Betimsel kümeler kuramı, tanımlanabilir inşalar ve çizgeler

Burak Kaya

Orta Doğu Teknik Üniversitesi

burakk@metu.edu.tr

22 Mayıs 2022

Bölüm I

Betimsel kümeler kuramı

- Kümeler kuramı neyle ilgilenir?

Betimsel kümeler kuramı

- Kümeler kuramı neyle ilgilenir?
- En geniş anlamıyla kümeler kuramı, çeşitli sonsuzluk derecelerine sahip matematiksel objelerin davranışlarını hem kendi başına hem de cebir, analiz, topoloji, kombinatorik, dinamik vs. gibi alanlar bağlamında ordinalite, kardinalite ve tanımlanabilirlik perspektifinden inceleyen matematik dalıdır.

- Kümeler kuramı neyle ilgilenir?
- En geniş anlamıyla kümeler kuramı, çeşitli sonsuzluk derecelerine sahip matematiksel objelerin davranışlarını hem kendi başına hem de cebir, analiz, topoloji, kombinatorik, dinamik vs. gibi alanlar bağlamında ordinalite, kardinalite ve tanımlanabilirlik perspektifinden inceleyen matematik dalıdır.
- Betimsel kümeler kuramı Leh uzaylarının alt kümelerinin davranışlarını (çoğunlukla tanımlanabilirlik perspektifinden) inceleyen kümeler kuramı dalıdır.

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır.

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır. Örneğin, standart topolojileriyle $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$,...

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır. Örneğin, standart topolojileriyle $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$,...
- X bir küme ve $\mathcal{B}$ kümesi X üzerinde bir σ-cebiri olmak üzere $(X, \mathcal{B})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.

Leh uzayları ve standard Borel uzayları

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır. Örneğin, standart topolojileriyle $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$,...
- X bir küme ve $\mathcal{B}$ kümesi X üzerinde bir σ-cebiri olmak üzere $(X, \mathcal{B})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.
- (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X'in tüm açık kümelerini içeren en küçük σ-cebirine X'in Borel σ-cebiri denir.

Leh uzayları ve standard Borel uzayları

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır. Örneğin, standart topolojileriyle $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$,...
- X bir küme ve $\mathcal{B}$ kümesi X üzerinde bir σ-cebiri olmak üzere $(X,\mathcal{B})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.
- (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X'in tüm açık kümelerini içeren en küçük σ-cebirine X'in Borel σ-cebiri denir.Bu σ-cebirindeki elemanlarysa X'in Borel alt kümeleri denir.

Leh uzayları ve standard Borel uzayları

- Bir Leh uzayı, ayrılabilir ve tam metriklenebilir bir topolojik uzaydır. Örneğin, standart topolojileriyle $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$,...
- X bir küme ve $\mathcal{B}$ kümesi X üzerinde bir σ-cebiri olmak üzere $(X,\mathcal{B})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.
- (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X'in tüm açık kümelerini içeren en küçük σ-cebirine X'in Borel σ-cebiri denir.Bu σ-cebirindeki elemanlarysa X'in Borel alt kümeleri denir.
- $(X,\mathcal{B})$ bir ölçülebilir uzay olmak üzere, $\mathcal{B}$ kümesi X üzerindeki bir Leh topolojisinin Borel σ-cebirine eşitse, bu durumda $(X,\mathcal{B})$ ikilisine bir standart Borel uzayı denir.

Borel eş yapısallık teoremi

- (X, Ω_1) ve (Y, Ω_2) standart Borel uzayları ve $f : X \to Y$ olmak üzere, her $B \in \Omega_2$ için $f^{-1}[B] \in \Omega_1$ ise, bu durumda f fonksiyonuna (Borel) ölçülebilir bir fonksiyon denir.

Borel eş yapısallık teoremi

- (X, Ω_1) ve (Y, Ω_2) standart Borel uzayları ve $f : X \to Y$ olmak üzere, her $B \in \Omega_2$ için $f^{-1}[B] \in \Omega_1$ ise, bu durumda f fonksiyonuna (Borel) ölçülebilir bir fonksiyon denir.
- (X, Ω_1) ve (Y, Ω_2) standart Borel uzayları arasında hem kendisi hem de tersi ölçülebilir bir $f : X \to Y$ eşlemesi varsa, bu durumda bu standard Borel uzaylarına eş yapısal standart Borel uzayları, f fonksiyonuna da Borel eş yapı fonksiyonu denir.

Borel eş yapısallık teoremi

- (X, Ω_1) ve (Y, Ω_2) standart Borel uzayları ve $f : X \to Y$ olmak üzere, her $B \in \Omega_2$ için $f^{-1}[B] \in \Omega_1$ ise, bu durumda f fonksiyonuna (Borel) ölçülebilir bir fonksiyon denir.
- (X, Ω_1) ve (Y, Ω_2) standart Borel uzayları arasında hem kendisi hem de tersi ölçülebilir bir $f : X \to Y$ eşlemesi varsa, bu durumda bu standard Borel uzaylarına eş yapısal standart Borel uzayları, f fonksiyonuna da Borel eş yapı fonksiyonu denir.

Teorem

Tüm sayılamaz standart Borel uzayları birbirine eş yapısaldır.

Borel hiyerarşisi

- (X, τ) bir Leh uzayı olsun. X'in Borel alt kümelerini hiyerarşik olarak inceleyebilir miyiz?

Borel hiyerarşisi

- (X, τ) bir Leh uzayı olsun. X'in Borel alt kümelerini hiyerarşik olarak inceleyebilir miyiz?
- $$\begin{array}{ccccccccccccc} & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha & & \\ \mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Delta}^0_\alpha & & & \alpha < \omega_1 \\ & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha & & \end{array}$$

- (X, τ) bir Leh uzayı olsun. X'in Borel alt kümelerini hiyerarşik olarak inceleyebilir miyiz?
-

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & \cdots & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha & & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & \cdots & & \mathbf{\Delta}^0_\alpha & & & \alpha < \omega_1 \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & & \cdots & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha & &
\end{array}
$$

- Eğer X uzayı sayılamazsa, bu hiyerarşi hiçbir noktada çökmez, diğer bir deyişle her basamakta önceki basamaklarda olmayan yeni kümeler elde edilir.

Borel hiyerarşisi

- (X, τ) bir Leh uzayı olsun. X'in Borel alt kümelerini hiyerarşik olarak inceleyebilir miyiz?
-

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha & & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Delta}^0_\alpha & & & \alpha < \omega_1 \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & & \dots & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha & &
\end{array}$$

- Eğer X uzayı sayılamazsa, bu hiyerarşi hiçbir noktada çökmez, diğer bir deyişle her basamakta önceki basamaklarda olmayan yeni kümeler elde edilir.
- Bu hiyerarşiyi Borel kümeleri "karmaşıklıklarına" göre sınıflandıran bir hiyerarşi olarak düşünebiliriz.

İz düşümsel hiyerarşi

- $$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_1 & \mathbf{\Sigma}^1_2 & \mathbf{\Sigma}^1_3 & \ldots & \mathbf{\Sigma}^1_n \\ \mathbf{\Delta}^1_1 & \mathbf{\Delta}^1_2 & \mathbf{\Delta}^1_3 & \ldots & \mathbf{\Delta}^1_n & n \in \mathbb{N} \\ & \mathbf{\Pi}^1_1 & \mathbf{\Pi}^1_2 & \mathbf{\Pi}^1_3 & \ldots & \mathbf{\Pi}^1_n \end{array}$$

- $$\begin{array}{cccccccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Sigma}^1_n & & \\ \mathbf{\Delta}^1_1 & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & \mathbf{\Delta}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Delta}^1_n & & & n \in \mathbb{N} \\ & \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Pi}^1_n & & \end{array}$$

- Borel ve izdüşümsel kümeleri X'in "tanımlanabilir" ya da "açıkça yazılabilir" alt kümeleri olarak düşünebiliriz.

İz düşümsel hiyerarşi

- $$\begin{array}{cccccccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Sigma}^1_n & & \\ \mathbf{\Delta}^1_1 & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & \mathbf{\Delta}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Delta}^1_n & & & n \in \mathbb{N} \\ & \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \dots & & \mathbf{\Pi}^1_n & & \end{array}$$

- Borel ve izdüşümsel kümeleri X'in "tanımlanabilir" ya da "açıkça yazılabilir" alt kümeleri olarak düşünebiliriz.

Teorem

$(\mathbb{R}, +, *, \mathbb{Z})$ *yapısındaki parametreyle birinci-derece tanımlanabilir kümeler tam olarak* $\mathbb{R}$*'nin iz düşümsel alt kümeleridir.*

Peki bunların kümeler kuramıyla ne ilgisi var?

Peki bunların kümeler kuramıyla ne ilgisi var?

- İz düşümsel kümelerin ikinci seviyeden itibaren “davranışlarına” ZFC kümeler kuramı aksiyomlarıyla karar verilemiyor.

Peki bunların kümeler kuramıyla ne ilgisi var?

- İz düşümsel kümelerin ikinci seviyeden itibaren "davranışlarına" ZFC kümeler kuramı aksiyomlarıyla karar verilemiyor.

Teorem (ZFC+V=L)

Her $\mathbf{\Sigma}^1_2$ küme Lebesgue ölçülebilir, Baire özelliğine ve mükemmel küme özelliğine sahip değildir.

Peki bunların kümeler kuramıyla ne ilgisi var?

- İz düşümsel kümelerin ikinci seviyeden itibaren "davranışlarına" ZFC kümeler kuramı aksiyomlarıyla karar verilemiyor.

Teorem (ZFC+V=L)

Her $\mathbf{\Sigma}^1_2$ küme Lebesgue ölçülebilir, Baire özelliğine ve mükemmel küme özelliğine sahip değildir.

Teorem (ZFC+"Ölçülebilir bir kardinal vardır")

Her $\mathbf{\Sigma}^1_2$ küme Lebesgue ölçülebilirdir, Baire özelliğine ve mükemmel küme özelliğine sahiptir.

Peki bunların kümeler kuramıyla ne ilgisi var?

- İz düşümsel kümelerin ikinci seviyeden itibaren "davranışlarına" ZFC kümeler kuramı aksiyomlarıyla karar verilemiyor.

Teorem (ZFC+V=L)

Her $\mathbf{\Sigma}^1_2$ küme Lebesgue ölçülebilir, Baire özelliğine ve mükemmel küme özelliğine sahip değildir.

Teorem (ZFC+"Ölçülebilir bir kardinal vardır")

Her $\mathbf{\Sigma}^1_2$ küme Lebesgue ölçülebilirdir, Baire özelliğine ve mükemmel küme özelliğine sahiptir.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım. Konuşmanın geri kalanında, bu kavramları Borel olmakla özdeşleştireceğiz.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım. Konuşmanın geri kalanında, bu kavramları Borel olmakla özdeşleştireceğiz.
- Borel kümeleri açık aralıklardan “sayılabilir miktarda bilgiyle” üretebildiğimiz kümeler olarak düşünebiliriz.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım. Konuşmanın geri kalanında, bu kavramları Borel olmakla özdeşleştireceğiz.
- Borel kümeleri açık aralıklardan “sayılabilir miktarda bilgiyle” üretebildiğimiz kümeler olarak düşünebiliriz.
- Eğer ZF belitleri tutarlıysa, o zaman ZF+“$\mathbb{R}$’nin her alt kümesi Boreldir” belitleri de tutarlıdır.

"Aleni" olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman "aleni", "açıkça yazılabilir", "tanımlanabilir" vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım. Konuşmanın geri kalanında, bu kavramları Borel olmakla özdeşleştireceğiz.
- Borel kümeleri açık aralıklardan "sayılabilir miktarda bilgiyle" üretebildiğimiz kümeler olarak düşünebiliriz.
- Eğer ZF belitleri tutarlıysa, o zaman ZF+"$\mathbb{R}$'nin her alt kümesi Boreldir" belitleri de tutarlıdır.
- Dolayısıyla, seçim beliti olmadan Borel olmayan bir küme olduğunu kanıtlayamayız.

“Aleni” olmak ne demek?

- Amacımız çeşitli inşaların ne zaman “aleni”, “açıkça yazılabilir”, “tanımlanabilir” vs. olup olmadığını incelemek.
- Bu durumda bu sezgisel kavrama matematiksel bir karşılık bulmamız lazım. Konuşmanın geri kalanında, bu kavramları Borel olmakla özdeşleştireceğiz.
- Borel kümeleri açık aralıklardan “sayılabilir miktarda bilgiyle” üretebildiğimiz kümeler olarak düşünebiliriz.
- Eğer ZF belitleri tutarlıysa, o zaman ZF+“$\mathbb{R}$’nin her alt kümesi Boreldir” belitleri de tutarlıdır.
- Dolayısıyla, seçim beliti olmadan Borel olmayan bir küme olduğunu kanıtlayamayız.
- Bu bağlamda Borel kümeleri “aleni” kümeler olarak değerlendirmek makul gözüküyor.

Peki ya iz düşümsel kümeler?

- "Aleni" olmayı Borel olmak yerine iz düşümsel olmakla da özdeşleştirebilirdik. Ancak bu durumda iz düşümsel kümelerin patolojik davranış sergilemesini engellemek için çeşitli büyük kardinal belitlerini kabul etmemiz gerekirdi.

Teorem (Gödel)

Eğer $V = L$ ise, o zaman gerçel sayıların $\mathbf{\Delta}^1_2$ bir $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ iyi sıralaması vardır.

- Diğer bir taraftan, uygun belitler (örneğin, iz düşümsel belirlilik beliti) altında iz düşümsel kümeler "olması gereken" şekilde davrandığı için, çeşitli amaçlarla bu kümeleri de ele alabilirdik.

Bölüm II.

- Zorn önsavı kullanarak her vektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Hamel tabanları ve Borel kümeler

- Zorn önsavı kullanarak her vektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayabiliriz.
- $H \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı olarak tabanı olsun.

Hamel tabanları ve Borel kümeler

- Zorn önsavı kullanarak her vektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayabiliriz.
- $H \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı olarak tabanı olsun.
- H kümesi Borel olabilir mi?

Hamel tabanları ve Borel kümeler

- Zorn önsavı kullanarak her vektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayabiliriz.
- $H \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı olarak tabanı olsun.
- H kümesi Borel olabilir mi?

Theorem (Sierpiński)

$\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki hiçbir tabanı Borel değildir.

Hamel tabanları ve Borel kümeler

- Zorn önsavı kullanarak her vektör uzayının bir tabanı olduğunu kanıtlayabiliriz.
- $H \subseteq \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı olarak tabanı olsun.
- H kümesi Borel olabilir mi?

Theorem (Sierpiński)

$\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki hiçbir tabanı Borel değildir.

- Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki bir tabanını kullanarak yaptığımız inşaların hepsi potansiyel olarak Borel kümeler vermeme tehlikesi barındırıyor.

$(\mathbb{R},+)$'nin öz yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$(\mathbb{R},+)$'nin sürekli bir öz yapı dönüşümü bir $r \neq 0$ için $x \mapsto rx$ formundadır.

$(\mathbb{R},+)$'nin öz yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$(\mathbb{R},+)$*'nin sürekli bir öz yapı dönüşümü bir* $r \neq 0$ *için* $x \mapsto rx$ *formundadır.*

Teorem

$(\mathbb{R},+)$*'nin süreksiz bir öz yapı dönüşümü vardır.*

Kanıt

H kümesi $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerinde bir Hamel tabanı olsun. Bu durumda her $\varphi : H \to H$ permütasyonu bir $f_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öz yapı dönüşümüne genişletilebilir. O zaman $|Aut(\mathbb{R},+)| = |Sym(H)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. Önceki teorem gereği $(\mathbb{R},+)$'nin sürekli öz yapı dönüşümlerinin kardinalitesinin $|\mathbb{R}|$ olduğunu biliyoruz.

$(\mathbb{R},+)$'nin öz yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$(\mathbb{R},+)$*'nin sürekli bir öz yapı dönüşümü bir* $r \neq 0$ *için* $x \mapsto rx$ *formundadır.*

Teorem

$(\mathbb{R},+)$*'nin süreksiz bir öz yapı dönüşümü vardır.*

Kanıt

H kümesi $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ üzerinde bir Hamel tabanı olsun. Bu durumda her $\varphi : H \to H$ permütasyonu bir $f_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öz yapı dönüşümüne genişletilebilir. O zaman $|Aut(\mathbb{R},+)| = |Sym(H)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. Önceki teorem gereği $(\mathbb{R},+)$'nin sürekli öz yapı dönüşümlerinin kardinalitesinin $|\mathbb{R}|$ olduğunu biliyoruz.

- Peki süreksiz bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öz yapı dönüşümünü açıkça yazabilir miyiz? Daha spesifik olarak, f Borel olabilir mi?

Ölçüm kuramıyla ilgili bazı temel bilgiler

Ölçüm kuramıyla ilgili bazı temel bilgiler

Teorem (Steinhaus)

$A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue ölçümü pozitif bir küme olsun. Bu durumda $A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ kümesi 0 etrafında bir aralık içerir.

Eş yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir bir öz yapı dönüşümü olsun. Bu durumda f süreklidir.

Eş yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel ölçülebilir bir öz yapı dönüşümü olsun. Bu durumda* f *süreklidir.*

Kanıt

f*'nin* 0 *noktasında sürekli olduğunu göstermemiz yeterli.*

Teorem

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir bir öz yapı dönüşümü olsun. Bu durumda f süreklidir.

Kanıt

f'nin 0 noktasında sürekli olduğunu göstermemiz yeterli. Bir $\epsilon > 0$ alalım. Amacımız $0 \in O \subseteq f^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$ olacak şekilde bir $O \subseteq \mathbb{R}$ açık kümesi bulmak.

Eş yapı dönüşümleri ve Borel kümeler

Teorem

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir bir öz yapı dönüşümü olsun. Bu durumda f süreklidir.

Kanıt

f'nin 0 noktasında sürekli olduğunu göstermemiz yeterli. Bir $\epsilon > 0$ alalım. Amacımız $0 \in O \subseteq f^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$ olacak şekilde bir $O \subseteq \mathbb{R}$ açık kümesi bulmak.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

olmasından ötürü

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} f^{-1} \left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

olur.

Kanıt

Bu durumda öyle $x \in \mathbb{Q}$ *vardır ki* $\mathbf{m}\left(f^{-1}\left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2}\right)\right) > 0$ *olur.*

Kanıt

Bu durumda öyle $x \in \mathbb{Q}$ vardır ki $\mathbf{m}\left(f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right)\right) > 0$ *olur. Ancak bu durumda Steinhaus'un teoremi gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki*

$$(-\delta, \delta) \subseteq f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right) - f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right)$$

olur.

Kanıt

Bu durumda öyle $x \in \mathbb{Q}$ *vardır ki* $\mathbf{m}\left(f^{-1}\left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2}\right)\right) > 0$ *olur. Ancak bu durumda Steinhaus'un teoremi gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki*

$$(-\delta, \delta) \subseteq f^{-1}\left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2}\right) - f^{-1}\left(p - \frac{\epsilon}{2}, p + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

olur. Ancak o zaman

$$0 \in (-\delta, \delta) \subseteq f^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$$

olur. Demek ki f *fonksiyonu* 0 *noktasında sürekli.*

Kanıt

Bu durumda öyle $x \in \mathbb{Q}$ *vardır ki* $\mathbf{m}\left(f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right)\right) > 0$ *olur. Ancak bu durumda Steinhaus'un teoremi gereği öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki*

$$(-\delta, \delta) \subseteq f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right) - f^{-1}\left(p-\frac{\epsilon}{2}, p+\frac{\epsilon}{2}\right)$$

olur. Ancak o zaman

$$0 \in (-\delta, \delta) \subseteq f^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$$

olur. Demek ki f *fonksiyonu* 0 *noktasında sürekli.* $\mathbb{R}$ *bir topolojik grup ve* f *bir grup benzer yapı dönüşümü olduğu için* f *her noktada sürekli olur.*

Bölüm II.

Çizgeler, boyamalar ve kromatik sayılar

- Bir çizge, informal olarak, bir noktalar kümesi ve bu noktalar arasına konuşmuş kenarlardan oluşur.

- Bir çizge, informal olarak, bir noktalar kümesi ve bu noktalar arasına konuşmuş kenarlardan oluşur. Daha formal olarak, V bir küme olmak ve $E \subseteq V \times V$ simetrik yansımaz bağıntı olmak üzere (V, E) ikilisine V üzerinde bir çizge denir.

- Bir çizge, informal olarak, bir noktalar kümesi ve bu noktalar arasına konuşmuş kenarlardan oluşur. Daha formal olarak, V bir küme olmak ve $E \subseteq V \times V$ simetrik yansımaz bağıntı olmak üzere (V, E) ikilisine V üzerinde bir çizge denir.
- (V, E) bir çizge, I bir küme ve $c : V \to I$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $v, w \in V$ için $vEw \Rightarrow c(v) \neq c(w)$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna bir (köşe) boyaması, I kümesine de bu boyamanın renk kümesi denir.

Çizgeler, boyamalar ve kromatik sayılar

- Bir çizge, informal olarak, bir noktalar kümesi ve bu noktalar arasına konuşmuş kenarlardan oluşur. Daha formal olarak, V bir küme olmak ve $E \subseteq V \times V$ simetrik yansımaz bağıntı olmak üzere (V, E) ikilisine V üzerinde bir çizge denir.
- (V, E) bir çizge, I bir küme ve $c : V \to I$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $v, w \in V$ için $vEw \Rightarrow c(v) \neq c(w)$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna bir (köşe) boyaması, I kümesine de bu boyamanın renk kümesi denir.
- (V, E) çizgesinin köşe kromatik sayısı şu şekilde tanımlanır:

$$\chi(V, E) = \min\{|I| : (V, E) \text{ çizgesinin } |I| \text{ renkli bir boyaması vardır.}\}$$

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Teorem

(V, E) *her döngüsünün uzunluğu çift olan bir çizge olsun. Bu durumda* $\chi(V, E) \leq 2$ *olur.*

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Teorem

(V, E) *her döngüsünün uzunluğu çift olan bir çizge olsun. Bu durumda* $\chi(V, E) \leq 2$ *olur.*

Kanıt

I *kümesi* (V, E)*'nin bağlantılı bileşenlerinin kümesi olmak üzere her* $C \in I$ *için bir* $v_C \in C$ *seçelim.*

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Teorem

(V,E) her döngüsünün uzunluğu çift olan bir çizge olsun. Bu durumda $\chi(V,E) \leq 2$ olur.

Kanıt

I kümesi (V,E)'nin bağlantılı bileşenlerinin kümesi olmak üzere her $C \in I$ için bir $v_C \in C$ seçelim. Şimdi aşağıda tanımlanmış $c : V \to \{0,1\}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$c(v) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye tek uzunluklu yol varsa} \\ 1 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye çift uzunluklu yol varsa} \end{cases}$$

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Teorem

(V,E) her döngüsünün uzunluğu çift olan bir çizge olsun. Bu durumda $\chi(V,E) \leq 2$ olur.

Kanıt

I kümesi (V,E)'nin bağlantılı bileşenlerinin kümesi olmak üzere her $C \in I$ için bir $v_C \in C$ seçelim. Şimdi aşağıda tanımlanmış $c : V \to \{0,1\}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$c(v) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye tek uzunluklu yol varsa} \\ 1 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye çift uzunluklu yol varsa} \end{cases}$$

Her bağlantılı bileşenden bir v_C seçtiğimiz için $c(v)$ her zaman tanımlıdır.

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Teorem

(V, E) her döngüsünün uzunluğu çift olan bir çizge olsun. Bu durumda $\chi(V, E) \leq 2$ olur.

Kanıt

I kümesi (V, E)'nin bağlantılı bileşenlerinin kümesi olmak üzere her $C \in I$ için bir $v_C \in C$ seçelim. Şimdi aşağıda tanımlanmış $c : V \to \{0, 1\}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$c(v) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye tek uzunluklu yol varsa} \\ 1 & \text{eğer } v\text{'den bir } v_C\text{'ye çift uzunluklu yol varsa} \end{cases}$$

Her bağlantılı bileşenden bir v_C seçtiğimiz için $c(v)$ her zaman tanımlıdır. Bunun yanı sıra, (V, E) tek uzunlukta bir döngü barındırmadığı için $c(v)$ iyi tanımlıdır ve aynı zamanda bir boyamadır.

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Örnek. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aşağıda tanımlanmış bağıntıyı ele alalım:

$$xEy \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{Z} \text{ varsa ki } |x - y| = 3^n$$

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Örnek. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aşağıda tanımlanmış bağıntıyı ele alalım:

$$xEy \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{Z} \text{ varsa ki } |x - y| = 3^n$$

Bu durumda $(\mathbb{R}, E)$ çizgesi tek uzunlukta bir döngü barındıramaz

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Örnek. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aşağıda tanımlanmış bağıntıyı ele alalım:

$$xEy \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{Z} \text{ varsa ki } |x - y| = 3^n$$

Bu durumda $(\mathbb{R}, E)$ çizgesi tek uzunlukta bir döngü barındıramaz $x_1 E x_2 E \ldots E x_n E x_1$ bir döngü olsun. Bu durumda tanım gereği

$$0 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_1) = \pm 3^{k_1} \pm 3^{k_2} + \cdots \pm 3^{k_n}$$

olurdu.

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Örnek. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aşağıda tanımlanmış bağıntıyı ele alalım:

$$xEy \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{Z} \text{ varsa ki } |x-y| = 3^n$$

Bu durumda $(\mathbb{R}, E)$ çizgesi tek uzunlukta bir döngü barındıramaz $x_1 E x_2 E \ldots E x_n E x_1$ bir döngü olsun. Bu durumda tanım gereği

$$0 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_1) = \pm 3^{k_1} \pm 3^{k_2} + \cdots \pm 3^{k_n}$$

olurdu. Şimdi her tarafı yeterince büyük bir 3^K ile çarparak n tane tek sayının toplamının çift olduğunu görürüz. Demek ki n çift olmalı.

Kromatik sayılarla ilgili basit bir sonuç

Örnek. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde aşağıda tanımlanmış bağıntıyı ele alalım:

$$xEy \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{Z} \text{ varsa ki } |x-y| = 3^n$$

Bu durumda $(\mathbb{R}, E)$ çizgesi tek uzunlukta bir döngü barındıramaz $x_1 E x_2 E \ldots E x_n E x_1$ bir döngü olsun. Bu durumda tanım gereği

$$0 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_1) = \pm 3^{k_1} \pm 3^{k_2} + \cdots \pm 3^{k_n}$$

olurdu. Şimdi her tarafı yeterince büyük bir 3^K ile çarparak n tane tek sayının toplamının çift olduğunu görürüz. Demek ki n çift olmalı. Dolayısıyla $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$.

- V bir standart Borel uzayı ve $E \subseteq V \times V$ simetrik yansımaz bir Borel bağıntı olmak üzere (V, E) ikilisine V üzerinde bir Borel çizge denir.

Borel çizgeler, Borel boyamalar ve Borel kromatik sayı

- V bir standart Borel uzayı ve $E \subseteq V \times V$ simetrik yansımaz bir Borel bağıntı olmak üzere (V, E) ikilisine V üzerinde bir Borel çizge denir.
- (V, E) bir Borel çizge, I bir standart Borel uzayı ve $c : V \to I$ bir Borel fonksiyon olsun. Eğer her $v, w \in V$ için $vEw \Rightarrow c(v) \neq c(w)$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna bir Borel (köşe) boyaması denir.
- (V, E) çizgesinin Borel kromatik sayısı şu şekilde tanımlanır:

$$\chi_B(V, E) = \min\{|I| : (V, E)\text{'nin}|I| \text{ renkli bir Borel boyaması vardır.}\}$$

- Borel eş yapısallık teoremi gereği $\chi_B(V, E) \in \{0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$.

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V, E) *çizgeleri vardır ki* $\chi(V, E) = 2$ *ve* $\chi_B(V, E) = 2^{\aleph_0}$ *olur.*

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V, E) *çizgeleri vardır ki* $\chi(V, E) = 2$ *ve* $\chi_B(V, E) = 2^{\aleph_0}$ *olur.*

Kanıt (Robin Thomas, 1986)

Daha önce tanımladığımız $(\mathbb{R}, E)$ *çizgesini ele alalım.* $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$ *olduğunu biliyoruz. Çelişkiye ulaşmak için diyelim ki bir* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ *Borel boyaması var.*

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V, E) *çizgeleri vardır ki* $\chi(V, E) = 2$ *ve* $\chi_B(V, E) = 2^{\aleph_0}$ *olur.*

Kanıt (Robin Thomas, 1986)

Daha önce tanımladığımız $(\mathbb{R}, E)$ *çizgesini ele alalım.* $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$ *olduğunu biliyoruz. Çelişkiye ulaşmak için diyelim ki bir* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ *Borel boyaması var. Bu durumda öyle bir* $i \in \mathbb{N}$ *vardır ki* $\mathbf{m}(c^{-1}(i)) > 0$ *olur.*

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V, E) çizgeleri vardır ki $\chi(V, E) = 2$ ve $\chi_B(V, E) = 2^{\aleph_0}$ olur.

Kanıt (Robin Thomas, 1986)

Daha önce tanımladığımız $(\mathbb{R}, E)$ çizgesini ele alalım. $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$ olduğunu biliyoruz. Çelişkiye ulaşmak için diyelim ki bir $c : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ Borel boyaması var. Bu durumda öyle bir $i \in \mathbb{N}$ vardır ki $\mathbf{m}(c^{-1}(i)) > 0$ olur. Şimdi Steinhaus'un teoremini uygularsak, öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki

$$(-\delta, \delta) \subseteq c^{-1}(i) - c^{-1}(i)$$

olur.

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V, E) *çizgeleri vardır ki* $\chi(V, E) = 2$ *ve* $\chi_B(V, E) = 2^{\aleph_0}$ *olur.*

Kanıt (Robin Thomas, 1986)

Daha önce tanımladığımız $(\mathbb{R}, E)$ *çizgesini ele alalım.* $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$ *olduğunu biliyoruz. Çelişkiye ulaşmak için diyelim ki bir* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ *Borel boyaması var. Bu durumda öyle bir* $i \in \mathbb{N}$ *vardır ki* $\mathbf{m}(c^{-1}(i)) > 0$ *olur. Şimdi Steinhaus'un teoremini uygularsak, öyle bir* $\delta > 0$ *bulabiliriz ki*

$$(-\delta, \delta) \subseteq c^{-1}(i) - c^{-1}(i)$$

olur. Bir $k \in \mathbb{Z}$ *seçelim öyle ki* $3^k \in (-\delta, \delta)$.

Kromatik sayı vs. Borel kromatik sayı

Teorem

Öyle (V,E) çizgeleri vardır ki $\chi(V,E) = 2$ ve $\chi_B(V,E) = 2^{\aleph_0}$ olur.

Kanıt (Robin Thomas, 1986)

Daha önce tanımladığımız $(\mathbb{R}, E)$ çizgesini ele alalım. $\chi(\mathbb{R}, E) = 2$ olduğunu biliyoruz. Çelişkiye ulaşmak için diyelim ki bir $c : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ Borel boyaması var. Bu durumda öyle bir $i \in \mathbb{N}$ vardır ki $\mathbf{m}(c^{-1}(i)) > 0$ olur. Şimdi Steinhaus'un teoremini uygularsak, öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki

$$(-\delta, \delta) \subseteq c^{-1}(i) - c^{-1}(i)$$

olur. Bir $k \in \mathbb{Z}$ seçelim öyle ki $3^k \in (-\delta, \delta)$. Demek ki $3^k = x - y$ olacak şekilde $x, y \in c^{-1}(i)$ vardır. Ancak xEy ve $c(x) = c(y) = i$ olduğundan çelişki elde ederiz. Demek ki $\chi_B(V,E) > \aleph_0$.

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin.

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin. Öyle $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seçelim ki

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin. Öyle $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seçelim ki s_n uzunluğu n olan bir 0-1 dizisi olsun,

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin. Öyle $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seçelim ki s_n uzunluğu n olan bir 0-1 dizisi olsun, her $x \in 2^{<\mathbb{N}}$ için $x \sqsubseteq s_k$ olacak bir $k \in \mathbb{N}$ bulabilelim.

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin. Öyle $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seçelim ki s_n uzunluğu n olan bir 0-1 dizisi olsun, her $x \in 2^{<\mathbb{N}}$ için $x \sqsubseteq s_k$ olacak bir $k \in \mathbb{N}$ bulabilelim.
- $G_0 = (2^{\mathbb{N}}, G)$ çizgesi şu şekilde tanımlansın.

$$xG_0y \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{N} \text{ varsa ki}$$

$$x \restriction n = y \restriction n = s_n \text{ ve } x(n) = 1-y(n) \text{ ve her } m > n \text{ için } x(m) = y(m)$$

İki şaşırtıcı ikilik

- $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayını, yani $\mathbb{N}$ ile indekslenmiş 0-1 dizilerinin uzayını belirtsin. Öyle $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seçelim ki s_n uzunluğu n olan bir 0-1 dizisi olsun, her $x \in 2^{<\mathbb{N}}$ için $x \sqsubseteq s_k$ olacak bir $k \in \mathbb{N}$ bulabilelim.
- $G_0 = (2^{\mathbb{N}}, G)$ çizgesi şu şekilde tanımlansın.

$$xG_0y \text{ ancak ve ancak öyle bir } n \in \mathbb{N} \text{ varsa ki}$$

$$x \restriction n = y \restriction n = s_n \text{ ve } x(n) = 1-y(n) \text{ ve her } m > n \text{ için } x(m) = y(m)$$

Teorem (Kechris-Solecki-Todorcevic, 1999)

$G = (V, E)$ bir standart Borel uzayı üzerinde $\mathbf{\Sigma}^1_1$ bir çizge olsun. Bu durumda

$$\chi_B(G) \leq \aleph_0 \text{ ya da } G_0 \leq_s G$$

İki şaşırtıcı ikilik

Teorem (Carroy, Miller, Schrittesser, Vidnyánszky, 2021)

$G = (V, E)$ bir standart Borel uzayı üzerinde $\mathbf{\Sigma}^1_1$ bir çizge olsun. Öyle bir L_0 Borel çizgesi vardır ki

$$\chi_B(G) \leq 2 \text{ ya da } L_0 \leq_s G$$

Teorem (Todorcevic, Vidnyánszky, 2021)

Benzer bir sonuç $\chi_B(G) \leq 3, 4, \ldots$ için elde edilemez.

Bazı kaynaklar

Betimsel çizge kombinatoriği son 20 yılda giderek ivme kazanan, hem betimsel kümeler kuramı hem de çizge kuramının tekniklerini barındıran heyecanlı bir alan. Bu konuda okuyabileceğiniz ve bu alandaki temel sonuçları kapsayan bazı kaynaklar:

- A. S. Kechris, S. Solecki, and S. Todorcevic. Borel chromatic numbers. Adv. Math., 141(1):1–44, 1999.
- Alexander S. Kechris and Andrew S. Marks. Descriptive graph combinatorics. http://www.math.caltech.edu/∼kechris/papers/combinatorics20book.pdf, October 2020.