

Bu kitabın amacı fen ve mühendislik alanlarında çalışacak yüksek lisans ve doktora öğrencilerinin, meslek yaşamlarında gerekli olacak matematik altyapısını sağlam bir şekilde oluşturmalarına yardımcı olmaktır.

Kitaptan araştırmacıların da yararlanması hedeflendiğinden her bölüm bağımsız olarak okunabilecek şekilde konusunun geniş bir özeti olarak yazılmıştır.

Konular çok geniş bir okuyucu kitlesi düşünülerek özenle seçilmiş ve ders kitabında olması gerektiği gibi bir bütünlük içinde sunulmuşlardır. Kitabın tarzı, fizikçi ve mühendislerin matematiğe yaklaşımı doğrultusunda formalizmden çok kullanıma ve uygulamaya yöneliktir. Konular, Matematik yöntemlerin çok disiplinli oluşlarını ön plana çıkaracak biçimde örneklerle işlenmektedir.

Bu kitap yüksek lisans ve doktora düzeyinde zorunlu olarak okutulan 'Matematiksel Yöntemler I&II' dersleri için uygun ders kitabı özellikleri taşımaktadır. Kitabın tamamı üç yarı yılda okutulabileceği gibi modüler yapısı sayesinde isteyen öğretim üyeleri kendi konu başlıklarını seçerek ileri lisans, yüksek lisans ve doktora düzeylerinde tek veya iki yarı yıllık dersler de tasarlayabilir.

Bir önceki baskısına göre pek çok değişiklik ve yenilik içeren bu kitapta, her geçen gün yeni ve ilginç uygulama alanları bulan kesirli matematik ve yol integralleri konularında iki yeni bölüm de bulunmaktadır.

İÇİNDEKİLER

- Doğa ve Matematik
- Legendre Denklemi ve Polinomları
- Laguerre Polinomları
- Hermite Polinomları
- Gegenbauer ve Chebyshev Polinomları
- Bessel Fonksiyonları
- Gauss Denklemi ve Çözümleri
- Sturm-Liouville Teorisi
- Kompleks Değişkenler ve Fonksiyonlar
- Kompleks İntegraller, Seriler ve Analitik Süreklilik
- Kesirli Türev ve İntegraller: Diferintegraller
- Sonsuz Seriler
- İntegral Dönüşümler
- Varyasyon Hesabı
- İntegral Denklemler
- Green Fonksiyonları
- Green Fonksiyonları ve Yol İntegralleri

ISBN 975-443-397-6



9 799754 433974

İSTANBUL - 2004

FEN ve MÜHENDİSLİK BİLİMLERİNDE MATEMATİK YÖNTEMLER

Genişletilmiş II. Baskı



SELÇUK BAYIN



DERS KİTAPLARI A.Ş.

FEN ve MÜHENDİSLİK BİLİMLERİNDE
MATEMATİK YÖNTEMLER

Prof. Dr. Selçuk Ş. Bayın
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fizik Bölümü
Ankara TÜRKİYE

Genişletilmiş II. Baskı
(2004)



Ders Kitapları A.Ş.
İstanbul Ankara

Yayıncı : DERS KİTAPLARI ANONİM ŞİRKETİ

Kapak Tasarımı : Selçuk BAYIN

© Tüm yayın hakları Ders Kitapları Anonim Şirketi'ne aittir. Yayıncının ve yazarın izni olmaksızın, hiçbir biçimde ve hiçbir yolla, bu kitabın içeriğinin bir bölümü ya da tümü yeniden üretilemez ve dağıtılamaz.

Genişletilmiş II. Baskı: EYLÜL 2004

DERS KİTAPLARI ANONİM ŞİRKETİ

Merkez: Babıâli Caddesi Nu.: 39 Cağaloğlu - İSTANBUL

Tel. : (0212) 520 04 05 - 520 01 39 (pbx)

Fax : (0212) 513 70 21 - 512 25 88

Matbaa: Kadri Özdemir Caddesi Firuzköy Avcılar - İSTANBUL

Tel. : (0212) 428 02 20 - 428 00 47 (pbx)

Fax : (0212) 428 32 56

İrtibat Bürosu: Fidanlık Mah. Ataç Sok. Nu.: 42/5

Kızılay - ANKARA

www.derskitaplari.com

e-mail : info@derskitaplari.com

ISBN 975-443-397-6

İçindekiler

1 DOĞA ve MATEMATİK	1
1.1 Doğa Yasaları	3
1.2 Matematik ve Doğa	4
1.3 Doğa ve İnsan	4
2 LEGENDRE DENKLEMİ ve POLİNOMLARI	7
2.1 Legendre Denklemi	8
2.1.1 Değişkenlerin Ayrılması Yöntemi	9
2.2 Legendre Denklemine Frobenius Yöntemi ile Seri Çözümü	10
2.3 Legendre Polinomları	14
2.3.1 Legendre Polinomlarının Rodriguez Formülü Tanımı	15
2.3.2 Legendre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu Tanımı	16
2.3.3 Legendre Polinomlarının Tekrarlama Bağlılıkları	17
2.3.4 Legendre Polinomlarının Özel Değerleri	18
2.3.5 Legendre Polinomlarının Bazı İntegralleri	19
2.3.6 Legendre Polinomlarının Tam ve Dik Bir Set Olma Özelliği	20
2.4 Asosiy Legendre Denklemi ve Çözümleri	24
2.4.1 Asosiy Legendre Polinomları	26
2.4.2 Asosiy Legendre Polinomlarının Diklik Özelliği	27
2.5 Küresel Harmonikler	29
2.6 Problemler	32
3 LAGUERRE POLİNOMLARI	33
3.1 Laguerre Denklemi ve Polinomları	35
3.2 Laguerre Polinomlarının Diğer Tanımları	36
3.2.1 Laguerre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu	36
3.2.2 Laguerre Polinomlarının Rodriguez Formülü Tanımı	37
3.3 Laguerre Polinomlarının Dikliği	38
3.4 Laguerre Polinomlarının Diğer Özellikleri	40
3.4.1 Laguerre Polinomlarının Tekrarlama Bağlılıkları	40
3.4.2 Laguerre Polinomlarının Özel Değerleri	40
3.5 Asosiy Laguerre Denklemi ve Polinomları	41
3.6 Asosiy Laguerre Polinomlarının Önemli Özellikleri	42
3.6.1 Asosiy Laguerre Polinomlarının Türetim Fonksiyonu	42
3.6.2 Rodriguez Formülü ve Dik Olmaları	43
3.6.3 Tekrarlama Bağlılıkları	44
3.7 Problemler	45

4 HERMİTE POLİNOMLARI	47
4.1 Hermite Denklemi ve Polinomları	47
4.2 Hermite Polinomlarının Diğer Tanımları	50
4.2.1 Türetim Fonksiyonu	50
4.2.2 Rodriguez Formülü	50
4.3 Hermite Polinomlarının Tekrarlama Bağlıları	51
4.4 Hermite Polinomlarının Dikliği	51
4.5 Problemler	56
5 GEGENBAUER ve CHEBYSHEV POLİNOMLARI	57
5.1 Kozmoloji ve Gegenbauer Polinomları	57
5.2 Gegenbauer Denklemi ve Çözümleri	61
5.2.1 Gegenbauer Polinomlarının Diklik İlişkisi ve Türetim Fonksiyonu	61
5.3 Chebyshev Denklemi ve Polinomları	61
5.3.1 Birinci Dereceden Chebyshev Polinomları	61
5.3.2 Chebyshev ve Gegenbauer Polinomları Bağlantısı	62
5.3.3 İkinci dereceden Chebyshev polinomları	62
5.3.4 Chebyshev Polinomlarının Diklik İlişkisi ve Türetim Fonksiyonları	64
5.4 Problemler	64
6 BESSEL FONKSİYONLARI	65
6.1 Bessel Denklemi	67
6.2 Bessel Denklemi'nin Çözümleri	68
6.2.1 Bessel Fonksiyonları $J_{\pm m}(x)$, $N_m(x)$, $H_m^{(1,2)}(x)$	68
6.2.2 Modifiye Bessel Fonksiyonları $I_m(x)$, $K_m(x)$	70
6.2.3 Küresel Bessel Fonksiyonları $j_n(x)$, $n_n(x)$	70
6.3 Bessel Fonksiyonlarının Diğer Tanımları	71
6.3.1 Türetim Fonksiyonu	71
6.3.2 İntegral Tanımları	71
6.4 Bessel Fonksiyonları için Tekrarlama Bağlıları	72
6.5 Bessel Fonksiyonlarının Kökleri ve Dik Olmaları	72
6.6 Bessel Fonksiyonları ve Sınır Şartları	73
6.7 Problemler	76
7 GAUSS DENKLEMİ ve ÇÖZÜMLERİ	77
7.1 Hipergeometrik Fonksiyonlar	77
7.2 Gauss Denklemi ve Bazı Özel Fonksiyonlar	80
7.3 Konfluent Gauss Denklemi	81
7.4 Problemler	82
8 STURM-LIOUVILLE TEORİSİ	83
8.1 Self-Adjoint Diferansiyel Operatörler	83
8.2 Sturm-Liouville Sistemi	84

8.3 Hermit Operatörleri	85
8.4 Hermit Operatörlerinin Özellikleri	86
8.4.1 Özdeğerlerin Reel Olması	86
8.4.2 Özfonksiyonların Dikliği	87
8.4.3 $\{u_m\}$ Setinin Tam Olması	88
8.5 Genelleştirilmiş Fourier Serileri	89
8.6 Trigonometrik Fourier Serileri	89
8.7 Problemler	91
9 KOMPLEKS DEĞİŞKENLER ve FONKSİYONLAR	93
9.1 Kompleks Cebir	93
9.2 Kompleks Fonksiyonlar	95
9.3 Kompleks Fonksiyonların Türevi ve Analitik Fonksiyonlar	96
9.3.1 Analitik Fonksiyonların Özellikleri	97
9.3.2 Harmonik Fonksiyonların Özellikleri	99
9.4 Haritalama (Mappings)	100
9.4.1 Konformal Haritalama	113
9.4.2 Elektrostatik Problemleri ve Konformal Haritalama	114
9.4.3 Akışkanlar Mekaniği ve Konformal Haritalama	118
9.4.4 Schwarz-Christoffel Dönüşümleri	121
9.5 Problemler	130
10 KOMPLEKS İNTEGRALLER, SERİLER ve ANALİTİK SÜREKLİLİK	131
10.1 Kompleks İntegral Teoremleri	131
10.2 Taylor Serileri	135
10.3 Laurent Serileri	136
10.4 Tekil Noktaların Sınıflandırılması	142
10.5 Residü Teoremi	143
10.6 Analitik Süreklilik	145
10.7 Kompleks Yol İntegrali Tekniği İle Bazı Belirli İntegrallerin Alınması	147
10.8 Gama ve Beta Fonksiyonları	156
10.8.1 Gama Fonksiyonu	156
10.8.2 Beta Fonksiyonu	158
10.8.3 Gama Fonksiyonunun bazı kullanışlı ilişkileri	160
10.8.4 Tamamlanmamış Gama ve Beta Fonksiyonları	161
10.9 Cauchy Temel Değer İntegraller	161
10.10 Bazı Özel Fonksiyonların Kompleks Yol İntegrali Tanımları	165
10.11 Problemler	168
11 KESİRLİ TÜREV ve İNTEGRAL: DİFERİNTEGRALLER	169
11.1 Türev ve İntegralin Ortak yazımı	171
11.1.1 Kullanılan Notasyon ve Tanımlar	171
11.1.2 Bir Fonksiyonun n. Türevi	173

11.1.3	n ardışık integralin genel yazımı	174
11.1.4	Tamsayı Değerler için Türev ve İntegralin Ortak Yazımı	175
11.2	Diferintegral	175
11.2.1	Diferintegralin Grünwald Tanımı	175
11.2.2	Diferintegralin Riemann-Liouville Tanımı	176
11.3	Diferintegralin Diğer Tanımları	180
11.3.1	Cauchy İntegral Formülü Yardımı ile Diferintegral Tanımı	180
11.3.2	Riemann Formülü	184
11.3.3	Diferintegralin Laplace Dönüşümü ile Tanımı	186
11.4	Diferintegrallerin Özellikleri	189
11.4.1	Doğrusallık	189
11.4.2	Homojen Olma özelliği	189
11.4.3	Ölçek Değişikliği	189
11.4.4	Bir Serinin Diferintegrali	190
11.4.5	Diferintegrallerin Birleştirilmesi	190
11.4.6	Leibniz Kuralı	196
11.5	Bazı Fonksiyonların Diferintegralleri	196
11.5.1	Sabit Bir Sayının Diferintegrali	196
11.5.2	$[x - a]$ Fonksiyonunun Diferintegrali	197
11.5.3	$[x - a]^p$ ($p > -1$) Fonksiyonunun Diferintegrali	198
11.5.4	$[1 - x]^p$ Fonksiyonunun Diferintegrali	199
11.5.5	$\exp(\pm x)$ Fonksiyonunun Diferintegrali	199
11.5.6	$\ln(x)$ Fonksiyonunun Diferintegrali	200
11.5.7	Sıkça Kullanılan Yarı-integral ve Yarı-türevler	200
11.6	Diferintegrallerle Matematik Teknikler	200
11.6.1	Diferintegrallerin Laplace Dönüşümü	200
11.6.2	Sıradışı Diferansiyel Denklemler	204
11.6.3	Mittag-Leffler Fonksiyonları	205
11.6.4	Yarı Diferansiyel Denklemler	206
11.6.5	Belirli İntegrallerin Alınmasında Diferintegrallerin Kullanımı	208
11.6.6	Diferintegrallerin Serilerin Toplamlarının Bulunmasında Kullanımı	210
11.6.7	Özel Fonksiyonların Diferintegraller ile İfadeleri	211
11.7	Diferintegrallerin Fen ve Mühendislikte Uygulamaları	211
11.7.1	Sürekli Zamanda Gelişigüzel Dolaşım- CTRW	211
11.7.2	Kesirli Fokker-Planck Denklemleri	214
11.8	Problemler	216
12	SONSUZ SERİLER	217
12.1	Bir Serinin Yakınsaklığı	217
12.2	Mutlak Yakınsak Seriler	218
12.3	Yakınsaklık Testleri	218
12.3.1	Karşılaştırma Testi:	218

12.3.2	Oran Testi:	219
12.3.3	Cauchy Kök Testi:	219
12.3.4	İntegral Testi:	219
12.3.5	Raabe Testi:	220
12.3.6	Cauchy Teoremi:	221
12.3.7	Gauss Testi ve Legendre Serisi:	222
12.3.8	Değişken Seriler	225
12.4	Seriler ile Cebir	226
12.4.1	Çift Toplamlı Serilerde Sıranın Değiştirilmesi	227
12.5	Fonksiyon Serileri	228
12.5.1	Düzgün Yakınsaklık	228
12.5.2	Weierstrass M-Testi	229
12.5.3	Abel Testi	230
12.5.4	Düzgün Yakınsak Olan Serilerin Özellikleri	230
12.6	Taylor Serileri	231
12.6.1	Maclaurin Teoremi	232
12.6.2	Binom Teoremi	232
12.6.3	Birden Fazla Bağımsız Değişkene Bağlı Taylor Serileri	234
12.7	Kuvvet Serileri	234
12.7.1	Kuvvet Serilerinin Düzgün ve Mutlak Yakınsaklıkları	235
12.7.2	Süreklilik	235
12.7.3	Türev ve İntegral	236
12.7.4	Teklik Teoremi	236
12.7.5	Kuvvet Serilerinin Tersinmesi	236
12.8	Serilerin Toplamlarının Bulunması	237
12.8.1	Bernoulli Polinomları ve Özellikleri	238
12.8.2	Euler-Maclaurin Toplama Formülü	239
12.8.3	Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Kullanılarak Serilerin Toplanması	243
12.9	Asimtotik Seriler	247
12.10	Fizikte İraksak Seriler	249
12.10.1	Casimir Etkisi ve Renormalizasyon	250
12.10.2	Casimir Etkisi ve MEMS	252
12.11	Sonsuz Çarpımlar	252
12.11.1	Sin, Cos ve Gama Fonksiyonları	254
12.12	Problemler	256
13	İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER	257
13.1	Diğer Sık Karşılaşılan Dönüşümler	257
13.2	Fourier İntegralinin Çıkarılması	258
13.2.1	Fourier Serisi	258
13.2.2	Dirac-Delta Fonksiyonu İlişkisi	260
13.3	Fourier Dönüşümü ve Ters Fourier Dönüşümü	261
13.3.1	Fourier Sin ve Cos Dönüşümleri	261
13.3.2	Türevin Fourier Dönüşümü	263

13.3.3	Konvolusyon Teoremi	265
13.3.4	Fourier Dönüşümünün Özellikleri	266
13.3.5	Üç Boyutta Fourier Dönüşümü	266
13.4	Fourier Dönüşümü ile İlgili Bazı Teoremler:	266
13.5	Temel Laplace Dönüşümleri	270
13.6	Ters Laplace Dönüşümleri	270
13.6.1	Bazı Temel Laplace Dönüşümleri	272
13.6.2	Laplace Dönüşümlerinde Özel Teoremler	273
13.6.3	\mathcal{L}^{-1} 'in Elde Edilme Yolları	280
13.7	Türevin Laplace Dönüşümü	282
13.7.1	Bir Dönüşümün Türevi	285
13.7.2	n-Boyutta Laplace Dönüşümü	291
13.8	Laplace ve Fourier Dönüşümleri Arasındaki Bağını	291
13.9	Mellin Dönüşümleri	292
13.10	Problemler	293
14	VARYASYON HESABI	295
14.1	Bir Bağımlı ve Bir Bağımsız Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı	296
14.1.1	Euler Denkleminin Uygulamaları	299
14.2	Birden Fazla Bağımlı Değişken Durumu	302
14.3	Birden Fazla Bağımsız Değişken Durumu	303
14.4	Birden Fazla Bağımlı ve Bağımsız Değişken Durumu	305
14.5	Yüksek Mertebeden Türev İçeren Varyasyon Problemleri	306
14.6	İzometrik Problemler ve Kısıtlı Durumlar	308
14.7	Özdeğer Problemi ve Varyasyon Tekniği	312
14.8	Rayleigh-Ritz Yöntemi	317
14.9	Problemler	320
15	İNTEGRAL DENKLEMLER	321
15.1	İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	321
15.2	İntegral ve Diferansiyel Denklemler	322
15.3	Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi	324
15.4	İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi	326
15.5	İntegral Denklemlerin Çözümleri	327
15.5.1	Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi: Neumann Serileri	327
15.5.2	Neumann serisinde Hata Hesabı	329
15.5.3	Ayrılabilir Çekirdek Fonksiyonları Durumunda Çözüm	330
15.5.4	İntegral Denklemlerin İntegral Dönüşümleri ile Çözümü	332
15.6	İntegral Denklemler ve Özdeğer Problemi (Hilbert-Schmidt Teorisi)	334
15.6.1	Özdeğerlerin Reel Olması	334
15.6.2	Özfonksiyonların Dik Olması	335
15.6.3	Özfonksiyonların Tam Olması	335
15.7	Hermit Olmayan Çekirdekler için Özdeğer Problemi	336

15.8	Problemler	338
16	GREEN FONKSİYONLARI	339
16.1	Zamandan Bağımsız Green Fonksiyonları	339
16.1.1	Tek Boyutta Green Fonksiyonları	339
16.1.2	Green Fonksiyonunun Bulunması	340
16.1.3	Tek Boyutta Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu	343
16.1.4	Homojen Olmayan Sınır Şartları için Green Fonksiyonu	345
16.1.5	Özdeğer Problemleri ve Green Fonksiyonları	348
16.1.6	Helmholtz Denkleminin Green fonksiyonu ve Özfonksiyonlar	351
16.1.7	Green Fonksiyonu ve Dirac-Delta Fonksiyonu	352
16.1.8	Süreklilik Limitinde Helmholtz Denklemi için Green Fonksiyonu	353
16.1.9	Üç Boyutlu Green Fonksiyonları: Poisson ve Schrödinger Denklemleri	362
16.2	Zamana Bağlı Green Fonksiyonları	369
16.2.1	Birinci Dereceden Zamana Bağlı Green Fonksiyonları	369
16.2.2	Propagatörler	372
16.2.3	Propagatörlerin Birleştirilmesi	372
16.2.4	Difüzyon Denklemi İçin Green Fonksiyonu	373
16.2.5	Kaynakların Olduğu Durumlar ve Green Fonksiyonu	376
16.2.6	Schrödinger Denklemi İçin Green Fonksiyonu	378
16.2.7	İkinci Dereceden Zamana Bağlı Green Fonksiyonları	379
16.2.8	Skalar Dalga Denklemi için Propagatörler	381
16.2.9	İlerletilmiş (Advanced) veya Geciktirilmiş (Retarded) Green Fonksiyonları	384
16.2.10	Dalga Denklemi için İlerletilmiş veya Geciktirilmiş Green Fonksiyonları	386
16.3	Problemler	388
17	GREEN FONKSİYONLARI ve YOL İNTEGRALLERİ	389
17.1	Brown Hareketi ve Difüzyon Problemi	389
17.2	Brown Hareketine Wiener Yol İntegrali Yaklaşımı	391
17.3	Feynman-Kac Formülü ve Bloch Denkleminin Pertürbatif Çözümü	394
17.4	Feynman-Kac Formülünün Çıkarılışı	396
17.5	Bloch Denkleminde $V(x)$ 'in Yorumu	399
17.6	Yol İntegrallerini Hesaplama Yöntemleri	402
17.6.1	Zaman Dilimleri Yöntemi ile Yol İntegrali Hesabı	403
17.6.2	ESKC Bağıntısı ile Yol İntegrali Hesabı	405
17.6.3	Sonlu Elemanlar Yaklaşımı ile Yol İntegrali Hesabı	406
17.6.4	'Yarı Klasik' Yöntemlerle Yol İntegrali Hesabı	406
17.7	Kuantum Mekanikliği ve Feynman Yol İntegrali Yaklaşımı	411

17.7.1	$V(x) = 0$ Olduğu Durumlarda Schrödinger Denklemi	411
17.7.2	$V(x) \neq 0$ Olduğu Durumlarda Schrödinger Denklemi	413
17.7.3	Kuantum Mekaniğinin Feynman Formülasyonunda Klasik Limit	414
17.8	Feynman Faz Uzayı Yol İntegrali	415
17.9	Momentumun Kuadratik Olduğu Durumlarda Feynman Faz Uzayı İntegrali	416
17.10	Problemler	419
KAYNAKLAR		421
	Kitap ve Süreli Yayınlar	421
	İnternet Kaynakları	423
SÖZLÜK		425
	Türkçeden İngilizceye	425
	İngilizceden Türkçeye	431
DİZİN		437

Şekillerin Listesi

6.1	Düzgün ve esnek bir zincirin küçük salınımları.	67
6.2	J_0 ve N_0 fonksiyonları	74
9.1	Kompleks z -düzleminde bir nokta.	94
9.2	w -düzlemi.	96
9.3	Reel fonksiyonlara haritalama olarak bakmak ilginç olmaz.	100
9.4	Tersinme fonksiyonu çemberleri, çemberlere haritalar.	102
9.5	Tersinme fonksiyonu doğruları, çemberlere haritalar.	104
9.6	Kesik çizgisi dal noktasında son bulur.	106
9.7	Merkezi içermeyen her R bölgesi içinde $w = z^{1/2}$ fonksiyonu tek değerli olacaktır.	107
9.8	Kesik çizgisini her geçişimizde, $w = z^{1/2}$ fonksiyonu bir dal değerinden diğerine geçer.	109
9.9	$z^{1/2}$ fonksiyonu için Riemann tabakaları. Yolumuz tabakaların birleştiğı kesik çizgisini her geçişinde kendimizi öbür tabakada buluruz. Fonksiyonumuz ise, bir dal değerinden ötekine geçer.	110
9.10	$\sqrt{z^2 - 1}$ için kesik çizgileri.	112
9.11	$\sqrt{z^2 - 1}$ için kesik çizgilerinin değişik bir seçimi.	112
9.12	Konformal haritalama.	113
9.13	Hiperbolik kesiti olan iki iletken levha.	114
9.14	w -düzleminde eşpotansiyel ve elektrik alan çizgileri.	115
9.15	Kesiti daire olan iki iletken.	116
9.16	Kesiti daire olan iki iletkenin w -düzlemindeki durumu.	117
9.17	h -yüksekliğinde bir engel etrafından akış: Hız potansiyelini bulacağımız alan taranmıştır.	119
9.18	z -düzleminde w -düzlemine geçiş.	121
9.19	w ve z -düzlemlerinde akım çizgileri (streamlines).	122
9.20	Schwarz-Christoffel dönüşümü, bir poligonun içini w -düzleminin üst yarısına haritalar.	123
9.21	Örnek 12'de haritalamak istediğimiz bölüm.	124
9.22	İç tarafı $z_3 \rightarrow \infty$ limitinde, örnek 12'de istediğimiz alana giden poligon.	124
9.23	Yarı sonsuz kapasitör problemi.	126
9.24	z_3 nokasının limiti.	127
9.25	Yarı sonsuz paralel kapasitör için w -düzlemi.	127
9.26	Yarı sonsuz kapasitör problemi için \bar{z} -düzlemi.	128

9.27 Yarı sonsuz paralel kapasitör için eşpotansiyeller. . .	129
9.28 İki boyutlu potansiyel problemi.	130
10.1 Cauchy-Goursat teoreminin yolu.	132
10.2 Cauchy integral teoreminin yolu.	133
10.3 Cauchy integral teoreminde yolun değiştirilmiş hali. . .	134
10.4 Taylor serileri.	135
10.5 Laurent serileri halka şeklinde bir bölgede geçerlidir. .	137
10.6 Laurent serilerinin yolu.	138
10.7 $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ için, $ z < 1$ bölgesinde Taylor serisini yazarız. .	139
10.8 $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ için, $ z > 1$ bölgesinde Laurent serisini yazarız. .	140
10.9 Rezidü teoremi.	144
10.10 Rezidü teoreminin ispatında kullandığımız yol. . . .	145
10.11 Analitik süreklilik.	147
10.12 Analitik sürekliliğin sağlanması.	148
10.13 II. tip integrallerde kullandığımız yol.	151
10.14 Örnek 6'da kullanılan yol.	152
10.15 $R \rightarrow \infty$ limitinde C yolu.	153
10.16 Üst limit hesabı.	154
10.17 IV. tip integrallerde kullanılan yol.	155
10.18 Cauchy temel değer integralinin yolu.	162
10.19 Cauchy temel değer integral hesabı için bir başka yol. .	164
10.20 Örnek 9 'da I_1 için kullanılan yol.	165
10.21 I_2 integralinin yolu.	166
10.22 Schlöfli integral formülünün yolu.	167
10.23 Beşinci problemdeki integralin yolu.	168
11.1 Cauchy integral formülünün C yolu.	181
11.2 Diferintegral formülündeki C yolu.	182
11.3 Diferintegral formülündeki C' kapalı yolu.	182
11.4 \oint_{L_1} , \oint_{L_2} ve \oint_{C_0} integralleri yolu.	183
11.5 Mittag-Leffler fonksiyonları	205
11.6 Gelişigüzel dolaşım ve CTRW	213
11.7 Gelişigüzel dolaşım ve CTRW teorisinde olasılık dağılımı. .	214
11.8 Fokker-Planck denkleminin çözümü	215
12.1 Bir serinin alttan ve üstten sınırlandırılması.	220
12.2 Mutlak yakınsaklık kavramı çok önemlidir.	229
12.3 Kompleks yol integrali kullanılarak seri toplamları bulunabilir.	243
13.1 N=5 için dalga treni.	262
13.2 $g_s(\omega)$ fonksiyonu.	263
13.3 Boş fonksiyon.	271
13.4 Birim basamak fonksiyonu.	272

13.5 Dünyanın serbest dönme hareketi.	284
13.6 Birbirine bir yayla bağlı iki sarkaçın salınımı	290
14.1 Varyasyon hesaplarında bulmaya çalıştığımız yol etrafında sapmalar ve bunların J integraline etkisi hesaplanır.	296
14.2 Uzayda iki çember arasında sabun köpüğü yüzeyi.	300
14.3 Bir çubuğun veya kirişin şekli.	307
14.4 $\sin(\pi x)$ yerine yaklaşık olarak $x(1-x)$ kullanabiliriz. . .	314
16.1 $(x-x') > 0$ durumunda kullanılan yol.	355
16.2 $(x-x') < 0$ durumunda kullanılan yol.	356
16.3 Durum II'de kullanılan yol.	357
16.4 Durum III'de kullanılan yol.	358
16.5 Durum IV'de kullanılan yol.	359
16.6 Durum V'de kullanılan yol.	360
16.7 Harmonik osilatör probleminin yolu.	361
16.8 Gauss eğrisi.	376
17.1 Sabitlenmiş Wiener ölçümünde kullanılan yollar.	392
17.2 Koşulsuz Wiener ölçümünde kullanılan yollar.	394
17.3 Zamanda dilimler yönteminde kullanılan yollar.	403
17.4 "Yarı klasik " yöntemde yol ve sapma fonksiyonu.	408
17.5 Kompleks t-düzleminde $-\frac{\pi}{2}$ kadar bir dönme	413

*Annem Nermin Bayın, babam Ömer Bayın
ile
Adalet ve Sumru'ya*

ÖNSÖZ

İlk baskısı 2000 yılında yapılmış olan bu kitap, yaklaşık olarak son 15 yıldır ODTÜ Fizik Bölümünde vermiş olduğum 'Fizikte Matematik Yöntemler I & II' derslerinin notlarını temel almakla birlikte, öğrencilik yıllarımdan başlayan bilinçli bir birikimin ürünüdür. İngilizce olarak hazırlanıp verilmiş olan bu derslerin kitaba dönüşmesi de doğal olarak İngilizce yazıp yurtdışında bastırmak olacaktı. Ancak, ülkemizdeki Türkçe kaynak açığını gözönüne alınca, Türkçesine öncelik verdim. Kendi içinde bilimsel değer yargularını henüz yerleştirememiş yasa devleti olmak (kitabına uydurmak) ile hukuk devleti olmak arasındaki farkın hala anlaşılmadığı ülkemizde, kısa vadede hiçbir şekilde karşılığını alamayacağımı bile bile böylesine emek ve bilgi yoğun bir projeye kalkışmak şüphesiz ki cesaret ve özveri ister. Ancak, ülkem insanına ve geleceğine inanç ve sevgi olmadan da yapılacak iş değildir. Kitabın Türkçe eğitim veren kurumların öğrencileri kadar, İngilizce eğitim veren kurumların öğrencileri tarafından da kullanılması (çoğunlukla fotokopilerinin de olsa) benim için bu kararın ne kadar 'yerinde' olduğunun ilk belirtileridir. Kitabın ikinci ve genişletilmiş baskısı ise, ikinci bir kitap yazmaya eşdeğer bir çabanın ürünü olmuştur. Kitabın içeriği ve baskı kalitesinin yükseltilmesi için bütün olanaklar zorlanmış, keyifle okunacak bir eserin ortaya çıkmasına çalışılmıştır.

Bu baskıda Kesirli Matematik ve Yol İntegralleri gibi, fizik ve mühendislik bilimlerinde her geçen gün yeni ve ilginç uygulamaları çıkan iki önemli konuda iki yeni bölüm ilave edilmiştir. Kitabın kullanımını kolaylaştırmak için, denklemlerin yazımından konuların alt başlıklar altında organizasyonuna kadar sayısız değişiklik yapılmıştır. Sturm-Liouville teorisi ve İntegral denklemlerle ilgili bölümler yeniden tasarlanıp yazılmış ve kitabın akıcılığını engelleyen durumlar olabildiğince ortadan kaldırılmıştır. Geçen zaman içinde farkına vardığımız yazım hataları düzeltilmiştir. Kitabın dilinden denklemlerin göze hoş gelecek biçimde yazımlarına kadar özen gösterilmiş ve yapılan değişikliklerin sonucunda da sayfa adedi 317'den 464'e çıkmıştır. Bu yaşayan ve gelişmekte olan bir projedir. Tamamlanması için ise, büyük bir olasılıkla bir baskı daha gerekecektir. Kitap pek çok yönü ile mesajlar ve dersler içermektedir. Her ne kadar başta Türkçe kaynak açığı dediysek de hedefi çok daha kapsamlıdır. Umarım yolu açık olur.

Selçuk Ş. Bayın
bayin@metu.edu.tr
Ankara-TÜRKİYE
Ağustos 2004

TEŞEKKÜRLER

Bu eserin hazırlanışı sırasında pek çok kişinin görüş ve desteği yararlı olmuştur. Kesirli matematik ve yol integralleri ile ilgili bölümler yazılırken Prof. Dr. N.K. Pak'ın değerli görüş ve kritikleri, Prof. Dr. M. Durgut ile yapmış olduğumuz sohbetler sonucu ortaya çıkan fikirler ise, her zaman çok yararlı ve yol gösterici olmuşlardır. Prof. Dr.Y. Elerman ve Prof. Dr. Atalay Karasu ise, kitabın tamamını titizlikle okuyarak hataların en aza indirilmesinde çok büyük yardımları olmuştur. Teknik terimlerin Azerice karşılıkları için Prof. Dr. T. Aliyev'e teşekkür ederim. Ayrıca, Prof. Dr. M. Abak, Doç. Dr. Ç. Tuncay, Doç. Dr. Ayşe Karasu ve Y. Doç. Dr. B. Tekin'e de değerli görüşleri için teşekkür ederim. Bölüm başkanımız Prof. Dr. Sinan Bilikmen'e bu eserin oluşması ve yazımı aşamasında bana gerekli ortamın sağlanması konusunda verdiği desteğe teşekkür ederim. Bu arada öğrencilerim de dahil olmak üzere, pek çok kişinin bana dolaylı ya da dolaysız yoldan yardımcı olmuştur, hepsine tekrar teşekkür ederim.

KİTAP HAKKINDA

Fen bilimlerinde temel matematik eğitimi genelde üç ana kısma ayrılır. Lisans eğitiminin giriş bölümü olarak adlandıracağımız ilk üç yıl, öğrenciler matematik (Calculus), ileri matematik (Advanced calculus-Kaplan), kompleks analiz (Churchill), diferansiyel denklemler (Ross), lineer cebir veya giriş düzeyinde matematiksel fizik (Hildebrand veya Boas) derslerini alırlar. Daha sonra da ileri lisans denilen 4. sınıf düzeyinde ve sonunda da lisansüstü düzeyde yüksek lisans ve doktora dersleri gelir. Orta Doğu Teknik Üniversitesinde ise, 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler I & II' dersleri; biri yüksek lisans ve diğeri de doktora dersi olmak üzere iki yarı yılda verilmektedir. Dünyada bir çok üniversitede bu iki ders yüksek lisans ve doktora öğrencilerine de zorunlu olmakla birlikte, ileri lisans dersi olarak 400'lü kodlarla da açılabilir.

Bu kitabın hedef kitlesi, fen eğitimlerinin ilk üç yılında yukarıda adlarını verdiğimiz dersler ve kitaplar düzeyinde bir matematik olgunluğa erişmiş 4.sınıf öğrencileri ile araştırmacı olmaya ilk adımlarını atmış yüksek lisans ve doktora düzeyindeki fizik ve mühendislik öğrencileridir. Amacı ise, öğrencilerin meslek yaşamlarında gerekli olacak matematik altyapıyı, sağlam bir şekilde oluşturmalarına yardımcı olmaktır. Kitaptan araştırmacıların da yararlanması hedeflendiğinden her bölüm bağımsız olarak da okunabilecek şekilde yazılmıştır.

Konular çok geniş bir okuyucu kitlesinin ihtiyaçları göz önüne alınarak dikkatle seçilmiş ve ders kitabında olması gerektiği gibi, bir bütünlük içerisinde sunulmuşlardır. Kitabın üslubu, fizikçi ve mühendislerin matematiğe yaklaşımı doğrultusunda formalizmden çok kullanıma ve uygulamaya yöneliktir. Bir zamanlar klasik ve kuantum fiziğinin alt yapısını oluşturmak üzere sadece fizik bölümlerinde verilen bu dersler, çok disiplinli alanların ve dolayısıyla de talebin artması ile artık mühendislik ve matematik bölümleri tarafından da tasarlanıp verilen popüler dersler olmuşlardır.

Bölümlerde verilen örnekler özenle seçilmiş olup; konuların işlenişinde ve kavramların tanıtılmasında önemli rol oynarlar. Her bölümün arkasında sınırlı sayıda problem verilmiştir. Bu problemler ve örneklerden meraklı öğrenciler kolaylıkla başka problemler türetebilirler. Araştırmacı olmak isteyenler için tavsiye ettiğimiz yöntem de budur. Konular işlenirken kuantum mekaniği, termodinamik, mekanik ve elektromanyetik gibi çok değişik alanlardan örnekler seçilmiştir. Konuların fizik ve mühendislik açısından özellik gösteren kısımları çok geniş bir okuyucu kitlesi düşünülerek herkesin anlayabileceği tarzda yazılmıştır.

Kitabın en önemli özelliklerinden bir tanesi de denklemler kalıplar halinde algılandığında okunabilir bir matematik kitabı olmasıdır. Bu benim ders verme tarzımın da bir parçasıdır. Öğrencilerden ilk aşamada beklenen (ders-te veya kitabı ilk okuyuşta) denklemlerin ayrıntılarına girmeden, kavramsal çerçeveyi oturtmalarıdır. İkinci aşama ise, denklemlerin bizzat içlerine girip ayrıntıların anlaşılmasıdır. İşte bu noktada anlaşılmayan konular anlaşıl-

maya başlanacak, ortaya yeni sorular ve o sorulara da cevaplar aranırken yeni problemler ve fikirler çıkacaktır.

Bu kitabın, ders kitabı olmanın yanında bir amacı da çok disiplinli alanlarda çalışanlara karşılaşacakları problemleri çözmeye yardımcı olacak yöntemleri sunmaktır.

Kitabın kullanımını kolaylaştırmak için, bölümler olabildiğince alt başlıklar yardımı ile düzenlenmiştir. Okura önerimiz, kitabın önce içindekiler kısmı ile tanışması ve kitabın bütününe hakim olmasıdır. Elimizden geldiğince arı bir Türkçe kullanmaya dikkat ettik. Ancak, kitaptan Türkçe eğitim veren üniversitelerimiz ile İngilizce eğitim veren kurumların öğrencilerinin de yararlandığını görünce, yerleşmiş bazı teknik kavramların Türkçeleştirilmesi konusunda fazla da ısrarcı olmadık. Anlaşılabilirliği her zaman ön plana aldık ve gerek Türkçe ve gerekse İngilizce eğitim almış kişiler arasında kopukluk yaratmamaya çalıştık. Sonuçta İngilizce eğitim alsalar da bu kişilerin çoğu yarın Türkçe eğitim veren kurumlarda çalışacaklar, Türkçe eğitim alanlar da İngilizce yayın yapıp, İngilizce dergileri takip edeceklerdir. Gerektiği zaman okuyucuya yardımcı olmak üzere, kitabın arkasına bir de Türkçeden İngilizceye ve İngilizceden Türkçeye sözlük ekledik. İlk sütun kitapta kullandığımız kelimelerden oluşmakta ve karşılarında İngilizce karşılıkları verilmektedir. Üçüncü sütun ise, varsa başkaları tarafında kullanılmış veya diğer Türkçe kelimeler ve dördüncü sütunda da bulabildiğimiz kadarı ile Azerice karşılıkları vardır. Kaynaklar bölümüne elektronik ortamda yararlanılabilecek, eğitim ve araştırma amaçlı siteler de eklenmiştir.

KİTABIN ÖZETİ

Giriş bölümünden sonra gelen ilk beş bölümde genelde karşılaşılan özel fonksiyonlar uygulama alanları ile birlikte ayrıntılı bir biçimde anlatılır.

Yedinci bölümde fizik ve mühendislikte karşılaşılan ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin ve çözümlerinin ki bunlara özel fonksiyonlar da dahildir, Gauss hipergeometrik denklemi ve fonksiyonları cinsinden parametrik bir şekilde nasıl yazılabileceği gösterilir.

Sekizinci bölümde özel fonksiyonlar arasında gördüğümüz benzerlikleri, Sturm-Liouville teorisinin çatısı altında diferansiyel operatörler için özdeğer problemi olarak sistemli bir şekilde inceleriz.

Dokuz ve onuncu bölümler ise, kompleks analiz yöntemlerinin fizik ve mühendislikte uygulamalarını anlatır. Analitik fonksiyonlar teorisi, haritalamalar, Schwarz-Christoffel dönüşümleri ve bunların ısı transferi, elektromanyetik ve akış problemlerine uygulamaları, seriler, analitik süreklilik ile bazı belirli integrallerin kompleks yöntemlerle alınması işlenen ilginç konular arasındadır.

Onbirinci bölüm, kitabın özel bölümlerinden bir tanesidir ve kesirli türev ve integrallerin işlendiği kesirli matematiğe ayrılmıştır. Tarihi açısından oldukça eski olan bu ilginç konu, son zamanlarda gittikçe artan bir şekilde fizik ve mühendislik alanlarında çalışan araştırmacıların gündemine

girmiştir. Bu bölümde kesirli matematiğin temel özellikleri, bazı uygulamaları ve teknikleri anlatılmaktadır. Öğrenciler kadar bu konuyu merak eden araştırmacılar için de kapsamlı bir özet olan bu bölüm, kesirli matematiğe uygun bir başlangıç noktası olacaktır.

Onikinci bölümde uygulamalar açısından çok önemli olan seriler kapsamlı bir biçimde incelenir. Önce serilerin yakınsalıklarının nasıl kontrol edileceği ve eğer yakınsaklarsa, toplamlarının nasıl bulunacağı anlatılır. Asimtotik seriler, sonsuz çarpımlar ile fizikte karşılaşılan bazı iraksak serilerden nasıl anlamlı sonuçlar çıkarılabileceği de işlenen diğer ilginç konular arasındadır.

Onüçüncü bölümde önce genel integral dönüşümleri ve sonra da kapsamlı bir biçimde Fourier ve Laplace dönüşümleri uygulama alanları ile anlatılır.

Ondördüncü bölümde varyasyon hesaplarının türleri, özdeğer ve özfonksiyonların yaklaşık olarak varyasyon tekniği ile nasıl bulunabileceği gösterilir.

Onbeşinci bölüm, İntegral denklemlere ayrılmıştır. İntegral denklemlerin sınıflandırılmasından sonra, çözüm teknikleri ve Hilbert-Schmidt teorisi adı altında integral operatörler için özdeğer problemi işlenir.

Onaltıncı bölüm, fen bilimlerinde çok geniş kullanım alanı olan ve kitabın geri kalan bölümlerinde gördüğümüz bir çok yöntemin kullanıldığı bir bölümdür. Zamandan bağımsız ve zamana bağlı olarak iki başlıkta inceleyeceğimiz Green fonksiyonlarının özellikleri, sınır şartları, bulunuşları ve özdeğer problemleri ile ilgileri işlenen ilginç konular arasındadır.

Onyedinci bölüm kitabın bir başka özel sayılması gereken yol integralleri ile ilgili bölümüdür. Fizik ve mühendislikte yoğun uygulamaları olan bu ilginç tekniği, önce doğadaki pek çok olayın prototipini oluşturan Brown hareketine uygulaması ile tanıtacağız. Sonra da Feynman yol integrali adı altında kuantum mekaniğine uygulamalarını göreceğiz.

DERS ÖNERİLERİ

Kitabın tamamını iki yarı yılda bitirilemeyecek kadar çok konu içermektedir. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fizik bölümünde yüksek lisans programı için zorunlu ders olarak 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler I' dersinde ilk 10 bölüm okutulmaktadır. Bunun devamı olan ve doktora programının zorunlu dersi olan 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler II' dersinde ise, 12-16. bölümler okutulur.

İleri lisans düzeyi olan 4. sınıfta, ilk yedi bölüm özel fonksiyonlar üzerine bir ders için başarı ile kullanılmaktadır. Bu ders özellikle master ve doktora devam edecek öğrenciler için alacakları Jackson düzeyinde elektromanyetik ve Mertzbacher düzeyinde kuantum derslerine çok yardımcı olmaktadır.

Ayrıca, 12-16. bölümlerden uygun alt başlıklar seçilerek tek yarı yıllık bir başka ileri lisans dersi için de kullanılmıştır.

14-17. bölümler yüksek lisans/doktora düzeyinde Green fonksiyonları üzerine tek yarı yıllık bir ders olarak kullanılabilir.

Kesirli matematik konusundaki 11. bölüm, öğrencilere verilecek projelerle desteklenerek tek başına yarı yıllık seçmeli bir ders olarak verilebilir. Kay-

naklar arasında verdiğimiz internet sitelerinden projeler için yararlanılabilir.

Bunların dışında olarak da bazı bölüm ve alt bölümler seçilerek, gerek ileri lisans ve gerekse yüksek lisans/doktora düzeylerinde tek veya iki yarı yıllık dersler tasarlamak mümkündür.