Eğrileri anlamak

Burak Kaya

Orta Doğu Teknik Üniversitesi

burakk@metu.edu.tr

14 Mart 2021

Düzlemde bir eğri nedir?

- Bir eğrinin ne olduğuyla ilgili hepimizin geometrik bir sezgisi var. Peki bir eğrinin matematiksel tanımı nedir?

Düzlemde bir eğri nedir?

- Bir eğrinin ne olduğuyla ilgili hepimizin geometrik bir sezgisi var. Peki bir eğrinin matematiksel tanımı nedir?
- Öncelikle bir eğri için sezgisel bir tanım ortaya koymaya çalışalım.

Düzlemde bir eğri nedir?

- Bir eğrinin ne olduğuyla ilgili hepimizin geometrik bir sezgisi var. Peki bir eğrinin matematiksel tanımı nedir?
- Öncelikle bir eğri için sezgisel bir tanım ortaya koymaya çalışalım.
- "Bir eğri, bir noktayı sürekli bir biçimde hareket ettirdiğimizde takip edeceği yoldur."

Düzlemde bir eğri nedir?

- Bir eğrinin ne olduğuyla ilgili hepimizin geometrik bir sezgisi var. Peki bir eğrinin matematiksel tanımı nedir?
- Öncelikle bir eğri için sezgisel bir tanım ortaya koymaya çalışalım.
- "Bir eğri, bir noktayı sürekli bir biçimde hareket ettirdiğimizde takip edeceği yoldur."
- "Bir eğri, noktasal uçlu bir kalem ile elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz geometrik bir nesnedir."

Düzlemde bir eğri nedir?

- Bir eğrinin ne olduğuyla ilgili hepimizin geometrik bir sezgisi var. Peki bir eğrinin matematiksel tanımı nedir?
- Öncelikle bir eğri için sezgisel bir tanım ortaya koymaya çalışalım.
- "Bir eğri, bir noktayı sürekli bir biçimde hareket ettirdiğimizde takip edeceği yoldur."
- "Bir eğri, noktasal uçlu bir kalem ile elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz geometrik bir nesnedir."
- Eğriyle ilgili sahip olduğumuz sezgi, eğri üzerindeki noktaları "sürekli bir biçimde tarayabilmemiz" üzerine yoğunlaşıyor.

Düzlemde bir eğri nedir?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olsun, örneğin, $[0,1]$.

Düzlemde bir eğri nedir?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olsun, örneğin, $[0, 1]$.
- Düzlemde bir $\mathcal{C}$ eğrisi, sürekli bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun görüntüsüdür.

Düzlemde bir eğri nedir?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olsun, örneğin, $[0, 1]$.
- Düzlemde bir $\mathcal{C}$ eğrisi, sürekli bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun görüntüsüdür. γ'nın sürekli olması demek

$$\gamma(t) = (f(t), g(t))$$

olarak yazdığımızda hem $f : I \to \mathbb{R}$ hem de $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sürekli olması demektir.

Düzlemde bir eğri nedir?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olsun, örneğin, $[0,1]$.
- Düzlemde bir $\mathcal{C}$ eğrisi, sürekli bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun görüntüsüdür. γ'nın sürekli olması demek

$$\gamma(t) = (f(t), g(t))$$

olarak yazdığımızda hem $f : I \to \mathbb{R}$ hem de $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sürekli olması demektir.
- γ fonksiyonuna $\mathcal{C}$ eğrisi için bir parametrizasyon denir.

Düzlemde bir eğri nedir?

- $I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olsun, örneğin, $[0, 1]$.
- Düzlemde bir $\mathcal{C}$ eğrisi, sürekli bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun görüntüsüdür. γ'nın sürekli olması demek

$$\gamma(t) = (f(t), g(t))$$

  olarak yazdığımızda hem $f : I \to \mathbb{R}$ hem de $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sürekli olması demektir.
- γ fonksiyonuna $\mathcal{C}$ eğrisi için bir parametrizasyon denir. Aynı eğrinin sonsuz tane farklı parametrizasyonu vardır.

Bazı eğri örnekleri

- $I = [0,1]$ ve $\gamma(t) = (t,t)$.
  $(0,0)$ noktasını $(1,1)$ noktasına bağlayan doğru parçası

Bazı eğri örnekleri

- $I = [0,1]$ ve $\gamma(t) = (t,t)$.
  $(0,0)$ noktasını $(1,1)$ noktasına bağlayan doğru parçası
- $I = [0,2\pi]$ ve $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
  Birim çember

Bazı eğri örnekleri

- $I = [0,1]$ ve $\gamma(t) = (t,t)$.
  $(0,0)$ noktasını $(1,1)$ noktasına bağlayan doğru parçası
- $I = [0,2\pi]$ ve $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
  Birim çember
- $I = [0,2\pi]$ ve $\gamma(t) = (\cos(t)(1-\cos(t)), \sin(t)(1-cos(t)))$
  Kardioid

Sıradışı eğriler

- Şu ana kadar gördüğümüz basit örneklerdeki eğrilerin hepsinin düzlemde kapladıkları alan ise sıfıra eşitti. Peki bu doğru olmak zorunda mı?

Sıradışı eğriler

- Şu ana kadar gördüğümüz basit örneklerdeki eğrilerin hepsinin düzlemde kapladıkları alan ise sıfıra eşitti. Peki bu doğru olmak zorunda mı?
- Bir eğriyle pozitif alana sahip bir bölgeyi, örneğin birim kareyi, tamemen doldurabilmek mümkün mü?

Sıradışı eğriler

- Şu ana kadar gördüğümüz basit örneklerdeki eğrilerin hepsinin düzlemde kapladıkları alan ise sıfıra eşitti. Peki bu doğru olmak zorunda mı?
- Bir eğriyle pozitif alana sahip bir bölgeyi, örneğin birim kareyi, tamemen doldurabilmek mümkün mü?
- 1890 yılında Peano bu sorunun yanıtının olumlu olduğunu keşfediyor.

Sıradışı eğriler

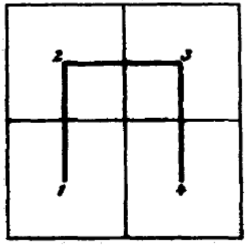
- Şu ana kadar gördüğümüz basit örneklerdeki eğrilerin hepsinin düzlemde kapladıkları alan ise sıfıra eşitti. Peki bu doğru olmak zorunda mı?
- Bir eğriyle pozitif alana sahip bir bölgeyi, örneğin birim kareyi, tamemen doldurabilmek mümkün mü?
- 1890 yılında Peano bu sorunun yanıtının olumlu olduğunu keşfediyor.
- Daha sonrasında pek çok diğer matematikçi benzer uzay-dolduran eğri örnekleri buluyor.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Hilbert eğrisini oluşturmak için önce özyinelemeli olarak her n pozitif tam sayısı için bir $\mathcal{C}_n$ eğrisi oluşturacağız.

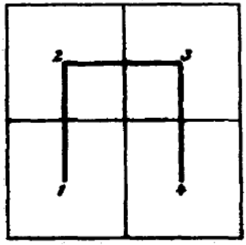
Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Hilbert eğrisini oluşturmak için önce özyinelemeli olarak her n pozitif tam sayısı için bir $\mathcal{C}_n$ eğrisi oluşturacağız.
- $\mathcal{C}_1$ şekildeki eğri olsun.



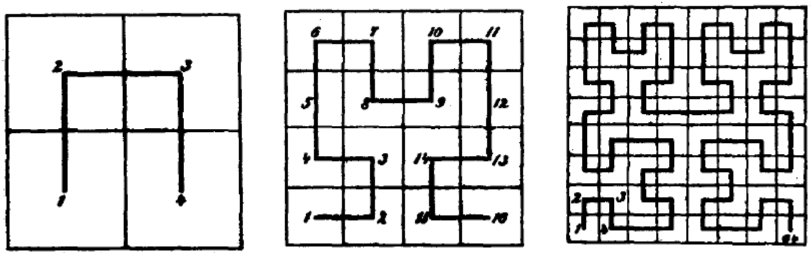
Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Hilbert eğrisini oluşturmak için önce özyinelemeli olarak her n pozitif tam sayısı için bir $\mathcal{C}_n$ eğrisi oluşturacağız.
- $\mathcal{C}_1$ şekildeki eğri olsun.

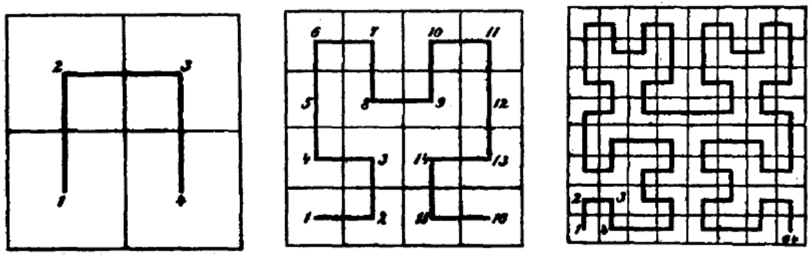


- Her adımda bir önceki adımda elde ettiğimiz $\mathcal{C}_n$ eğrisinin dört kopyasını karenin dört eş bölgesine yerleştirdikten sonra, sol aşağıdaki ve sağ aşağıdaki kopyaları uygun şekilde yansıtıp birleştirerek $\mathcal{C}_{n+1}$ eğrisini elde edeceğiz.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi



Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi



- Uzay-dolduran bir eğri elde edebilmek için bu eğri dizisinin "limitini" almak istiyoruz. Peki bu eğrilerin "limitini" nasıl alabiliriz?

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

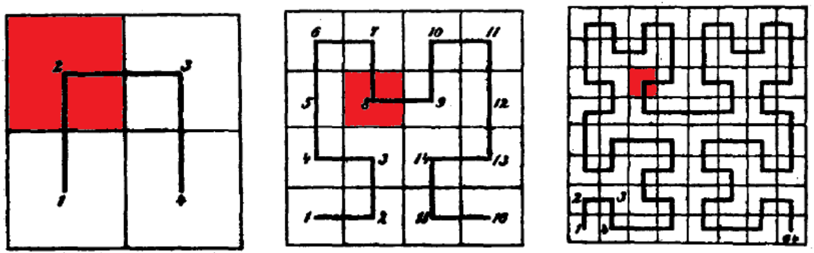
- $\gamma : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ Hilbert eğrisinin parametrizasyonunu göstermek üzere şimdi γ fonksiyonunun nasıl hesaplanacağını algoritmik olarak tarif edeceğiz.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- $\gamma : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ Hilbert eğrisinin parametrizasyonunu göstermek üzere şimdi γ fonksiyonunun nasıl hesaplanacağını algoritmik olarak tarif edeceğiz.
- Verilen bir $t \in [0,1]$ için, önce t'nin içerisine düştüğü $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$ formundaki aralıkları buluyoruz. Örneğin $t = 0.47$ için bu aralıklar sırasıyla

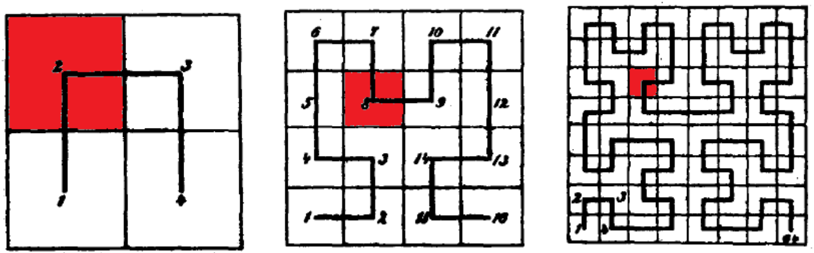
$$\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{7}{16}, \frac{8}{16}\right], \left[\frac{30}{64}, \frac{31}{64}\right], \left[\frac{120}{256}, \frac{121}{256}\right], \ldots$$

- Bulduğumuz her $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$ aralığı için inşamızın n. adımındaki $k+1$. birim kareyi işaretliyoruz. Örneğin $t = 0.47$ için aşağıdaki kareleri işaretliyoruz.



Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Bulduğumuz her $\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$ aralığı için inşamızın n. adımındaki $k+1$. birim kareyi işaretliyoruz. Örneğin $t = 0.47$ için aşağıdaki kareleri işaretliyoruz.



- $\gamma(t)$ noktasını işaretlediğimiz bu sonsuz tane karenin kesişimindeki nokta olarak belirliyoruz.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?
- Eğer
$$|t - s| < \frac{1}{4^n}$$
ise, o zaman t ve s değerleri için işaretlediğimiz kareler ise aynı ya da komşu olmak zorundadır.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?
- Eğer
$$|t-s| < \frac{1}{4^n}$$
ise, o zaman t ve s değerleri için işaretlediğimiz kareler ise aynı ya da komşu olmak zorundadır.
- Bu durumda $\gamma(t)$ ve $\gamma(s)$ arasındaki uzaklık en fazla $\sqrt{5}/2^n$ olabilir.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?
- Eğer
$$|t-s| < \frac{1}{4^n}$$
ise, o zaman t ve s değerleri için işaretlediğimiz kareler ise aynı ya da komşu olmak zorundadır.
- Bu durumda $\gamma(t)$ ve $\gamma(s)$ arasındaki uzaklık en fazla $\sqrt{5}/2^n$ olabilir.
- Demek ki t noktası s noktasına yaklaşırsa $\gamma(t)$ noktası da $\gamma(s)$ noktasına yaklaşmak zorundadır.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?
- Eğer
$$|t - s| < \frac{1}{4^n}$$
ise, o zaman t ve s değerleri için işaretlediğimiz kareler ise aynı ya da komşu olmak zorundadır.
- Bu durumda $\gamma(t)$ ve $\gamma(s)$ arasındaki uzaklık en fazla $\sqrt{5}/2^n$ olabilir.
- Demek ki t noktası s noktasına yaklaşırsa $\gamma(t)$ noktası da $\gamma(s)$ noktasına yaklaşmak zorundadır.
- Bu durumda γ sürekli bir fonksiyondur.

Hilbert'in uzay-dolduran eğrisi

- Peki γ neden sürekli ve neden birim kareyi dolduruyor?
- Eğer
$$|t - s| < \frac{1}{4^n}$$
ise, o zaman t ve s değerleri için işaretlediğimiz kareler ise aynı ya da komşu olmak zorundadır.
- Bu durumda $\gamma(t)$ ve $\gamma(s)$ arasındaki uzaklık en fazla $\sqrt{5}/2^n$ olabilir.
- Demek ki t noktası s noktasına yaklaşırsa $\gamma(t)$ noktası da $\gamma(s)$ noktasına yaklaşmak zorundadır.
- Bu durumda γ sürekli bir fonksiyondur.
- γ'nın örten bir fonksiyon olduğunu görmek için bu süreci tersten gerçekleştirerek birim karedeki her noktaya atanacak bir t değeri bulabiliriz.

Sıradışı eğriler

- Şimdi daha farklı bir soruyla ilgilenelim. Bir eğrinin sonlu hatta sayılabilir sonsuz tane noktasında "köşe" yaratmak, yani eğrilerin bu noktalarda teğete sahip olmamasını sağlamak mümkün.

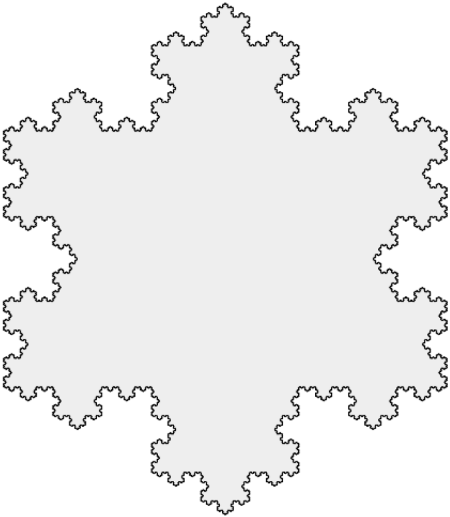
Sıradışı eğriler

- Şimdi daha farklı bir soruyla ilgilenelim. Bir eğrinin sonlu hatta sayılabilir sonsuz tane noktasında "köşe" yaratmak, yani eğrilerin bu noktalarda teğete sahip olmamasını sağlamak mümkün.
- Peki öyle bir eğri bulabilir miyiz ki hiçbir noktasında teğete sahip olmasın?

Sıradışı eğriler

- Şimdi daha farklı bir soruyla ilgilenelim. Bir eğrinin sonlu hatta sayılabilir sonsuz tane noktasında "köşe" yaratmak, yani eğrilerin bu noktalarda teğete sahip olmamasını sağlamak mümkün.
- Peki öyle bir eğri bulabilir miyiz ki hiçbir noktasında teğete sahip olmasın?
- Yanıtı olumlu olan bu soruyu cevaplamak için Koch kar tanesini inşa edeceğiz.

Koch kar tanesi



Sıradışı fonksiyonlar ve grafikleri

- Koch kar tanesinin hiçbir noktada türevlenebilir olmayan bir eğri örneği olduğunu gördük. Peki bu özelliğe sahip sürekli fonksiyonlar bulunabilir mi?

Sıradışı fonksiyonlar ve grafikleri

- Koch kar tanesinin hiçbir noktada türevlenebilir olmayan bir eğri örneği olduğunu gördük. Peki bu özelliğe sahip sürekli fonksiyonlar bulunabilir mi?
- Her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenebilir olmayan fonksiyonların ilk örneği Weierstrass tarafından 1872 yılında verilmiştir.

Sıradışı fonksiyonlar ve grafikleri

- Koch kar tanesinin hiçbir noktada türevlenebilir olmayan bir eğri örneği olduğunu gördük. Peki bu özelliğe sahip sürekli fonksiyonlar bulunabilir mi?
- Her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenebilir olmayan fonksiyonların ilk örneği Weierstrass tarafından 1872 yılında verilmiştir.
- Örneğin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n \pi x)}{2^n}$$

fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde türevlenemez bir fonksiyondur. Bu iddianın kanıtını basit olmadığı için bu konuşmada yapmayacağız ancak bu sonsuz toplamın kısmı toplamlarının grafiklerini göreceğiz.

Sıradışı fonksiyonlar ve grafikleri

- Koch kar tanesinin hiçbir noktada türevlenebilir olmayan bir eğri örneği olduğunu gördük. Peki bu özelliğe sahip sürekli fonksiyonlar bulunabilir mi?
- Her noktada sürekli ama hiçbir noktada türevlenebilir olmayan fonksiyonların ilk örneği Weierstrass tarafından 1872 yılında verilmiştir.
- Örneğin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n \pi x)}{2^n}$$

  fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde türevlenemez bir fonksiyondur. Bu iddianın kanıtını basit olmadığı için bu konuşmada yapmayacağız ancak bu sonsuz toplamın kısmı toplamlarının grafiklerini göreceğiz.
- Peki Weierstrass fonksiyonunun grafiğinin uzunluğu nedir?

Bir eğrinin uzunluğu

- $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}$ eğrisinin birebir bir parametrizasyonu olsun.

Bir eğrinin uzunluğu

- $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}$ eğrisinin birebir bir parametrizasyonu olsun.
- Şimdi $[0, 1]$ aralığını n eş parçaya ayıralım ve bu parçaların uç noktalarının eğri üzerindeki karşılıklarını işaretleyelim.

Bir eğrinin uzunluğu

- $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}$ eğrisinin birebir bir parametrizasyonu olsun.
- Şimdi $[0,1]$ aralığını n eş parçaya ayıralım ve bu parçaların uç noktalarının eğri üzerindeki karşılıklarını işaretleyelim.
- İşaretlediğimiz ardışık noktaları birleştiren doğru parçalarını çizdikten sonra bu doğru parçalarının uzunluklarını birbirine ekleyerek eğrisinin uzunluğu için bir yakınsama bulabiliriz.

Bir eğrinin uzunluğu

- $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}$ eğrisinin birebir bir parametrizasyonu olsun.
- Şimdi $[0,1]$ aralığını n eş parçaya ayıralım ve bu parçaların uç noktalarının eğri üzerindeki karşılıklarını işaretleyelim.
- İşaretlediğimiz ardışık noktaları birleştiren doğru parçalarını çizdikten sonra bu doğru parçalarının uzunluklarını birbirine ekleyerek eğrisinin uzunluğu için bir yakınsama bulabiliriz.
- Eğer parça sayısı sonsuza giderken bu yakınsamaların bir limiti varsa, bu limite eğrinin uzunluğu diyoruz.

Bir eğrinin uzunluğu

- $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}$ eğrisinin birebir bir parametrizasyonu olsun.
- Şimdi $[0,1]$ aralığını n eş parçaya ayıralım ve bu parçaların uç noktalarının eğri üzerindeki karşılıklarını işaretleyelim.
- İşaretlediğimiz ardışık noktaları birleştiren doğru parçalarını çizdikten sonra bu doğru parçalarının uzunluklarını birbirine ekleyerek eğrisinin uzunluğu için bir yakınsama bulabiliriz.
- Eğer parça sayısı sonsuza giderken bu yakınsamaların bir limiti varsa, bu limite eğrinin uzunluğu diyoruz.
- Şu ana kadar gördüğümüz uzay-dolduran eğrilerin ve hiçbir noktada türevlenebilir olmayan eğrilerin uzunlukları ne yazık ki tanımlı değil, diğer bir deyişle, yukarıda hesaplanan limitin sonucu bu eğriler için sonsuz!

π'yi hesaplamak

- Yukarıdaki işlemi yarım birim çember için yaptığımızda elde ettiğimiz limit aşağıdaki belirli integrale eşit olacaktır.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

π'yi hesaplamak

- Yukarıdaki işlemi yarım birim çember için yaptığımızda elde ettiğimiz limit aşağıdaki belirli integrale eşit olacaktır.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

- Newton'un binom formülünü kullanırsak

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k$$

π'yi hesaplamak

- Yukarıdaki işlemi yarım birim çember için yaptığımızda elde ettiğimiz limit aşağıdaki belirli integrale eşit olacaktır.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

- Newton'un binom formülünü kullanırsak

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k$$

- Buradan

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k \right) dx$$

π'yi hesaplamak

- İntegrali aldığımızda elde edeceğimiz şey

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \int_{-1}^{1} x^{2k} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{2}{2k+1}$$

Beni dinlediğiniz için teşekkür ederim!

Referanslar

- Sagan, Hans. Space-filling curves. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994. xvi+193 pp. ISBN: 0-387-94265-3
- Bader, Michael. Space-filling curves. An introduction with applications in scientific computing. Texts in Computational Science and Engineering, 9. Springer, Heidelberg, 2013. xiv+278 pp. ISBN: 978-3-642-31045-4; 978-3-642-31046-1
- Jarnicki, Marek; Pflug, Peter. Continuous nowhere differentiable functions. The monsters of analysis. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2015. xii+299 pp. ISBN: 978-3-319-12669-2; 978-3-319-12670-8