kardinalitesinin B kümesinin kardinalitesinden küçük eşit olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $A \preceq B$ notasyonuyla göstereceğiz.
- Eğer $A \preceq B$ ve $A \not\approx B$ ise, bu durumda bunu $A \prec B$ yazacağız.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek

$I = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ tam kare olan doğal sayıların kümesi olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \approx I$ olacaktır çünkü $f(n) = n^2$ fonksiyonu I kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir eşlemedir.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek

$I = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ tam kare olan doğal sayıların kümesi olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \approx I$ olacaktır çünkü $f(n) = n^2$ fonksiyonu I kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir eşlemedir.

Örnek

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ olacaktır çünkü

$$f(n) = \begin{cases} \text{eğer n çiftse } \frac{n}{2} \\ \text{eğer n tekse } -\frac{n+1}{2} \end{cases}$$

fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{Z}$ kümesine bir eşlemedir.

n	0	1	2	3	4	5	6 ...
f(n)	0	-1	1	-2	2	-3	3 ...

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek (Calkin-Wilf dizisi)

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}^+$ olacaktır çünkü $f(0) = 1$ ve $f(n+1) = \frac{1}{2\lfloor f(n) \rfloor - f(n) + 1}$ kuralı ile verilen fonksiyon bir eşlemedir.

n	0	1	2	3	4	5	6 ...
f(n)	1/1	1/2	2/1	1/3	3/2	2/3	3/1 ...

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek (Calkin-Wilf dizisi)

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}^+$ olacaktır çünkü $f(0) = 1$ ve $f(n+1) = \frac{1}{2\lfloor f(n) \rfloor - f(n) + 1}$ kuralı ile verilen fonksiyon bir eşlemedir.

n	0	1	2	3	4	5	6 ...
f(n)	1/1	1/2	2/1	1/3	3/2	2/3	3/1 ...

Buradan hareketle, tek sayıları kullanarak $\mathbb{Q}^+$ kümesini, sıfırdan farklı çift sayıları kullanarak $\mathbb{Q}^-$ kümesini numaralandırabiliriz. Dolayısıyla $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek (Cantor eşleştirme fonksiyonu)

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ olacaktır çünkü $f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir eşlemedir.

Örnek (Cantor eşleştirme fonksiyonu)

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ olacaktır çünkü $f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir eşlemedir.

(0,0)→0	(0,1)→2	(0,2)→5	(0,3)→9	(0,4)→14	...
(1,0)→1	(1,1)→4	(1,2)→8	(1,3)→13	(1,4)→19	...
(2,0)→3	(2,1)→7	(2,2)→12	(2,3)→18	(2,4)→25	...
(3,0)→6	(3,1)→11	(3,2)→17	(3,3)→24	(3,4)→32	...
(4,0)→10	(4,1)→16	(4,2)→23	(4,3)→31	(4,4)→40	...
...	...	...	...	...	

Kümelerin büyüklüklerini nasıl karşılaştırabiliriz?

Örnek (Cantor eşleştirme fonksiyonu)

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ olacaktır çünkü $f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir eşlemedir.

(0,0)→0	(0,1)→2	(0,2)→5	(0,3)→9	(0,4)→14	...
(1,0)→1	(1,1)→4	(1,2)→8	(1,3)→13	(1,4)→19	...
(2,0)→3	(2,1)→7	(2,2)→12	(2,3)→18	(2,4)→25	...
(3,0)→6	(3,1)→11	(3,2)→17	(3,3)→24	(3,4)→32	...
(4,0)→10	(4,1)→16	(4,2)→23	(4,3)→31	(4,4)→40	...
...	...	...	...	...	

Örnek

Cantor-Schröder-Bernstein teoreminin bir sonucu olarak $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Teorem

Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Teorem

Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Kanıt.

$g(a) = \{a\}$ kuralı ile verilen $g : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla teoremi kanıtlamak için bu kümeler arasında bir eşleme olmadığını göstermek yeterlidir.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Teorem

Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Kanıt.

$g(a) = \{a\}$ kuralı ile verilen $g : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla teoremi kanıtlamak için bu kümeler arasında bir eşleme olmadığını göstermek yeterlidir. $f : A \to \mathcal{P}(A)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $W = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ kümesini ele alalım. W kümesi A'nın bir alt kümesidir, yani $W \in \mathcal{P}(A)$.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Teorem

Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Kanıt.

$g(a) = \{a\}$ kuralı ile verilen $g : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla teoremi kanıtlamak için bu kümeler arasında bir eşleme olmadığını göstermek yeterlidir. $f : A \to \mathcal{P}(A)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $W = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ kümesini ele alalım. W kümesi A'nın bir alt kümesidir, yani $W \in \mathcal{P}(A)$. Eğer $f(a) = W$ olmasını sağlayan bir $a \in A$ elemanı olsaydı, bu durumda

$$a \in W \longleftrightarrow a \notin f(a) = W$$

elde ederdik, ki bu bir çelişkidir.

Cantor'un teoremi

Bir A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ ile A'nın alt kümeleri kümesini temsil edelim.

Teorem

Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Kanıt.

$g(a) = \{a\}$ kuralı ile verilen $g : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla teoremi kanıtlamak için bu kümeler arasında bir eşleme olmadığını göstermek yeterlidir. $f : A \to \mathcal{P}(A)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $W = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ kümesini ele alalım. W kümesi A'nın bir alt kümesidir, yani $W \in \mathcal{P}(A)$. Eğer $f(a) = W$ olmasını sağlayan bir $a \in A$ elemanı olsaydı, bu durumda

$$a \in W \longleftrightarrow a \notin f(a) = W$$

elde ederdik, ki bu bir çelişkidir. Demek ki $f(a) = W$ olan bir $a \in A$ elemanı olamaz. Dolayısıyla f fonksiyonu bir eşleme olamaz. $\square$

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
  - $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$.

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
  - $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
  - $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
  - $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
  - $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$
  - $\ldots$
  - $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
  - $\ldots$.

Doğal sayıların küme olarak inşası

- Eğer matematik yapmak için ZFC kümeler kuramı içerisinde çalışıyorsak, tüm matematiksel objeler aslında birer kümedir. Sayılar, gruplar, manifoldlar, fonksiyonlar, matrisler, ... aklınıza gelebilecek her türlü matematiksel nesne aslında bir küme olarak inşa edilebilir.
- Peki doğal sayıları kümeler olarak nasıl inşa edebiliriz?
- von Neumann doğal sayıları:
  - $0 = \emptyset$.
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$.
  - $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
  - $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$
  - $\ldots$
  - $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
  - $\ldots$.
- Bundan sonra, doğal sayılar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesini göstermek için Yunan alfabesindeki ω harfini kullanacağız.

Sonsuzluğa dair birkaç tanım

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.

Sonsuzluğa dair birkaç tanım

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.
- Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.

Sonsuzluğa dair birkaç tanım

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.
- Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.
- Bir kümenin sonsuz olmasının eş değer bir koşulu bu kümenin kendisine eşit olmayan bir alt kümesiyle eşlenebilmesidir.

Sonsuzluğa dair birkaç tanım

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.
- Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.
- Bir kümenin sonsuz olmasının eş değer bir koşulu bu kümenin kendisine eşit olmayan bir alt kümesiyle eşlenebilmesidir.
- Eğer bir A kümesi sonsuzsa ve $A \approx \omega$ ise, bu durumda A kümesine sayılabilir sonsuz diyeceğiz.

Sonsuzluğa dair birkaç tanım

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.
- Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.
- Bir kümenin sonsuz olmasının eş değer bir koşulu bu kümenin kendisine eşit olmayan bir alt kümesiyle eşlenebilmesidir.
- Eğer bir A kümesi sonsuzsa ve $A \approx \omega$ ise, bu durumda A kümesine sayılabilir sonsuz diyeceğiz.
- Sonlu ya da sayılabilir sonsuz olan kümelere kısaca sayılabilir diyeceğiz.

- Eğer bir A kümesi bir $n \in \omega$ doğal sayısıyla eşlenebiliyorsa, A kümesine sonlu denir.
- Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.
- Bir kümenin sonsuz olmasının eş değer bir koşulu bu kümenin kendisine eşit olmayan bir alt kümesiyle eşlenebilmesidir.
- Eğer bir A kümesi sonsuzsa ve $A \approx \omega$ ise, bu durumda A kümesine sayılabilir sonsuz diyeceğiz.
- Sonlu ya da sayılabilir sonsuz olan kümelere kısaca sayılabilir diyeceğiz.
- Sayılabilir olmayan sonsuz kümelere de sayılamaz sonsuz diyeceğiz.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.
- $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.
- $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.
- Ayrıca $\mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))) \prec \ldots$ kümelerinin her biri sayılamazdır ve bu kümeler birbirinden farklı kardinalitelere sahiptir.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.
- $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.
- Ayrıca $\mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))) \prec \dots$ kümelerinin her biri sayılamazdır ve bu kümeler birbirinden farklı kardinalitelere sahiptir.

Sonlu kümelerin kardinalitelerini doğal sayılar ile temsil edebiliyoruz. Peki sonsuz kümelerin kardinaliteleri için "doğal temsilciler" bulabilir miyiz?

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.
- $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.
- Ayrıca $\mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))) \prec \dots$ kümelerinin her biri sayılamazdır ve bu kümeler birbirinden farklı kardinalitelere sahiptir.

Sonlu kümelerin kardinalitelerini doğal sayılar ile temsil edebiliyoruz. Peki sonsuz kümelerin kardinaliteleri için "doğal temsilciler" bulabilir miyiz? Bu sorunun yanıtı pozitiftir. Kümelerin kardinalitelerini kardinal sayılarla temsil edebiliriz.

Şu ana kadar neler elde ettik?

- Sonlu kümeler sayılabilirdir.
- $\omega \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilirdir.
- $\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.
- Ayrıca $\mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))) \prec \ldots$ kümelerinin her biri sayılamazdır ve bu kümeler birbirinden farklı kardinalitelere sahiptir.

Sonlu kümelerin kardinalitelerini doğal sayılar ile temsil edebiliyoruz. Peki sonsuz kümelerin kardinaliteleri için "doğal temsilciler" bulabilir miyiz? Bu sorunun yanıtı pozitiftir. Kümelerin kardinalitelerini kardinal sayılarla temsil edebiliriz. Kardinal sayıları tanımlayabilmemiz için önce ordinal sayıların ne olduğunu öğrenmemiz lazım.

Ordinal sayılar

Ordinal sayılar

- Bir ordinal sayı, elemanları $\in$ ilişkisi tarafından iyi-sıralanmış geçişken bir kümedir.

Ordinal sayılar

- Bir ordinal sayı, elemanları $\in$ ilişkisi tarafından iyi-sıralanmış geçişken bir kümedir.
- Eş değer olarak bir ordinal sayı, verilen herhangi iki elemanı x, y için ya $x \in y$ ya $y \in x$ ya da $x = y$ olan geçişken bir kümedir.

Ordinal sayılar

- Bir ordinal sayı, elemanları $\in$ ilişkisi tarafından iyi-sıralanmış geçişken bir kümedir.
- Eş değer olarak bir ordinal sayı, verilen herhangi iki elemanı x, y için ya $x \in y$ ya $y \in x$ ya da $x = y$ olan geçişken bir kümedir.
- Eş değer olarak bir ordinal sayı, elemanları geçişken kümeler olan geçişken bir kümedir.

Ordinal sayılar

- Bir ordinal sayı, elemanları $\in$ ilişkisi tarafından iyi-sıralanmış geçişken bir kümedir.
- Eş değer olarak bir ordinal sayı, verilen herhangi iki elemanı x, y için ya $x \in y$ ya $y \in x$ ya da $x = y$ olan geçişken bir kümedir.
- Eş değer olarak bir ordinal sayı, elemanları geçişken kümeler olan geçişken bir kümedir.
- ☹

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

  $0 \; 1$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

  0 1 2

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \ldots \ \omega$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega)$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \; \ldots \; \omega + \omega$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$\omega \cdot 2$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \ldots \ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \ \ldots \ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1 \ \ldots \ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \; \ldots \; \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1 \; \ldots \; \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3 \; \ldots \; \omega \cdot 4$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \; \ldots \; \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1 \; \ldots \; \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3 \; \ldots \; \omega \cdot 4 \; \ldots$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \; \ldots \; \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1 \; \ldots \; \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3 \; \ldots \; \omega \cdot 4 \; \ldots \; \omega \cdot \omega = \omega^2$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

ω^2

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega\quad S(\omega) = \omega + 1\quad \omega + 2\quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2\quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$\omega^2 \ldots$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$\omega^2 \ldots \omega^2 + \omega$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$\omega^2 \ldots \omega^2 + \omega\ \ldots$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega = \omega^3$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega = \omega^3 \ldots\ \omega^\omega$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega = \omega^3 \ldots\ \omega^\omega \ldots\ \omega^{\omega^\omega} \ldots$$

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega = \omega^3 \ldots\ \omega^\omega \ldots\ \omega^{\omega^\omega} \ldots$$

- Ordinal sayıları inşa eden bu süreç hiçbir zaman sonlanamaz. Çünkü α bir ordinal sayıysa $S(\alpha)$ da bir ordinal sayıdır.

Ordinal sayılar

- Bir A kümesi için $S(A) = A \cup \{A\}$ kümesine A'nın ardılı diyelim.
- Boş kümeden başlayıp sürekli ardıl alalım ve gerektiğinde birleşim işlemini uygulayalım. Bu durumda sırasıyla şu ordinal sayıları elde edeceğiz.

$$0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ \omega \quad S(\omega) = \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3\ \ldots\ \omega + \omega = \omega \cdot 2$$

$$\omega \cdot 2 \quad \omega \cdot 2 + 1\ \ldots\ \omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3\ \ldots\ \omega \cdot 4\ \ldots\ \omega \cdot \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 \ldots\ \omega^2 + \omega\ \ldots\ \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2\ \ldots\ \omega^2 \cdot \omega = \omega^3 \ldots\ \omega^\omega \ldots\ \omega^{\omega^\omega} \ldots$$

- Ordinal sayıları inşa eden bu süreç hiçbir zaman sonlanamaz. Çünkü α bir ordinal sayıysa $S(\alpha)$ da bir ordinal sayıdır.
- Tüm ordinal sayıları içeren bir küme yoktur. Ordinal sayılar topluluğu bir öz sınıf oluşturur.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

0,

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1,$

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2,$

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur. Sayılabilir ordinal sayıların kümesine, yani $\alpha \preceq \aleph_0$ olan tüm α ordinal sayılarının kümesine, $\aleph_1$ diyelim.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur. Sayılabilir ordinal sayıların kümesine, yani $\alpha \preceq \aleph_0$ olan tüm α ordinal sayılarının kümesine, $\aleph_1$ diyelim.
- $\aleph_1$ sayılamaz bir kardinal sayıdır.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur. Sayılabilir ordinal sayıların kümesine, yani $\alpha \preceq \aleph_0$ olan tüm α ordinal sayılarının kümesine, $\aleph_1$ diyelim.
- $\aleph_1$ sayılamaz bir kardinal sayıdır.
- Benzer şekilde, her α ordinal sayısına karşılık bir $\aleph_\alpha$ kardinal sayısı bulabiliriz.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur. Sayılabilir ordinal sayıların kümesine, yani $\alpha \preceq \aleph_0$ olan tüm α ordinal sayılarının kümesine, $\aleph_1$ diyelim.
- $\aleph_1$ sayılamaz bir kardinal sayıdır.
- Benzer şekilde, her α ordinal sayısına karşılık bir $\aleph_\alpha$ kardinal sayısı bulabiliriz. $\aleph_0 \ \aleph_1 \ \aleph_2 \ \ldots \ \aleph_\omega \ \aleph_{\omega+1} \ \ldots \ \aleph_\alpha \ldots$
- ZFC aksiyomlarının bir sonucu olarak, her küme bir kardinal sayı ile eşlenebilir.

Kardinal sayılar

- Eğer bir ordinal sayı kendisinden önceki ordinal sayılarla eşlenemiyorsa, bu ordinal sayıya kardinal sayı diyoruz.

Örnek

$0, 1, 2, \ldots, \omega$

- Bundan sonra ω kardinal sayısını $\aleph_0$ ile göstereceğiz.
- Tüm ordinal sayılar bir küme oluşturmasa da, tüm *sayılabilir* ordinal sayılar bir küme oluşturur. Sayılabilir ordinal sayıların kümesine, yani $\alpha \preceq \aleph_0$ olan tüm α ordinal sayılarının kümesine, $\aleph_1$ diyelim.
- $\aleph_1$ sayılamaz bir kardinal sayıdır.
- Benzer şekilde, her α ordinal sayısına karşılık bir $\aleph_\alpha$ kardinal sayısı bulabiliriz. $\aleph_0 \; \aleph_1 \; \aleph_2 \; \ldots \; \aleph_\omega \; \aleph_{\omega+1} \; \ldots \; \aleph_\alpha \ldots$
- ZFC aksiyomlarının bir sonucu olarak, her küme bir kardinal sayı ile eşlenebilir. Bundan sonra, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesinin kardinal sayısını $2^{\aleph_0}$ ile gösterelim.

Süreklilik hipotezi

- Kardinalite kavramını ortaya koyan büyük Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$ kümesinin kardinalitesinin $\mathbb{N}$ kümesinin kardinalitesinden büyük olduğunu gösterdikten sonra kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme bulmaya çalışmıştır.

Süreklilik hipotezi

- Kardinalite kavramını ortaya koyan büyük Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$ kümesinin kardinalitesinin $\mathbb{N}$ kümesinin kardinalitesinden büyük olduğunu gösterdikten sonra kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme bulmaya çalışmıştır.
- Bu arayışında bir sonuca ulaşamayan Cantor, 1878 yılında böyle bir küme olmadığı hipotezini ortaya atmıştır. Bu hipoteze süreklilik hipotezi denir.

Süreklilik hipotezi

- Kardinalite kavramını ortaya koyan büyük Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$ kümesinin kardinalitesinin $\mathbb{N}$ kümesinin kardinalitesinden büyük olduğunu gösterdikten sonra kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme bulmaya çalışmıştır.
- Bu arayışında bir sonuca ulaşamayan Cantor, 1878 yılında böyle bir küme olmadığı hipotezini ortaya atmıştır. Bu hipoteze süreklilik hipotezi denir. Eş değer olarak, süreklilik hipotezi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

olduğu sanısıdır.

Süreklilik hipotezi

- Kardinalite kavramını ortaya koyan büyük Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$ kümesinin kardinalitesinin $\mathbb{N}$ kümesinin kardinalitesinden büyük olduğunu gösterdikten sonra kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme bulmaya çalışmıştır.
- Bu arayışında bir sonuca ulaşamayan Cantor, 1878 yılında böyle bir küme olmadığı hipotezini ortaya atmıştır. Bu hipoteze süreklilik hipotezi denir. Eş değer olarak, süreklilik hipotezi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

olduğu sanısıdır.
- Kurt Gödel'in 1940 yılındaki ve Paul Cohen'in 1963 yılındaki çalışmaları sonucunda biliyoruz ki, eğer ZFC aksiyomları tutarlıysa, süreklilik hipotezi ZFC aksiyomlarından bağımsızdır, yani ZFC aksiyomlarıyla ne kanıtlanabilir ne de çürütülebilir.

Dinlediğiniz için teşekkür ederim!